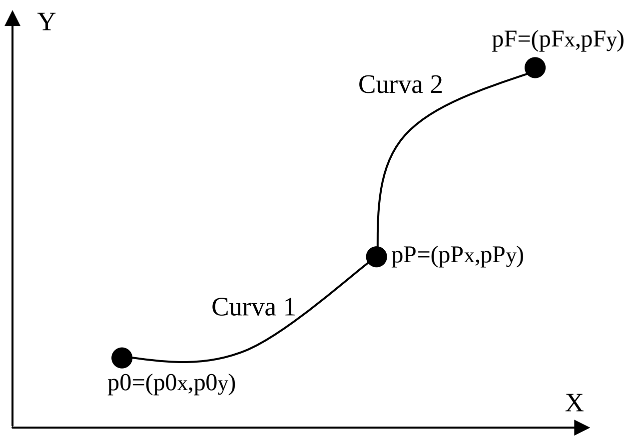
Ejemplo de planificación de caminos

Cálculo de los coeficientes de dos polinomios para que pasen por un punto inicial, p0, final, pF, y uno intermedio pP. En el tiempo previsto y con una trayectoria suave.



Hay 3 datos para cada punto inicial y final (posición, velocidad y aceleración), el punto intermedio y continuidad (posición, velocidad y aceleración) en el punto intermedio. Esto quiere decir que se pueden despejar 10 incógnitas. Luego tendremos dos polinomios de 5 coeficientes cada uno (grado 4).

Como hay que especificar los polinomios en función del tiempo, para la representación en dos dimensiones tendremos dos problemas a resolver: uno para la coordenada x(t) y otro para la coordenada y(t). La composición de ambos nos dará la curva en el plano.

Curva 1:

$$x_1(t) = a_{41}t^4 + a_{31}t^3 + a_{21}t^2 + a_{11}t + a_{01}$$

$$y_1(t) = b_{41}t^4 + b_{31}t^3 + b_{21}t^2 + b_{11}t + b_{01}$$

Curva 2:

$$x_2(t) = a_{42}t^4 + a_{32}t^3 + a_{22}t^2 + a_{12}t + a_{02}$$

$$y_2(t) = b_{42}t^4 + b_{32}t^3 + b_{22}t^2 + b_{12}t + b_{02}$$

Datos conocidos para despejar los coeficientes (incógnitas):

Para la variable x:

Punto 0:

Posición: $p0_x = a_{41}t_0^4 + a_{31}t_0{}^3 + a_{21}t_0{}^2 + a_{11}t_0 + a_{01}$

Velocidad: $v0_x = 4a_{41}t_0^3 + 3a_{31}t_0{}^2 + 2a_{21}t_0 + a_{11}$

Aceleración: $a0_x = 4 \cdot 3 \cdot a_{41}t_0^2 + 3 \cdot 2 \cdot a_{31}t_0 + 2a_{21}$

Punto F:

Posición: $pF_x = a_{42}t_F^4 + a_{32}t_F{}^3 + a_{22}t_F{}^2 + a_{12}t_F + a_{02}$

Velocidad: $vF_x = 4a_{42}t_F^3 + 3a_{32}t_F{}^2 + 2a_{22}t_F \ + a_{12}$

Aceleración: $aF_x = 4\cdot 3\cdot a_{42}t_F^2 + 3\cdot 2\cdot a_{32}t_F \ + 2a_{22}$

Punto P:

Posición: $pP_x = a_{42}t_p^4 + a_{32}t_p{}^3 + a_{22}t_p{}^2 + a_{12}t_p + a_{02}$

Cont. Posición $a_{42}t_p^4 + a_{32}t_p{}^3 + a_{22}t_p{}^2 + a_{12}t_p + a_{02} = a_{41}t_p^4 + a_{31}t_p{}^3 + a_{21}t_p{}^2 + a_{11}t_p + a_{01}$

Cont. Velocidad: $4a_{42}t_p^3 + 3a_{32}t_p{}^2 + 2a_{22}t_p \ + a_{12} = 4a_{41}t_p^3 + 3a_{31}t_p{}^2 + 2a_{21}t_p \ + a_{11}$

Cont. Aceleración: $4\cdot 3\cdot a_{42}t_p^2 + 3\cdot 2\cdot a_{32}t_p \ + 2a_{22} = 4\cdot 3\cdot a_{41}t_p^2 + 3\cdot 2\cdot a_{31}t_p \ + 2a_{21}$

Lo que da lugar a las 10 ecuaciones necesarias para despejar las 10 incógnitas.

