Задача 1

Найти НОД многочленов

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 \qquad g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1$$

а так же его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$.

Для нахождения НОДа воспользуемся теоремой Евклида:

1. $f(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{8}{9})g(x) + (\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9})$
2. $g(x) = (\frac{27}{10}x - \frac{9}{10})(\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9})$

Как делятся многлены достаточно очевидно. Получаем, НОД $= \frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}$.

$$\text{НОД } = f(x) - (\frac{1}{3}x - \frac{8}{9})g(x)$$

Задача 2

Разложите многочлен $x^6 + x^3 - 12$ в произведение неприводимых в кольце $\mathbb{C}[x]$ и в кольце $\mathbb{R}[x]$.

1. Начнем с $\mathbb{R}$.

$$x^6 + x^3 - 12 = (x^3 + 4)(x^3 - 3) = (x + \sqrt[3]{4})(x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16})(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$$

Причем очевидно, что дальше не раскладывается, так как $D < 0$.

2. Теперь к $\mathbb{C}$. Здесь неприводимыми уже будут многочлены степени не больше 1, поэтому наши квадраты разложатся еще на 2 слогаемых:

$$x^6 + x^3 - 12 = (x + \sqrt[3]{4})(x - \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9}) =$$

$$(x + \sqrt[3]{4})(x - \sqrt[3]{3}) \cdot (x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}) \cdot (x - \frac{1}{2}i\sqrt[3]{3}(i + \sqrt{3}))(x - \frac{1}{2}i\sqrt[3]{3}(i - \sqrt{3}))$$

Многочлен 6 степени - 6 корней, все отлично.

Задача 3

Выясните, является ли число $5 + \sqrt{-5}$ элементом кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

$Z[\sqrt{-5}] = \{z : z = m + \sqrt{-5}n \quad m,\ n \in \mathbb{Z}\}$
Рассмотрим два элемента и докажем их необратимость:

1. $1 - \sqrt{-5}$:
   Предположим, что существуют $m, n \neq (0, 0)$, что $(1 - \sqrt{-5})(m + \sqrt{-5}n) = 1$, тогда
   $$(1 - \sqrt{-5})(m + \sqrt{-5}n) = (m + 5n) + i\sqrt{5}(n - m) = 1 + 0i \Rightarrow n = m = \frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{противоречие}$$
2. $\sqrt{-5}$:
   Аналогично.
   $$\sqrt{-5}(m + \sqrt{-5}n) = -5n + \sqrt{5}mi = 1 + 0i \Rightarrow m = 0, n = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{противоречие}$$

Отметим, что $5 + \sqrt{-5} = \sqrt{-5}(1 - \sqrt{-5})$, следовательно элемент раскладывается на 2 необратимых, следовательно не является простым.

Задача 4

Пусть R - евклидово кольцо с нормой N. Докажите, что N принимает бесконечное число значений.

Рассмотрим элемент m, при котором норма достигает своего максимального значения (если такой существует). Дополнительно введем элемент n - ненулевой необратимый. Такой найдется так как евкилидово кольцо это не поле. $N(mn) > N(m) = max$, так как элемент n необратимый, теорема из лекции. Получаем, что N не может быть ограничено, то есть принимает бесконечное число значений.