Задача 1

Вычислите несобственные интегралы и установите их расходимость.(4)

Отметим, что наш несобстенный интеграл является интегралом первого рода, так как функция $f(x) = \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}$ непрерывна на промежутке $[\sqrt{3}, \infty)$. Согласно определению:

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{(arctgx)^2 dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{3}}^{b} \frac{(arctgx)^2 dx}{1+x^2} = \left|t \equiv arctgx\right| = \lim_{c\to\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{c} t^2 dt = \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^3}{3} = \frac{19\pi^3}{648}$$

Получили константу, отсюда – интеграл сходится.

Задача 2

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы.(8)

Сразу отметим, что наши несобстенные интеграл является интегралом первого рода, так интегрируемые функции непрерывны на заданных промежутах. Далее, согласно определению ищем предел:

1. $0 < \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{(x^5-x^2+4)dx}{3x^9-6x^4+x+7} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{(x^5-x^2+4)dx}{3x^9-6x^4+x+7} < \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{x^5 dx}{2x^9} = \lim\limits_{b\to+\infty} \Big|_3^b (-\frac{1}{6x^3}) = \frac{1}{162}$ $\approx 0.0061728 \Rightarrow$ сходится

2. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{5x^2+2}dx}{x-1} = \left|t \equiv x-1\right| = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{5t^2+10t+7}dt}{t} = \int\limits_{1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{5}{t}+\frac{10}{t^2}+\frac{7}{t^3}}dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \sqrt[3]{\frac{5}{t}+\frac{10}{t^2}+\frac{7}{t^3}}dt >$ $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \Big|_1^b \frac{3}{2}t^{\frac{1}{3}} = \infty \Rightarrow$ расходится

3. $0 < \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(x+7-cos3x)dx}{x^3+5x^2-1} < \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{10xdx}{x^3} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{10xdx}{x^3} = \lim\limits_{b\to+\infty} \Big|_1^b (-\frac{10}{x}) = 10 \Rightarrow$ сходится

.

Задача 3

Вычислите несобственные интегралы и установите их расходимость.(12)

$$\int\limits_{-3}^{2} \frac{2x+7}{\sqrt[3]{(x^2+7x+12)^2}} = \left|t \equiv x^2+7x+12\right| = \int\limits_{0}^{30} \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \Big|_0^{30} 3t^{\frac{1}{3}} = 3(30)^{\frac{1}{3}} \approx 9.3217 \Rightarrow \text{сходится}$$

Задача 4

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы.(16)

1.

$$0 < \int\limits_{-1}^{2} \frac{\sqrt[4]{(x^2+3x+2)^3}}{x^2+4x+3}dx = \int\limits_{-1}^{2} \sqrt[4]{\frac{(x+2)^3}{(x+1)(x+3)^4}}dx < \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{4}}} = \Big|_{-1}^{2} \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}3^{\frac{3}{4}}$$

$$\approx 3.0393 \Rightarrow \text{сходится}$$

2. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{x^2/2}{x\sqrt[3]{x}}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2/2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sqrt[3]{x}}-1} = 1 \neq 0$$

В точке разрыва отношение функций есть константа, отсюда наши функции имеют одинаковый характер сходимости

$$\int\limits_{0}^{5} g(x)dx = \int\limits_{0}^{5}\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}dx = \Big|_{0}^{5}\frac{3}{10}x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{2}5^{\frac{2}{3}} \approx 4.3860 \Rightarrow \text{сходится}$$

3. Дейстуем аналогично 2 пункту, рассматриваем функцию $g(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3/3}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3/3}{tgx - x} = 1 \neq 0$$

$\int\limits_{0}^{3} g(x)dx = \int\limits_{0}^{3} 3\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \Big|_{0}^{3}(-\frac{3}{2})\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \infty \Rightarrow$ расходится

.

