Егерев Артем
Домашнее задание №17

Задача 1

Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1, 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Какова мощность множества таких последовательностей?

Решение: На первом месте может стоять одна из трех цифр: $\{0, 1, 2\}$
Если это 2, то на 2-ю позицию у нас ставиться уже одна из двух оставшихся цифр, а именно $\{0, 1\}$. На 3-ю мы можем поставить снова одну из двух оставшихся соответственно. Приведем явную биекцию данных последовательностей our_i с множеством бесконечных двоичных последовательностей bin_i: $our_i[2] = bin_i[1]$, а далее 0 будет значить меньшее число из двух оставшихся, 1 соответсвенно большее.
$\Rightarrow \mathrm{OUR}_{[2]} \sim 2^{\mathbb{N}}$.
Аналогично с $\mathrm{OUR}_{[0]}$ и $\mathrm{OUR}_{[1]} \Rightarrow \mathrm{OUR} \sim 3 \cdot 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$ - континум.

Задача 2

Докажите, что множество отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел имеет мощность конти нум.

Решение: Множество всех подмножеств на натуральных числах имеет мощность $2^{\mathbb{N}}$. Каждое множество натуральных чисел, разделенных на 2 класса эквивалентности 0 и 1 (в данном случае это будет подмножестовом искомого множества X) однозачно задается множеством тех элементов, которым сопоставлена 1 $\Rightarrow$ оно не менее, чем континуально.
С другой стороны, X является подмножеством всех бинарных отношений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, что равномощно $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$ - имеет мощность континум.
Отсюда, можем сказать, что множество отношений эквивалентности на натуральных числах имеет мощность континум.

Задача 3

Найдите мощность множества отношений эквивалентности, определенных на множестве действительных чисел.

Решение: Множество всех подмножеств на натуральных числах имеет мощность $2^{\mathbb{R}}$. Каждое множество действительных чисел, разделенных на 2 класса эквивалентности 0 и 1 (в данном случае это будет подмножестовом искомого множества

X) однозачно задается множеством тех элементов, которым сопоставлена 1 $\Rightarrow$ оно имеет мощность не менее, чем $2^{\mathbb{R}}$.
С другой стороны, X является подмножеством всех бинрных отношений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, что равномощно $2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$.
Отсюда, можем сказать, что множество отношений эквивалентности на действительных числах имеет мощность $2^{\mathbb{R}}$.

Задача 4

Запишите ДНФ, которая равна булевой функции

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_4) \vee ... \vee (\overline{x_7} \vee x_9)$$

Решение: Найдем все знания x_i, при которых функция принимает значение 1. Для решения задачи произведем умный перебор. Разделим наше выражение на $(x_1 \vee x_2)$ и $(\overline{x_1} \vee x_3)...(\overline{x_7} \vee x_9)$. Для начала поработаем со второй частью:

$$\begin{cases} x_1 \to x_3 \\ x_3 \to x_5 \\ x_5 \to x_7 \\ x_7 \to x_9 \\ x_2 \to x_4 \\ x_4 \to x_6 \\ x_6 \to x_8 \end{cases}$$

Так как производиться глобальная конъюнкция, значит значение каждой скобки 1. Если начать перебирать варианты, то можно заметить, что если в строке матрицы встретилась 1, то все последующие цифры будут так же 1, для сохранения истинности.

x_1	x_3	x_5	x_7	x_9
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

x_2	x_4	x_6	x_8
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Приняв в рассмотрений первое выражение ($x_1 \vee x_2 = 1$), получаем, что данная функция истинна только при 10 значениях: 6 комбинация первой матрицы на 5 кобинаций второй и 5 комбинация второй матрицы на 5 комбинаций первой. Теперь, когда мы знаем значения на которых функция принимает 1, без труда составляем ДНФ:

$$
\begin{gathered}
(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4} \wedge x_5 \wedge \overline{x_6} \wedge x_7 \wedge \overline{x_8} \wedge x_9) \vee \\
(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4} \wedge x_5 \wedge \overline{x_6} \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge \overline{x_4} \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 \wedge \overline{x_5} \wedge x_6 \wedge \overline{x_7} \wedge x_8 \wedge \overline{x_9}) \vee \\
(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 \wedge \overline{x_5} \wedge x_6 \wedge \overline{x_7} \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 \wedge \overline{x_5} \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee \\
(\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)
\end{gathered}
$$

Задача 5

Докажите полноту системы связок, состоящей из одной связки штрих Шеффера $x|y = \neg(x \wedge y)$

Решение: Зная, что связка $\{\neg, \vee, \wedge\}$ является полной, выразим каждую компоненту через штрих Шеффера:

$$X|X = \neg X \text{ - отрицание}$$

$$(X|X)|(Y|Y) = X \vee Y \text{ - дизъюнкция}$$

$$(X|Y)|(X|Y) = X \wedge Y \text{ - конъюнкция}$$

Таким образом, записав вместо$\{\neg, \vee, \wedge\}$ подстановки через штрих Шеффера, мы можем выразить любое логическое выражение.

Задача 6

КНФ (конъюктивно нормальной формой) называется конъюнкция дизъюнкций переменных или их отрицаний. Докажите, что любое высказывание можно выразить в виде КНФ.

Решение: Обозначим наше исходное высказывание за X. Так как любое высказывание выражается через ДНФ, запишем $\bar{X} = S$ в данном виде. Тогда:

$$\overline{S} = \overline{s_1 \vee s_2 ... \vee s_n} = \overline{s_1} \wedge \overline{s_2} ... \wedge \overline{s_n}$$

Причем каждое $\overline{s_i}$ представляется в виде:

$$\overline{s_i} = \overline{s_{i,1} \wedge s_{i,2} ... \wedge s_{i,m}} = \overline{s_{i,1}} \vee \overline{s_{i,2}} ... \vee \overline{s_{i,m}}$$

Так как $X = \overline{\overline{X}} = \overline{S} \Rightarrow$ представлятся в виде КНФ.

Задача 7

Сколько ненулевых коэффицентов в многочлене Жегалкина, которых равен $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$

Решение: Ненулевых слогаемых получается $2^n - 1$. Докажем утверждение по индукции.
1. База при $n = 1$ получаем $2^1 - 1 = 1$. Верно.
2. Шаг: допустим утверждение выполняется для какого-то n, докажем что оно верно и для $n + 1$:

$$x_1 \vee x_2 ... \vee x_{n+1} = (x_1 \vee x_2 ... \vee x_n) \vee x_{n+1} = (x_1 \vee x_2 ... \vee x_n) x_{n+1} \oplus (x_1 \vee x_2 ... \vee x_n) \oplus x_{n+1}$$

Тогда количество слогаемых:

$$2^n - 1 + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Доказано.

Задача 8

Будет ли полной система $\{\neg, MAJ(x_1, x_2, x_3)\}$*?*

Решение: Будем решать методом от противного. Если такая система является полной, то рассмотрим конъюнкцию элементов $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, $x_1 \wedge x_2 = 0$. Сделаем инверсию относительно x_1 и x_2. Заметим, что в таком случае все функции MAJ, в цепочке из которой состоит конъюнция, изменят свое значение на противоложное, $\neg$ так же будет выдавать противоположное значение, так как все слагаемые перед ним изменились на противоположные $\Rightarrow$ изменится и значение, выдаваемое функцией, оно станет равно 1, что неверно. Противоречие.