Задача 1

Пользуясь правилом Лопиталя, найдите пределы. (4)

$$(а)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x^2}{x^2e^x}$$
$$(б)\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-\ln x)$$
$$(в)\ \lim_{x\to +\infty}x^{\arctan(1/x)}$$

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\sin x^2}{x^2e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

б)

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-\ln x)=\lim_{x\to +\infty}(\ln e^{\sqrt{x}}-\ln x)=\lim_{x\to +\infty}(\ln\frac{e^{\sqrt{x}}}{x})=$$
$$=\ /\ \textit{в силу непрерывности логарифма}\ /\ =$$
$$=\ln(\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x})=\ln(\lim_{x\to +\infty}\frac{(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}})}{1})=\ln(\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}})=\infty$$

в)

$$\lim_{x\to +\infty}x^{\arctan(1/x)}=\lim_{x\to +\infty}e^{\ln x\arctan(1/x)}=\lim_{x\to +\infty}e^{\dfrac{\arctan(1/x)}{1/\ln x}}=$$
$$=\ /\ \textit{в силу непрерывности экспоненты}\ /\ =$$
$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan(1/x)}{1/\ln x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{(-\frac{1}{\ln^2 x})\cdot\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln^2 x}{x^2+1}}=$$
$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln^2 x}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$$

Задача 2

Представьте формулой Тейлора с $o((x-x_0)^3)$ в окресности точки x_0 функцию $f(x)$. (8)

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{2-x}, \qquad x_0 = 1$$

Сделаем замену $x = x_0 + t = 1 + t$. Тогда наша функция примет вид:

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{2-x} = \ln\frac{2+t}{1-t} = \ln(2+t) - \ln(1-t) = \ln 2(1+\frac{t}{2}) - \ln(1-t) = \begin{bmatrix} a = \dfrac{t}{2} \\ b = (-t) \end{bmatrix} =$$

$$= \ln 2 + \ln(1+a) - \ln(1+b) = \ln 2 + (1 + a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + o(a^3)) - (1 + b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} + o(b^3)) =$$

$$= \ln 2 + (a-b) - \frac{a^2-b^2}{2} + \frac{a^3-b^3}{3} + o(a^3) + o(b^3) = \ln 2 + \frac{3t}{2} + \frac{3t^2}{8} + \frac{3t^3}{8} + o(t^3) =$$

$$= \ln 2 + \frac{3(x-x_0)}{2} + \frac{3(x-x_0)^2}{8} + \frac{3(x-x_0)^3}{8} + o((x-x_0)^3)$$

Задача 3

Представьте формулой Тейлора с $o((x-x_0)^n)$ в окресности точки x_0 функцию $f(x)$, используя разложения основных элементаных функций.(12)

$$f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}, \qquad x_0 = 0$$

Произведем замену $t = -(\frac{x-x_0}{2})^3 = -(\frac{x}{2})^3$. Тогда наша функция примет вид:

$$f(x) = \sqrt[3]{8-x^3} = 2\sqrt[3]{1+t} = 2\left[(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/3}{k}t^k)\right] =$$

$$= 2\left[(1 + \sum_{k=1}^{\lceil\frac{n}{3}\rceil}\binom{1/3}{k}\tfrac{(-1)^k\cdot(x-x_0)^{3k}}{2^{3k}}) + o((x-x_0)^n)\right] =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{\lceil\frac{n}{3}\rceil}\binom{1/3}{k}\frac{(-1)^k\cdot(x-x_0)^{3k}}{2^{3k}/2}) + o((x-x_0)^n)$$

Как подсказал семинарист, этого достаточно :)

Задача 4

С помощью формулы Тейлора найдите приближенное значение числа с точностью до $0,001$*.(16)*

$$\sqrt{1.5}$$

Воспользуемся разложением уже известной базовой функции, с остаточным членом в виде Лагранжа:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n(2n!)}{(1-2n)(n!)^2(4^n)}x^n + \frac{(-1)^{n+1}((2n+2)!)}{(-1-2n)((n+1)!)^2(4^{n+1})} \cdot \frac{\epsilon^{n+1}}{(1+\epsilon)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

Рассмотрим отношение двух соседних членов этой суммы:

$$\frac{(-1)^{n+1}((2n+2)!)}{(-1-2n)((n+1)!)^2(4^{n+1})}x^{n+1} \div \frac{(-1)^n(2n!)}{(1-2n)(n!)^2(4^n)}x^n =$$

$$= -\frac{(2n+1)(2n+2)(2n-1)}{4(2n+1)(n+1)^2}x = -\frac{(2n-1)}{2(n+1)}x < 1 \text{ поэтому наши слагаемые монотонно убывают}$$

Оценим остаточный член для $n = 5$

$$\frac{(-1)^{n+1}((2n+2)!)}{(-1-2n)((n+1)!)^2(4^{n+1})} \cdot \frac{\epsilon^{n+1}}{(1+\epsilon)^{\frac{2n+1}{2}}} < \frac{(-1)^{n+1}((2n+2)!)}{(-1-2n)((n+1)!)^2(4^{n+1})}x^{n+1} = -\frac{21x^6}{1024} \approx 0.00032043 < 0.001$$

Таким образом, для того, чтобы получить необходимую точность, нам нужно выписать всего $n = 5$ слагаемых

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} = 1.22498 \approx 1,225$$

Стоит отметить, что в действительности $\sqrt{1,5}$ равен $1,2247... \approx 1,225$, что безусловно совпадает с полученным результатом.

Задача 5

Вычислите предел с помощью формулы Тейлора. (20)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2e^x - \sqrt[3]{x^3-5x^2}}{\ln^2(1-x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2e^x - \sqrt[3]{x^3-5x^2}}{\ln^2(1-x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+o(1)) - \sqrt[3]{-5x^2+o(x^2)}}{(x^3+o(x^3))^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sqrt[3]{5}x^{\frac{2}{3}} + o(x^{\frac{2}{3}})}{(x^6+o(x^6))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{5}x^{\frac{2}{3}} + o(x^{\frac{2}{3}})}{x^6} = \infty$$

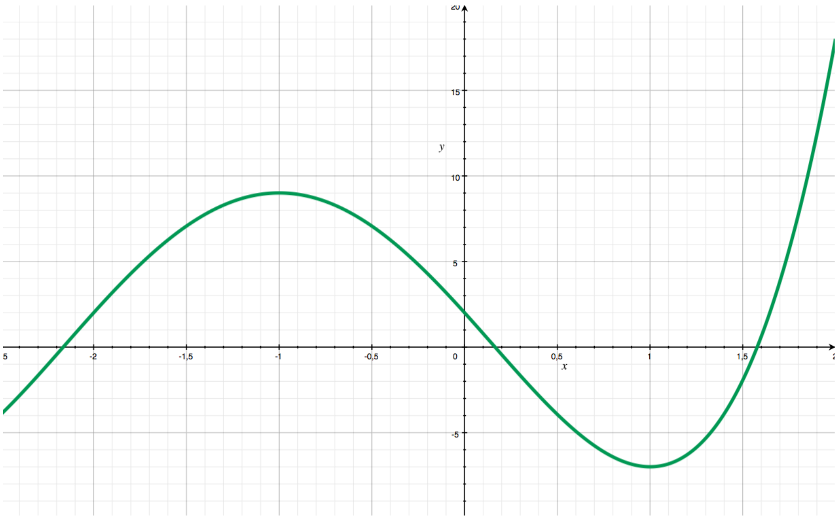
Задача 6

Для заданной функции $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 2$ *и отрезка* $[-2; 2]$ *найдите:*

а) промежутки возрастания и убывания, точки экстремума;

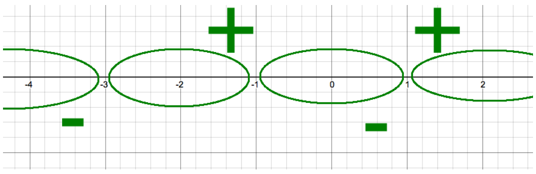
б) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

в) наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке $[-2; 2]$*;*



а) Для этого пункта нам понадобиться первая производная:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4(x^3 + 3x^2 - x - 3) = 4(x-1)(x^2 + 4x + 3) =$$
$$= 4(x-1)(x+1)(x+3)$$



Промежутки возрастания функции $\iff f'(x) > 0$:

$$x = (-2, -1) \cup (1, 2)$$

Промежутки убывания функции $\iff f'(x) < 0$:

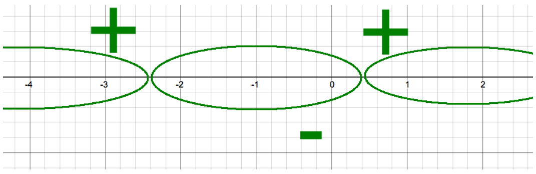
$$x = (-1, 1)$$

Точки экстремума $\iff f'(x) = 0$:

$$x = -1 \quad y = 9$$
$$x = 1 \quad y = -7$$

б) Для поиска точек выпуклости и вогнутости необходимо исследовать вторую производную:

$$f''(x) = (f'(x))' = 4(3x^2 + 6x - 1) = 12(x + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}})(x + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}})$$



Промежутки выпуклости вниз $\Longleftrightarrow f''(x) > 0$:

$$x = (\frac{2}{\sqrt{3}} - 1, 2)$$

Промежутки выпуклости вверх $\Longleftrightarrow f''(x) < 0$:

$$x = (-2, \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$$

Точки перегиба $\Longleftrightarrow f''(x) = 0$:

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \quad y = \frac{1}{9}$$

в) Для нахождения максимума мы должны сравнить значения функции в точках локального максимума и на концах интервала:

$$x = -2 \quad y = 2$$
$$x = -1 \quad y = 9$$
$$x = 1 \quad y = -7$$
$$x = 2 \quad y = 18$$

Отсюда $max(f(x))$ на промежутке $[-2, 2]$ равен 18.

