Seminární práce č. 1
Matematika pro kartografy

G. Kyncl

8. 4. 2020

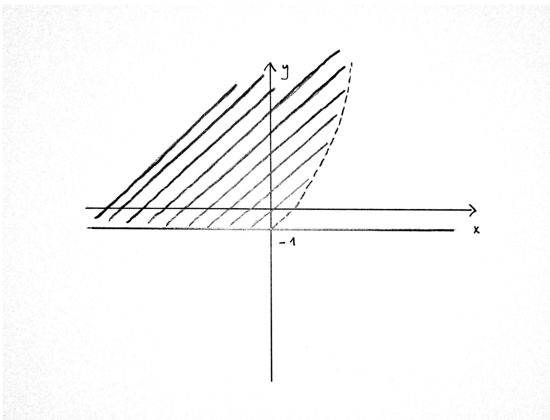
Příklad č. 1

ZADÁNÍ. Je dána funkce $f(x,y) = log(\sqrt{y+1} - x)$.

(a) Najděte definiční obor D funkce f a nakreslete jej.

ŘEŠENÍ. Definiční obor $D(f)$ funkce je následující:

$$D(f) = \{y \geq -1 \ \wedge \ x \leq \sqrt{y+1}\}$$



(b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$.

ŘEŠENÍ. Gradient funkce v obecném bodě je určen jako vektor parciálních derivací. Zapsáno následovně:

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \ = \ (f_x, f_y) \tag{1}$$

Výpočet parciálních derivací:

$$f_x = -\frac{1}{\sqrt{y+1} - x \cdot \ln(10)} \tag{2}$$

$$f_y = \frac{1}{2}(y+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y+1} - x \cdot \ln(10)} = \frac{1}{\left(2(y+1) - 2x\sqrt{y+1}\right) \cdot \ln(10)} \tag{3}$$

Gradient funkce f má v obecném bodě tedy podobu:

$$\nabla f(x,y) = \Big(- \frac{1}{\sqrt{y+1} - x \cdot \ln(10)}; \frac{1}{\left(2(y+1) - 2x\sqrt{y+1}\right) \cdot \ln(10)} \Big) \tag{4}$$

Konkrétní hodnota gradientu v bodě $[0;0]$ je získána dosazením do vztahu 4:

$$\nabla f(0;0) = \Big(-1; \frac{1}{2\ln(10)} \Big) \tag{5}$$

(c) Ukažte, že funkce f je v bodě $[0;0]$ diferencovatelná . Určete v tomto bodě diferenciál a rovnici tečné roviny.

ŘEŠENÍ. Diferenciál df v obecném bodě je určen následovně:

$$df = f_x dx + f_y dy \tag{6}$$

Dosazením parciálních derivací uvedených výše (2, 3) získáme:

$$df = -\frac{1}{\sqrt{y+1} - x \cdot \ln(10)} dx + \frac{1}{\left(2(y+1) - 2x\sqrt{y+1}\right) \cdot \ln(10)} dy \tag{7}$$

Diferenciál v bodě $[0;0]$ získáme dosazením hodnot parciálních derivací v daném bodě do vztahu 7:

$$df = -dx + \frac{1}{2\ln(10)} dy \tag{8}$$

Rovnice tečné roviny v bodě $[x_0, y_0]$ je určena z následujícího vztahu:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(dx,dy) \tag{9}$$

Dosazením funkční hodnoty funkce f v bodě $[0;0]$ a diferenciálu v tomto bodě ze vztahu 8 získáme:

$$f(x,y) = -dx + \frac{1}{2\ln(10)} dy, \tag{10}$$

což lze zapsat jako:

$$f(x,y) = -1(x - x_0) + \frac{1}{2\ln(10)}(y - y_0) \tag{11}$$

Po dosazení bodu $[0; 0]$ za $[x_0; y_0]$ získáme:

$$f(x, y) = -x + \frac{1}{2\ln(10)}y \tag{12}$$

Drobnou úpravou vztahu 12 získáme rovnici tečné roviny (pozn. namísto $f(x, y)$ pro přehlednost zapsáno z):

$$-x + \frac{1}{2\ln(10)}y - z = 0 \tag{13}$$

(d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$

ŘEŠENÍ. Přibližnou hodnotu pomocí lineární aproximace získáme ze vztahu 9, resp. 13.

$$f(x, y) = -f(x_0, y_0) - 1(x - x_0) + \frac{1}{2\ln(10)}(y - y_0) \tag{14}$$

$$f(-0,04; 0,02) = -f(0,0) - 1(-0,04 - 0) + \frac{1}{2\ln(10)}(0,02 - 0) \tag{15}$$

