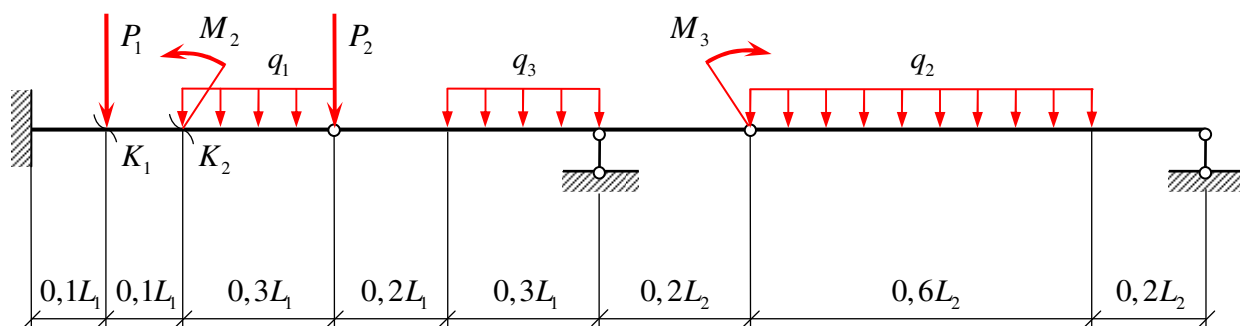


Расчёт статически определимой многопролётной балки на неподвижную и подвижную нагрузки

Исходные данные:

расстояния между опорами	$L_1 = 5,2 \text{ м}$ $L_2 = 6,2 \text{ м}$ $L_3 = 7,6 \text{ м}$ $L_4 = 4,5 \text{ м}$
сосредоточенные силы	$P_1 = 4 \text{ кН}$ $P_2 = 6 \text{ кН}$ $P_3 = 0 \text{ кН}$
распределённые нагрузки	$q_1 = 3,6 \text{ кН/м}$ $q_2 = 6,2 \text{ кН/м}$ $q_3 = 8,6 \text{ кН/м}$
моменты, приложенные к балке	$M_1 = 0 \text{ кНм}$ $M_2 = 22 \text{ кНм}$ $M_3 = 20 \text{ кНм}$
рассматриваемые сечения	K_1 и K_2



1. Проверка статической определимости и геометрической неизменяемости составной многопролётной балки.

Необходимое условие: число степеней свободы $W \leq 0$

$$W = 3D - 2Ш - C - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 0 - 6 = 0$$

где D – число дисков в системе (без учёта диска «земля»);

$Ш$ – простых шарниров, соединяющих диски D ;

C – число стержней, соединяющих диски D ;

C_0 – число опорных стержней, соединяющих систему с диском «земля».

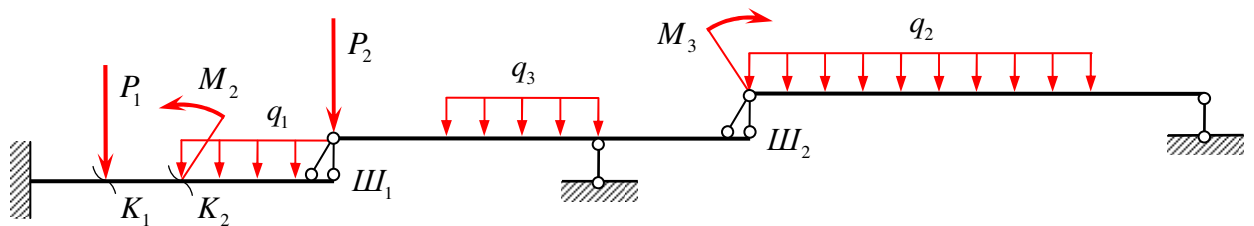
Достаточное условие: диск 1 присоединяется к «земле» тремя связями, образующими жёсткое защемление. Следовательно, эта балка – основная. К этой геометрически

неизменяемой системе присоединён диск 2 по правилу двух дисков (шарнир, соединяющий диски 1 и 2 и опорный стержень 2-го диска, не проходящий через шарнир). К этой геометрически неизменяемой системе присоединён диск 3 по правилу двух дисков (шарнир, соединяющий диски 2 и 3 и опорный стержень 3-го диска, не проходящий через шарнир).

