Задача 1

Докадите, что формула $m \circ n = mn - m - n + 2$ задает бинарную операцию на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ и что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой.

1) Сначала докажем, что $m \circ n = mn - m - n + 2$ является бинарной операцией.

$$m \circ n = mn - m - n + 2 = m(n-1) - n + 2 = m(n-1) - n + 1 + 1 = (m-1)(n-1) + 1$$
$$m - 1 \in \mathbb{Q}, n - 1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow (m-1)(n-1) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (m-1)(n-1) + 1 \in \mathbb{Q}$$

Теперь остается показать, что 1 мы не получим. Действительно:

$$1 = (m-1)(n-1) + 1 \Rightarrow m = 1 \; or \; n = 1 \Rightarrow \varnothing$$

2) Для того, чтобы доказать, что $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ группа необходимо проверить 3 свойства.

а) ассоциативность : $(a \circ b) \circ c = (ab - a - b + 2) \circ c = abc - ac - bc + 2c - ab + a + b - 2 + 2 =$
$$= a(bc - b - c + 2) - a - bc + b + c - 2 + 2 = a \circ (b \circ c)$$

б) наличие нейтрального элемента : $\exists\, e = 2 : a \circ e = 2a - a - 2 + 2 = e \circ a = 2a = 2 - a + 2 = a$

в) наличие обратного элемента : $\exists\, a^{-1} = \dfrac{a}{a-1} \neq 1 \; : a \circ a^{-1} = \dfrac{a^2}{a-1} - \dfrac{a}{a-1} - a + 2 == a^{-1} \circ a =$
$$= \frac{a^2}{a-1} - a - \frac{a}{a-1} + 2 = e = 2$$

Задача 2

Найдите порядки всех элементов группы $\{\mathbb{Z}_{12}, +\}$.

Начнем с определения. Порядком элемента g называется такое наименьшее число m, что $g^m = e$. Если такого натурального m не существует, говорят, что порядок элемента g равен бесконечности .
В нашем случае $e = 0 \Rightarrow g^m \equiv gm \equiv 0 \; mod \; 12 \Rightarrow 12 \mid gm \cup m = min \Rightarrow m = \frac{LCM(12,\, g)}{g}$
Далее для каждого элемента:

- 1 : LCM(12, 0) = 0, m = 1
- 2 : LCM(12, 1) = 12, m = 12
- 3 : LCM(12, 3) = 12, m = 4
- 4 : LCM(12, 4) = 12, m = 3
- 5 : LCM(12, 5) = 60, m = 12
- 6 : LCM(12, 6) = 12, m = 2
- 7 : LCM(12, 7) = 84, m = 12
- 8 : LCM(12, 8) = 24, m = 3
- 9 : LCM(12, 9) = 36, m = 4
- 10 : LCM(12, 10) = 60, m = 5
- 11 : LCM(12, 11) = 131, m = 12

Задача 3

Опишите все подгруппы в группе $\{\mathbb{Z}_{12}, +\}$.

Для начала, заметим, что если элемент a лежит в подгруппе, то и обратный к нему a^{-1} лежит в той же подгруппе. Так же во всех подгруппах обязан присутствовать нейтральный элемент $e = 0$.

По этому принципу все элементы можно разбить на пары обратных: $1-11, 2-10, 3-9, 4-8, 5-7, 6-6$.

Тогда проверка на то, является ли данное множество подгруппой, сужается всего до проверки того факта, что каждая сумма двух элементов множества лежит в том же множетсве.

Уже сходу можем назвать две подгруппы: это $\{0\}, \{\mathbb{Z}_{12}, +\}$

Теперь, если в нашей подгруппе лежит 1, то там лежат и все элементы, так как мы можем сколь угодно раз складывать единицу саму с собой. Аналогично, если есть два числа, отличающиеся на 1, значит есть 1, а значит и все элементы.

Все варианты с 1 мы уже рассмотрели, теперь если есть 2. Тогда есть $10, 4-8, 6-6$. Это уже подгруппа (так все суммы не выходят из подгруппы). Ок. Могут ли быть еще элементы в такой подгруппе? Нет. Если есть 3, получаем 2 и 3. Если 5, получаем 5 и 4.

Перейдем к 3. Есть 3, а значит есть $9, 6-6$. Тоже подгруппа, аналогично. Если добавим еще елементы: 4, то 3 и 4, 5 то 5 и 6.

Далее 4. Добавляем сразу 8. Снова получилась группа. Если к этому добавить 5, то получится 4 и 5, если 6, то $4 + 6 = 10 \Rightarrow$ будет и 2, а этот случай уже рассмотрен.

Если есть 5, то есть и 10, а значит и 2. Аналогично.

6-ка нам подходит.

Итого:

$$\{0\} \quad \{\mathbb{Z}_{12}\} \quad \{0,2,4,6,8,10\} \quad \{0,3,6,9\} \quad \{0,4,8\} \quad \{0,6\}$$

Задача 4

Докажите, что всякая бесконечная группа сожержит бесконечное число подгрупп

Заметим, что если мы возьмем g – элемент группы, g^{-1} – обратный к нему, то $\{0, g, g^{-1}\}$ уже будет являться группой. Причем необязательно чтобы g и g^{-1} отличались.

А так как мы имеем бесконечное число элементов, значит и бесконечное число пар элементов, то у нас как минимум бесконечно число подгрупп.