Задача 5

Найдите все значения параметра α, при которых сходится интеграл.(20)

1.

$$\int\limits_{-1}^{4}\frac{log_2^{\alpha}(x+2)}{(1+x^5)^{\alpha^2}}dt = \big|t \equiv arctgx + 1\big| = \int\limits_{0}^{5}\frac{log_2^{\alpha}(1+t)}{(t^5-5t^4+10t^3-10t^2+5t)^{\alpha^2}}dt$$

Разрыв в 0, где по ряду Тейлора можем заменить на эквивалентный по сходимости интеграл:

$$\int\limits_{0}^{5}\frac{t^{\alpha}}{t^{\alpha^2}}dt$$

Для того, чтобы интеграл сходился, требуется $\alpha^2-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha^2-\alpha-1 < 0 \Rightarrow \alpha \in (0,1)$. В остальных случаях расходится.

2. Здесь неопределенность возникает уже на бесконечности. Аналогично, заменяем на бесконечности:

$$\Big(\frac{5x-1}{3x+1}\Big)^{\alpha x}(ln(2+3^{\alpha^2 x}) - ln(1+3^{\alpha^2 x})) \equiv e^{\alpha x}(ln(1+\frac{2}{3^{\alpha^2 x}}) - ln(1+\frac{1}{3^{\alpha^2 x}})) \equiv$$

$$\equiv \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha^2 x}}$$

Сходится, когда $\alpha < \alpha^2 \Rightarrow \alpha \in (-\infty, 0)\cup(1,\infty)$

Задача 6

Исследуйте несобственный интеграл на абсолютную и условную сходимость.(24)

Сделаем замену переменных $t \equiv \sqrt{x+1} - 1$. $dx = d((t+1)^2 - 1) = 2(t+1)dt$

$$\int\limits_{\sqrt{2}-1}^{\infty} \frac{2cos(t) \cdot (t+1)}{(t+1)^2 - 1 + sin((t+1)^2 - 1)} dt$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями данный интеграл эквивалентен:

$$\int\limits_{\sqrt{2}-1}^{\infty} \frac{cos(t)}{t} dt - \text{сходится}$$

Докажем абсолютную расходимость:

$$\int\limits_{\sqrt{2}-1}^{\infty} \left|\frac{cos(t)}{t}\right| dt = \int\limits_{\sqrt{2}-1}^{\infty} \frac{|cos(t)|}{t} dt - \text{расходится}$$

Таким образом, интеграл условно сходится.

Задача 7

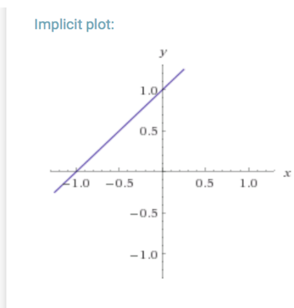
Найлите аналитически (в явном виде или параметрически) границы клеток Вороного для точечных множеств M в $\mathbb{R}^n$(28):

- *в пукте а для метрик* $d_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, d_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, d_\infty = max|x_i - y_i|$
- *в пункте б для метрики d_2. В пункте а постойте все границы.*

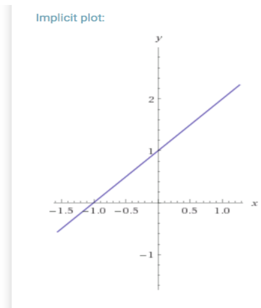
1. $x_1(1, -3)$, $x_2(-4, 2)$. Аналитически уравнение будет выглядить следующим образом:
   (a) $|1 - x| + |-3 - y| = |-4 - x| + |2 - y|$ для d_1
   (b) $\sqrt{(1-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(-4-x)^2 + (2-y)^2}$ для d_2
   (c) $max(1 - x, -3 - y) = max(-4 - x, 2 - y)$ для d_∞

   Где $(x, y)-$ искомая клетка Вороного. Выполним переход от уравнения к системе:

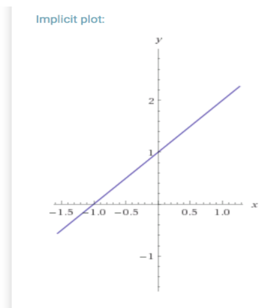
   (a) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, y \leqslant -3 \\ -4 < x < 1,\ y = x + 1 \\ x \geqslant 1, y \geqslant 2 \end{array}\right.$



   (b) $\left[\ y = x + 1\right.$



(c) $\left[\ y = x + 1\right.$



2. $x_1(3,2,-4),\ x_2(2,1,5)$
   $\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2+(-4-z)^2} = \sqrt{(2-x)^2+(1-y)^2+(5-z)^2}$
   Откуда имеем: $z = \frac{1}{18}(2x+2y+1)$

.

Задача 8

- *найдите линии уровня $f(x,y) = C$, определите тип (второго порядка) в зависимости от значения C, найдите их ось симметрии, постройте по одной кривой различных типов.(2)*
- *найдите пределы $\lim\limits_{x\to x_1}\lim\limits_{y\to y_1} f(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to x_2}\lim\limits_{y\to y_2} f(x,y)$*

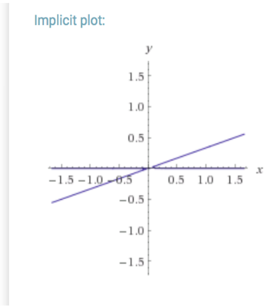
1. $\dfrac{3x^2-xy}{x^2-y^2},\ (x_1,y_1) = (-2,1),\ (x_2,y_2) = (0,0),$ Одз $x \neq \pm y$

$$f(x,y) = C = \frac{3x^2-xy}{x^2-y^2} \Rightarrow Cy^2 - xy + 3x^2 - Cx^2 = 0 \Rightarrow$$

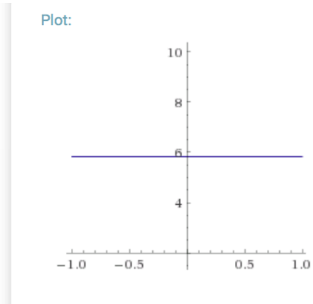
$$x = y\frac{1 \pm \sqrt{1-4c(3-c)}}{2(3-c)} = y\frac{1 \pm \sqrt{4(c-\frac{3}{2}-\sqrt{2})(c-\frac{3}{2}+\sqrt{2}))}}{2(3-c)}$$

Отсюда вытекает несколько случае:

(a) $C = 3$
$3y^2 - xy + 3x^2 - 3x^2 = (3y-x)y = 0$ - две прямые $y = tg(\frac{\alpha}{2})x = (\sqrt{10}-3)x$, где $tg(\alpha) = \frac{1}{3}$ - ось симметрии
$(0,0)-$ выколотая

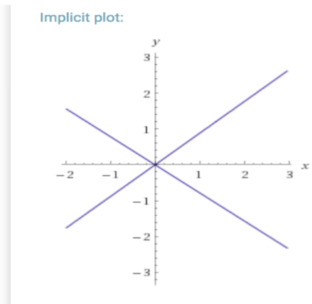


(b) $C = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$
Вырожденные случаи, $y = \frac{1}{2(3-c)}$– одна прямая, она же ось симметрии $(\frac{1}{2(3-c)}, \frac{1}{2(3-c)})$– выколотая



(c) $C \in (\frac{3}{2} - \sqrt{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2})$ - решений нет

(d) в остальных случаях получаем две прямые $x = y\dfrac{1 \pm \sqrt{4(c - \frac{3}{2} - \sqrt{2})(c - \frac{3}{2} + \sqrt{2}))}}{2(3-c)}$
ось симметрии – полусумма x_i при одном $y \Rightarrow x = y\frac{1}{3-c}$



.