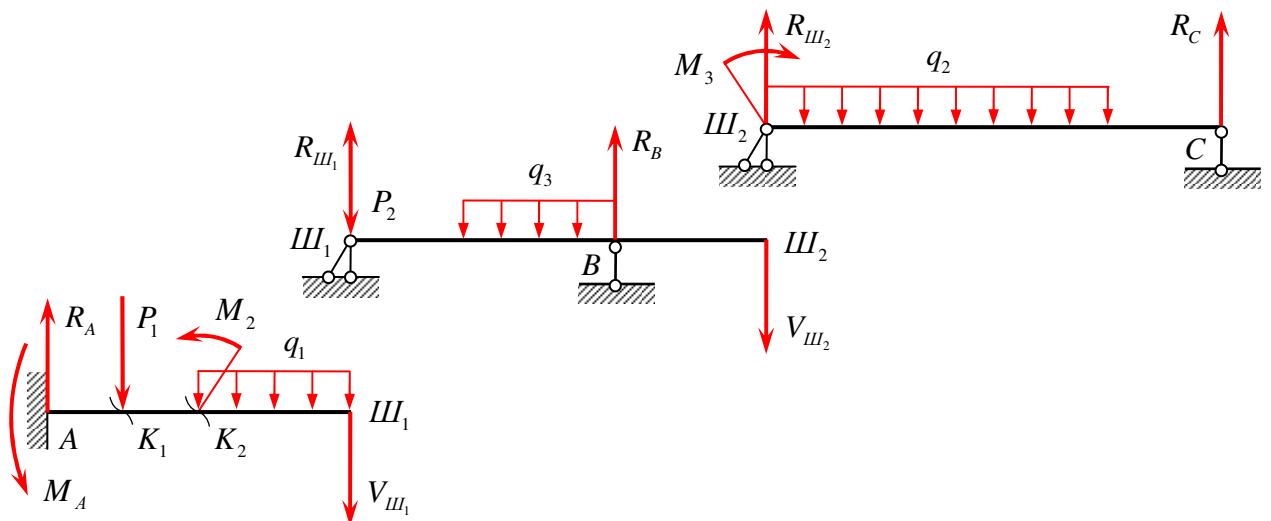
Достаточное условие выполняется.

Вывод: система в целом геометрически неизменяема и статически определима
 $W = 0$.

2. Построение поэтажной схемы.



3. Определение опорных реакций и реакций шарниров.



Элемент $СIII_2$:

$$\sum M_C = R_{III_2} \cdot 0,8L_2 - q_2 \cdot 0,6L_2 \cdot 0,5L_2 + M_3 = 0$$

$$\sum M_{III_2} = R_C \cdot 0,8L_2 - q_2 \cdot 0,6L_2 \cdot 0,3L_2 - M_3 = 0$$

$$R_C = \frac{0,18q_2L_2^2 + M_3}{0,8L_2} = \frac{0,18 \cdot 6,2 \cdot 6,2^2 + 20}{0,8 \cdot 6,2} = 12,68 \text{ кН}$$

$$R_{III_2} = \frac{0,3q_2L_2^2 - M_3}{0,8L_2} = \frac{0,3 \cdot 6,2 \cdot 6,2^2 - 20}{0,8 \cdot 6,2} = 10,38 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_C + R_{III_2} - q_2 \cdot 0,6L_2 = 12,68 + 10,38 - 6,2 \cdot 3,72 = 0$$

Элемент III_1III_2 :

$$\sum M_{III_1} = R_B \cdot 0,5L_1 - V_{III_2} (0,5L_1 + 0,2L_2) - q_3 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,35L_1 = 0$$

$$\sum M_B = R_{III_1} \cdot 0,5L_1 - 0,5P_2L_1 + 0,2V_{III_2}L_2 - q_3 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,15L_1 = 0$$

$$R_B = \frac{V_{III_2} (0,5L_1 + 0,2L_2) + 0,105q_3L_1^2}{0,5L_1} = \frac{10,38(2,6 + 1,24) + 0,105 \cdot 8,6 \cdot 5,2^2}{2,6} = 24,72 \text{ кН}$$

$$R_{III_1} = \frac{0,5P_2L_1 - 0,2V_{III_2}L_2 + 0,045q_3L_1^2}{0,5L_1} = \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 5,2 - 0,2 \cdot 10,38 \cdot 6,2 + 0,045 \cdot 8,6 \cdot 5,2^2}{2,6} = 5,08 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_B + R_{III_1} - P_2 - V_{III_2} - q_3 \cdot 0,3L_1 = 24,72 + 5,08 - 6 - 10,38 - 8,6 \cdot 1,56 = 0$$

