Егерев Артем
Домашнее задание №19

Задача 1

Постройте схему полиномилального размера для функции $f : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, *равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе есть изолированные вершины.*

$\boxed{\textit{Решение:}}$

Пронумеруем наши вершины числами от 1 до n. Обозначим за $v_{ij} \in \{0,1\}$ ребро между вершинами i, j.
Тогда проверка изолированности для i-ой вершины это просто:

$$\overline{\bigvee_{j \in 1 \dots n,\ j \neq i} v_{ij}}$$

Применив дизъюнкцию к n таким выражениям (так как количество вершин n соответственно) получаем ответ:

$$\bigvee_{i \in 1 \dots n} (\overline{\bigvee_{j \in 1 \dots n,\ j \neq i} v_{ij}})$$

Оценим теперь размер полученной схемы. Для каждой из n вершин мы добавляем не более n элементов, отсюда размер схемы есть $O(n^2)$.

Задача 2

Треугольником на графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Постройте схему полиномиального размера, для функции $f : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе нет треугольков

Решение:

Пронумеруем наши вершины числами от 1 до n. Обозначим за $v_{ij} \in \{0,1\}$ ребро между вершинами i, j.
Тогда проверка на отсутствие треугольника для вершин i, j, k это просто:

$$\overline{v_{ij} \wedge v_{ik} \wedge v_{kj}}$$

Применив глобальную конъюнкцию ко всем элементам получаем ответ на нашу задачу:

$$\bigwedge_{i,j,k \in 1 \ldots n, i \neq j, i \neq k, j \neq k} \overline{v_{ij} \wedge v_{ik} \wedge v_{kj}}$$

Оценим теперь размер полученной схемы. Заметим, что количество элементов в глобальной конъюнкции - $\binom{n}{3}$, остальные элементы дают вклад не более чем $O(n)$, отсюда общий размер схемы $O(n^3)$.

Задача 3

Постройте схему полиномиального размера для функции $f : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единицы тогда и тогда данный на вход граф связен и содержит эйлеров цикл.

Решение:

Проверка на связность осуществляется возведением соотвествующей матрицы смежности в степень n. Перемножение матриц осуществляется за $O(n^3) \Rightarrow$ размер такой проверки $O(n^4)$.

Граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степень каждой его вершины четна.
Проверка того, что степень вершины i четна:

$$\neg(v_{i1} \oplus v_{i2} \oplus ... \oplus v_{in} \ // \ \textit{для всех кроме } v_{ii} \ //)$$

Примечание: $\oplus - XOR$ можно представить с помощью конъюнкций и дизъюнкций за константу.
Для получения ответа нам нужно взять n конъюнкций, для каждой вершины соответственно.
Оценим теперь размер полученной схемы. Проверка на связность - $O(n^4)$, проверка на степени - $n \cdot O(n) = O(n^2) \Rightarrow$ итоговый размер $O(n^4)$

Задача 4

Докажите, что любую монотонную функцию от n переменных можно вычислить схемой размера $O(n2^n)$, используя только конъюнкцию и дизъюнкцию.

$\boxed{\textit{Решение:}}$

Пусть монотонная функция начинает принимать значение 1, когда в наборе становиться i единиц.
Тогда :

$$f = \bigvee(x_{u(1)} \wedge x_{u(2)} ... \wedge x_{u(n)}), \qquad \textit{по всем } u \textit{ - неупорядоченным наборам } i \textit{ чисел из } n$$

Всего таких слагаемых $\binom{n}{i} < 2^n$, в каждом не более n слагаемых.
Отсюда общий размер схемы не превосходит $O(n) \cdot O(2^n) = O(n2^n)$

Задача 5

Докажите, что существует функция от n переменных ($n > 2$), не вычисляющаяся в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$, схемой размера n^{100}.

Решение:

Данный нам базис есть базис в многочлене Жегалкина, в котором любая функция имеет однозначное представление.
Воспользумся функцией из следующего номера:

$$f(x_1...x_n) = 1 \oplus x_1 \oplus ... \oplus x_n \oplus x_1x_2 \oplus ... \oplus x_1x_2...x_n$$

Очевидно, что на вычисление одного слагаемого мы тратим хотя бы 1 элемент (так как каждое слагаемое в сумме у нас уникальное). Всего слагаемых - 2^n, отсюда минимум нам понадобится 2^n элементов, что в ассимтотике дает больше чем n^{100}.

Задача 6

Докажите, что в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$ любая функция от n переменных вычисляется схемой размера не более 2^{n+1}.