2. • $\lim\limits_{x \to x_1\, y \to y_1} f(x,y) = \lim\limits_{x \to -2\, y \to 1} \dfrac{3x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \dfrac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{4 - 1} = \dfrac{14}{3}$

• $\lim\limits_{x \to x_2\, y \to y_2} f(x,y) = \lim\limits_{x \to 0\, y \to 0} \dfrac{3x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \dfrac{3cos^2\alpha - 2sin\alpha \cdot cos\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha} = \dfrac{3 - 2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$– зависит от α, поэтому предела не существует.

Задача 9

Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ *для функции* $u = f(x,y,z)$ *и значение частной производной в указанной точке.(6)*

$f(x,y,z) = y^2 sin(xyz)$

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 \cdot z \cdot cos(xyz)$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = y(2sin(xyz) + xyz \cdot cos(xyz))$
3. $\frac{\partial u}{\partial z} = y^3 \cdot x \cdot cos(xyz)$

$u'_y(0, 21, -1) = 0$

Задача 10

Найдите все частные производные второго порядка функции $u = f(x,y,z)$*. Найдите значение указанной частной производной в заданной точке.(10)*

$f(x,y,z) = 2x^3y^2 - y^2z^2 + xz^3$

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^2y^2 + z^3$
   (a) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = 8xy^2$
   (b) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}) = 8x^2y$
   (c) $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial x}) = 3z^2$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3y - 2yz^2$
   (a) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = 12x^2y$
   (b) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = 4x^3 - 2z^2$
   (c) $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial y}) = -4yz$
3. $\frac{\partial u}{\partial z} = -2y^2z + 3xz^2$
   (a) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial z}) = 3z^2$
   (b) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial z}) = -4yz$
   (c) $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z}) = -2y^2 + 6xz$

$u''_{yz}(1, 2, 1) = -8$

Задача 11

Докажите, что функция $z = f(x,y)$ *удволетворяет дифференциальному уравнению в частных производных* $F(\dots) = 0$*.(14)*

$z = arctg\frac{x+y}{1-xy} \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2} \cdot \frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1}{x^2+1}$
2. $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = 0$

Действительно :)

Задача 12

Найдите du и d^2u для функции $u = f(x, y)$.(18)

$u = -x^4y^4 + 3x^2$

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = -4x^3y^4 + 6x$
   (a) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = -12x^2y^4 + 6$
   (b) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = -16x^3y^3$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = -4x^4y^3$
   (a) $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = -16x^3y^3$
   (b) $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) = -12x^4y^2$

Теперь, когда уже все знаем, мы готовы выписать ответ:

1. $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (-4x^3y^4 + 6x)dx - 4x^4y^3dy$
2. $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}dy^2 =$
   $= (-12x^2y^4 + 6) \cdot dx^2 - 16x^3y^3 \cdot dxdy - 16x^3y^3 \cdot dxdy - 12x^4y^2 \cdot dy^2 =$
   $= (-12x^2y^4 + 6) \cdot dx^2 - 32x^3y^3 \cdot dxdy - 12x^4y^2 \cdot dy^2$

.

Задача 13

- *составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $f(x, y, z) = 0$, в указанной точке M*
- *найдите наибольшую скорость возрастания функции $f(x, y, z) = 0$ в точке M*
- *найдите производнуб функции $f(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора l (22)*

1. $f(x, y, z) = 3x^2 + 4xy^2z - 2yz^2 - y^3 - 6z^3 - 12,\ M(2, 1, 1)$

   Ищем все частные производные:
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 4y^2z = 16$
   (b) $\frac{\partial f}{\partial y} = 8xyz - 2z^2 - 3y^2 = 11$
   (c) $\frac{\partial f}{\partial z} = 4xy^2 - 4yz - 18z^2 = -14$

   Отсюда
   (a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{6x + 4y^2z}{4xy^2 - 4yz - 18z^2} = -\frac{3x + 2y^2z}{2xy^2 - 2yz - 9z^2}$$
   (b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{8xyz - 2z^2 - 3y^2}{4xy^2 - 4yz - 18z^2}$$