Задача 7

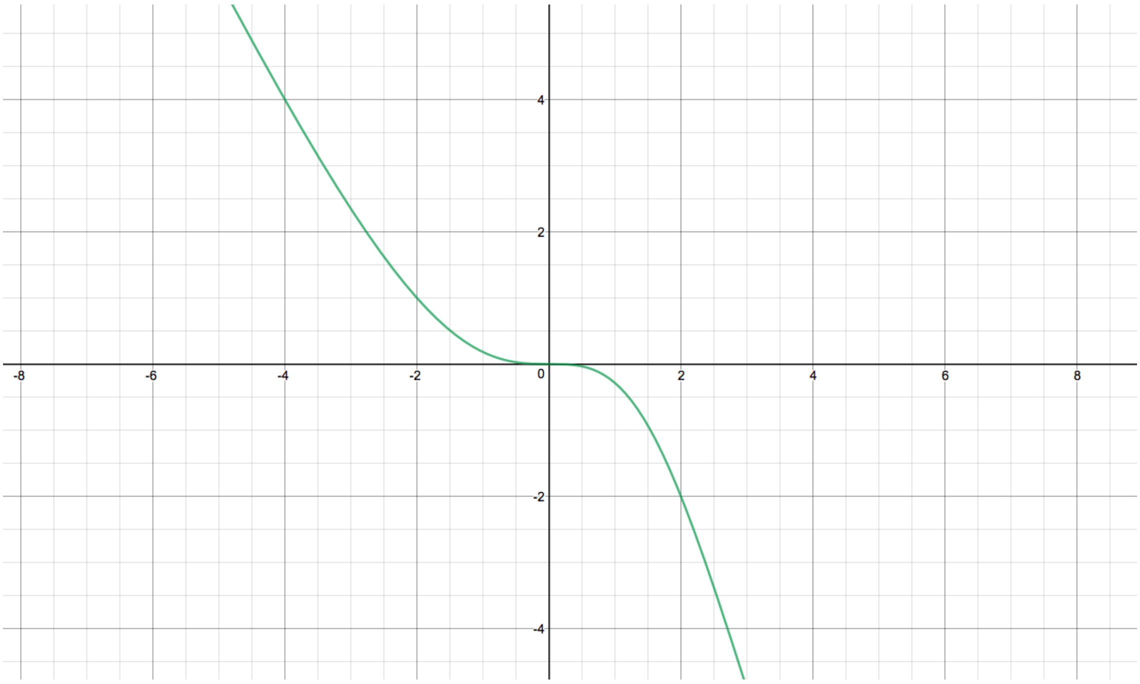
Исследуйте функцию с помощью производных первого и второго порядка, постройте эскиз ее графика(28):

$$\text{а) } y = \frac{-2x^3}{x^2 - 2x \pm 8}(-1)^n$$
$$\text{б) } y = e^{\frac{1}{x^2 - 2x \pm 8}}$$

n - номер моего варианта $\Rightarrow n = 4 \Rightarrow (-1)^n = 1$

1)

$$y = \frac{-2x^3}{x^2 - 2x + 8}$$

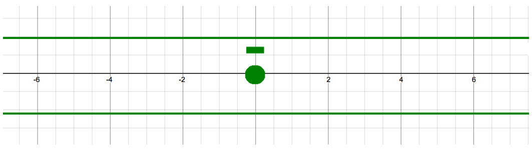


1) ОДЗ:

$$x^2 - 2x + 8 \neq 0 \Rightarrow x - \textit{любое}$$

2) Первая производная:

$$f'(x) = \frac{-6x^2(x^2 - 2x + 8) - (-2x^3)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 8)^2} = \frac{-2x^2(x^2 - 4x + 24)}{(x^2 - 2x + 8)^2} \leq 0$$



3) Промежутки возрастания функции $\Longleftrightarrow f'(x) > 0$:

$$\ldots$$

4) Промежутки убывания функции $\Longleftrightarrow f'(x) < 0$:

$$x \neq 0$$

5) *Точки экстремума* $\iff f'(x)=0$:

$$x = 0$$

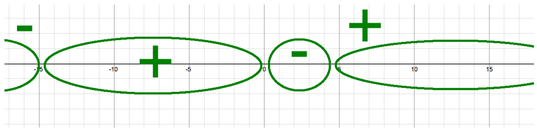
6) *Точки разрыва* $\iff f'(x)$ - *не определена*:

$$\ldots$$

7) *Вторая производная*:

$$f''(x) = \frac{(-4x(x^2-4x+24)-2x^2(2x-4))(x^2-2x+8)^2+2x^2(x^2-4x+24)\cdot 4(x-1)(x^2-2x+8)}{(x^2-2x+8)^4} =$$

$$= \frac{16x(x^2+12x-48)}{(x^2-2x+8)^3} = \frac{16x(x-2(\sqrt{21}-3))(x-2(-\sqrt{21}-3))}{(x^2-2x+8)^3}$$



8) *Промежутки выпуклости вниз* $\iff f''(x)>0$:

$$x = (2(-3-\sqrt{21}),0)\cup(2(\sqrt{21}-3),\infty)$$

9) *Промежутки выпуклости вверх* $\iff f''(x)<0$:

$$x = (-\infty,2(-3-\sqrt{21}))\cup(0,2(\sqrt{21}-3))$$

10) *Точки перегиба* $\iff f''(x)=0$:

$$x = 0$$
$$x = 2(-\sqrt{21}-3)$$
$$x = 2(\sqrt{21}-3)$$

11) *Ассимтоты*:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{-2x^2}{x^2-2x+8} = -2$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x)-kx = \frac{-2x^3}{x^2-2x+8}+2x = \frac{-2x^3+2x^3-4x^2+16x}{x^2-2x+8} = \frac{-4x^2+16x}{x^2-2x+8} = -4$$

$$\Rightarrow x\to-\infty : f(x)\to -2x-4$$

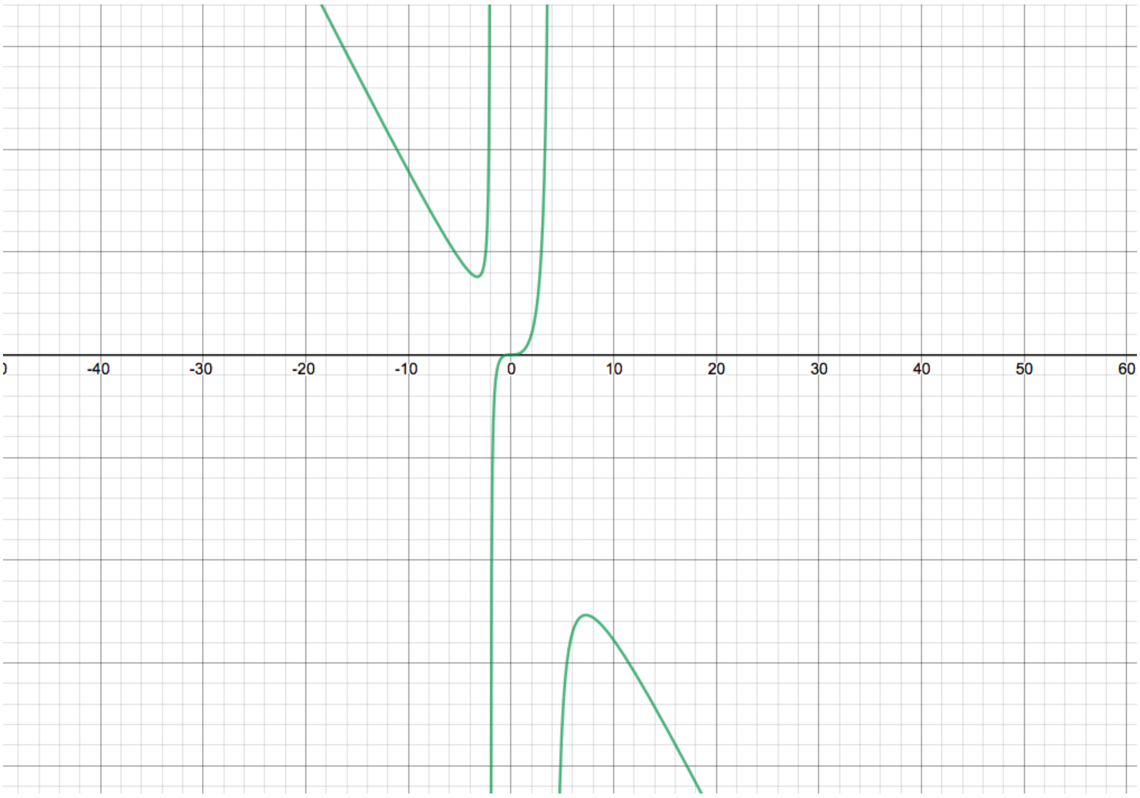
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{-2x^2}{x^2-2x+8} = -2$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} f(x)-kx = \frac{-2x^3}{x^2-2x+8}+2x = \frac{-2x^3+2x^3-4x^2+16x}{x^2-2x+8} = \frac{-4x^2+16x}{x^2-2x+8} = -4$$

$$\Rightarrow x\to-\infty : f(x)\to -2x-4$$

2)

$$y = \frac{-2x^3}{x^2 - 2x - 8}$$

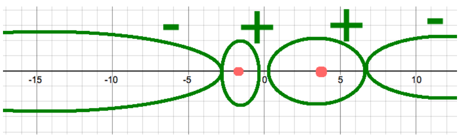


1) ОДЗ:

$$x^2 - 2x - 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2, 4$$

2) Первая производная:

$$f'(x) = \frac{-6x^2(x^2 - 2x - 8) - (-2x^3)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-2x^2(x^2 - 4x - 24)}{(x^2 - 2x - 8)^2} =$$
$$= \frac{-2x^2(x - 2(1 + \sqrt{7}))(x - 2(1 - \sqrt{7})}{(x + 2)^2(x - 4)^2}$$



Розовым цветом на рисунке отмечены выколотые точки.