Určená přibližná hodnota je tedy následující:

$$f(-0,04; 0,02) \doteq 0,044$$

Příklad č. 2

Zadání. Zjistěte, zda funkce $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $[1;1]$ ve směru vektoru $\vec{a} = (2;1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor, v jehož směru funkce f v bodě $[1;1]$ roste nejrychleji.
Řešení. Je funkce v daném bodě definovaná – určení definičního oboru funkce:

$$D(f) = \{x \neq 0 \wedge y \neq 0\} \tag{16}$$

Jestli je funkce v bodě $[1;1]$ ve směru vektoru $\vec{a}$ rostoucí či klesající zjistíme na základě hodnoty derivace ve směru daného vektoru, kterou lze vyjádřit následovně:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = grad\, f(x,y) \cdot \vec{a} \tag{17}$$

Výpočet gradientu (vzorec viz vztah 1):

$$f_x = \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{18}$$

$$f_y = \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{19}$$

$$grad\, f(x,y) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}; -\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) \tag{20}$$

Gradient v bodě $[0;0]$:

$$grad\, f(1,1) = (1;-1) \tag{21}$$

Gradient je zároveň v bodě $[1;1]$ vektorem, v jehož směru roste funkce f v bodě $[1;1]$ nejrychleji.
K výpočtu směrové derivace již stačí jen převést vektor $\vec{a}$ na jednotkový:

$$\vec{a}_j = \left(\frac{2}{||\vec{a}||}; \frac{1}{||\vec{a}||}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \tag{22}$$

Derivace funkce f v bodě $[1;1]$ ve směru vektoru $\vec{a}$, resp. $\vec{a}_j$ je určena jako skalární součin gradientu v tomto bodě a vektoru $\vec{a}_j$ (vztah 17). Konkrétně tedy:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}_j} = (1;-1) \cdot (\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Jelikož vyšla směrová derivace kladná, je funkce v bodě $[0;0]$ ve směru vektoru $\vec{a} = (2;1)$ rostoucí.

Příklad č. 3

ZADÁNÍ. Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $\dot{g}(t)$ a $\ddot{g}(t)$ pro obecnou funkci f, a pak pro $f(x, y) = x + 3y$.

ŘEŠENÍ. Obecně pro složenou funkci jediné proměnné (t) $F(t) = f(u(t); v(t))$ s vnitřními funkcemi $u(t)$ a $v(t)$ je derivace dána vztahem:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dv}{dt} \tag{23}$$

Na základě uvedeného vztahu je nyní možné derivovat zadanou funkci:

$$\dot{g}(t) = \cos t f_x + 2t f_y \tag{24}$$

$$\ddot{g}(t) = -\sin t f_x + \cos t(\cos t f_{xx} + 2t f_{xy}) + 2f_y + 2t(\cos t f_{xy} + 2t f_{yy}) \tag{25}$$

$$\ddot{g}(t) = -\sin t f_x + \cos^2 t f_{xx} + 4t\cos t f_{xy} + 2f_y + 4t^2 f_{yy} \tag{26}$$

Konkrétně pro $f(x, y) = x + 3y$:

První a druhé parciální derivace funkce f jsou následující:

$$f_x = 1;\ f_y = 3;\ f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0 \tag{27}$$

Dosazením parciálních derivací z 27 do vztahů 24 a 26 získáme následující:

$$\dot{g}(t) = \cos t + 6t; \quad \ddot{g}(t) = -\sin t + 6 \tag{28}$$

Příklad č. 4

Zadání. Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce g, je-li $g(x,y) = f(x^2 + y, xy^2)$.
Řešení. Obecně pro složenou funkci dvou proměnných (u,v) $F(u,v) = f(g(u,v); h(u,v))$ s vnitřními funkcemi $g(u,v)$ a $h(u,v)$ jsou parciální derivace dány vztahy:

$$F_u = f_x g_u + f_y h_u \tag{29}$$
$$F_v = f_x g_v + f_y h_v \tag{30}$$

Na základě uvedených vztahů je nyní derivována zadaná funkce:

$$g_x = 2x f_x + y^2 f_y \tag{31}$$

$$g_y = f_x + 2xy f_y \tag{32}$$

$$g_{xx} = 2f_x + 2x(2x f_{xx} + y^2 f_{yx}) + y^2(2x f_{xy} + y^2 f_{yy}) \tag{33}$$
$$g_{xx} = 2f_x + 4x^2 f_{xx} + 4xy^2 f_{xy} + y^4 f_{yy} \tag{34}$$

$$g_{xy} = 2x(f_{xx} + 2xy f_{yx}) + 2y f_y + y^2(f_{xy} + 2xy f_{yy}) \tag{35}$$
$$g_{xy} = 2x f_{xx} + 4x^2 y f_{yx} + 2y f_y + y^2 f_{xy} + 2xy^3 f_{yy} \tag{36}$$

$$g_{yy} = (f_{xx} + 2xy f_{yx}) + 2x f_y + 2xy(f_{xy} + 2xy f_{yy}) \tag{37}$$
$$g_{yy} = f_{xx} + 4xy f_{yx} + 2x f_y + 4x^2 y^2 f_{yy} \tag{38}$$

Příklad č. 5

Zadání. Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y \leq 6 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}$.