Элемент $AIII_1$:

$$\sum M_A = M_A - 0,1P_1L_1 - 0,5V_{III_1}L_1 - q_1 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,35L_1 + M_2 = 0$$

$$\sum M_{III_1} = R_A \cdot 0,5L_1 - 0,4P_1L_1 - q_1 \cdot 0,3L_1 \cdot 0,15L_1 - M_A - M_2 = 0$$

$$M_A = 0,1P_1L_1 + 0,5V_{III_1}L_1 + 0,105q_1L_1^2 - M_2 =$$

$$= 4 \cdot 0,52 + 5,08 \cdot 2,6 + 0,105 \cdot 3,6 \cdot 5,2^2 - 22 = 3,51 \text{ кНм}$$

$$R_A = \frac{0,4P_1L_1 + 0,045q_1L_1^2 + M_A + M_2}{0,5L_1} =$$

$$= \frac{4 \cdot 2,08 + 0,045 \cdot 3,6 \cdot 5,2^2 + 3,51 + 22}{0,5 \cdot 5,2} = 14,7 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = R_A - V_{III_1} - P_1 - q_1 \cdot 0,3L_1 = 14,7 - 5,08 - 4 - 3,6 \cdot 1,56 = 0$$

4. Построение эпюр Q и M для всех простых и консольных балок поэтажной схемы.

Элемент $AIII_1$:

$$0 \leq z_1 \leq 0,52 \text{ м}$$

$$Q_1 = R_A = 14,7 \text{ кН}$$

$$M_1 = R_A z_1 - M_A = 14,7 z_1 - 3,51$$

$$M_1(0) = -3,51 \text{ кНм}$$

$$M_1(0,52) = 14,7 \cdot 0,52 - 3,51 = 4,13 \text{ кНм}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq z_2 \leq 0,52 \text{ м} \quad & Q_2 = R_A - P_1 = 10,7 \text{ кН} \\
& M_2 = R_A (0,52 + z_2) - P_1 z_2 - M_A = 10,7 z_2 + 4,13 \\
& M_2(0) = 4,13 \text{ кНм} \\
& M_2(0,52) = 10,7 \cdot 0,52 + 4,13 = 9,69 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq z_3 \leq 1,56 \text{ м} \quad & Q_3 = V_{III_1} + q_1 z_3 = 5,08 + 3,6 z_3 \\
& Q_3(0) = 5,08 \text{ кН} \\
& Q_3(1,56) = 5,08 + 3,6 \cdot 1,56 = 10,7 \text{ кН} \\
& M_3 = -V_{III_1} z_3 - 0,5 q_1 z_3^2 = -5,08 z_3 - 1,8 z_3^2 \\
& M_2(0) = 0 \text{ кНм} \\
& M_2(1,56) = -5,08 \cdot 1,56 - 1,8 \cdot 1,56^2 = -12,31 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

Элемент $III_1 III_2$:

$$\begin{aligned}
0 \leq z_1 \leq 1,04 \text{ м} \quad & Q_1 = R_{III_1} - P_2 = -0,92 \text{ кН} \\
& M_1 = (R_{III_1} - P_2) z_1 = -0,92 z_1 \\
& M_1(0) = 0 \text{ кНм} \\
& M_1(1,04) = -0,92 \cdot 1,04 = -0,96 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq z_2 \leq 1,56 \text{ м} \quad & Q_2 = R_{III_1} - P_2 - q_3 z_2 = -0,92 - 8,6 z_2 \\
& Q_2(0) = -0,92 \text{ кН} \\
& Q_2(1,56) = -0,92 - 8,6 \cdot 1,56 = -14,34 \text{ кН} \\
& M_2 = (R_{III_1} - P_2)(1,04 + z_2) - 0,5 q_3 z_2^2 = -0,96 - 0,92 z_2 - 4,3 z_2^2 \\
& M_2(0) = -0,96 \text{ кНм} \\
& M_2(1,56) = -0,96 - 0,92 \cdot 1,56 - 4,3 \cdot 1,56^2 = -12,87 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq z_3 \leq 1,24 \text{ м} \quad & Q_3 = V_{III_2} = 10,38 \text{ кН} \\
& M_3 = -V_{III_2} z_3 = -10,38 z_3 \\
& M_3(0) = 0 \text{ кНм} \\
& M_3(1,24) = -10,38 \cdot 1,24 = -12,87 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