3) Промежутки возрастания функции $\Longleftrightarrow f'(x) > 0$*:*

$$x = [2(1 - \sqrt{7}), 0] \cup [0, 2(1 + \sqrt{7})]$$

4) Промежутки убывания функции $\Longleftrightarrow f'(x) < 0$*:*

$$x = [-\infty, 2(1 - \sqrt{7})] \cup [2(1 + \sqrt{7}), \infty]$$

5) Точки экстремума $\iff f'(x) = 0$:

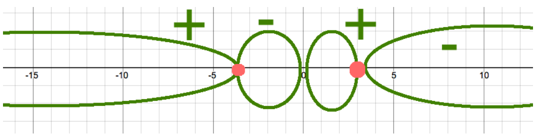
$$x = 0$$
$$x = 2(1 - \sqrt{7})$$
$$x = 2(1 + \sqrt{7})$$

6) Точки разрыва $\iff f'(x)$ *- не определена:*

$$x = -2$$
$$x = 4$$

7) Вторая производная:

$$f''(x) = \frac{(-4x(x^2 - 4x - 24) - 2x^2(2x - 4))(x^2 - 2x + 8)^2 + 2x^2(x^2 - 4x - 24) \cdot 4(x - 1)(x^2 - 2x - 8)}{(x^2 - 2x + 8)^4} =$$
$$= \frac{-48x(x^2 + 4x + 16)}{(x^2 - 2x - 8)^3} = \frac{-48x(x^2 + 4x + 16)}{(x + 2)^3(x - 4)^3}$$



Розовым цветом на рисунке отмечены выколотые точки.

8) Промежутки выпуклости вниз $\iff f''(x) > 0$:

$$x = (-\infty, -2) \cup (0, 4)$$

9) Промежутки выпуклости вверх $\iff f''(x) < 0$:

$$x = (-2, 0) \cup (4, \infty)$$

10) Точки перегиба $\iff f''(x) = 0$:

$$x = 0 \quad y = 0$$

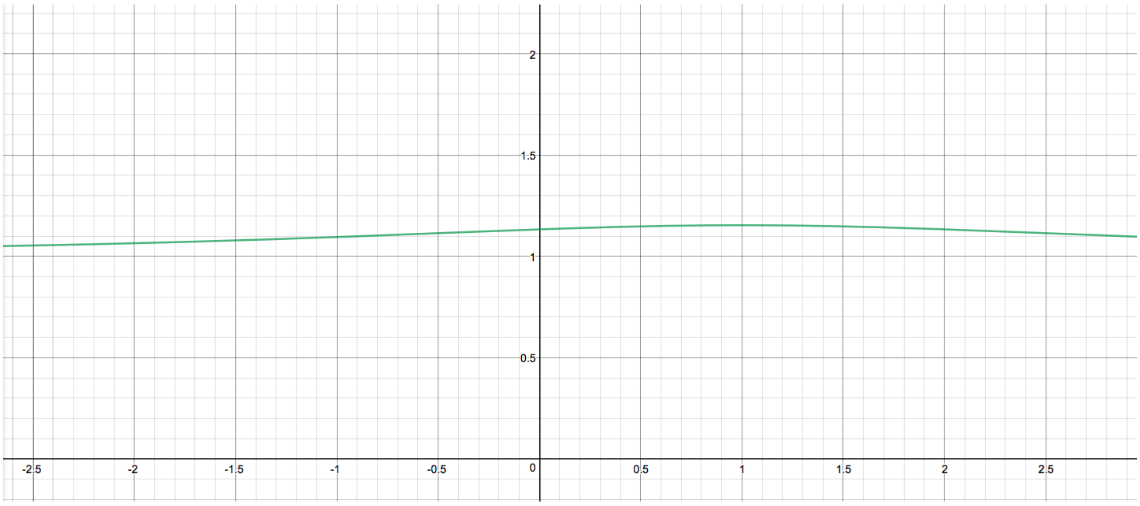
11) Ассимтоты:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$$
$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \frac{-2x^3}{x^2 - 2x - 8} + 2x = \frac{-2x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 16x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-4x^2 - 16x}{x^2 - 2x + 8} = -4$$
$$\Rightarrow x \to -\infty : f(x) \to -2x - 4$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$$
$$b_2 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \frac{-2x^3}{x^2 - 2x - 8} + 2x = \frac{-2x^3 + 2x^3 - 4x^2 + 16x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-4x^2 - 16x}{x^2 - 2x - 8} = -4$$
$$\Rightarrow x \to -\infty : f(x) \to -2x - 4$$

3)

$$y = e^{\frac{1}{x^2-2x+8}}$$

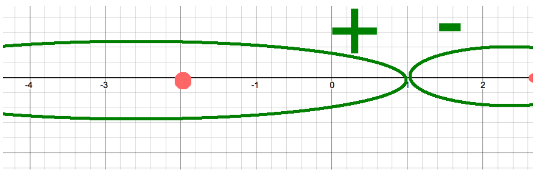


1) ОДЗ:

$$x^2 - 2x + 8 \neq 0 \Rightarrow x - \text{любое}$$

2) Первая производная:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-2x+8}} \cdot \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+8)^2}$$



3) Промежутки возрастания функции $\iff f'(x) > 0$:

$$x = (-\infty, 1)$$

4) Промежутки убывания функции $\iff f'(x) < 0$:

$$x = (1, +\infty)$$

5) Точки экстремума $\iff f'(x) = 0$:

$$x = 1$$

6) Точки разрыва $\iff f'(x)$ *- не определена:*

$$\ldots$$

7) Вторая производная:

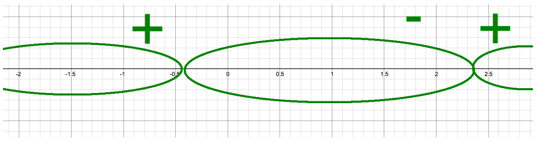
$$f''(x) = (e^{\frac{1}{x^2-2x+8}} \cdot \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+8)^2}) \cdot \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+8)^2} +$$

$$+ e^{\frac{1}{x^2-2x+8}} \cdot (-2) \cdot \frac{(x^2-2x+8)^2 - (x-1)(2(x^2-2x+8)(2x-2))}{(x^2-2x+8)^4} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{1}{x^2-2x+8}}(3x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 44x - 30)}{(x^2-2x+8)^4}$$

Подобрать корни для многочлена 4 степени, стоящего в числителе, к сожалению, нам не удается, поэтому мы воспользуемся советом Лепского и будем использовать Wolphram Alpha

$3x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 44x - 30$ - *имеет 2 вещесвенных корня:* $x_1 = -0,47488, \ x_2 = 2,4749$



8) Промежутки выпуклости вниз $\iff f''(x) > 0$*:*

$$x = (-\infty, -0.47) \cup (2.47, \infty)$$

9) Промежутки выпуклости вверх $\iff f''(x) < 0$*:*

$$x = (-0.47, 2.47)$$

10) Точки перегиба $\iff f''(x) = 0$*:*

$$x = 0.47 \quad y = 1.15$$
$$x = 2.47 \quad y = 1.12$$

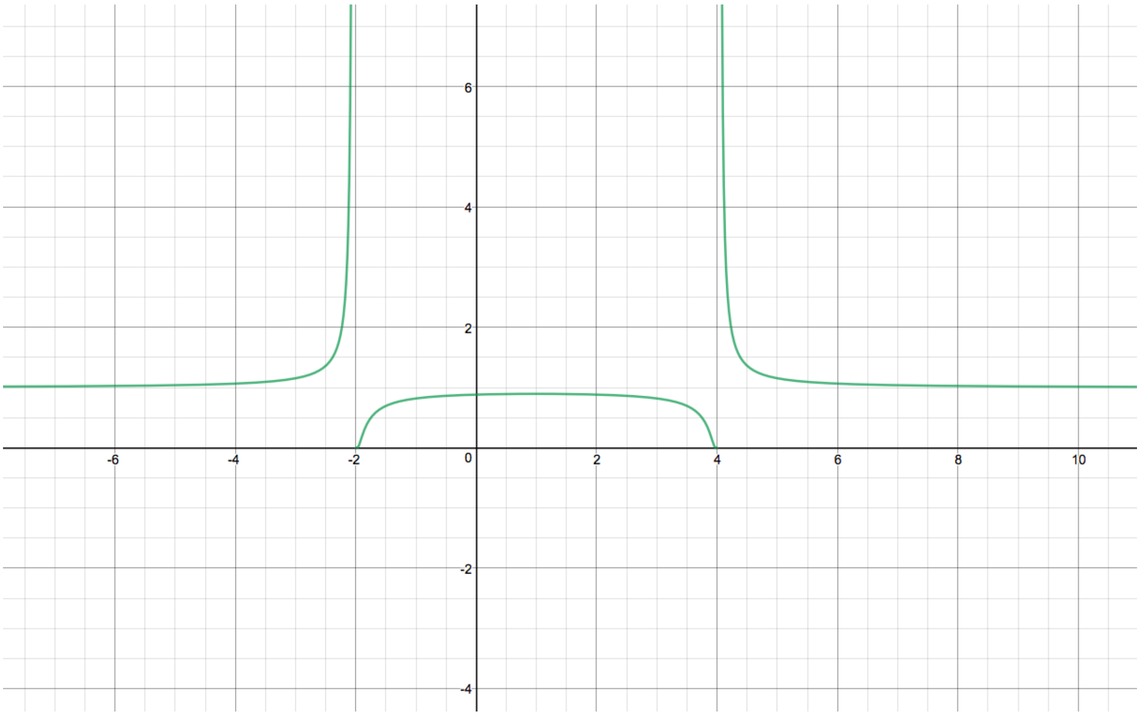
11) Ассимтоты:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2-2x+8}}}{x} = 0$$
$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^2-2x+8}} = 1$$
$$\Rightarrow x \to +\infty : f(x) \to 1$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2-2x+8}}}{x} = 0$$
$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x^2-2x+8}} = 1$$
$$\Rightarrow x \to -\infty : f(x) \to 1$$

4)

$$y = e^{\frac{1}{x^2-2x-8}}$$

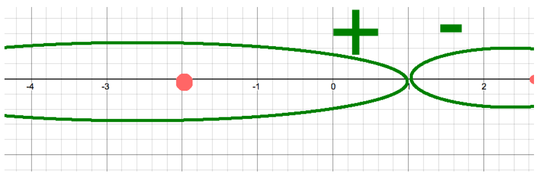


1) ОДЗ:

$$x^2 - 2x - 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2; 4$$

2) Первая производная:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-2x-8}} \cdot \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x-8)^2}$$



Розовым цветом на рисунке отмечены выколотые точки.