Řešení. Definiční obor funkce $D(f) = \mathbb{R}^2$

Určení podezřelých bodů, které by mohly být lokálními, resp. globálními extrémy na zadané množině – dvě možnosti:

- stacionární body (body, kde jsou obě parciální derivace rovny 0),
- krajní body a hranice množiny M

1) Stacionární body:

Parciální derivace:

$$f_x = 2xy(4-x-y) - x^2y = 8xy - 2xy^2 - 3x^2y \tag{39}$$

$$f_y = x^2(4-x-y) - x^2y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y \tag{40}$$

Hledáme nyní body, pro které budou obě derivace rovny 0. Po úpravě obou derivací zapsáno následovně:

$$xy(8-2y-3x) = 0 \quad \wedge \quad x^2(4-x-2y) = 0 \tag{41}$$

Obě uvedené rovnosti budou platit současně v následujících případech:

- pro $x = 0 \rightarrow y$ může potom nabývat libovolných hodnot v rámci množiny $M \rightarrow$ všechny body na ose y
- pro $y = 0 \rightarrow x$ může poté nabývat 2 hodnot: $x_1 = 0$ a $x_2 = 4 \rightarrow$ body $[0;0], [4;0]$
- pokud budou oba členy $(8-2y-3x)$ a $(4-x-2y)$ rovny 0 – hledáme řešení soustavy rovnic:

  $$\begin{aligned} 8 - 3x - 2y &= 0 \\ 4 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

  vynásobením první rovnice a sečtením rovnic získáme:

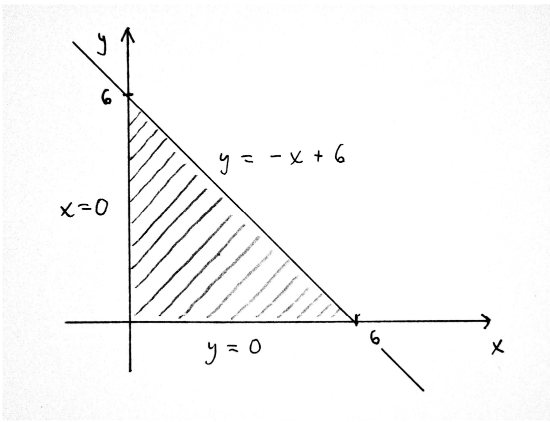
  $$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

  dosazením této hodnoty do jedné z rovnic získáme $y = 1 \rightarrow$ bod $[2;1]$

Nalezené stacionární body jsou tedy následující: $[0;0]$, $[4;0]$, $[2;1]$

2) Krajní body a hranice množiny M

Grafické znázornění množiny M:



Nyní vyšetřujeme průběh funkce postupně na všech 3 hranicích množiny M:

- hranice $x = 0$, kde $y \in \langle 0; 6\rangle$

  Pokud vyšetřujeme průběh funkce f na této hranici, tak zjišťujeme, že pokud je $x = 0$, tak derivace funkce je potom vždy, nezávisle na hodnotě y, rovna 0. Stejně tak funkční hodnota funkce je pro $x = 0$ nezávisle na y vždy rovna 0.

  Podezřelými body jsou tedy všechny body na množině M, jejichž x-ová souřadnice je rovna 0, resp. celý úsek souřadné osy y ležící v množině M.

- hranice $y = 0$, kde $x \in \langle 0; 6\rangle$

  Analogická situace jako u předchozí hranice. Pokud je $y = 0$, tak je funkční hodnota funkce f, stejně jako její derivace rovna 0, nezávisle na hodnotě x.

  Podezřelými body jsou tedy taktéž všechny body na množině M, jejichž y-ová souřadnice je rovna 0, resp. celý úsek souřadné osy x ležící v množině M.

- hranice $y = -x + 6$, kde $x \in \langle 0; 6\rangle$

  Dosazením výrazu $(6 - x)$ za y do původní funkce f získáme funkci 1 proměnné $g(x)$ popisující průběh původní funkce f na této hranici.

  $$g(x) = -2x^2(6 - x) \tag{42}$$

  Tuto funkci nyní zderivujeme a hledáme x pro která je derivace rovna 0.

  $$\dot{g}(x) = x^2 - 4x = x(x - 4) \tag{43}$$

  Derivace je rovna 0 ve dvou případech: $x_1 = 0$ a $x_2 = 4$. Dosazením těchto hodnot do vyjádření hranice $y = -x + 6$ získáme dva podezřelé body: $[0; 6]$, $[4; 2]$.

