Задача 1

Пусть $U(p,x)-$ главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p,x) = 2017$ для какого-то x.

Для решения рассмотрим следующую всюду определенную функцию:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2017 & \text{при } \ \mathrm{x} = 0 \\ 1 & \text{при } \ \mathrm{x} = \mathrm{n} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где $n-$ какое-то натуральное число. Так как $\mathbb{N}-$ бесконечно и для любой функции f_n найдется свое p (просто по определению универсальной функции), то найдется бесконечно много $p\ :\ U(p,0) = 1017$. И да, данные p различны, так как функции различаются.

Задача 2

Пусть $U(p,x)-$ главная универсальная ывчислительная функция. Докажите, что найдется такое n, что $U(n,x) = nx$ для всех x.

Рассмотрим функцию $V(x,y) = xy$. Так как $U-$ главная, то существует функция $s(x)$, такая что $U(s(x),y) = V(x,y)$. По теореме о неподвижной точке, найдется такое n, что $s(n) = n$. Отсюда, $U(n,y) = U(s(n),y) = V(n,y) = ny$.

Задача 3

Пусть $U(p,x)-$ главная универсальная вычислимая функция, а $V(n,x)-$ вычислимая функция от двух аргументов. Докажите, что найдется такое p, что $U(p,x) = V(p,x)$ для всех x.

Так как $U-$ ГУВФ, то существует функция $s(x)$, такая что $\Rightarrow U(s(p),x) = V(p,x)$. По теореме о неподвижной точки, найдется $p\ : s(p) = p \Rightarrow U(p,x) = U(s(p),x) = V(p,x)$.

Задача 4

Существует ли такая главная универсальная вычислимая функция $U(p, x)$, в которой множество программ I, вычисляющих определенные в 0 функции, совпадает с множеством четных чисел?

Будем решать от противного. Допустим это так, отсюда множество таких функций разрешимо. Так же можем воспользоваться теоремой Успенского - Райса, взяв за нетривиальное свойство как раз определенность в 0. Получаем, что оно неразрешимо. Противоречие.

Задача 6

Пусть $U(p, x)-$ главная универсальная вычислимая функция. Обозначим через $K \subset \mathbb{N}^2$ множество таких пар(k, n), что функция $U_k(x) = U(k, x)$ является продолжением функции $U_n(x) = U(n, x)$, то есть $U_k(x) = U_n(x)$, где $U_n(x)-$ определена. Докажите, что K - неразрешимо.

Рассмотрим функции вида $f_i(n) = n,\ f_i(i)-$ не определено. Построим K' как первые координаты K. Свойство продолжения для n, описанное в условии задачи, является нетривиальным, отсюда, пользуясь теоремой Успенского - Райса, $K'-$ неразрешимо. Теперь предположим, что $K-$ разрешимое. Всего пар $-\mathbb{N}^2$ счетно много. Тогда будем проверять лежит ли каждая пара в K, и если лежит, то выписывать ее первую координату. Таким образом, окажется что $K'-$ перечислимо. Противоречие.