Задача 1

Постройте МТ, которая вычисляет нигде не определенную функцию.

Заметим, что если функция нигде не определена, то, это значит, что она никогда не завершает свою работу. Определим алфавит нашей МТ за $\{0, \Lambda\}$.

$$
\begin{aligned}
(0, q_0) &\to (0, q_0, 0) \\
(\Lambda \quad q_0) &\to (\Lambda \quad q_0 \quad 0)
\end{aligned}
$$

Алгоритм корректен, так как на любом входе машина циклится, а это и есть то, что нам нужно.

Задача 2

Постойте МТ, которая инвертирует входное двоичное число: на входе w, *где* $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in \{0, 1\}$, *результатом работы должно быть слово* $\overline{w} = \overline{w_1} \dots \overline{w_n}$.

$$
\begin{aligned}
(0, q_1) &\to (1, q_1, +1) \\
(1, q_1) &\to (0, q_1, +1) \\
(\Lambda, q_1) &\to (\Lambda, q_2, -1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0, q_2) &\to (0, q_2, -1) \\
(1, q_2) &\to (1, q_2, -1) \\
(\Lambda, q_2) &\to (\Lambda, q_f, 0)
\end{aligned}
$$

Алгоритм корректен, так как, действительно, мы просто бежим по числу и инвертируем последовательно каждый из его разрядов, после чего, возвращаемся обратно.

Задача 3

Постройте МТ, проверяющую, входит ли слово в алфавите $\{a, b, c\}$ подслово aba. В конце работы машины на ленте должно остаться 1, если такое подслово есть и 0, если его нет.

$$(b, q_1) \to (\Lambda, q_1, +1)$$
$$(c, q_1) \to (\Lambda, q_1, +1)$$
$$(a, q_1) \to (\Lambda, q_2, +1)$$

$$(a, q_2) \to (\Lambda, q_2, +1)$$
$$(c, q_2) \to (\Lambda, q_1, +1)$$
$$(b, q_2) \to (\Lambda, q_3, +1)$$

$$(b, q_3) \to (\Lambda, q_1, +1)$$
$$(c, q_3) \to (\Lambda, q_1, +1)$$
$$(a, q_3) \to (1, q_4, +1)$$

$$(a, q_4) \to (\Lambda, q_4, +1)$$
$$(b, q_4) \to (\Lambda, q_4, +1)$$
$$(c, q_4) \to (\Lambda, q_4, +1)$$

$$(\Lambda, q_1) \to (0, q_f, 0)$$
$$(\Lambda, q_2) \to (0, q_f, 0)$$
$$(\Lambda, q_3) \to (0, q_f, 0)$$
$$(\Lambda, q_4) \to (1, q_f, 0)$$

Докажем корректность нашего алгоритма. Для построения такой функции, нам нужно идти по слову, и если мы встречаем символ a, то потенциально мы можем встретить наше подслово. Перейдем в новое состояние. Проверим второй символ. Аналогично проверим третий. Если символ не совпадает, то опять перейдем в начальное состояние. Если мы дошли до конца, значит подслово не встретилось - выводим 0. И наоборот, если оно встречалось, то из состояния, в котором уже встретилось все подслово, выводим 1.

Задача 4

Докажите, что сущесвует МТ, которая сортирует символы входного двоичного числа: на входе w, где двоичное слово w содержит a нулей и b единиц, результатом работы должно быть слово 0^a1^b.

Представим неявно наш алгоритм. Будем просто идти по элементам. В случае, когда мы встретили 1, заменим ее на Λ. Перейдем в новое состояние, и пойдем снова по элементам, выполняя поиск уже 0. Заменяем его на 1. Далее перейдем в новое состояние, вернемся назад до Λ и заменим ее на 0. И так далее. Если встеретили символ конца ввода, возвращаемся назад до первого символа и переходим в финальное состояние.

Корректность алгоритма почти очевидна, так как на каждом шаге алгоритма мы избавляемся хотя бы от 1 инверсии.

Задача 5

Докажите существование МТ, которая проверяет, что вход является полиндромом. Если является , результат работы должен быть 1, а если нет, то результат 0.

Для удобства будем использовать 2 ленты. Скопируем входное слово на 2 ленту и переместим головку на последнюю позицию.

Определим наши переходы. Функция от двух равных аргументов переводит головку первой ленты направо, второй - налево. При этом символ на первой ленте переходит в пустой, символ на второй - сам в себя.

Если же аргументы не равны, перейдем в новое состояние, при этом с символами мы будем работать аналогично.

Дойдя до пустого символа, проверим находимся ли мы в начальном состояние, если да, то выводим 1 на перувую ленту, нет - 0. Таким образом, мы неявно предъявили такой алгоритм.

Задача 6

Существует ли машинв Тьюринга, при начале работы на пустой ленте, оставляющая на ней 2017 единиц и имеющая не более 100 состояний?

Для нашего удобства заведем 2018 лент и запишем в последние 2017 0. Первую ленту будем использовать для выписания ответа. Определим наши переходы как мы принимаем на вход значения от 2017 лент, на i-ом шаге которых первые $i-1$ значений от вспомогательных функций равняются Λ. Оно перейдет в аналогичную штуку с i лямбдами. При этом каретка первой ленты выписывает 1 и смещается на одну позицию вправо, так же как и i ая каретка i из 2017 ленты. Заканчиваем алгоритм, когда на вход получаем 2017 лямбд, и возвращаем каретку первой ленты в начало. Таким образом, мы как раз выпишем 2017 единиц.

Задача 7

Докажите существование машины Тьюринга, вычисляющую какую-либо биекцию между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Т. е. в начале $1^a\#1^b$, а в конце $1^{f(a,b)}$, где f - выбранная вами биекция.

$f(s) = 2^i(2j+1)$ - биекция. Пользуясь тезисом Черча - Тьюринга, получаем, что данная биекция вычислима на МТ.