Задача 1

Докажите, что для любой универсальной функции U множество $\{U(p,p) \ : \ p \in \mathbb{N}\}$ совпадает с $\mathbb{N}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $f(x) = c$, для которой найдется такое число $p : U(p,x) = f(x) = c$ (просто по определению универсальной функции). Тогда и $U(p,p) = c$.

То есть у нас имеется инъекция в натуральные, но и $p \in \mathbb{N}$, отсюда значений функций не более чем $\mathbb{N}$, значит их ровно $\mathbb{N}$.

Задача 2

Верно ли, что для любой универсальной вычислимой функции U множество

$$\text{а) } \{p \mid U(p,p^2)\}$$
$$\text{б) } \{p \mid U(p^2,p)\}$$

неразрешимо?

а) Будем решать от противного $\Rightarrow$ допустим оно разрешимо. Тогда найдется всюду определенная f, такая что:

$$f(p) = \begin{cases} 1 & p - \text{ полный квадрат, } U(\sqrt{p},p) \text{ определено и равно } 0 \\ 0 & p - \text{ полный квадрат, } U(\sqrt{p},p) \text{ определено и не равно } 0 \\ -1 & \text{ иначе} \end{cases}$$

Так как U - Увф $\Rightarrow \exists p \ : \ U(p,x) = f(x)$. $f(x)$ является всюду определенной, отсюда и $f(p^2) = U(p,p^2)-$ определено.

$$\begin{cases} U(p,p^2) = 0 \Rightarrow f(p^2) = 1 \neq U(p,p^2) \\ U(p,p^2) = 1 \Rightarrow f(p^2) = 0 \neq U(p,p^2) \end{cases} \Rightarrow \text{ противоречие}$$

б) Неверно. Построим контрпример.

$$U_0(p,x) = \begin{cases} p & p - \text{полный квадрат} \\ U(num(p),x) & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь U - произвольная вычислимая функция, $num-$ номер числа в последовательности натуральных чисел без квадратов. Стоит так же отметить, что все эти функции являются вычислимыми.

Получаем, что рассматриваемое в условие задачи множество есть просто множество натуральных, которое, в свою очередь — разрешимо.

Задача 3

Докажите, что во всяком бесконечном разрешимом множетсве натуральных чисел есть перечислимое неразрешимое подмножество.

Так как данное нам множество является бесконечным и разрешимым среди натуральных, то мы можем перейти к биекции этого множества с натуральными, сопоставив каждому числу его индекс в отсортированном множестве.
Аналогично рассуждениям из прошлой задачи $B = x : U(x,x)$ неразрешимо. Кратко:

$$f(p) = \begin{cases} 1 & U(p,p) \text{ определено и равно } 0 \\ 0 & U(p,p) \text{ определено и не равно } 0 \\ -1 & \text{ иначе} \end{cases} \qquad \begin{cases} U(p,p) = 0 \Rightarrow f(p) = 1 \neq U(p,p) \\ U(p,p) = 1 \Rightarrow f(p) = 0 \neq U(p,p) \end{cases}$$

Рассмотрим произвольное бесконечное подмножество натуральных $-$ A. Тогда f_1 и f_2 - характеристические функции этих подмножеств:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \text{ иначе} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \text{ иначе} \end{cases}$$

$C = A \cap B$. Характеристическая функция $-f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ невычислима, так как $f_2(x)$ невычислима. Отсюда, мы нашли такое подмножество.

Задача 4

Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$

$\rightarrow$ Так как подмножество разрешимо, то мы просто можем пойти по всем натульным числа и проверять принадлижит ли данное число подмножеству. Если да, то будем выписывать это число. Очевидно, что при таком подходе будет выписана бесконечная последовательность возрастающих чисел.

$\leftarrow$ Сопоставим следующий алгоритм, проверяющий принадлежность x подмножеству. Бежим по всем i от 1 до x и сравниваем значения возрастающей функции с x. Если встретилось $-$ выводим 1, нет - 0. Так как функция возрастающая, то достаточно очевидно, что число x после шага x встретиться уже не может.

Задача 5

Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество сожержит бесконечное перечислимое подмножество.

Определим подмножество как возрастающую последовательность чисел, которые выводит перечислитель множества. Другими словами, перечислитель выдает нам число, мы сравниваем его с предидущем, уже выписанным, и, если оно больше, то выписываем его.

Таким образом мы выпишем бесконечно много возрастающих чисел (так как все числа конечные) и, пользуясь предыдущей задачей, получаем, что данное подмножество является вычислимым, а значит и перечислимым.

Задача 6

Докажите, что перечислимо множество программ, которые останавливаются хотя бы на одном входе. Более формально: пусть $U-$ универсальная вычислимая функция, а $S-$ множество тех p, для которых $U(p, x)$ определена хотя бы при одном x. Тогда $S-$ перечислимо.

Отметим тот факт, что область определения U есть просто множество пар из двух чисел, которое так же обладает свойством перечислимости.

Искомое множество - есть просто первая координата этих пар, а значит оно так же перечислимо.