3) Промежутки возрастания функции $\iff f'(x) > 0$:

$$x = (-\infty, 1)$$

4) Промежутки убывания функции $\iff f'(x) < 0$:

$$x = (1, +\infty)$$

5) Точки экстремума $\iff f'(x) = 0$:

$$x = 1 \quad y = 0.89$$

6) Точки разрыва $\Longleftrightarrow f'(x)$ *- не определена:*

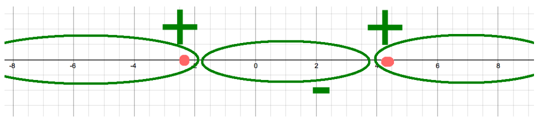
$$x = -2$$
$$x = 4$$

7) Вторая производная:

$$f''(x) = (e^{\frac{1}{x^2-2x-8}} \cdot \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x-8)^2}) \cdot \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x-8)^2} +$$
$$+ e^{\frac{1}{x^2-2x-8}} \cdot (-2) \cdot \frac{(x^2-2x-8)^2 - (x-1)(2(x^2-2x-8)(2x-2))}{(x^2-2x-8)^4} =$$
$$= e^{\frac{1}{x^2-2x-8}} \cdot \frac{2(3x^4-12x^3+2x^2+20x-94)}{(x^2-2x-8)^4}$$

Снова сталкиваемся с многочленом 4 степени и снова обращаемся к Wolphram Alpha

$3x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 20x - 94$ - *имеет 2 вещественных корня:* $x_1 = -1.9167,\ x_2 = 3.9167$



Розовым цветом на рисунке отмечены выколотые точки.

8) Промежутки выпуклости вниз $\Longleftrightarrow f''(x) > 0$*:*

$$x = (-\infty, -1.91) \cup (3.92, \infty)$$

9) Промежутки выпуклости вверх $\Longleftrightarrow f''(x) < 0$*:*

$$x = (-1.91, 3.92)$$

10) Точки перегиба $\Longleftrightarrow f''(x) = 0$*:*

$$x = -1.91 \quad y = 0.15$$
$$x = 3.92 \quad y = 0.12$$

11) Ассимтоты:

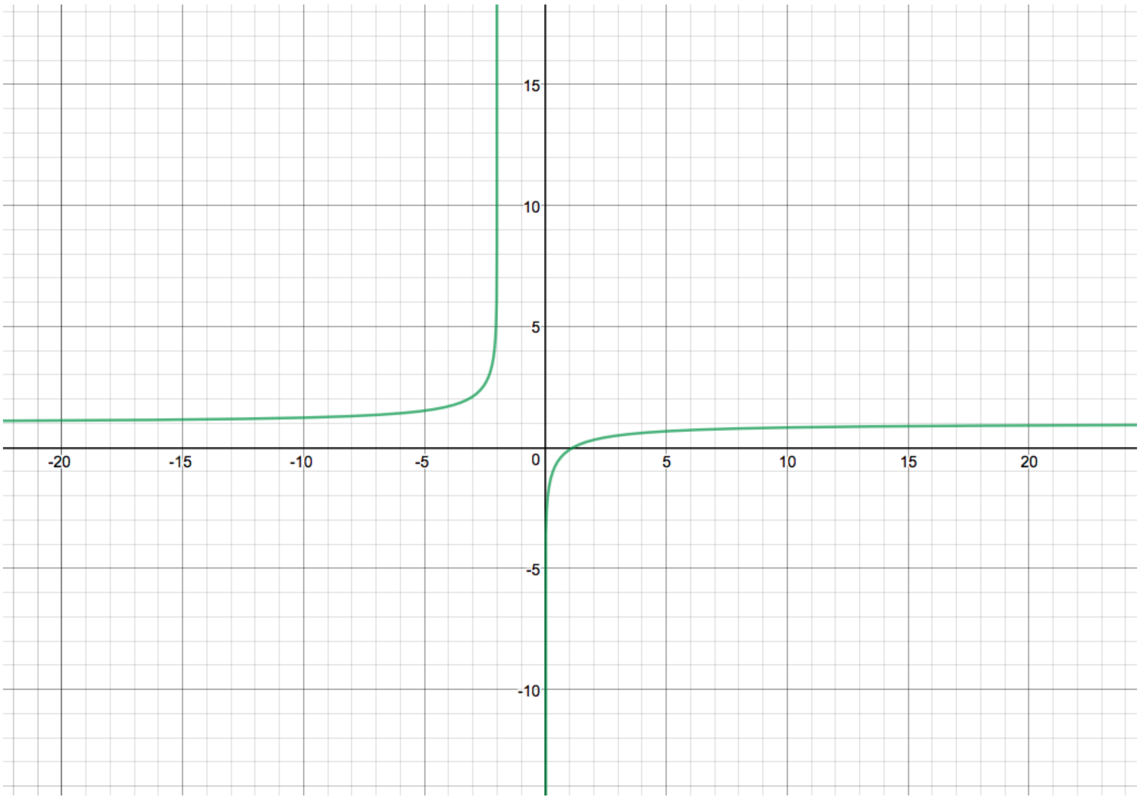
$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2-2x-8}}}{x} = 0$$
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2-2x-8}} = 1$$
$$\Rightarrow x \to +\infty : f(x) \to 1$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2-2x-8}}}{x} = 0$$
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2-2x-8}} = 1$$
$$\Rightarrow x \to -\infty : f(x) \to 1$$

Задача 8

Исследуйте функцию с помощью производных первого и второго порядка, постройте эскиз ее графика(2):

$$y = \ln \frac{x}{x+2} + 1$$

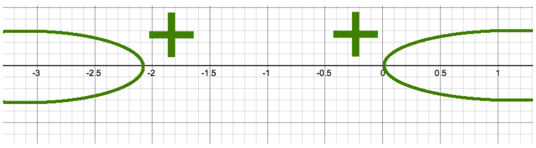


1) ОДЗ:

$$\frac{x}{x+2} > 0 \Rightarrow x \subset (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

2) Первая производная:

$$f'(x) = \frac{1}{(\frac{x}{x+2})} \cdot \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{x(x+2)}$$



3) Промежутки возрастания функции $\Longleftrightarrow f'(x) > 0$:

$$x = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

4) Промежутки убывания функции $\Longleftrightarrow f'(x) < 0$:

$$\ldots$$

5) Точки экстремума $\Longleftrightarrow f'(x) = 0$:

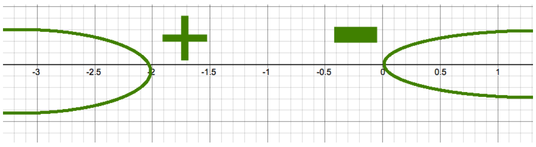
$$\ldots$$

6) Точки разрыва $\Longleftrightarrow f'(x)$ *- не определена:*

$$x = 0 \quad f'(x) = +\infty \quad y \to +\infty$$
$$x = 2 \quad f'(x) = +\infty \quad y \to -\infty$$

7) Вторая производная:

$$f''(x) = (f'(x))' = -\frac{2(2x+2)}{(x(x+2))^2} = -\frac{4(x+1)}{(x(x+2))^2}$$



8) Промежутки выпуклости вниз $\Longleftrightarrow f''(x) > 0$:

$$x = (-\infty, -2)$$

9) Промежутки выпуклости вверх $\Longleftrightarrow f''(x) < 0$:

$$x = (0, +\infty)$$

10) Точки перегиба $\Longleftrightarrow f''(x) = 0$:

$$\ldots$$

11) Ассимтоты:

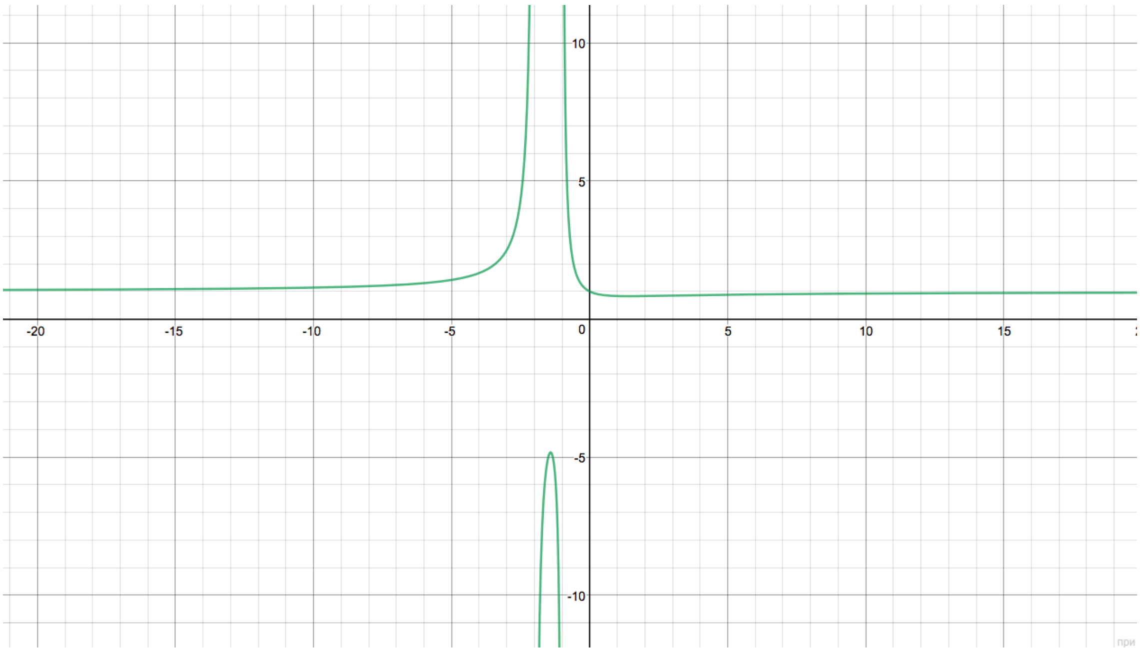
$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x}{x+2}}{x} + \frac{1}{x} = 0$$
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+2} + 1 = 1$$
$$\Rightarrow x \to +\infty : f(x) \to 1$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\frac{x}{x+2}}{x} + \frac{1}{x} = 0$$
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+2} + 1 = 1$$

