## Задача 1

*Для квадратичной формы*

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(13b-18) + x_2^2(-5+b) + x_3^2(5b-5) + 2x_1x_2(-3b+6) + 2x_1x_3(-b-6) + 2x_2x_3(-1-b)$$

*выясните при каких значениях параметра* $b$ *она является положительно определенной, а при каких – отрицательно определенной?*

Составим матрицу квадратичной формы, и посчитаем ее угловые миноры:

$$M = \begin{pmatrix} 13b-18 & -3b+6 & -b-6 \\ -3b+6 & -5+b & -1-b \\ -b-6 & -1-b & 5b-5 \end{pmatrix}$$

- $\Delta_1 = 13b - 18 = 13(b - \frac{18}{13})$
- $\Delta_2 = (13b-18)(-5+b) - (-3b+6)^2 = 4b^2 - 47b + 54 = 4(b - \frac{47}{8} + \frac{\sqrt{1345}}{8})(b - \frac{47}{8} - \frac{\sqrt{1345}}{8})$
- $\Delta_3 = (13b-18)((-5+b)(5b-5)-(-1-b)^2)-(-3b+6)((-3b+6)(5b-5)-(-1-b)(-b-6)) +$
  $+ (-b-6)((-3b+6)(-1-b) - (-5+b)(-b-6)) = -300b(b-2)$

Исходя из критерия Сильвестра, для того чтобы квадратичная форма была положительно определена требуется:

- $\Delta_1 > 0 \Rightarrow b > \frac{18}{13}$
- $\Delta_2 > 0 \Rightarrow b \in (-\infty, \frac{47}{8} - \frac{\sqrt{1345}}{8}) \cup (\frac{47}{8} + \frac{\sqrt{1345}}{8}, \infty)$
- $\Delta_3 > 0 \Rightarrow b \in (0, 2)$

$\Rightarrow b \in \varnothing$
Аналагично, для того чтобы матрица была отрицательно определена, согласно критерию Сильвестра, получаем:

- $\Delta_1 < 0 \Rightarrow b < \frac{18}{13}$
- $\Delta_2 > 0 \Rightarrow b \in (-\infty, \frac{47}{8} - \frac{\sqrt{1345}}{8}) \cup (\frac{47}{8} + \frac{\sqrt{1345}}{8}, \infty)$
- $\Delta_3 < 0 \Rightarrow b \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

$\Rightarrow b \in (-\infty, 0)$

## Задача 2

*Подпространство $U$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ задано уравнением $x_1 - 5x_2 - 3x_3 - - x_4 = 0$*

- *Постройте в $U$ ортонормированный базис*
- *Для вектора $v = (1, 2, 0, 0)$ найдите его проекцию на $U$, его ортоганальную составляющую относительно $U$ и расстояние от него до $U$.*

Для начала найдем простой базис (не обязательно ортонормированный) в подпространстве $U$. Для этого найдем ФСР для СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Взяв за свободные переменные последние 3, получаем вектора: $p = (1, 0, 0, 1), (3, 0, 1, 0), (5, 1, 0, 0)$. Отлично, теперь данный базис следует ортонормировать.

- $u_1 = \frac{p_1}{|p_1|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- $u_2' = p_2 - (u_1, p_2)u_1 = (3, 0, 1, 0) - \frac{3}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{3}{2}, 0, 1, -\frac{3}{2})$
  $u_2 = \frac{u_2'}{|u_2'|} = (\frac{3}{\sqrt{22}}, 0, \frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{3}{\sqrt{22}})$
- $u_3' = p_3 - (u_1, p_3)u_1 = (5, 1, 0, 0) - \frac{5}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\frac{5}{2}, 1, 0, -\frac{5}{2})$
  $u_3'' = u_3' - (u_2, u_3')u_2 = (\frac{5}{2}, 1, 0, -\frac{5}{2}) - \frac{15}{\sqrt{22}}(\frac{3}{\sqrt{22}}, 0, \frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{3}{\sqrt{22}}) = (\frac{5}{11}, 1, -\frac{15}{11}, -\frac{5}{11})$
  $u_3 = \frac{u_3''}{|u_3''|} = (\frac{5}{6\sqrt{11}}, \frac{11}{6\sqrt{11}}, -\frac{5}{2\sqrt{11}}, -\frac{5}{6\sqrt{11}})$

Для решения следующего пункта вспомним, что вектор $v = (1, 2, 0, 0) = m + u$, где вектор $m$ принадлежит дополнению $U$ до $\mathbb{R}^4$, $u \in U$.
Отметим, что вектор $(1, -5, -3, -1)$ перпендикулярен $U$, а значит и образует базис в $M$ (это следует из уравнения задания подпространства).

$$v = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + x_4 \times m$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 9 \end{array}\right)$$

Отсюда следуют, что $x_4 = \frac{1}{4}, x_3 = 2 + 5x_4 = \frac{13}{4}, x_2 = 3x_4 = \frac{3}{4}, x_1 = x_4 = \frac{1}{4}$. Тогда проекция на $U$ это просто: $x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 = \frac{1}{4}(1, 0, 0, 1) + \frac{3}{4}(3, 0, 1, 0) + \frac{13}{4}(5, 1, 0, 0) = (\frac{75}{4}, \frac{13}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
Ортогональная проекция есть просто $x_4 \times m = \frac{1}{4}(1, -5, -3, -1) = (\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$
Отметим, что минимальное расстояние есть просто длина ортогональной проекции, простыми вычислениями получаем:

$$\rho = \left|(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})\right| = \frac{1}{4}\sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2} = \frac{3}{2}$$

## Задача 3

*Составьте уравнение прямой в* $\mathbb{R}^3$*, параллельной плоскости* $x+4y-3z=0$*, проходящей через точку* $(1,2,-2)$ *и пересекающей прямую* $x=-3t+4, y=3t-3, z=2t-2$.