Элемент $CIII_2$:

$$\begin{aligned}
0 \leq z_1 \leq 3,72 \text{ м} \quad & Q_1 = R_{III_2} - q_2 z_1 = 10,38 - 6,2 z_1 \\
& Q_1(0) = 10,38 \text{ кН} \\
& Q_1(3,72) = 10,38 - 6,2 \cdot 3,72 = -12,68 \text{ кН} \\
& M_1 = R_{III_2} z_1 - 0,5 q_2 z_1^2 + M_3 = 20 + 10,38 z_1 - 3,1 z_1^2 \\
& M_1(0) = 20 \text{ кНм}
\end{aligned}$$

$$M_1(3,72) = 20 + 10,38 \cdot 3,72 - 3,1 \cdot 3,72^2 = 15,72 \text{ кНм}$$

Определяем z'_1 , где $Q_1 = 0$: $z'_1 = \frac{R_{III_2}}{q_2} = \frac{10,38}{6,2} = 1,674 \text{ м}$

$$M_1(1,674) = 20 + 10,38 \cdot 1,674 - 3,1 \cdot 1,674^2 = 28,7 \text{ кНм}$$

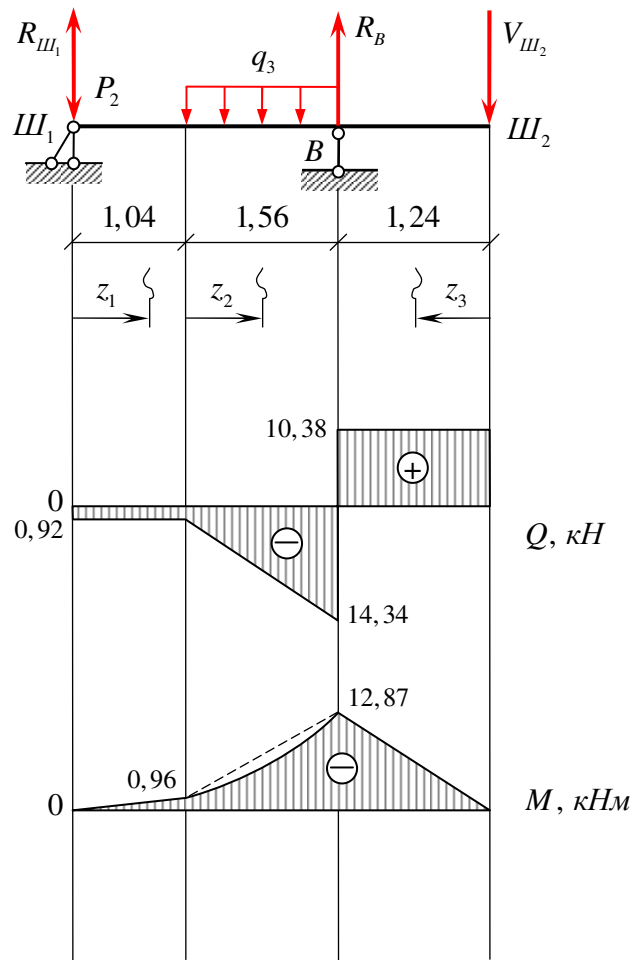
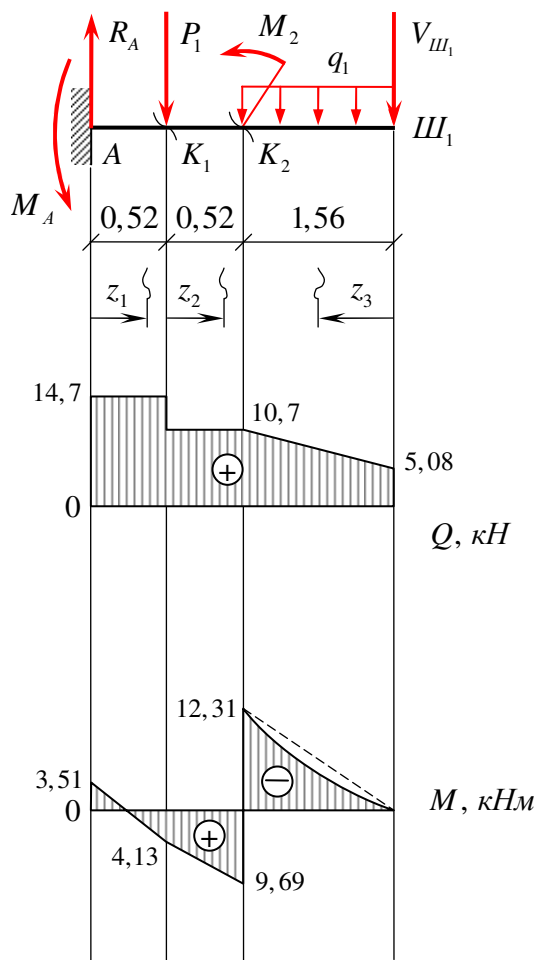
$$0 \leq z_2 \leq 1,24 \text{ м}$$

