Задача 1

В пространстве $\mathbb{R}^3$ *заданы два базиса:* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *и* $e' = (e_1', e_2', e_3')$*, где*

$$e_1 = (-2, 2, 2) \quad e_2 = (-2, 2, 1) \quad e_3 = (1, 0, 2) \quad e_1' = (-3, 2, -1) \quad e_2' = (-3, 4, 4) \quad e_3' = (-1, 2, 4),$$

И вектор v, имеющий в базисе e координаты (-4, 3, 2). Найдите:

а) матрицу перехода от базиса e к e'

б) координаты вектора v в новом базисе

а) Обозначим $C_{e\to e'}$ за C

$$(e_1', ..., e_n') = (e_1, ..., e_n) \cdot C \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot C$$

Преобразованиями строк добьемся того, чтобы справа стояла единичная матрица:

$$\xrightarrow{row_1 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{row_2 - 2row_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{row_3 - 2row_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{swap 32} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 3 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{row_2 \div (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{row_1 - row_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{row_1 - \frac{5}{2}row_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{row_2 + 3row_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Таким образом мы получаем:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Нам известно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Тогда для нахождения новых координат, найдем сперва C^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{swap21} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{row_3+row_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{swap32} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{row_2 \div 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{row_1-2row_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{row_1+\frac{2}{3}row_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{row_2-\frac{1}{3}row_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Задача 2

а) Докажите, что существует единственное линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, переводящее векторы

$$a_1 = (1, 0, -2, 0, 0) \quad a_2 = (-2, 1, 0, 2, 0) \quad a_3 = (-2, 0, 2, 0, 2) \quad a_4 = (-2, 0, 0, 1, 2) \quad a_5 = (-3, 2, -2, 0, 1)$$

соответственно в вектора

$$b_1 = (1, 2, -12) \quad b_2 = (-4, 11, -9) \quad b_3 = (0, 0, 0) \quad b_4 = (-1, 7, -15) \quad b_5 = (-2, 12, -24)$$

б) Найдите базис ядра и базис образа этого линейного отображения. Ответ запишите в стандартных базисах

а) Проверим, являются ли вектора a линейно независимыми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 + 2row_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_3 + 2row_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_4 + 2row_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_5 + 3row_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_5 - 2row_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_3 \div (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_4 + 4row_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_5 + 4row_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_5 \div (-7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как их 5 и они все линейно независимые $\Rightarrow$ они будут являться базисом в пространстве $\mathbb{R}^5$, а значит (по теореме единственности линейного отображения от базиса) это отображение действительно единственное.

б) Пользуясь тем, что ϕ - линейна и тем, что a - это базис, получаем, что любой вектор $v \in \mathbb{R}^5$ представим в виде $v = x_1a_1 + ... + x_5a_5$ и при линейном отображение переходит соответственно в $\phi(v) = x_1b_1 + ... + x_5b_5$.

Если мы работаем с ядром, то $\phi(v) = 0 \Rightarrow$:

$$(b_1, ..., b_5) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ для нахождения ядра нам нужно найти ФСР:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 11 & 0 & 7 & 12 \\ -12 & -9 & 0 & -15 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2-2row_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 19 & 0 & 9 & 16 \\ -12 & -9 & 0 & -15 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_3+12row_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 19 & 0 & 9 & 16 \\ 0 & -57 & 0 & -27 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 \div 19} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{19} & \frac{16}{19} \\ 0 & -57 & 0 & -27 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_3+57row_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{19} & \frac{16}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем $(-26, -16, 0, 0, 19), (-17, -9, 0, 19, 0)$. При умножение на a_i как раз получаем базис ядра: $(-51, 22, 14, -32, 19), (-37, -9, 34, 1, 38)$

Из предыдущих рассуждений видно, что образ есть линейная оболочка от $\phi(a_i) \leftrightarrow b_i$, откуда получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ -4 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -15 \\ -2 & 12 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2+4row_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 19 & -57 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -15 \\ -2 & 12 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_4+row_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 19 & -57 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -27 \\ -2 & 12 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_5+2row_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 19 & -57 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -27 \\ 0 & 16 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 \div 19} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -27 \\ 0 & 16 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_4-9row_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_5-16row_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1, 2, -12), (0, 1, -3) - базис образа.

