Задача 1

Найдите все обратимые элементы, все делители нуля и все нильпотентные элементы в кольце $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\} \mid a, b, c \in \mathbb{R}$ *с обычными операциями сложения и умножения.*

1. Матрица считается обратимой, когда $det \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0$. В остальных случаях $g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ – остается в группе.

2. Элемент считается делителем нуля, если он является одновременно левым и правым делителем нуля. Пусть $g-$ искомый делитель, $h-$ ненулевая матрица.

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}$$

$$gh = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} am & 0 \\ bm + cn & ck \end{pmatrix} = 0$$

- $\begin{pmatrix} a \neq 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c \neq 0 \end{pmatrix} \Rrightarrow m = 0, k = 0 \Rightarrow cn = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow h-$ нулевая, значит такого быть не может.
- $\begin{pmatrix} a = 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c \neq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ подберем такую матрицу $h \ : \ m = 1, n = -\frac{b}{c}, k = 0 \Rightarrow$ такая нам подходит.
- $\begin{pmatrix} a \neq 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ подберем такую матрицу $h \ : \ m = 0, n = 0, k = 1 \Rightarrow$ такая нам так же подходит.
- $\begin{pmatrix} a = 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ подберем такую матрицу $h \ : \ m = 0, n = 0, k = 1 \Rightarrow$ такая нам так же подходит.

Таким образом нашли все матрицы, являющиеся левыми нулями: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, где a, c не равны нулю одновременно. Теперь проверим, что данные матрицы являются и правыми нулями так же.

$$hg = \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am & 0 \\ an + bk & ck \end{pmatrix} = 0$$

- $\begin{pmatrix} a = 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c \neq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ подберем такую матрицу $h \ : \ m = 1, n = 0, k = 0 \Rightarrow$ такая нам подходит.
- $\begin{pmatrix} a \neq 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ подберем такую матрицу $h \ : \ m = 0, n = -\frac{b}{a}, k = 1 \Rightarrow$ такая нам подходит.
- $\begin{pmatrix} a = 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & c = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ подберем такую матрицу $h \ : \ m = 1, n = 1, k = 0 \Rightarrow$ такая нам подходит.

3. Элемент g является нильпотентным, если $g^n = 0$. Перемножая матрицы в предидущих пунктах мы уже получали, что при перемножение n раз нижнетреугольных матриц в клетке $(1,1)$ получается a^n, в $(2,2)$ $c^n \Rightarrow a^n = 0, c^n = 0 \Rightarrow a = 0, c = 0$.

$$g^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ подходят все матрицы вида} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b \in \mathbb{R} & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Приведите пример идеала в кольце $Z[x]$, не являющегося главным.

В качестве идеала возьмем $\{(f,g) = xf(x) + 2g(x),\ \ f,g \in \mathbb{Z}[x]\}$ - множество многочленов с четным свободным членом (достаточно очевидно что этот идеал не является полным и отличен от нулевого).

Стоит отметить, что данное множество замкнуто относительно операций сложения и умножения. При сложение, сумма четных свободных членов - четна. При умножение итоговый свободный член есть произведение свободных членов, тоже четный. Отсюда, это действительно идеал.

При перемножение многочлена с многочленом из $Z[x]$ как с левой, так и с правой стороны, свободный член аналочино получается четным, то есть попадает в идеал.

Докажем тот факт, что этот идеал не является главным. Пусть $(f,g) = \{h\} \Rightarrow x \vdots h,\ 2 \vdots h$ (так как $f, g-$ произвольные). Отсюда h является $\pm 2, \pm 1$. ± 1 он быть не может, так как этот элемент пораждает вообще все многочлены. ± 2 не может так как это многочлены, где все коэффиценты четны, что заметно уже чем наше множество (к примеру многочлен $3x + 2$ уже туда не попадет).

Задача 3

Найдите размерность $\mathbb{R}-$алгебры $\mathbb{R}/(x^3 - x^2 + 2)$.

Из условия, нам дано фактор кольцо $R[x]$ по идеалу $x^3 - x^2 + 2$. Воспользуемся теоремой о гомоморфизме колец: элементами факторкольца $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$ будут остатки от деления многочленов на $x^3 - x^2 + 2$(так как $x^3 - x^2 + 2$ есть ядро некого гомоморфизма). Получаем $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2) \simeq \{P(x)\}$, где $P(x)-$ есть остаток от деления на наш многочлен, многочлен степени не более 2, причем достаточно очевидно, что все многочлены степени не выше 2 туда попадут. Базис в таком множестве: $(1, x, x^2) \Rightarrow$ размерность $= 3$.

Задача 4

Пусть $F-$ поле, $R-$ кольцо и $\varphi : F \to R-$ гомоморфизм колец. Докажите, что либо $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in F$, либо $Im\ \varphi \simeq F$.

Воспольщуемся теоремой о гомоморфизме колец: $Im\ \varphi \simeq F/Ker\ \varphi$. Здесь стоит отметить, что любое поле является простым кольцом, откуда следует что $Ker\ \varphi$ $-$ несобственный идеал. Откуда:

$$\left[\begin{array}{l} Ker\ \varphi = 0 \Rightarrow Im\ \varphi \simeq F/Ker\ \varphi \simeq F/\{0\} \simeq F \\ Ker\ \varphi = F \Rightarrow Im\ \varphi \simeq F/Ker\ \varphi \simeq F/F \simeq \{0\} \end{array}\right.$$

Посдедний случай означает, что размер отображения φ равен 1, откуда следует, что все отображение будет в 0, так как $\varphi(0) = 0$.