Домашняя работа по дискретной математике 14

Егерев Артем, БПМИ-167

12 января 2017 г.

1. Доказательство.
Пусть было продано N билетов. Тогда общий бюджет лотереи $100N$, общая сумма выиграша - $100 \cdot p \cdot N = 40N$. Обозначим сумму выиграша i-человека за α_i. Тогда:

$$E[\alpha] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{N} = \frac{100 \cdot p \cdot N}{N} = 100 \cdot 0.40 = 40$$

По неравенству Маркова:

$$Pr[\alpha \geq 5000] \leq \frac{E[\alpha]}{5000} \Rightarrow Pr[\alpha \geq 5000] \leq \frac{40}{5000} = 0.8\% < 1\%$$

Доказано.

2. Решение.
Обозначим за N - суммарное количесво человек, α - продолжительность жизни произвольного человека

$$E[\alpha] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p_i = \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i p_i + \sum_{j=N/2+1}^{N} \alpha_j p_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{pN} \alpha_i + \frac{1}{N} \sum_{j=(1-p)N+1}^{N} \alpha_j =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i + \frac{1}{N} \sum_{j=N/2+1}^{N} \alpha_j = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N/2} \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N/2} \sum_{j=N/2+1}^{N} \alpha_j =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot E[\alpha \leq 8] + \frac{1}{2} \cdot E[\alpha > 8] = 26$$

Отсюда:

$$E[\alpha \leq 8] + E[\alpha > 8] = 52$$

Оценим $E[\alpha \leq 8]$:

$$1 \leq E[\alpha \leq 8] \leq 8$$

Нижняя граница достигается по причине того, что каждый живет как минимум один год, верхняя - когда нет людей, живших менее 8 лет.

$$E[\alpha > 8] \geq E[\alpha \geq 8] \Rightarrow E[\alpha \geq 8] \leq 52 - 1 = 51$$

Нижняя граница интервала равна 26. Становиться равной в случае, когда у нас нет людей, живших менее 8 лет: мат ожидание всех будет как раз совпадать с нашем искомым ответом.
Стоит отметить, что изменяя количество восьмерок, мы можем плавно менять искомую величину, поэтому все значения интервала будут приемлемы .
Ответ: [26, 51]

3. Решение.
б) Обозначим за p_i вероятность выпадения числа i . Тогда:

$$E_1 = 1^2 \cdot p_1 + 2^2 \cdot p_2 + ... + 6^2 \cdot p_6 = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot i^2$$

$$E_2 = \sum_{i=1}^{6} \sum_{i=1}^{6} i \cdot j \cdot p_i p_j$$

Рассмотрим:

$$E_1 - E_2 = \sum_{i=1}^{6} \sum_{i=1}^{6} i \cdot j \cdot p_i p_j - \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot i^2 = \sum_{i=1}^{6} p_i i (\sum_{j=1}^{6} p_j j - i) = \sum_{i=1}^{6} p_i i (\sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j j - i(1 - p_i)) =$$

Переход делается из расчета $\sum\limits_{i=1}^{6} p_i = 1$

$$= \sum_{i=1}^{6} p_i i (\sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j j - i \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j) = \sum_{i=1}^{6} p_i i (\sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j (j - i)) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_i i \cdot p_j \cdot (j - i) =$$

Следущий переход делаем отдельно, разбирая случаи i < j и i > j (тогда можем поменять i и j местами, для того чтобы учесть соответствующее слагаемое в сумме).

$$\sum_{1\le i<j\le 6}(ip_i(j-i)p_j + jp_j(i-j)p_i) = \sum_{1\le i<j\le 6} p_ip_j(j-i)(i-j) = -\sum_{1\le i<j\le 6} p_ip_j(j-i)^2 < 0$$

Отсюда $E_2 > E_1$
Так как мы решали в общем случае, то и в а) это так же выполняется.
Ответ: $E_2 > E_1$

4. Решение.
Обозначим за n - количество вхождений подслов ab в наше слово .

$$E[n] = \frac{\sum\limits_{i=1}^{20-1} k_i}{N}$$

Где N - количество всех слов ,k_i - количество вхождений ab на i-ой позиции (всего позиций 20 - 1 = 19)

$$N = 2^{20}$$

Когда на i-ой позиции стоит ab, то у нас остается 18 свободных мест, на которые мы можем поставить a или b, отсюда $k_i = 2^{18}$

$$E[n] = \frac{19\cdot 2^{18}}{2^{20}} = \frac{19}{4}$$

Ответ: $\frac{19}{4}$.

5. Решение.
В общем случае:

$$E[k] = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} i\cdot f(i)}{10^{15}}$$

где $f(i)$ - количество различных последовательностей завтраков, в которых ровно i различных

По факту $f(i)$ - количество упорядеченных разбиений 15 дней на i различных завтраков.
Вспомним, что S(15, i) - число Стирлинга - количество неупорядоченных изменений. Так же нужно еще выбрать сами номера различных завтраков - это C_{10}^i
Отсюда $f(i) = S(15,i) \cdot i! \cdot C_{10}^i = S(15,i) \cdot A_{10}^i$
Ответ: $E[k] = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} i \cdot S(15,i) \cdot A_{10}^i}{10^{15}}$.

6. Решение.
Так как все перестановки различные, можем рассмотреть пару: перестанвку π и ей зеркально отраженную π^{-1} (мы можем разбить все перестановики на пары, так как их количество n! - четное, при всех n > 1). Рассмотрим произвольные числа a, b, стоящие на разных позициях в нашей перестановке. Заметим, что суммарно в π и в π^{-1} эти числа образуют ровно одну инверсию. Значит, общее количество инверсий в этих двух перестановках равно количесту всевозможных пар (так как мы выбирали числа произвольно) и равно $\frac{n(n-1)}{2}$

$$E[I(\pi)] = \sum_{i=1}^{n!} p_i \cdot I[\pi_i] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n!} p_i (I[\pi_i] + I[\pi_i^{-1}]) = \frac{n(n-1)}{4} \sum_{i=1}^{n!} p_i = \frac{n(n-1)}{4}$$

При n = 1, $E[I(\pi)] = 0$.
Ответ: $\frac{n(n-1)}{4}$.

7. Доказательство.

$$Pr[X \geq 6] \Leftrightarrow Pr[2^X \geq 64]$$

По неравенству Маркова:

$$Pr[2^X \geq 64] \leq \frac{5}{64} < \frac{1}{10}$$

Доказано.

8. Решение.
Обознаим за S_k - среднее количество жвачек, которое нужно купить после того, когда у нас уже есть k разных к, так чтобы последняя была новой. Тогда на этом шаге вероятнотсь вытащить новую - $\frac{n-k}{n}$, неоригинальную - $\frac{k}{n}$. Рассмотрим выбор следующий жвачки: если мы выбрали новую - то это подходит под наше условие, если нет, то нам потребуется еще S_k шагов, поэтому:

$$S_k = \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}(S_k + 1)$$

Отсюда:

$$S_k = \frac{n}{n-k}$$

Получаем, что среднее число жвачек, которое необходимо купить для полной коллекции вкладышей, равн о:

$$S = S_0 + S_1 + ... + S_{n-1} = n(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n)$$

Ответ: n(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n).