Задача 1

Найдите все левые смежные классы и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $H = \langle\sigma\rangle$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Является ли подгруппа H нормальной в группе A_4?

Для начала определим нашу подгруппу H:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = b_1$$

Отсюда, группа H состоит всего из двух элементов. Рассмотрим группу A_4:

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,2,3,4) \quad a_2 = (1,3,4,2) \quad a_3 = (1,4,2,3) \\ &a_4 = (2,1,4,3) \quad a_5 = (2,3,1,4) \quad a_6 = (2,4,3,1) \\ &a_7 = (3,1,2,4) \quad a_8 = (3,2,4,1) \quad a_9 = (3,4,1,2) \\ &a_{10} = (4,1,3,2) \quad a_{11} = (4,2,1,3) \quad a_{12} = (4,3,2,1) \end{aligned}$$

Левый класс для элемента b_1 тривиальна и равна просто A. Левый класс относительно элемента $b_2 : \{c_i \ : \ c_i = b_2 \circ a_i\}$

$$\begin{aligned} &c_1 = (2,1,4,3) \quad c_2 = (2,4,3,1) \quad c_3 = (2,3,1,4) \\ &c_4 = (1,2,3,4) \quad c_5 = (1,4,2,3) \quad c_6 = (1,3,4,2) \\ &c_7 = (4,2,1,3) \quad c_8 = (4,1,3,2) \quad c_9 = (4,3,2,1) \\ &c_{10} = (3,2,4,1) \quad c_{11} = (3,1,2,4) \quad c_{12} = (3,4,1,2) \end{aligned}$$

Аналогично правый класс для элемента b_1 тривиален. Для элемента $b_2 : \{d_i \ : \ d_i = a_i \circ b_2\}$

$$\begin{aligned} &d_1 = (2,1,4,3) \quad d_2 = (3,1,2,4) \quad d_3 = (4,1,3,2) \\ &d_4 = (1,2,3,4) \quad d_5 = (3,2,4,1) \quad d_6 = (4,2,1,3) \\ &d_7 = (1,3,4,2) \quad d_8 = (2,3,1,4) \quad d_9 = (4,3,2,1) \\ &d_{10} = (1,4,2,3) \quad d_{11} = (2,4,3,1) \quad d_{12} = (3,4,1,2) \end{aligned}$$

Отсметим, что для элемента, к примеру 7, $gH \neq Hg$. А это, из утверждения, доказанного на лекции, дает нам, что подгруппа H не является нормальной.

Задача 2

Пусть SL_2 группа всех целочисленный (2×2) матриц с определителем 1. Докажите, что множество

$$H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | a \equiv d \equiv 1 \ (mod\ 3) \ and \ b \equiv c \equiv 0 \ (mod\ 3)\}$$

является нормальной подгруппой в $SL_2(\mathbb{Z})$.

Сначала докажем, что это подгруппа, для этого нужно проверить лежит ли произведение в этой подгруппе, лежит ли там обратный, а так же нейтральный элемент:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1 + a_2b_3 \equiv a_1b_1 \equiv 1 \ mod\ 3 \\ c_2 &= a_1b_2 + a_2b_4 \equiv 0 + 0 \equiv 0 \ mod\ 3 \\ c_3 &= a_3b_1 + a_4b_3 \equiv a_3b_1 \equiv 1 \ mod\ 3 \\ c_4 &= a_3b_2 + a_4b_4 \equiv 0 + 0 \equiv 0 \ mod\ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_4 & -c_2 \\ -c_3 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & c_1 \equiv c_4 \equiv 1 \ mod\ 3 \\ & c_2 \equiv c_3 \equiv -c_3 \equiv -c_3 \equiv 0 \ mod\ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1 \equiv 1 \ mod\ 3 \quad 0 \equiv 0 \ mod\ 3$$

Доказали. При этом обратная матрца ищется при помощи формулы Крамера. Как было показано на лекции, нам достаточно доказать, что $shs^{-1} \in H$ для всех $s \in SL_2$ и $h \in H$.

$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad s^{-1} = \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

При этом $a_1a_4 - a_2a_3 = 1, \ b_1 \equiv b_4 \equiv 1 \ and \ b_2 \equiv b_3 \equiv 0 \ mod\ 3$. Пусть

$$shs^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} d_1 &= (a_1b_1 + a_2b_3)a_4 - (a_1b_2 + a_2b_4)a_3 \equiv a_1a_4b_1 - a_2a_3b_4 \equiv 1 \ mod\ 3 \\ d_2 &= -(a_1b_1 + a_2b_3)a_2 + (a_1b_2 + a_2b_4)a_1 \equiv -a_1a_2b_1 + a_1a_2b_4 \equiv 0 \ mod\ 3 \\ d_3 &= (a_3b_1 + a_4b_3)a_4 - (a_3b_2 + a_4b_4)a_3 \equiv a_3a_4b_1 - a_3a_4b_4 \equiv 0 \ mod\ 3 \\ d_4 &= -(a_3b_1 + a_4b_3)a_2 + (a_3b_2 + a_4b_4)a_1 \equiv -a_3a_2b_1 + a_1a_4b_4 \equiv 1 \ mod\ 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow shs^{-1} \in H$

Задача 3

Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{12}$ в группу $\mathbb{Z}_{16}$.

Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{16}$. Обозначим $\varphi(1)$ за γ. Тогда:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(12) = 12\gamma \Rightarrow 12\gamma \equiv 0 \; mod \; 16$$

Нужно заметить, что наше отображение задается единственным числом γ, так как имея его вычисляем: $\varphi(x) = x\varphi(1) = x\gamma$. Из формулы выше, следует, что $\gamma \vdots 4$, а таких, различных по модулю $16 : \{0, 4, 8, 12\}$, то есть всего 4 штуки. Так же нам нужно проверить, что данная операция действительно является гомоморфизмом, то есть:

$$x \equiv x' \; mod \; 12 \; \Rightarrow \varphi(x) \equiv \varphi(x') \; mod \; 16$$

$$x \equiv x' \; mod \; 12 \Rightarrow x - x' \vdots 12 \quad and \quad \varphi(1) \vdots 4$$
$$\varphi(x) - \varphi(x') = (x - x')\varphi(1) \equiv 0 \; mod \; 16$$

Задача 4

Перечислите все, с точностью до изоморфизма группы, каждая из которых изоморфна любой своей неединичной подгруппе.

Рассмотрим несколько вариантов. G бесконечна. Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Тогда $H = \langle g \rangle$ будет являться бесконечной циклической группой и будет равномощно $\mathbb{Z}$. Отсюда $G \simeq \mathbb{Z}$. Так же нужно отметить, что все подгруппы в $\mathbb{Z}$ имеют вид $\Rightarrow k\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

G конечна. $G \simeq \mathbb{Z}_n$. Заметим, что в данном случае любая подгруппа будет иметь мощность меньше чем G, или совпадать с ней, причем совпадение бывает в том и только в том случае, когда n – есть простое число. Очевидно, что когда множества совпадают, то они изоморфны.