En forma matricial quedaría:

$$\begin{bmatrix} p0_x \\ v0_x \\ a0_x \\ pF_x \\ vF_x \\ aF_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ pP_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0^4 & t_0^3 & t_0^2 & t_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4t_0^3 & 3t_0^2 & 2t_0^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\cdot 3t_0^2 & 3\cdot 2t_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_F^4 & t_F^3 & t_F^2 & t_F & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t_F^3 & 3t_F^2 & 2t_F & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\cdot 3t_F^2 & 3\cdot 2t_F & 2 & 0 & 0 \\ t_p^4 & t_p^3 & t_p^2 & t_p & 1 & -t_p^4 & -t_p^3 & -t_p^2 & -t_p & -1 \\ 4t_p^3 & 3t_p^2 & 2t_p & 1 & 0 & -4t_p^3 & -3t_p^2 & -2t_p & -1 & 0 \\ 4\cdot 3t_p^2 & 3\cdot 2t_p & 2 & 0 & 0 & -4\cdot 3t_p^2 & -3\cdot 2t_p & -2 & 0 & 0 \\ t_p^4 & t_p^3 & t_p^2 & t_p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{41} \\ a_{31} \\ a_{21} \\ a_{11} \\ a_{01} \\ a_{42} \\ a_{32} \\ a_{22} \\ a_{12} \\ a_{02} \end{bmatrix}$$

De igual forma se realiza la misma operación para la componente y:
Para la variable y:

Punto 0:

Posición: $p0_y = b_{41}t_0^4 + b_{31}t_0{}^3 + b_{21}t_0{}^2 + b_{11}t_0 + b_{01}$

Velocidad: $v0_y = 4b_{41}t_0^3 + 3b_{31}t_0{}^2 + 2b_{21}t_0 \ + b_{11}$

Aceleración: $v0_y = 4\cdot 3\cdot b_{41}t_0^2 + 3\cdot 2\cdot b_{31}t_0 \ + 2b_{21}$

Punto F:

Posición: $pF_y = b_{42}t_F^4 + b_{32}t_F{}^3 + b_{22}t_F{}^2 + b_{12}t_F + b_{02}$

Velocidad: $vF_y = 4b_{42}t_F^3 + 3b_{32}t_F{}^2 + 2b_{22}t_F \ + b_{12}$

Aceleración: $vF_y = 4\cdot 3\cdot b_{42}t_F^2 + 3\cdot 2\cdot b_{32}t_F \ + 2b_{22}$

Punto P:

Posición: $pP_y = b_{42}t_p^4 + b_{32}t_p{}^3 + b_{22}t_p{}^2 + b_{12}t_p + b_{02}$

Cont. Posición $b_{42}t_p^4 + b_{32}t_p{}^3 + b_{22}t_p{}^2 + b_{12}t_p + b_{02} = b_{41}t_p^4 + b_{31}t_p{}^3 + b_{21}t_p{}^2 + b_{11}t_p + b_{01}$

Cont. Velocidad: $4b_{42}t_p^3 + 3b_{32}t_p{}^2 + 2b_{22}t_p \ + b_{12} = 4b_{41}t_p^3 + 3b_{31}t_p{}^2 + 2b_{21}t_p \ + b_{11}$

Cont. Aceleración: $4\cdot 3\cdot b_{42}t_p^2 + 3\cdot 2\cdot b_{32}t_p \ + 2b_{22} = 4\cdot 3\cdot b_{41}t_p^2 + 3\cdot 2\cdot b_{31}t_p \ + 2b_{21}$