Задача 9

Исследуйте функцию с помощью производных первого и второго порядка, постройте эскиз ее графика(6):

$$y = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2}$$



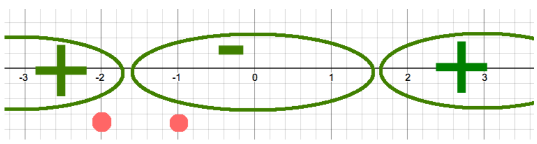
$$y = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+2-x}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{x}{x^2+3x+2}$$

1) ОДЗ:

$$x^2+3x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, -2$$

2) Первая производная:

$$f'(x) = -\frac{(x^2+3x+2) - x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+3x+2)^2}$$



Розовым цветом на рисунке отмечены выколотые точки.

3) Промежутки возрастания функции $\iff f'(x) > 0$:

$$x = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

4) Промежутки убывания функции $\iff f'(x) < 0$:

$$x = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

5) Точки экстремума $\Longleftrightarrow f'(x)=0$*:*

$$x=\sqrt{2} \quad y=0.83$$
$$x=-\sqrt{2} \quad y=-4.82$$

6) Точки разрыва $\Longleftrightarrow f'(x)$ *- не определена:*

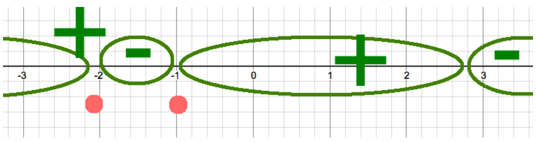
$$\begin{array}{lll} x=-2-0 & f'(x)=+\infty & y\to+\infty \\ x=-2+0 & f'(x)=+\infty & y\to-\infty \\ x=-1-0 & f'(x)=-\infty & y\to-\infty \\ x=-1+0 & f'(x)=-\infty & y\to+\infty \end{array}$$

7) Вторая производная:

$$f''(x)=(f'(x))'=\frac{2x(x^2+3x+2)^2-(x^2-2)2(x^2+3x+2)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^4}=$$
$$=\frac{2x^3+6x^2+4x-4x^3-6x^2+8x+12}{(x^2+3x+2)^3}=\frac{-2x^3+12x+12}{(x^2+3x+2)^3}=\frac{2(-x^3+6x+6)}{(x^2+3x+2)^3}=$$
$$=\frac{2x^3+6x^2+4x-4x^3-6x^2+8x+12}{(x^2+3x+2)^3}=\frac{-2x^3+12x+12}{(x^2+3x+2)^3}=\frac{-2(x^3-6x-6)}{(x+1)^3(x+2)^3}=$$
$$=\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{4}{(x+2)^3}$$

И снова корни многочлена очень трудно подобрать самому, поэтому мы идем к Wolphram Alpha :)

x^3-6x-6 *- имеет один корень* $x_0=\sqrt[3]{2}+2^{2/3}\approx 2,8473$



8) Промежутки выпуклости вниз $\Longleftrightarrow f''(x)>0$*:*

$$x=(-\infty,-2)\cup(-1,\ 2.85)$$

9) Промежутки выпуклости вверх $\Longleftrightarrow f''(x)<0$*:*

$$x=(-2,-1)\cup(2.85\ ,+\infty)$$

10) Точки перегиба $\Longleftrightarrow f''(x)=0$*:*

$$x=2.85 \quad y=2.85$$

11) Ассимтоты:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\frac{2}{x}}{x^2+3x+2} = 0$$
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2} = 1$$
$$\Rightarrow x \to +\infty : f(x) \to 1$$

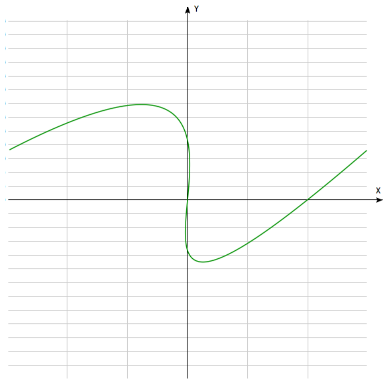
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2+\frac{2}{x}}{x^2+3x+2} = 0$$
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2} = 1$$
$$\Rightarrow x \to -\infty : f(x) \to 1$$

Задача 10

Исследуйте и постройте эскизы кривых (в б перейдите к полярным координатам) (10)

$$\text{а) } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 48t \end{cases} \quad \text{б) } x^4 + y^4 = x^2y^2 \tag{1}$$

а)



1) ОДЗ:

$$\dots$$

2) Первая производная:

$$y'_t = (\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 48t)' = t^2 + 2t - 48$$
$$x'_t = (\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t)' = t^2 + 7t - 8$$
$$y'_x = \frac{t^2 + 2t - 48}{t^2 + 7t - 8} = \frac{t-6}{t-1}$$

3) Промежутки возрастания функции $\Longleftrightarrow f'(x) > 0$*:*

$$t = (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$$

4) Промежутки убывания функции $\Longleftrightarrow f'(x) < 0$*:*

$$t = (1, 6)$$

5) Точки экстремума $\Longleftrightarrow f'(x) = 0$*:*

$$t = 6$$

6) Точки разрыва $\Longleftrightarrow f'(x)$ *- не определена:*

$$t = 8$$

7) Вторая производная:

$$y''_t = (y'_t)' = 2(t+1)$$
$$y''_x = \frac{2(t+1)}{(t-1)(t+8)}$$

8) Промежутки выпуклости вниз $\Longleftrightarrow f''(x) > 0$*:*

$$t = (-8, -1) \cup (1, +\infty)$$

9) Промежутки выпуклости вверх $\Longleftrightarrow f''(x) < 0$*:*

$$t = (-\infty, -8) \cup (-1, 1)$$

10) Точки перегиба $\Longleftrightarrow f''(x) = 0$*:*

$$t = -1$$

11) Ассимтоты:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 48t}{\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t} = 1$$
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \frac{-\frac{5}{2}x^2 - 40t}{\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t} = 0$$
$$\Rightarrow x \to +\infty : f(x) \to x$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3}t^3 + t^2 - 48t}{\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t} = 1$$
$$b_2 = \frac{-\frac{5}{2}x^2 - 40t}{\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t} = 0$$
$$\Rightarrow x \to -\infty : f(x) \to x$$

б)

$$x^4 + y^4 = x^2y^2$$
$$y = \rho \sin t \quad x = \rho \cos t$$
$$\rho^4(\sin^4 t + \cos^4 t - \sin^2 t \cos^2 t) = 0$$

Отметим,что в тех случаях, когда $\sin^4 t + \cos^4 t - \sin^2 t \cos^2 t \neq 0$, $\rho(t)$ получается равным 0, поэтому наш график выраждается в точку. Если же наоборот, выражение равно 0, это значит, что на графике мы имеем луч из 0.

$$\sin^4 t + \cos^4 t - \sin^2 t \cos^2 t = 0$$
$$1) \cos 4t = \cos(2t + 2t) = \cos^2 2t - \sin^2 2t = (2\cos^2 t - 1)^2 - (2 \sin t \cos t)^2 =$$
$$= 4\cos^4 t - 4\cos^2 t + 1 - 4\sin^2 t \cos^2 t = 4\cos^4 t - 4\cos^2 t(1 + \sin^2 t) + 1 =$$
$$4\cos^4 t - 4(1 - \sin^2 t)(1 + \sin^2 t) + 1 = 4\cos^4 t + 4\sin^4 t - 3$$
$$2) \sin^2 t \cos^2 t = (\sin t \cos t)^2 = \frac{1}{4}(\sin 2t)^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos(4t))$$

Теперь собираем все вместе

$$\sin^4 t + \cos^4 t - \sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4}(\cos 4t + 3) - \frac{1}{8}(1 - \cos(4t)) = \frac{1}{8}(3\cos 4t + 5) = 0 \Rightarrow \cos 4t = -\frac{5}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{не выполняется не при каких } t \Rightarrow \text{график есть просто точка}$$

Задача 11

Найдите интегралы(14):

$$\int \frac{2^x\sqrt{\arctan{(\dfrac{2^x}{5})}}}{25+4^x}dx$$

Сделаем первую замену $v = 2^x \Rightarrow dv = d(e^{\ln 2\cdot x}) = e^{\ln 2x}\cdot ln2\cdot dx = 2^x\cdot ln2\cdot dx$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan(\frac{v}{5})}}{(25+v^2)\cdot ln2}dv$$

После этого нам понадобиться еще одна замена: $u = \arctan(\frac{v}{5})$
$\Rightarrow du = \dfrac{(\frac{dv}{5})}{1+\frac{v^2}{25}} = 5\cdot\dfrac{dv}{25+v^2}$

$$\int \frac{\sqrt{u}du}{5\cdot ln2} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{15\cdot ln2}+C = \frac{2(\arctan(\frac{v}{5}))^{\frac{3}{2}}}{15\cdot ln2}+C = \frac{2(\arctan(\frac{2^x}{5}))^{\frac{3}{2}}}{15\cdot ln2}+C$$

Задача 12

Найдите интегралы(18):

$$а)\int\frac{dx}{x-10\sqrt[9]{x^5}},\quad б)\int\frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$$