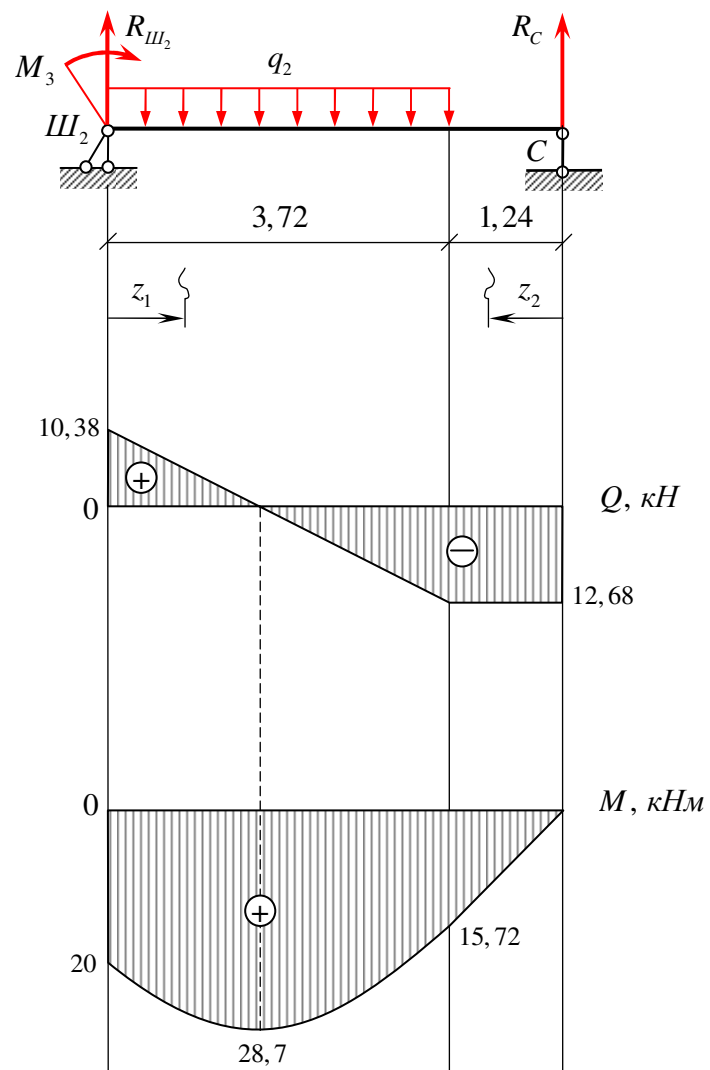
$$Q_2 = -R_C = -12,68 \text{ кН}$$

$$M_2 = R_C z_2 = 12,68 z_2$$

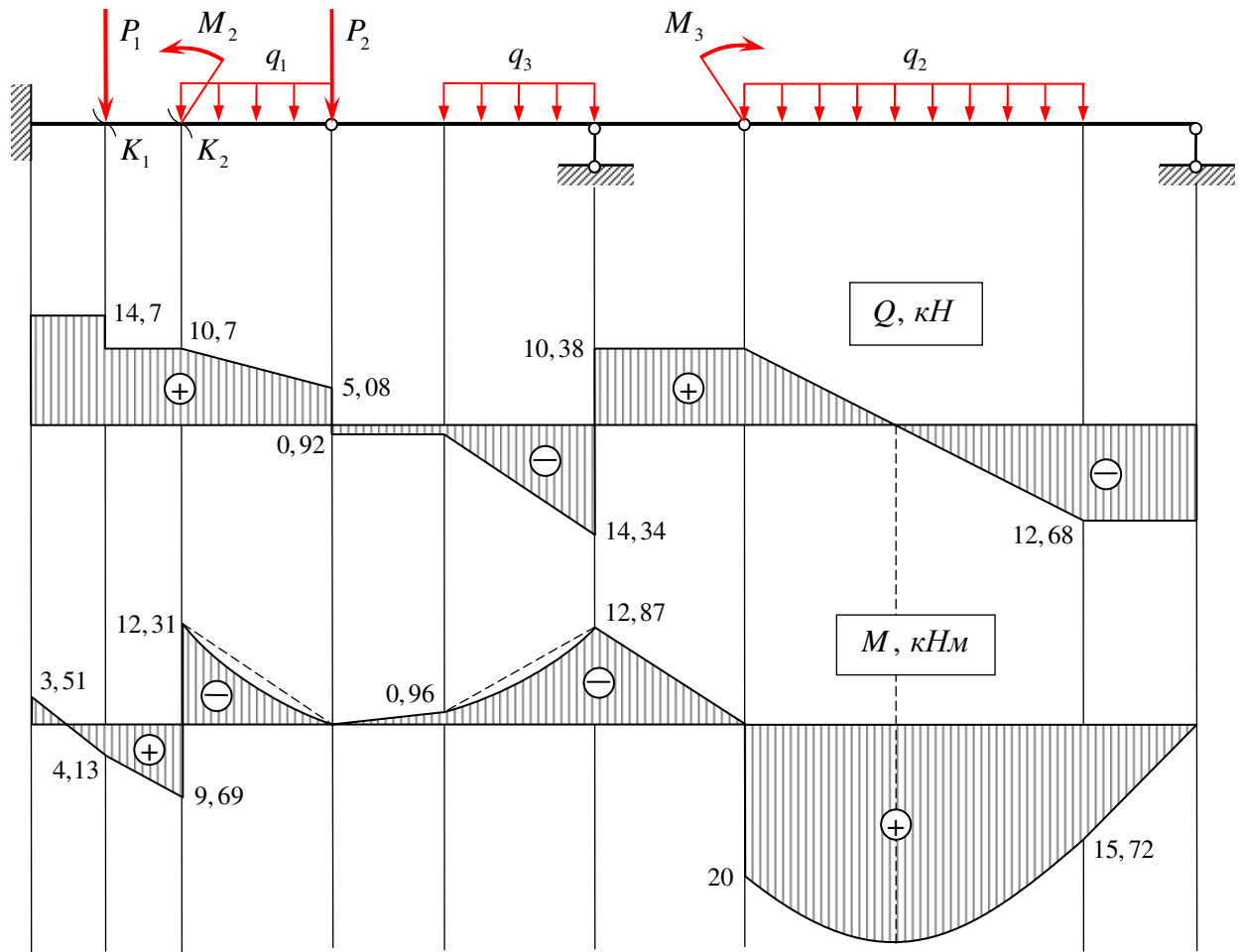
$$M_2(0) = 0 \text{ кНм}$$

$$M_2(1,24) = 12,68 \cdot 1,24 = 15,72 \text{ кНм}$$





5. Построение эпюр Q и M для заданной составной балки.



6. Построение линии влияния одной из опорных реакций промежуточной опоры.

Определение реакций опор и внутренних силовых факторов по линиям влияния выполняется по формуле

$$S = \sum_i P_i y_i + \sum_j q_j \omega_j + \sum_k M_k \operatorname{tg} \alpha_k$$

где S – искомая величина;

P – внешняя сила («+» – направлена вниз, «-» – направлена вверх);

q – распределённая нагрузка («+» – направлена вниз, «-» – направлена вверх);

