Домашняя работа по дискретной математике 15

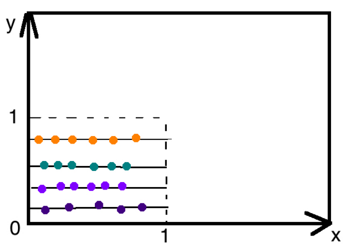
Егерев Артем, БПМИ-167

Вспомогательные теормемы:
1: $\mathbb{Q}^n$, где n конечно или счетно - счетно
2: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n \sim (0,1) \sim [0,1] \sim 2^{\mathbb{N}}$, где n конечно или счетно, имеет мощность континум

Задача 1. *Да, верно.*
Решение:
Центр каждого круга есть пара чисел из $\mathbb{R}^2$, радиус - число из $\mathbb{R}_+$. Каждый круг однозначно задается тройкой чисел: пара его координат и радиус. Отсюда множество всех кругов на плоскости $\mathbb{R}_+\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}$ - континум (Теорема 2).

Задача 2. *Нет, неверно.*
Решение:
Множество центров концентрических окружностей имеет мощность 1, в то время как их количество $\mathbb{R}_+$ - равномощно континому (количество всевозможных радиусов).

Задача 3. *Да, существует.*
Решение:
Наглядно:

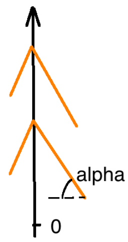


Здесь множество линий (множество континуальных семейств) из y - определено на [0, 1] - имеет мощность континум (Теорема 2). Каждая линия (отрезок) есть интервал [0, 1] - так же имеет континум точек. Все точки есть подмножество $\mathbb{R}^2$, из которого есть неявная биекция в $\mathbb{R} \Rightarrow$ континуальное множество континуальных подмножеств $\mathbb{R}$ существует.

Задача 4. *Да, верно.*
Решение:
1: Строим инъекцию из $2^{\mathbb{N}}$ в наше множество. Каждой двоичной последовательности a будем ставить в соответствие такую двоичную подовательность a_1, что в a_1 на нечетных позициях будут стоять елементы из a, а на четных - нули. Очевидно, что в такой последовательности не найдется трех подряд идущих 1, а значит это инъекция.
2: С другой стороны существует тривиальная инъекция из нашего подмножества в $2^{\mathbb{N}} \Rightarrow$ мощность нашего множества континум (Теорема Кантора - Бернштейна)

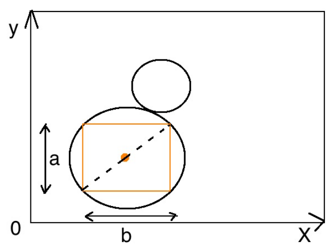
Задача 5.
Решение.
1: Покажем, что биективных функций не более чем континум. Каждой биективной функции сопоставим следущую последовательность из $2^{\mathbb{N}}$: f(1) единиц, далее 0, f(2) единиц далее 0, ... Очевидно, что данная функия это биекция, а значит мы построили инъекцию в $2^{\mathbb{N}}$ - континум.
2: С другой стороны можно построить и инъекцию из $2^{\mathbb{N}}$. Разобьем все натуральные числа на пары соседних и для каждой цифры 1 или 0 в бесконечной двоичной последовательности будем записывать последовательно пару в правильном порядке, если стоит 1, перевернутую, если 0. Таким обазом i - ое число в данной последовательности однозначно определено, инъекция построена.
Отсюда, по теореме Кантора - Бернштейна, колисество искомых биективных функций - континум.

Задача 6.
Решение. Да, можно.



Зафиксировав угол α, единица однозначно задается координатой на $\mathbb{R}$, отсюда мощность всех таких единиц будет континум.

Задача7. *Нет, нельзя*
Решение:
Нет, нельзя. Будем решать методом от противного.
Для начала сопоставим каждой восьмерке 2 ее рациональные координаты, лежащие в разных полушариях этой восьмерки. Такое мы всегда сможем сделать, так как как на отрезке a, так и на b есть хотя бы одно рациональное число, а значит на их пересечение мы получаем рациональные координаты.



Заметим, что для двух разных непересекающихся восьмерок эти два числа совпадать не могут.
Получившиеся пары рациональных чисел есть подмножество $\mathbb{Q}^2 \sim \mathbb{Q}$, которое счетно $\Rightarrow$ противоречие.