а) Сделаем первую замену: $v = \sqrt[9]{x} \Rightarrow dv = \frac{dx}{9\sqrt[9]{x^8}} \Rightarrow dx = 9v^8dv$

$$\int\frac{dx}{x-10\sqrt[9]{x^5}} = \int\frac{9v^8dv}{v^5(v^4-10)} = \int\frac{9v^3dv}{v^4-10}$$

После этого нам понадобиться еще одна замена: $u = v^4-10 \Rightarrow du = 4v^3dv$

$$\int\frac{9du}{4u} = \frac{9}{4}\ln|u|+C = \frac{9}{4}\ln|v^4-10|+C = \frac{9}{4}\ln|\sqrt[9]{x^4}-10|+C$$

б) Сделаем первую замену: $v = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow dv = \frac{-xdx}{\sqrt{9-x^2}}$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{-dv}{x^2} = \int\frac{-dv}{9-v^2} = \int\frac{dv}{v^2-3^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{v-3}{v+3}\right|+C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{9-x^2}-3}{\sqrt{9-x^2}+3}\right|+C$$

Задача 13

Найдите интегралы(22):

$$\text{а) } \int xe^{3x}dx \qquad \text{б) } \int (x^2-5x+3)\cos(2x)\ dx \qquad \text{в) } \int e^{-4x}\sin(3x)\ dx$$

Мы будем интегрировать по частям

а)

$$\int xe^{3x}dx = \int xd(\frac{e^{3x}}{3}) = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}dx}{3} + C = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C = \frac{(3x-1)e^{3x}}{9} + C$$

б)

$$\int (x^2-5x+3)\cos(2x)\ dx = \int (x^2-5x+3)d(\frac{\sin 2x}{2}) = \frac{(x^2-5x+3)\sin(2x)}{2} - \int \frac{(2x-5)\sin(2x)dx}{2} +$$

$$+ C = \frac{(x^2-5x+3)\sin(2x)}{2} - \int \frac{(2x-5)d(-\cos(2x)))}{4} + C = \frac{(x^2-5x+3)\sin(2x)}{2} + \frac{(2x-5)\cos(2x)}{4} +$$

$$+ \int \frac{-\cos(2x)dx}{2} + C = \frac{(x^2-5x+3)\sin(2x)}{2} + \frac{(2x-5)\cos(2x)}{4} - \frac{\sin(2x)}{4} + C =$$

$$= \frac{(2x^2-10x+5)\sin(2x) + (2x-5)\cos(2x)}{4}$$

в)

$$\int e^{-4x}\sin(3x)\ dx = \int e^{-4x}d(\frac{-\cos(3x)}{3}) = \frac{-e^{-4x}\cos 3x}{3} - \int (-4)e^{-4x}\frac{-\cos(3x)}{3}dx + C =$$

$$= \frac{-e^{-4x}\cos(3x)}{3} + \int 4e^{-4x}d(\frac{-\sin(3x)}{9}) + C = \frac{-e^{-4x}\cos(3x)}{3} + \frac{-4e^{-4x}\sin(3x)}{9} -$$

$$- \int (-16)e^{-4x}\frac{-\sin(3x)}{9}dx + C = \frac{-e^{-4x}\cos(3x)}{3} + \frac{-4e^{-4x}\sin(3x)}{9} - \int \frac{16e^{-4x}\sin(3x)}{9}dx + C \Rightarrow$$

$$(1+\frac{16}{9})\int e^{-4x}\sin(3x)dx = \frac{-e^{-4x}\cos(3x)}{3} - \frac{4e^{-4x}\sin(3x)}{9} + C \Rightarrow$$

$$\int e^{-4x}\sin(3x)dx = -\frac{3e^{-4x}\cos(3x)}{25} - \frac{4e^{-4x}\sin(3x)}{25} + C = -\frac{(4\sin(3x)+3\cos(3x))e^{-4x}}{25} + C$$

Задача 14

Найдите интегралы(26):

$$\text{а)} \int \frac{2x-13}{x^2+2x+37}dx \qquad \text{б)} \int \frac{5x+9}{x^2+5x+4}dx$$

а)

$$\int \frac{2x-13}{x^2+2x+37}dx = \int \frac{2x+2-15}{x^2+2x+37}dx = \int \frac{d(x^2+2x+37)-15dx}{x^2+2x+37} = \ln|x^2+2x+37| -$$

$$-\int \frac{15dx}{(x+1)^2+36} + C = \ln|x^2+2x+37| - \int \frac{15d(x+1)}{36((\frac{x+1}{6})^2+1)} + C = \ln|x^2+2x+37| -$$

$$-\frac{15}{6}\arctan(\frac{x+1}{6}) + C = \ln|x^2+2x+37| - \frac{5}{2}\arctan(\frac{x+1}{6}) + C$$

б)

$$\int \frac{5x+9}{x^2+5x+4}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+5)-\frac{7}{2}}{x^2+5x+4}dx = \int \frac{\frac{5}{2}d(x^2+5x+4)-\frac{7}{2}dx}{x^2+5x+4} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2+5x+4| - \frac{7}{2}\int \frac{d(x+\frac{5}{2})}{(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}\ln|x^2+5x+4| +$$

$$+\frac{7}{2}\int \frac{d(x+\frac{5}{2})}{(\frac{3}{2})^2-(x+\frac{5}{2})^2} + C = \frac{5}{2}\ln|x^2+5x+4| +$$

$$+\frac{7}{6}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+x+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}-x-\frac{5}{2}}\right| + C = \frac{5}{2}\ln|x^2+5x+4| + \frac{7}{6}\ln\left|\frac{x+4}{x+1}\right| + C =$$

$$\frac{5}{2}\ln|x+1| + \frac{5}{2}|x+4| + \frac{7}{6}\ln|x+4| - \frac{7}{6}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{11|x+4|+4|x+1|}{3} + C$$

Задача 15

Найдите интегралы(30):

а) $\displaystyle\int \frac{(4x+3)dx}{(x+3)^2(x^2+x+4)}$ *б)* $\displaystyle\int \frac{(x^2+x-7)dx}{x^4-3x^3-8x+24}$ *в)* $\displaystyle\int \frac{(x^4-4x^3+2x^2-7)dx}{x^3-6x^2+5x}$

Воспользуемся методом неопределенных коэффицентов

а)

$$\int \frac{(4x+3)dx}{(x+3)^2(x^2+x+4)} = \int \frac{Ax+B}{(x+3)^2}dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+4}dx \Rightarrow$$

$$4x+3 = Ax^3+Ax^2+4Ax+Bx^2+Bx+4B+Cx^3+6Cx^2+9Cx+Dx^2+6Dx+9D =$$
$$= (A+C)x^3+(A+B+6C+D)x^2+(4A+B+9C+6D)x+(4B+9D) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+6C+D=0 \\ 4A+B+9C+6D=4 \\ 4B+9D=3 \end{cases} \begin{cases} A+C=0 \\ B+5C+D=0 \\ B+5C+6D=4 \\ 4B+9D=3 \end{cases} \begin{cases} A=-C \\ D=\frac{4}{5} \\ B+5C+\frac{4}{5}=0 \\ 4B+\frac{36}{5}=3 \end{cases} \begin{cases} A=-C=-\frac{1}{20} \\ D=\frac{4}{5} \\ C=\frac{1}{20} \\ B=-\frac{21}{20} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int -\frac{(x+21)dx}{20(x+3)^2} + \int \frac{(x+16)dx}{20(x^2+x+4)} = -\int \frac{d((x+3)^2)}{40(x+3)^2} - \int \frac{36d(x+3)}{40(x+3)^2} + \int \frac{d(x^2+x+4)}{40(x^2+x+4)} +$$
$$+ \int \frac{31d(x+\frac{1}{2})}{40((x+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4})} = -\frac{\ln(x+3)^2}{40} + \frac{9}{10(x+3)} + \frac{\ln|x^2+x+4|}{40} + \frac{31\sqrt{15}}{300}\arctan(\frac{2\sqrt{15}(x+\frac{1}{2})}{15}) + C =$$
$$= \frac{|x^2+x+4|-2\ln|x+3|}{40} + \frac{31\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{15}})}{20\sqrt{15}} + \frac{9}{10(x+3)} + C$$

б)

$$\int \frac{(x^2+x-7)dx}{x^4-3x^3-8x+24} = \int \frac{(x^2+x-7)dx}{(x-2)(x-3)(x^2+2x+4)} = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x-3}dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+4}dx$$
$$x^2+x-7 = (Ax-3A)(x^2+2x+4)+(Bx-2B)(x^2+2x+4)+(Cx+D)(x-2)(x-3) =$$
$$= Ax^3-Ax^2-2Ax-12A+Bx^3-8B+Cx^3-5Cx^2+Dx^2+6Cx-5Dx+6D =$$
$$= (A+B+C)x^3+(-A-5C+D)x^2+(-2A+6C-5D)x+(-12A-8B+6D) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-5C+D=1 \\ -2A+6C-5D=1 \\ -12A-8B+6D=-7 \end{cases} \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-4C+D=1 \\ 2B+8C-5D=1 \\ 4B+12C+6D=-7 \end{cases} \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-4C+D=1 \\ 16C-7D=-1 \\ 28C+2D=-11 \end{cases} \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-4C+D=1 \\ 57D=-37 \\ -4C+16D=-9 \end{cases}$$

$A=\frac{1}{12}$ $B=\frac{5}{19}$ $C=-\frac{79}{228}$ $D=-\frac{37}{57}$

$$\int \frac{d(x-2)}{12(x-2)} + \int \frac{5d(x-3)}{19(x-3)} + \int \frac{-\frac{79}{456}d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} - \int \frac{23}{76((x+1)^2+3)} =$$
$$= \frac{\ln|x-2|}{12} + \frac{5\ln|x-3|}{19} - \frac{79\ln|x^2+2x+4|}{456} - \frac{23}{76\sqrt{3}}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