   $z - z_0 = z'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$ – уравнение касательной
   (a) $z'_x(2, 1, 1) = \frac{8}{7}$

(b) $z'_y(2,1,1) = \frac{11}{14}$

$z-1 = \frac{8}{7}(x-1) + \frac{11}{14}(y-1) \Rightarrow -\frac{8x}{7} - \frac{11y}{14} + z + \frac{13}{14} = 0$

$\dfrac{x-x_0}{z'_x} = \dfrac{y-y_0}{z'_y} = \dfrac{z-z_0}{-1}$ - нормаль

$\dfrac{x-2}{(\frac{8}{7})} = \dfrac{y-1}{(\frac{11}{14})} = -(z-1)$ - формула нормали к поверхности в заданной точке

2. $grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 16\vec{i} + 11\vec{j} - 14\vec{k}$

   $|grad(f)| = \sqrt{(16)^2 + (11)^2 + (14)^2} = \sqrt{573}$ - наибольшая скорость возрастания функции

3. $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}cos(\beta) + \frac{\partial f}{\partial z}cos(\gamma)$, где $cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{6}}$, $cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $cos(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

   $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{-16}{\sqrt{6}} + \frac{11}{\sqrt{6}} - \frac{14\cdot 2}{\sqrt{6}} = -\frac{11\sqrt{6}}{2}$

.

Задача 14

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial v}$ для заданных функций $u = u(x,y)$, $x = x(t,v)$, $y = y(t,v)$.(26)

$u = x^3cos(5x-3y) \quad x = t\cdot arcsin(t^2v) \quad y = e^{t-v^2}$

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2(3cos(5x-3y) - 5x\cdot sin(5x-3y))$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^3\cdot sin(5x-3y)$
3. $\frac{\partial x}{\partial t} = arcsin(t^2v) + \frac{2t^2}{\sqrt{1-(t^2v)^2}}$
4. $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{t}{\sqrt{1-(t^2v)^2}}$
5. $\frac{\partial y}{\partial t} = e^{t-v^2}$
6. $\frac{\partial y}{\partial v} = -2ve^{t-v^2}$

Все знаем, пишем формулу:

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = x^2(3cos(5x-3y) - 5x\cdot sin(5x-3y))(arcsin(t^2v) + \frac{2t^2}{\sqrt{1-(t^2v)^2}}) +$
   $+\, 3x^3\cdot sin(5x-3y)e^{t-v^2}$
2. $\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = x^2(3cos(5x-3y) - 5x\cdot sin(5x-3y))\frac{t}{\sqrt{1-(t^2v)^2}} - 6x^3\cdot sin(5x-3y)ve^{t-v^2}$

.

Задача 15

Найдите y'_x для функции, заданной неявно.(30)

$y^2arctg(2x) - xtg(2x+3y) = 0$ | берем производную по x от левой и правой части

$$2yy'_x\cdot arctg(2x) + \frac{2y^2}{1+4x^2} - tg(2x+3y) - \frac{2x}{cos^2(2x+3y)} = 0$$

$$y'_x = \frac{tg(2x+3y) + \frac{2x}{cos^2(2x+3y)} - \frac{2y^2}{1+4x^2}}{2y\cdot arctg(2x)}$$

Задача 16

Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *для функции* $z = z(x, y)$*, заданной неявно указанным уравнением.(4)*

$F = (y - 3z)^2 - 5sin(x + 2z) = 0$

1. $\frac{\partial F}{\partial x} = -5cos(x + 2z)$
2. $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - 3z) = 2y - 6z$
3. $\frac{\partial F}{\partial z} = -6(y - 3z) + 10cos(x + 2z)$

Отсюда, снова легко находим частные производные:

1. $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-5cos(x + 2z)}{-6(y - 3z) + 10cos(x + 2z)} = \frac{5cos(x + 2z)}{10cos(x + 2z) - 6(y - 3z)}$$
2. $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y - 6z}{-6(y - 3z) + 10cos(x + 2z)} = \frac{2y - 6z}{6(y - 3z) - 10cos(x + 2z)}$$

.