Задача 3

Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ имеет в базисах $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и $f = (f_1, f_2, f_3)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -23 & 23 \\ 9 & 3 & 3 & -3 \\ 8 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдите базисы простарнств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$, в которых матрица отображения φ имеет диагональный вид D с единиуами и нулями на диагонали. Выпишите эту матрицу и соответыующее матричное разложение $A = C_1 D C_2^{-1}$, где C_1, C_2 - невырожденнные матрицы(вычислять матрицу C_2^{-1} не нужно).

Для начала найдем базис ядра данного линейного отображения: $Av = 0 \Rightarrow$ надо просто найти ФСР A:

$$\begin{pmatrix} -6 & -14 & -23 & 23 \\ 9 & 3 & 3 & -3 \\ 8 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_1 \div (-6)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{6} & -\frac{23}{6} \\ 9 & 3 & 3 & -3 \\ 8 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 - 9row_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & -18 & -\frac{63}{2} & \frac{63}{2} \\ 8 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_3 - 8row_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & -18 & -\frac{63}{2} & \frac{63}{2} \\ 0 & -\frac{56}{3} & -\frac{98}{3} & \frac{98}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 \div (-18)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & -\frac{56}{3} & -\frac{98}{3} & \frac{98}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{row_3 + \frac{56}{3}row_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{23}{6} & -\frac{23}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_1 - \frac{7}{3}row_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР есть вектора $m_3, m_4 = (-1, 7, 0, 4), (1, -7, 4, 0)$. Дополним их до базиса в $\mathbb{R}^4$ векторами $m_1, m_2 = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$. Достаточно очевидно, что они являются линейно независимыми.

Отметим так же, что $\varphi(m_1), \varphi(m_2)$ - будут являться базисом образа линейного отображения так как оба не лежат в ядре. (Если $v = x_1\varphi(m_1) + x_2\varphi(m_2) = x_1'\varphi(m_1) + x_2'\varphi(m_2) \Rightarrow \varphi((x_1 - x_1')m_1 + (x_2 - x_2')m_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_1', x_2 = x_2'$)

Дополним $\varphi(m_1), \varphi(m_2)$ до базиса:

$$Am_1 = (-6, 9, 8) \quad Am_2 = (-14, 3, 0)$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 8 \\ -14 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_1 \div (-6)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ -14 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 + 14row_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -18 & -\frac{56}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{row_2 \div (-18)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{28}{27} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{row_1 + \frac{3}{2}row_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & \frac{28}{27} \end{pmatrix}$$

Перейдем к базисам $m_1, \ldots, m_4$ в $\mathbb{R}^4$ и $n_1 = \varphi(m_1), n_2 = \varphi(m_2), n_3 = (0, 0, 1)$ в $\mathbb{R}^3$

Нетрудно заметить, что именно в этом базисе матрица линейного перехода будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как для любого вектора v найдутся единственные $x_1...x_4 : v = x_1m_1 + \cdots + x_4m_4$. $\varphi(v) = x_1\varphi(m_1) + \cdots + x_4\varphi(m_4) = x_1\varphi(m_1) + x_2\varphi(m_2) + 0 \cdot n_3$. На пальцах, мы просто откидываем последние две координаты и получаем координаты в новом базисе.

Осталось найти матрицы перехода к новым базисам(это просто координаты новых базисов через старые записанные в столбец):

$$C_2 = C_{\to m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 = C_{\to n} = \begin{pmatrix} -6 & -14 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Используя метод Лагранжа, для следующей квадратичной формы найдите нормальный вид и какую-нибудь приводящую к нему нетривиальную замену координат(выражение старых через новые):

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$\begin{gathered}
Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (2x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + x_2^2 = \\
// \ y_1 = 2x_1 - 2x_2 - x_3 \ // \\
= y_1^2 + x_2^2 = \\
// \ t_1 = y_1 \quad t_2 = x_2 \quad t_3 = x_3 \ // \\
= 1 \cdot t_1^2 + 1 \cdot t_2^2 + 0 \cdot t_3^2 =
\end{gathered}$$

Теперь нам следует выразить данные нам переменные через уже полученные, как и требуется в условие задачи:

$$\begin{cases} t_1 = y_1 = 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ t_2 = x_2 \\ t_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(t_1 + 2x_2 + x_3) = \frac{1}{2}t_1 + t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_{x \to t} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$