в)

$$\int \frac{(x^4-4x^3+2x^2-7)dx}{x^3-6x^2+5x} = \int (x+2)dx + \int \frac{9x^2-10x-7}{x(x-5)(x-1)}dx =$$

$$= \int (x+2)dx + \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-1} + \int \frac{Cdx}{x-5} \Rightarrow 9x^2-10x-7 = A(x-1)(x-5) +$$

$$+ Bx(x-5) + Cx(x-1) = (A+B+C)x^2 - (6A+5B+C)x + 5A$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ 6A+5B+C=10 \\ 5A=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} B+C=\frac{52}{5} \\ 5B+C=\frac{92}{5} \\ A=-\frac{7}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{7}{5} \\ B=2 \\ C=\frac{42}{5} \end{cases}$$

$$\int (x+2)dx - \int \frac{7dx}{5x} + \int \frac{2d(x-1)}{x-1} + \int \frac{42d(x-5)}{5(x-5)} =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{7\ln|x|}{5} + 2\ln|x-1| + \frac{42\ln|x-5|}{5} + C$$

Задача 16

Найдите интегралы(4):

$$\text{а) } \int \sin^2 x \cos^4 x \; dx \qquad \text{б) } \int \sin 3x \cos 5x \; dx$$

а)

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \; dx = \int (\frac{\sin 2x}{2})^2 \cos^2 x \; dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x+\cos 2x - \frac{\cos 6x+\cos 2x}{2})dx = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4xdx + \frac{1}{32}\int \cos 2xdx -$$

$$- \frac{1}{32}\int \cos 6xdx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C = -\frac{\sin(6x)+3\sin(4x)-3\sin(2x)-12x}{192} + C$$

б)

$$\int \sin 3x \cos 5x \; dx = \int \frac{\sin 8x - \sin 2x}{2}dx = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C = -\frac{\cos(8x)-4\cos(2x)}{16} + C$$

Задача 17

Найдите интегралы(8):

$$\int \frac{dx}{2-\sin x+\cos x}$$

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $t = tg(\frac{x}{2}) \Rightarrow dx =$
$= \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{2-\sin x+\cos x} = \int \frac{dx}{2-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t^2-2t+1-t^2} = \int \frac{2dt}{t^2-2t+3} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2+2} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\, arctg(\frac{t-1}{\sqrt{2}}) + C = \sqrt{2}\, arctg(\frac{tg(\frac{x}{2})-1}{\sqrt{2}}) + C$$

Задача 18

а) Вычислите интегралы по определению б) Найдите верхние и нижние суммы Дарбу для 8-ми точечного равномерного и табличного разбиения отрезка интегрирования(12)

$$\text{а)} \int\limits_1^5 (4x-3x^2)dx \qquad \text{б)} \int\limits_{-6}^{-2} (4^{x+2}+5\cdot 3^{x+3})dx \qquad \text{в)} \int\limits_{5\pi/2}^{7\pi/2} (3\sin 2x + 3\cos 2x)dx$$

1)

$$\int\limits_1^5 (4x-3x^2)dx = \left[x = 1+4i/n\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{4}{n}(4+16i/n-3-24i/n-48i^2/n^2) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{4}{n}(-8i/n+1-48i^2/n^2) = \frac{4}{n}(-8\frac{n(n+1)}{2n}+n-48\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}) = -76$$

Разобьем наш отрезок от 1 до 5 на 8 равных частей: 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5. Тогда для вычисления сумм Дарбу нам нужно знать значение нашей функции в каждой из этих точек:

$$f(1) = 1 \quad f(1,5) = -0.75 \quad f(2) = -4 \quad f(2.5) = -8.75 \quad f(3) = -15$$
$$f(3.5) = -22.75 \quad f(4) = -32 \quad f(4.5) = -42.75 \quad f(5) = -55$$

$S_{min} = 0.5(-0.75-4-8.75-15-22.75-32-42.75-55) = -90.5$
$S_{max} = 0.5(1-0.75-4-8.75-15-22.75-32-42.75) = -62.5$

2)

$$\int\limits_{-6}^{-2} (4^{x+2}+5\cdot 3^{x+3})dx = \left[x = -6+4i/n\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{4}{n}(4^{4i/n-4}+5\cdot 3^{4i/n-3}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{64n}4^{4i/n} + \sum_{i=0}^{n} \frac{20}{27n}\cdot 3^{4i/n} =$$
$$= \frac{1}{64n}\cdot\frac{1-4^{4\frac{n+1}{n}}}{1-4^{4\frac{1}{n}}} + \frac{20}{27n}\cdot\frac{1-3^{4\frac{n+1}{n}}}{1-3^{4\frac{1}{n}}} = \frac{1}{64n}\cdot\frac{4^{4\frac{n+1}{n}}-1}{e^{4\ln 4\frac{1}{n}}-1} + \frac{20}{27n}\cdot\frac{3^{4\frac{n+1}{n}-1}}{e^{4\ln 3\frac{1}{n}}-1} =$$
$$= \frac{255}{256\ln 4} + \frac{400}{27\ln 3} \approx 14.204$$

Разобьем наш отрезок от -6 до -2 на 8 равных частей: $-6,\ -5.5,\ -5,\ -4.5,\ -4,\ -3.5,\ -3,\ -2.5,\ -2.$ Тогда для вычисления сумм Дарбу нам нужно знать значение нашей функции в каждой из этих точек:

$$f(-6) = 0.189 \quad f(-5.5) = 0.329 \quad f(-5) = 0.571 \quad f(-4.5) = 0.994 \quad f(-4) = 1.729$$
$$f(-3.5) = 3.012 \quad f(-3) = 5.25 \quad f(-2.5) = 9.160 \quad f(-2) = 16$$

$S_{min} = 0.5\ (0.189 + 0.329 + 0.571 + 0.994 + 1.729 + 3.012 + 5.25 + 9.160) \approx 10.617$
$S_{max} = 0.5\ (0.329 + 0.571 + 0.994 + 1.729 + 3.012 + 5.25 + 9.160 + 16) \approx 18.523$

3)

$$\int\limits_{5\pi/2}^{7\pi/2} (3\sin 2x + 3\cos 2x)dx = 3\left[\int\limits_{5\pi/2}^{7\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2x\ d(2x) + \int\limits_{5\pi/2}^{7\pi/2} \tfrac{1}{2}\cos 2x\ d(2x)\right] = \big[y = 2x\big] =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\int\limits_{5\pi}^{7\pi} \sin y\ dy + \int\limits_{5\pi}^{7\pi} \cos y\ dy\right] = \big[y = 5\pi + 2\pi i/n\big] = \frac{3}{2}\left[\begin{matrix} \sum\limits_{i=0}^{n} \sin(5\pi + 2\pi i/n)\ 2\pi/n + \\ + \sum\limits_{i=0}^{n} \cos(5\pi + 2\pi i/n)\ 2\pi/n \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\begin{matrix} \frac{\sin(2\pi\frac{(n+1)}{n})\cos(5\pi+\pi)}{\sin(\frac{\pi}{n})}\ 2\pi/n \\ + \frac{\sin(2\pi\frac{(n+1)}{n})\sin(5\pi+\pi)}{\sin(\frac{\pi}{n})}\ 2\pi/n \end{matrix}\right] = 0 \text{ по формуле суммы синусов и косинусов}$$

Разобьем наш отрезок от $5\pi/2$ до $7\pi/2$ на 8 равных частей: $5\pi/2,\ 5.25\pi/2,\ 5.5\pi/2,\ 5.75\pi/2,\ 6\pi/2,\ 6.25\pi/2,\ 6.5\pi/2,\ 6.75\pi/2,\ 7\pi/2$. Тогда для вычисления сумм Дарбу нам нужно знать значение нашей функции в каждой из этих точек:

$$f(5\pi/2) = -3 \quad f(5.25\pi/2) = -4.24 \quad f(5.5\pi/2) = -3 \quad f(5.75\pi/2) = 0 \quad f(6\pi/2) = 3$$
$$f(6.25\pi/2) = 4.24 \quad f(6.5\pi/2) = 3 \quad f(6.75\pi/2) = 0 \quad f(7\pi/2) = -3$$

$S_{min} = 0.5\ (-4.24 - 4.24 - 3 + 0 + 3 + 3 + 0 - 3) \approx -4.24$
$S_{max} = 0.5\ (-3 - 3 + 0 + 3 + 4.24 + 4.24 + 3 + 0) \approx 4.24$

Задача 19

Вычислите пределы с помощью определенного интеграла(16)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-1} + \cdots + \sqrt{4n^2-n^2}}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-1} + \cdots + \sqrt{4n^2-n^2}}{n^2} = n \to \infty \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{4n^2-i^2}}{n^2} = n \to \infty \sum_{i=1}^{n} \sqrt{4 - (\frac{i}{n})^2}\ \frac{1}{n}$$

Так как $n \to \infty$, то $\frac{1}{n} = dx \to 0$, где $x = \frac{i}{n}$.