Задача 17

Найдите разложение функции $u(x, y)$ *по формуле Маклорена до* $o((x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}})$*.(8)*

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 + 4x^2 + 8y^2}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1 + t}} = \frac{1}{2}(1 + t)^{-\frac{1}{4}}, \text{ где } t \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$$

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n) = \frac{1}{2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2})^n + o((x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}})$$

Задача 18

Найдите разложение по формуле Тейлора до второго порядка.(12)

$$u(x, y, z) = sin^2(\frac{\pi}{4}(2x + z))cos(\frac{\pi}{6}y) \qquad (x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 2)$$

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\pi cos(\frac{\pi y}{6})sin(\frac{1}{2}\pi(2x + z))) = 0$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{6}\pi sin(\frac{\pi y}{6})sin^2(\frac{1}{4}\pi(2x + z))) = 0$
3. $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{4}\pi cos(\frac{\pi y}{6})sin(\frac{1}{2}\pi(2x + z))) = 0$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} = \frac{1}{2}\pi^2 cos(\frac{\pi y}{6})cos(\frac{1}{2}\pi(2x + z)) = \frac{\pi^2}{4}$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}\pi^2 sin(\frac{\pi y}{6})sin(\frac{1}{2}\pi(2x + z)) = 0$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{4}\pi^2 cos(\frac{\pi y}{6})cos(\frac{1}{2}\pi(2x + z)) = \frac{\pi^2}{8}$
7. $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{12}\pi^2 sin(\frac{\pi y}{6})sin(\frac{1}{2}\pi(2x + z)) = 0$
8. $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = -\frac{1}{36}\pi^2 cos(\frac{\pi y}{6})sin^2(\frac{1}{4}\pi(2x + z)) = 0$

9. $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{24}\pi^2 sin(\frac{\pi y}{6}) sin(\frac{1}{4}\pi(2x+z)) = 0$
10. $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{1}{4}\pi^2 cos(\frac{\pi y}{6}) cos(\frac{1}{4}\pi(2x+z)) = \frac{\pi^2}{8}$
11. $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = -\frac{1}{24}\pi^2 sin(\frac{\pi y}{6}) sin(\frac{1}{4}\pi(2x+z)) = 0$
12. $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z} = -\frac{1}{24}\pi^2 sin(\frac{\pi y}{6}) sin(\frac{1}{4}\pi(2x+z)) = \frac{\pi^2}{16}$

$u(x,y,z) = u_0(x,y,z) + u'\delta + \frac{u''\delta^2}{2!} + o(\delta^2) = (0+0+0)\delta + (\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{16})\delta^2 + o(\delta^2) = \frac{9\pi^2\delta^2}{16} + o(\delta^2)$

где $\delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

Задача 20

Найти частные производные и точные значения функций.(20)

$$\begin{cases} 2u^2v - v^2 + x^2y - y = 0 \\ u^2 - v - 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Дифференцируя по x и y получаем систему из 4 уравнений:

