Задача 1

Пусть $G-$ группа всех диагональных матриц в $GL_3(\mathbb{R})$ и $X = \mathbb{R}^3$. Опишите все орбиты и все стабилизаторы для действия группы G на множетсве X, заданного формулой $(g, x) \to g \cdot x$.

Пусть $x \in X \Rightarrow orb[x] = \{g \cdot x \mid g \in G\},\ st[x] = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$
И для орбиты и для стабилизатора ключевую роль играет произведение $g \cdot x$:

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \text{ где } a, b, c \ \in \ \mathbb{R}/\{0\} \quad k, l, m \ \in \ \mathbb{R}$$

$$g \cdot x = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak \\ bl \\ cm \end{pmatrix}$$

Таким образом наши координаты в исходном векторе умножаются на ненулевые числа, и мы получаем что орбита по просту совпадает с $\mathbb{R}^3$.
Если же $g-$ стабилизатор, тогда:

$$g \cdot x = \begin{pmatrix} ak \\ bl \\ cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ak = k \Rightarrow a = \begin{cases} a \ \in \ \mathbb{R},\ k = 0 \\ 1,\ k \neq 0 \end{cases} \\ bl = l \Rightarrow b = \begin{cases} b \ \in \ \mathbb{R},\ l = 0 \\ 1,\ l \neq 0 \end{cases} \\ cm = m \Rightarrow c = \begin{cases} c \ \in \ \mathbb{R},\ m = 0 \\ 1,\ m \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Задача 2

Пусть $G-$ группа всех верхнетреугольных матриц в $SL_2(\mathbb{R})$. Опишите все классы сопряженности в группе G.

Так как $det = 1$ для любого объекта в $SL_2(\mathbb{R})$, то любой элемент группы принимает вид вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произвольный объект s класса сопряженности элемента $g : s = hgh^{-1}$:

$$s = hgh^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & k \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \frac{-abm^2 + a^2km + ab}{m} \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & ab(m - \frac{1}{m}) + a^2k \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Отсюда вытекает несколько вариантов:

- $m - \frac{1}{m} \neq 0, k \neq 0 \Rightarrow$ матрица верхнетреугольная
- $m - \frac{1}{m} \neq 0, k = 0 \Rightarrow$ матрица верхнетреугольная
- $m - \frac{1}{m} = 0\ (m = \pm 1), k \neq 0 \Rightarrow$ матрица верхнетреугольная, знак $m[2][2]$ совпадает с k
- $m - \frac{1}{m} = 0\ (m = \pm 1), k = 0 \Rightarrow$ матрица диагональная

Задача 3

Для действия группы S_4 на себе сопряжениями найдите стабилизатор подстановки $(1, 2, 3, 4)$.

Введем обозначения $\sigma = (1, 2, 3, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Стабилизатор $st[\sigma] = \{s \in S_4 \mid s \cdot \sigma \cdot s^{-1} = \sigma\}$.

$$s \cdot \sigma \cdot s^{-1} = \sigma \iff s \cdot \sigma = \sigma \cdot s, \text{ откуда прямо следует}$$

- $s(\sigma(1)) = \sigma(s(1)) \Rightarrow s(2) = \sigma(s(1))$
- $s(\sigma(2)) = \sigma(s(2)) \Rightarrow s(3) = \sigma(s(2))$
- $s(\sigma(3)) = \sigma(s(3)) \Rightarrow s(4) = \sigma(s(3))$
- $s(\sigma(4)) = \sigma(s(4)) \Rightarrow s(1) = \sigma(s(4))$

На данном этапе довольно очевидно, что задавая $s(1)$ все остальные $s(i)$ определяются однозначно.

- $s(1) = 1 \begin{cases} s(2) = \sigma(s(1)) = 2 \\ s(3) = \sigma(s(2)) = 3 \\ s(4) = \sigma(s(3)) = 4 \end{cases}$
- $s(1) = 2 \begin{cases} s(2) = \sigma(s(1)) = 3 \\ s(3) = \sigma(s(2)) = 4 \\ s(4) = \sigma(s(3)) = 1 \end{cases}$
- $s(1) = 3 \begin{cases} s(2) = \sigma(s(1)) = 4 \\ s(3) = \sigma(s(2)) = 1 \\ s(4) = \sigma(s(3)) = 2 \end{cases}$
- $s(1) = 4 \begin{cases} s(2) = \sigma(s(1)) = 1 \\ s(3) = \sigma(s(2)) = 2 \\ s(4) = \sigma(s(3)) = 3 \end{cases}$

Получаем, что $st[\sigma] = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\}$

Задача 4

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ и $n = kl$. Реализуем группу $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ как подгруппу в S_n, используя доказательство теоремы Кели. Найдите необходимое и достаточное условие на числа k и l, при которых эта подгруппа содержится в A_n.

Запишем все элементы группы $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ в табличку размера $k \times l$ и рассмотрим возможную операцию. При этом согласно теореме Кели, мы можем каждому элементу (i, j) поставить в соответствие число $0 \leqslant il + j < n$ которому однозначно ставиться в соответствие подстановка.

$$\begin{vmatrix} (0,1) & \dots & (0, l-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (k-1, 0) & \dots & (k-1, l-1) \end{vmatrix}$$

Любой элемент группы G представим в виде $(i,j) = i(1,0) + j(0,1)$. При сложение элемента $(0,1)$ с элементом (i,j), получаем что координата j сдвигается по циклу, а i остается тем же. Получаем, что четность такой подстановки равна $k(l-1)$, так как мы имеем k циклов длины l. Для элемента $(1,0)$ четность подстановки равна $l^2(k-1)$. Можно представить каждую строчку в виде блока и расположить их в порядке возрастания, тогда при прибавление $(0,1)$ все столбцы сместяться на 1. Получится, что последний столбец перейдет в 1 и станет образовывать инверсию со всеми членами до него, а таких ровно $l * l * (k-1)$, где l - количество элементов в каждой строке, l - количство элементов в первой строке, $(k-1)$ - количество строк, с которыми образется инверсия. Так как все подстановки должны быть четными, то оба рассмотренных элемента должны не изменять четность, то есть:

$$k(l-1) \vdots 2 \qquad l^2(k-1) \vdots 2$$

Откуда следует, что k и l одной четности. Мы получили необходимое и одновременно достаточное условие, так как любой элемент (i,j) единственным образом представляется как $i(1,0) + j(0,1)$.