Задача 1

Выразите симметрический многочлен

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)$$

через элементарные симметрические многочлены.

Воспользуемся основной теоремой симметрических многочленах. Старший член $L(f) = x_1^3x_2^2x_3^1x_4^0$. Рассмотрим все наборы неотрицательных упорядоченных l_i, такие что в сумме они дают 6:

$$(3,3,0,0) \quad (3,2,1,0) \quad (3,1,1,1) \quad (2,2,2,0) \quad (2,2,1,1)$$

$$\text{Получаем } F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4) = A_1\sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^{0-0}\sigma_4^0 + \sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^{1-0}\sigma_4^0 + A_2\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^1 + \\ + A_3\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^{2-0}\sigma_4^0 + A_4\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^1 = A_1\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + A_2\sigma_1^2\sigma_4 + A_3\sigma_3^2 + A_4\sigma_2\sigma_4$$

Получили функцию от четых переменных. Подставим туда произвольные x_i и составим систему. (подберем x_i такие, чтобы было попроще считать)

1. $f(1,1,0,1) = A_1$
2. $f(1,1,1,1) = 216A_1 + 96 + 16A_2 + 16A_3 + 6A_4$
3. $f(1,1,-1,-1) = -8A_1 - 2A_4$
4. $f(1,1,1,0) = 8A_1 + 9 + A_3$

Отсюда, $A_1 = 0,\ A_2 = -1,\ A_3 = -1,\ A_4 = 0 \Rightarrow F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2$

Задача 2

Пусть элементы $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - все комплексные корни многочлена $3x^3+2x^2-1$. Найдите значение выражения

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}$$

α_i- корни уравнения $x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 0\cdot x - \frac{1}{3} = 0$. Воспользуемся теоремой Виета:

1. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\frac{2}{3}$
2. $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = 0$
3. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{1}{3}$

Что понадобится нам в следующем:

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \\ = \frac{0^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

Задача 3

Найдите многочлен 4 степени, корнями которого являются число 1 и кубы всех комплексных корней многочлена $x^3 + x - 1$.

Воспользуемся теоремой Виета для данного нам трехчлена:

1. $\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = 0$
2. $\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = 1$
3. $\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = 1$

Составим трехчлен, корнями которого будут кубы корней нашего трехчлена. И снова теорема Виета:

1. $\sigma_1'(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3$
2. $\sigma_2'(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 = \sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2 = 4$
3. $\sigma_3'(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = x_1^3x_2^3x_3^3 = \sigma_3^3 = 1$

$\Rightarrow g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

Плюсом корнем так же должна быть 1, отсюда искомый многочлен 4 степени:

$$f(x) = (x-1)g(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 1) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 1$$

Задача 4

Докажите, что не существует бесконечной последовательности одночленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, в которой каждый последующий член строго меньше предыдущего в лексекографическом порядке.

Будем работать с индукцией. База $-$ $n = 1$. Количество членов ограничено степенью первого члена в последовательности.
Переход. Снова смотрим на первый член. Мысленно делим наш одночлен на две части $-$ x_1 и $x_2, \ldots, x_n$. Тогда все последующие члены будут состоять из x_1 в степени не более, чем начальная и убывающей последовательности из $n - 1$ элемента. И то, и другое ограничено из предположения индукции, отсюда $-$ все ограничено, переход выполнен.