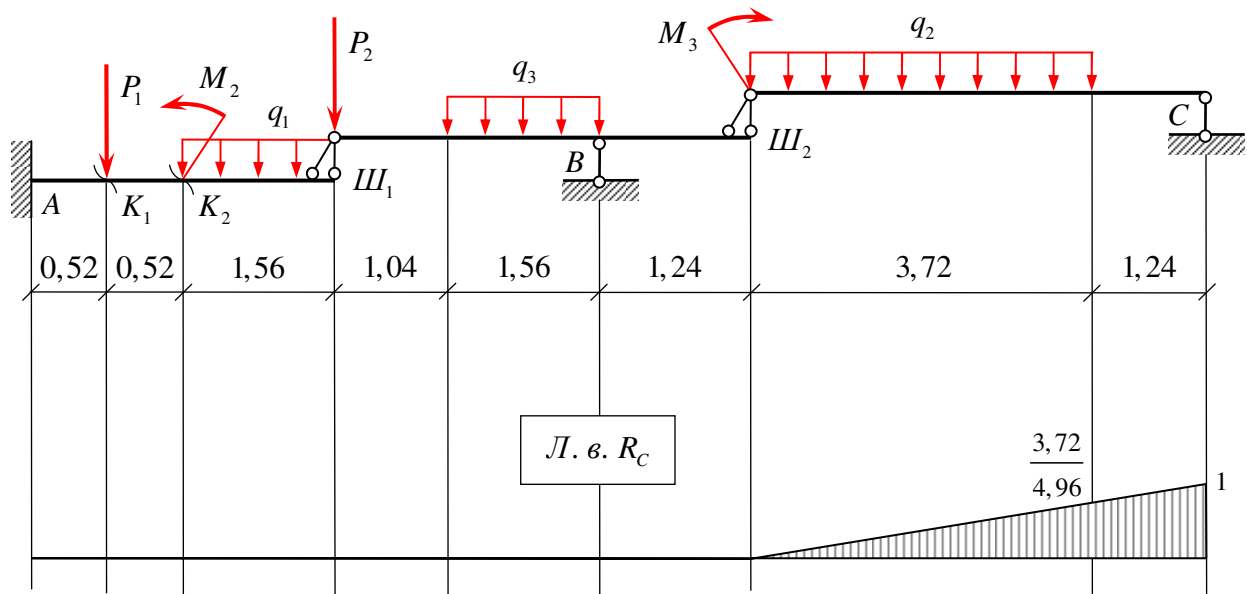
M – изгибающий момент («+» – направлен по часовой стрелке, «-» – направлен против часовой стрелки);

y – ординаты линии влияния в сечении балки под соответствующей силой;

ω – площадь участка линии влияния под распределённой нагрузкой;

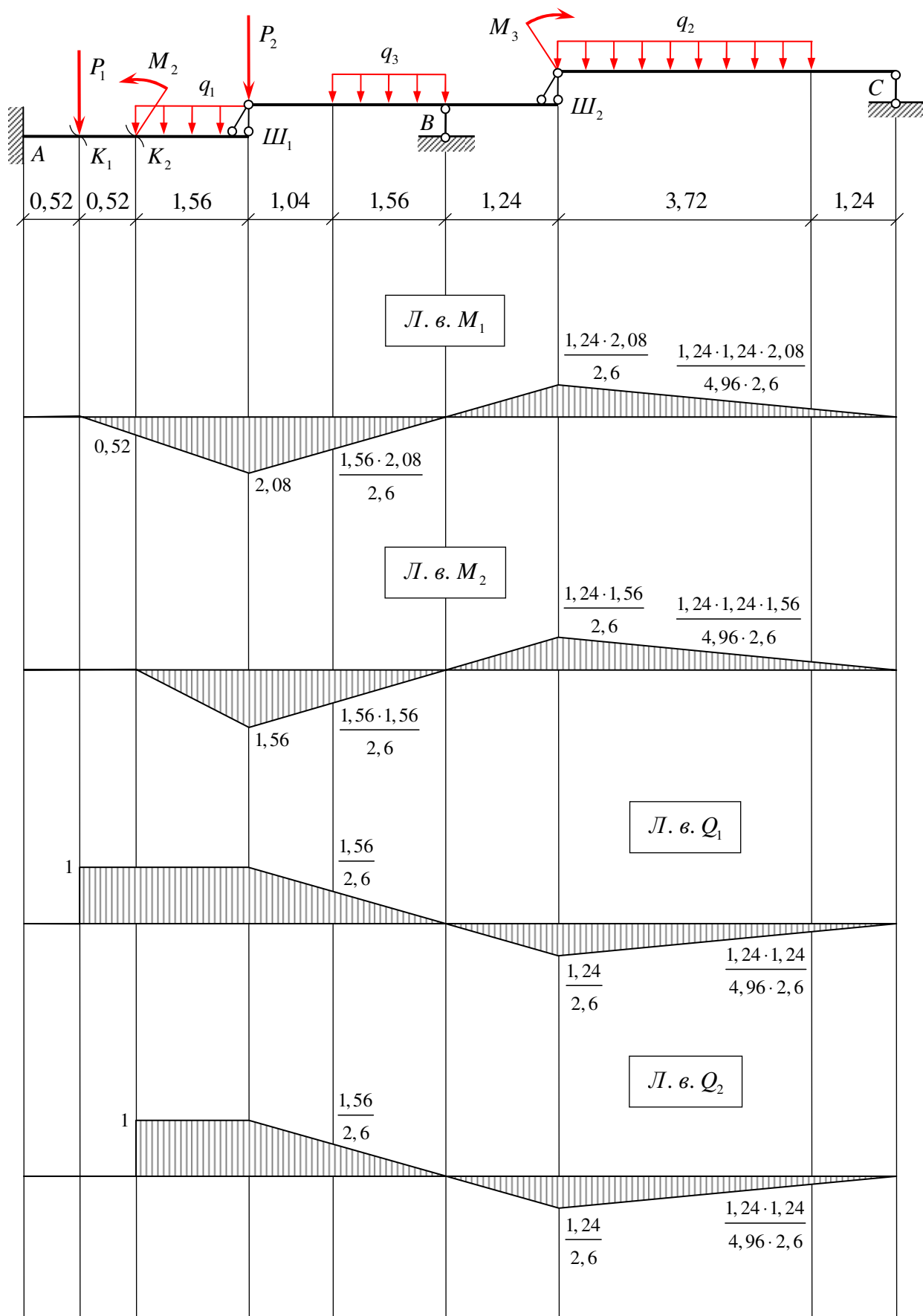
α – угол наклона линии влияния под изгибающим моментом.