Отсюда, данная сумма эквивалентна интегралу:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}\,d(\frac{x}{2}) = \big[y=\tfrac{x}{2}\big] =$$

$$= 4\int_0^{0.5} \sqrt{1-y^2}\,d(y) = \big[z = arcsin(y)\big] = 4\int_0^{\pi/6} \cos^2 z\,dz = 4\int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos(2z)}{2}\,dz = \big[t=2z\big] =$$

$$= \int_0^{\pi/3} (dt + \cos t\,dt) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Задача 20

Вычислите интегралы (20)

$$\int_1^6 (3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2} - 5\cdot 2^x)\,dx$$

$$\int_1^6 (3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2} - 5\cdot 2^x)\,dx = 3\int_1^6 \sqrt[3]{x}dx - 4\int_1^6 \frac{dx}{x^2} - 5\int_1^6 2^x\,dx =$$

$$(\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x} - \frac{5\cdot 2^x}{\ln 2})\,\Big|_1^6 \approx -428.288$$

Задача 21

Вычислите интегралы (24)

$$\text{а)}\ \int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} \qquad \text{б)}\ \int_2^3 x(3x+2)^7dx \qquad \text{в)}\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$$

а)

$$\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = \big[y = \arcsin\tfrac{x}{4}\big] = 16\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 y\ d(\sin y)}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = 16\int_0^{\pi/6} \sin^2 y\ dy = 16\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2y}{2}dy =$$

$$= \big[z=2y\big] = 4\int_0^{\pi/3} (1-\cos z)dz = 4(z-\sin z)\big|_0^{\pi/3} = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

б)

$$\int_2^3 x(3x+2)^7dx = \big[y=3x+2\big] = \int_8^{11} \frac{y-2}{9}y^7dy = \frac{1}{9}\int_8^{11} (y^8dy - 2y^7dy) = \frac{1}{9}(\frac{y^9}{9}dy - \frac{y^8}{4})\big|_8^{11} =$$

$$= 87860307/4 = 21965076\frac{3}{4}$$

в)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \left[t = tg(\tfrac{x}{2}) \Rightarrow dx = 2\tfrac{dt}{1+t^2}\right] = \int\limits_0^1 \frac{2dt}{3+3t^2+2t+1-t^2} = \int\limits_0^1 \frac{2dt}{2t^2+2t+4} =$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+t+2} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{7}}(t+\frac{1}{2})\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{(2t+1)}{\sqrt{7}})\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{3}{\sqrt{7}}) \approx$$

$$\approx 0.36791$$

Задача 22

Вычислите интегралы (28)

$$\text{а)} \int\limits_0^{\pi} x\cos(\frac{2x}{5})dx \qquad \text{б)} \int\limits_0^3 (x^2-6x-7)e^{x/3}dx$$

а)

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos(\frac{2x}{5})dx = \frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi} xd(\sin\frac{2x}{5}) = \frac{5}{2}x\sin\frac{2x}{5}\Big|_0^{\pi} - \frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{2x}{5}\ dx = \frac{5}{2}x\sin\frac{2x}{5}\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{25}{4}\cos\frac{2x}{5}\Big|_0^{\pi} = \frac{5}{2}\pi\sin\frac{2\pi}{5} + \frac{25}{4}\cos\frac{2\pi}{5} - \frac{25}{4} \approx 3.1509$$

б)

$$\int\limits_0^3 (x^2-6x-7)e^{x/3}dx = 3\int\limits_0^3 (x^2-6x-7)d(e^{x/3}) = 3\left[(x^2-6x-7)e^{x/3}\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 (2x-6)e^{x/3}dx\right] =$$

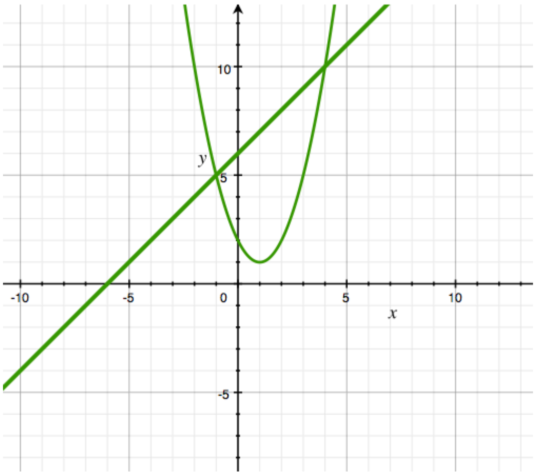
$$= 3\left[(x^2-6x-7)e^{x/3}\Big|_0^3 - 3\int\limits_0^3 (2x-6)d(e^{x/3})\right] = 3\left[(x^2-6x-7)e^{x/3}\Big|_0^3 - 3\left[(2x-6)e^{x/3}\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 2e^{x/3}dx\right]\right] =$$

$$= 3(x^2-6x-7)e^{x/3}\Big|_0^3 - 9(2x-6)e^{x/3}\Big|_0^3 + 54e^{x/3}\Big|_0^3 = 3e^{x/3}(x^2-12x+29)\Big|_0^3 \approx -70.69$$

Задача 23

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (2)

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad y = x + 6$$



Найдем точки пересечения этих функций:

$$x^2 - 2x + 2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4, \ -1$$

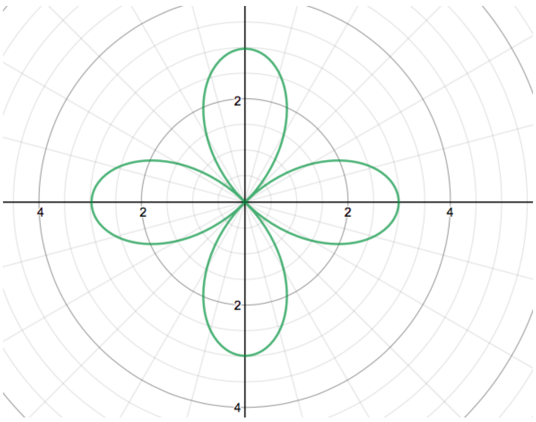
Искомая площадь есть ни что иное, как разность площадей наших графиков между найденными точками, то есть интеграл разности:

$$\int\limits_{-1}^{4} ((x+6) - (x^2 - 2x + 2))dx = \int\limits_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)dx = (-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x)\Big|_{-1}^{4} = \frac{125}{6}$$

Задача 24

Найдите площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат указанным уравнением. Сделайте рисунок(6)

$$\rho = 3\cos 2\varphi$$



$$S = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = 9\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2(2\varphi)d\varphi = 9\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos(4\varphi)}{2}d\varphi = \frac{9}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos(4\varphi))d(4\varphi) = \big[z = 4\varphi\big] =$$

$$\frac{9}{8}\int\limits_{0}^{8\pi}(1+\cos(z))dz = 9\pi + \sin z\Big|_{0}^{8\pi} = 9\pi$$

Задача 25

Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией, заданной указанным уравнением(10)

$$y = 2\ln x + 3x \qquad 1 \le x \le 4$$

$$V = \int\limits_1^4 \pi y^2 dx = \int\limits_1^4 \pi(2\ln x + 3x)^2 dx = \int\limits_1^4 \pi(4\ln^2 x + 12x\ln x + 9x^2)dx$$

Найдем сперва каждый из интегралов по отдельности

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x\, x \cdot dx/x + C = x\ln^2 x - \int 2\ln x \cdot dx + C = x\ln^2 - 2x\ln x + 2\int dx + C =$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x dx + C = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Теперь можем собрать все вместе:

$$V = \int\limits_1^4 \pi y^2 dx = \int\limits_1^4 \pi(4\ln^2 x + 12x\ln x + 9x^2)dx = \pi(4x\ln^2 x - 8x\ln x + 8x + 6x^2\ln x - 3x^2 + 3x^3)\Big|_1^4 \approx$$

$$\approx 903.12$$

Задача 26

Найдите приблеженное значение интеграла с помощью методов а) прямоугольников б) трапеций в) Симпсона. При этом возьмите $n = 10$. Найдите верхние оценки погрешности вычислений.

$$\int\limits_1^3 \sqrt{16 + \sin^2(2x)}dx$$

а) Метод прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2})(x_i - x_{i-1})$$

$$E(f) = \frac{max f''(x_i)(b-a)^3}{24n^2}$$

$$f'' = \frac{d^2}{d^2x}(\sqrt{16 + \sin^2(2x)}) = -\frac{(4sin^2(2x))}{\sqrt{\sin^2(2x) + 16}} + \frac{(4\cos^2(2x))}{\sqrt{\sin^2(2x) + 16}} - \frac{(4\sin^2(2x)\cos^2(2x))}{(\sin^2(2x) + 16)^{\frac{3}{2}}}$$

n	x	$f(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})$	f''
0	1.0	4.081	-0.65
1	1.2	4.033	0.071
2	1.4	4.002	0.767
3	1.6	4.008	0.993
4	1.8	4.047	0.595
5	2.0	4.094	-0.157
6	2.2	4.122	-0.793
7	2.4	4.113	-0.956
8	2.6	4.074	-0.558
9	2.8	4.027	0.186
10	3.0	4.001	0.837

$$\sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_i + x_{i-1}}{2})(x_i - x_{i-1}) \approx 8.920$$

$$E(f) = \frac{0.956 \cdot 2^3}{24 \cdot 100} = 0.003$$

б) Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

$$E(f) = \frac{max f''(x_i)(b-a)^3}{12n^2}$$

n	x	$\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$
0	1.0	4.113
1	1.2	4.079
2	1.4	4.035
3	1.6	4.007
4	1.8	4.012
5	2.0	4.048
6	2.2	4.091
7	2.4	4.117
8	2.6	4.109
9	2.8	4.073
10	3.0	4.03

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \frac{(b-a)}{n} \approx 8.943$$

$$E(f) = \frac{0.956 \cdot 2^3}{12 \cdot 100} = 0.006$$

в) Метод Симпсона

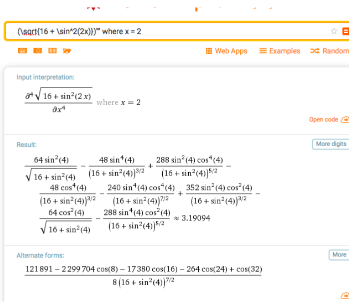
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})) + f(x_i)}{6} \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$E(f) = \frac{max f^{(4)}(x_i)(b-a)^5}{2880}$$

n	x	$\frac{f(x_{i-1})+4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}))+f(x_i)}{6}$
0	1.0	4.08
1	1.2	4.034
2	1.4	4.004
3	1.6	4.01
4	1.8	4.047
5	2.0	4.093
6	2.2	4.12
7	2.4	4.112
8	2.6	4.074
9	2.8	4.028
10	3.0	4.002

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})) + f(x_i)}{6} \cdot \frac{b-a}{n} \approx 8.921$$

Оценим производную 4 порядка с помощью Wolphram Alpha: $f^{(4)} \approx 3.191$



$$E(f) = \frac{max f^{(4)}(x_i)(b-a)^5}{2880} = \frac{3.191 \cdot 2^5}{2880} \approx 0.035$$