$\boxed{\textit{Решение:}}$

Данный нам базис есть базис в многочлене Жегалкина, в котором любая функция представима в виде:

$$f(x_1...x_n) = a_0 \oplus (a_{11}x_1) \oplus (a_{12}x_2)... \oplus (a_n x_1...x_n)$$

где каждая a - это булева константа.
Рассмотрим худший случай, когда нам нужно посчитать максимальное количество операций. Достаточно очевидно, что тогда все a должны быть равны 1.

Тогда количество слагаемых для сложения по модулю 2 - количество всевозможных подмножеств есть 2^n, отсюда количество $\oplus$ - $(2^n - 1)$

При вычисление каждого из слагаемых количество элементов будет увеличиваться на 1, так как на начальном этапе оно действительно увеличивается на 1 (при подсчете x_i), а потом каждое слагаемое получается из слагаемого, длины на один меньше и одного из x. Поэтому на вычисление всех слагаемых мы потратим так же не более 2^n.
Итого, в суммарном размере имеем $(2^n - 1) + 2^n < 2^{n+1}$.

Задача 7

Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется линейной, если она представима в виде:

$$f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus ... \oplus (a_n \wedge x_n)$$

Для некоторого набора $(a_1, ...a_n) \in \{0,1\}^n$ булевых коэффицентов.
Докажите, что схема, использующая только линейные функции, вычисляет линейную функцию.

$\boxed{\textit{Решение:}}$

Сложная функция f представляется как композиция простых.
Отсюда нам достаточно доказать, что сумма по модулю 2 и логическое умножение на константу сохраняет линейность:

$$\begin{gathered} f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1, ..., x_n) \oplus ... \oplus f_n(x_1, ..., x_n) = \\ = a_{10} \oplus (a_{10} \wedge x_1) \oplus ... \oplus (a_{1n} \wedge x_n) \oplus ...a_{n0} \oplus (a_{n1} \wedge x_1) \oplus ... \oplus (a_{nn} \wedge x_n) = \\ = (a_{10} \oplus ... \oplus a_{n0}) \oplus (a_{11} \oplus ... \oplus a_{1n}) \wedge x_1 \oplus ... \oplus (a_{n1} \oplus ... \oplus a_{nn}) \wedge x_n = \\ = a'_0 \oplus (a'_1 \wedge x_1) \oplus ... \oplus (a'_n \wedge x_n) - \text{ линейная функция} \end{gathered}$$

где $a'_i = a_{i0} \oplus ... \oplus a_{i0}$

$$\begin{gathered} f(x_1, ..., x_n) \wedge b = (a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus ... \oplus (a_n \wedge x_n)) \wedge b = \\ = (a_0 \wedge b) \oplus ((a_1 \wedge b) \wedge x_1) \oplus ... \oplus ((a_n \wedge b) \wedge x_n) = \\ a'_0 \oplus (a'_1 \wedge x_1) \oplus ... \oplus (a'_n \wedge x_n) - \text{ линейная функция} \end{gathered}$$

где $a'_i = a_i \wedge b$

Задача 8

Докажите, если $f(x_1, ..., x_n)$ - нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычислсяется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$

$\boxed{\textit{Решение:}}$

Так как $f(x_1, ..., x_n)$ является нелинейной функцией, то в ее разложение в виде полинома Жегалкина присутствует конънкция двух x_i, x_j. Для удобства, переобозначим их за x_1, x_2.

$$f(x_1...x_n) = a_0 \oplus (a_{11}x_1) \oplus (a_{12}x_2)... \oplus (a_n x_1...x_n) =$$
$$= x_1x_2f_1(x_3, ...x_n) \oplus (x_1 \wedge f_2(x_3, ...x_n)) \oplus (x_2 \wedge f_3(x_3, ...x_n)) \oplus f_4(x_3, ...x_n)$$

Так как f_1 не может оказаться нулевой $\Rightarrow$ найдется такой набор $(x'_3, ...x'_n)$, что $f_1 = 1$. Обозначим $f_2(x'_3, ...x'_n)$ за a_2, $f_3(x'_3, ...x'_n)$ за a_3, $f_(x'_3, ...x'_n)$ за a_4.
Введем следующую функцию :

$$r(x_1, x_2) = f(x_1 \oplus a_3, x_2 \oplus a_2, x'_3, ...x'_n) =$$
$$= (x_1 \oplus a_3)(x_2 \oplus a_2) \oplus x_1a_2 \oplus x_2a_3 \oplus a_4 =$$
$$= x_1x_2 \oplus 2x_1a_2 \oplus 2x_2a_3 \oplus (a_2a_3 \oplus a_4) = x_1x_2 \oplus (a_2a_3 \oplus a_4) =$$

Итого имеем:

$$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} r & \textit{при } a_2a_3 \oplus a_4 = 0 \\ \neg r & \textit{при } a_2a_3 \oplus a_4 = 1 \end{cases}$$