Построим линию влияния для опорной реакции R_C и с помощью неё определим величину этой реакции.



$$R_C = 6,2 \left(\frac{1}{2} \cdot 3,72 \cdot \frac{3,72}{4,96} \right) + 20 \cdot \frac{1}{4,96} = 12,68 \text{ кН}$$

7. Построение линий влияния поперечных сил и изгибающих моментов для сечений K_1 и K_3 .



$$M_1 = -6 \cdot 2,08 - 3,6 \left(1,56 \cdot \frac{0,52 + 2,08}{2} \right) + 6,2 \left(3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 2,08 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24 \cdot 2,08}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) -$$

$$-8,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56 \cdot 2,08}{2,6} \right) + 22 \cdot \frac{2,08}{2,08} - 20 \cdot \frac{1,24 \cdot 2,08}{2,6 \cdot 4,96} = 4,147 \text{ } \kappa H_M$$

$$M_2^{neg} = -6 \cdot 1,56 - 3,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot 1,56 \right) + 6,2 \left(3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24 \cdot 1,56}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) -$$

$$-8,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56 \cdot 1,56}{2,6} \right) + 22 \cdot \frac{1,56}{1,56} - 20 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56}{2,6 \cdot 4,96} = 9,706 \text{ } \kappa H_M$$

$$M_2^{pas} = -6 \cdot 1,56 - 3,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot 1,56 \right) + 6,2 \left(3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24 \cdot 1,56}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) -$$

$$-8,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56 \cdot 1,56}{2,6} \right) - 20 \cdot \frac{1,24 \cdot 1,56}{2,6 \cdot 4,96} = -12,294 \text{ } \kappa H_M$$

$$Q_1^{neg} = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3,6(1,56 \cdot 1) - 6,2 \left(3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) +$$

$$+8,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56}{2,6} \right) - 22 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1,24}{2,6 \cdot 4,96} = 14,689 \text{ } \kappa H_M$$

$$Q_1^{pas} = 6 \cdot 1 + 3,6(1,56 \cdot 1) - 6,2 \left(3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) +$$

$$+8,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56}{2,6} \right) - 22 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1,24}{2,6 \cdot 4,96} = 10,689 \text{ } \kappa H_M$$

$$Q_2 = 6 \cdot 1 + 3,6(1,56 \cdot 1) - 6,2 \left(3,72 \cdot \frac{1,24 \cdot 4,96 + 1,24 \cdot 1,24}{2 \cdot 4,96 \cdot 2,6} \right) +$$

$$+8,6 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,56 \cdot \frac{1,56}{2,6} \right) - 22 \cdot 0 + 20 \cdot \frac{1,24}{2,6 \cdot 4,96} = 10,689 \text{ } \kappa H_M$$