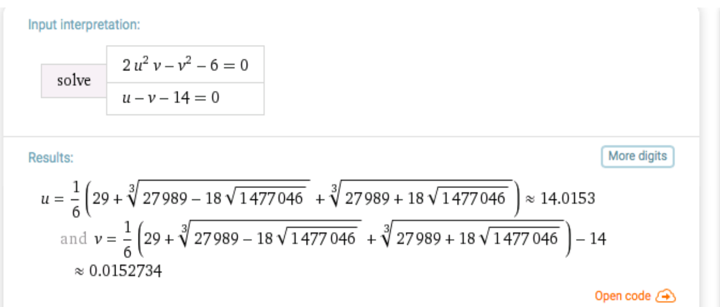
$$\begin{cases} 4uu'_x v + 2u^2 v'_x - 2vv'_x + 2xy = 0 \\ 2uu'_x - v'_x - 3 = 0 \\ 4uu'_y v + 2u^2 v'_y - 2vv'_y + x^2 - 1 = 0 \\ 2uu'_y - v'_y + 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4uvu'_x + 2(u^2 - v)v'_x = -2xy \\ 2uu'_x - v'_x = 3 \\ 4uvu'_y + 2(u^2-v)v'_y = 1 - x^2 \\ 2uu'_y - v'_y = -4 \end{cases}$$

$$\sigma = -4uv - 4u(u^2 - v) = -4u^3$$
$$\sigma_x = -2xy(-1) - 6(u^2 - v) = 2xy - 6(u^2 - v)$$
$$\sigma_y = 12uv + 4xyu$$
$$u'_x = \frac{2xy - 6(u^2 - v)}{-4u^3} \quad v'_x = -\frac{3v + xy}{u^2}$$

$$\sigma = -4uv - 4u(u^2 - v) = -4u^3$$
$$\sigma_x = (1 - x^2)(-1) + 8 = x^2 + 7$$
$$\sigma_y = -16uv - 2u(1 - x^2) = -2u(1 - x^2 + 16v)$$
$$u'_y = -\frac{x^2 + 7}{4u^3} \quad u'_y = \frac{1 - x^2 + 16v}{2u^2}$$

Подставляем нашу точку и находим значения функций:

$$\begin{cases} 2u^2v - v^2 - 6 = 0 \\ u - v - 14 = 0 \end{cases}$$



Задача 21

Найдите и изобразите D и G.(24)

$$\begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 \leqslant 2y - 3x \leqslant 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -u + 4v \\ y = u + 2v \end{cases}$$

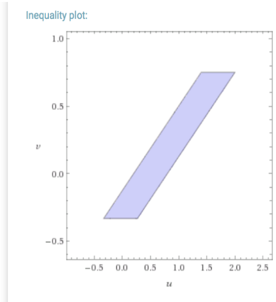
$$\begin{cases} -1 \leqslant -u + 4v \leqslant 1 \\ 1 \leqslant 5u - 8v \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leqslant -5u + 20v \leqslant 5 \\ 1 \leqslant 5u - 8v \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leqslant 12v \leqslant 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leqslant v \leqslant \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 8v \leqslant 5u \leqslant 4 + 8v \end{cases}$$

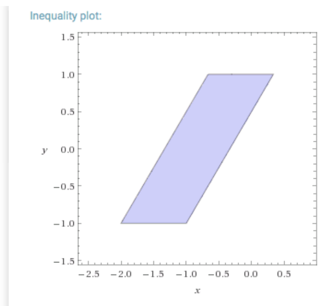
$$\begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -4 + 2y \leqslant 3x \leqslant -1 + 2y \end{cases}$$

Теперь строим:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \leqslant v \leqslant \frac{3}{4} \\ 1 + 8v \leqslant 5u \leqslant 4 + 8v \end{cases}$$



$$\begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -4 + 2y \leqslant 3x \leqslant -1 + 2y \end{cases}$$



Задача 22

Найдите и изобразите множество точек.(28)

$$\begin{cases} x > -2 \\ y > 1 \\ 2x + y < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u - 2v \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Подставим в нашу систему x и y:

$$\begin{cases} u - 2v > -2 \text{ - прямая} \\ u^2 + v^2 > 1 \text{ - внешняя окружность с центром } (0,0) \text{ и радиусом } 1 \\ 2u - 4v + u^2 + v^2 = (u+1)^2 + (v-2)^2 - 5 < 1 \text{ - окружность с центром } (-1,2) \text{ и радиусом } \sqrt{6} \end{cases}$$