Наша будующая прямая представима в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t_1$$

так как прямая однозначно задается точкой, через которую она проходит, и координатами направляющего вектора. Для начала, попробуем использовать условие того, что наша прямая параллельна плоскости $x+4y-3z=0$. Это значит, что вектор нормали к этой плоскости перпендикулярен направляющему вектору нашей прямой, то есть скалярное произведение равно 0:

$$a+4b-3c=0$$

Так же необходимо задать формулу вспомогательной прямой, и записать условие того, что наши две прямые пересекаются в какой-то точке.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} at_1 \\ bt_1 \\ bt_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t_2$$

$$(a+4b-3c)t_1 = 0$$

- $at_1 = 3-3t_2$
- $bt_1 = -5+3t_2$
- $ct_1 = 2t_2$

$$(a+4b-3c)t_1 = (3-3t_2)+4(-5+3t_2)-6t_2 = 3t_2-17=0 \Rightarrow t_2 = \frac{17}{3} \Rightarrow$$

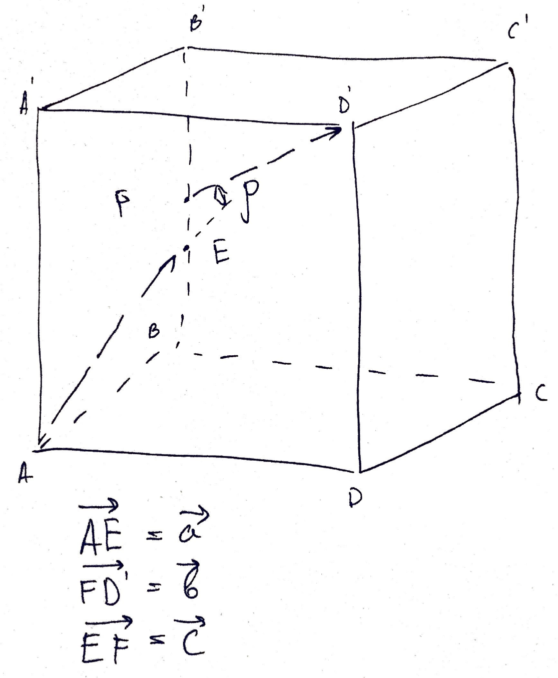
- $A = at_1 = -14$
- $B = bt_1 = 12$
- $C = ct_1 = \frac{34}{3}$

Отметим так же, что нам важны координаты направляющего вектора с точностью до пропорциональносит, поэтому можем уже выписывать наш ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ \frac{34}{3} \end{pmatrix} t$$

## Задача 4

*Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 6. Точка $F$ — середина ребра $BB'$, а точка $E$ лежит на ребре $BB'$, причем $BE : EB' = 4 : 7$. Найдите угол и расстояние между прямыми $AE$ и $D'F$.*




Введем координаты, с началом в точке $A$.

$$A(0,0,0) \quad E(0,6,\frac{24}{11}) \quad F(0,6,3) \quad D'(6,0,6)$$

Направляющими прямых будут являться вектора $AE = a = (0,6,\frac{24}{11})$ $FD' = b = (6,-6,3)$ Тогда угол между скрещивающимися кривыми есть просто угол между их направляющими векторами:

$$cos\alpha = abs(\frac{(a,b)}{|a||b|}) = \frac{\frac{324}{11}}{\frac{6\sqrt{137}}{11}\cdot 9} = \frac{6}{\sqrt{137}}$$

Обозначим вектор, равный расстоянию между прямыми за $\rho$. Тогда $\rho$ расс설кладывается на три вектора: вдоль первой прямой, вдоль второй и вектор по прямой, непосредственно соединяющей наши прямые : $EF(0,0,\frac{9}{11})$.

$$\rho = \alpha a + \beta b + EF$$

Так как $\rho$ это вектор-расстояние, то он перпендикулярен каждому направляющему вектору.

$$(\rho, a) = 0 \qquad (\rho, b) = 0$$

Составим сисетму:

$$\begin{cases} \alpha\frac{4932}{121} - \beta\frac{324}{11} + \frac{216}{121} = 0 \\ -\alpha\frac{324}{11} + 81\beta + \frac{27}{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{9}{101} \\ \beta = -\frac{19}{303} \end{cases}$$

$$\rho = -\frac{9}{101}(0,6,\frac{24}{11}) - \frac{19}{303}(6,-6,3) + (0,0,\frac{9}{11}) = (-\frac{38}{101}, -\frac{16}{101}, \frac{44}{101})$$

Расстояние есть длина этого вектора, то есть $|\rho| = \frac{6}{\sqrt{101}} \approx 0.597022$