Výsledné nalezené podezřelé body:

stacionární body $\rightarrow$ $[0;0]$, $[4;0]$, $[2;1]$

krajní body $\rightarrow$ $[0;0]$, $[6;0]$, $[0;6]$

body na hranicích $\rightarrow$ $[0;6]$, $[4;2]$ a body $[0;y]$,kde$y \in \langle 0;6 \rangle$, $[x;0]$, kde $x \in \langle 0;6 \rangle$

Pro nalezené podezřelé body byly nyní vypočteny funkční hodnoty a hodnoty hesiánu na základě čehož bylo následně rozhodnuto, které body jsou na množině M globálními, resp. lokálními extrémy a které nikoliv.

Pro výpočet hesiánu bylo nutno určit druhé parciální derivace funkce f:

$$f_{xx} = 8y - 2y^2 - 6xy \tag{44}$$

$$f_{xy} = 8x - 4xy - 3x^2 \tag{45}$$

$$f_{yy} = -2x^2 \tag{46}$$

Funkční hodnoty, hodnoty hesiánu a hodnoty parciální derivace f_{xx} (pokud její uvedení dává smysl):

bod $[x, y]$	funkční hodnota	hodnota hesiánu [km]	hodnota f_{xx}
$[0;0]$	0	0	-
$[4;0]$	0	-256	-
$[2;1]$	4	32	-6
$[6;0]$	0	-3600	-
$[0;6]$	0	0	-
$[4;2]$	-64	-1024	-
$[0;y], y \in \langle 0;6 \rangle$	0	0	-
$[x;0], x \in \langle 0;6 \rangle$	0	$-(8x - 3x^2)^2 \rightarrow$ vždy ≤ 0	-

Bod $[2;1]$ **je tedy globálním maximem funkce na množině** M **a bod** $[4;2]$ **je globálním minimem funkce** f **na množině** M, přičemž pokud bychom uvažovali funkci na celém jejím definičním oboru, tak by bod $[4;2]$ nebyl lokálním extrémem, jelikož se jedná o sedlový bod.

Zbylé body nejsou extrémy funkce na zadané množině, přičemž body $[4;0]$, $[6;0]$ nebudou určite lokálními extrémy funkce ani na jejím celém definičním oboru. Body $[0;0]$ a $[0;6]$ by pak teoreticky mohly být lokálními extrémy funkce, pokud bychom ji uvažovali na celém jejím definičním oboru.

Příklad č. 6

Zadání. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v bodě $a = 0$ pro funkci $f(x) = \ln(1 + 3\sin x)$.
Řešení. Taylorův polynom je určen následovně:

$$T^n_{x_0}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{47}$$

1. derivace funkce $f(x)$:

$$\dot{f}(x) = \frac{3\cos x}{1 + 3\sin x} \tag{48}$$

2. derivace funkce $f(x)$:

$$\ddot{f}(x) = \frac{-3\sin x - 9\sin^2 x - 9\cos^2 x}{(1 + 3\sin x)^2} = -\frac{3\sin x + 9}{(1 + 3\sin x)^2} \tag{49}$$

3. derivace funkce $f(x)$:

$$\dddot{f}(x) = \frac{-3\cos x(1 + 3\sin x)^2 - (-3\sin x - 9) \cdot 2(1 + 3\ sinx)3\cos x}{(1 + 3\sin x)^4} \tag{50}$$

$$\dddot{f}(x) = \frac{51\cos x + 162\sin x\cos x + 27\sin^2 x\cos x}{(1 + 3\sin x)^4} \tag{51}$$

$$\dddot{f}(x) = \frac{3\cos x(17 + 54\sin x + 9\sin^2 x)}{(1 + 3\sin x)^4} \tag{52}$$

Dosazením do vztahů 48, 49, 52 získáme hodnoty derivací v bodě $a = 0$:

$$\dot{f}(0) = 3; \quad \ddot{f}(0) = 9; \quad \dddot{f}(0) = 51 \tag{53}$$

Rozepsáním vztahu 47 pro $n = 3$ získáme:

$$T^3_{x_0}(f)(x) = f(x_0) + \frac{\dot{f}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\ddot{f}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{\dddot{f}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \tag{54}$$

Dosazením hodnot derivací a souřadnice bodu a do vztahu 54 získáváme finální podobou taylorova polynomu třetího řádu v bodě $a = 0$:

$$T^3_0(f)(x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{17}{2}x^3 \tag{55}$$