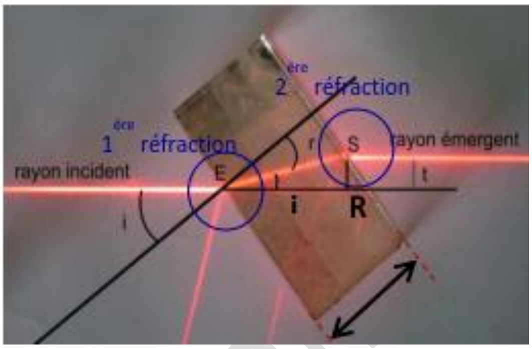
3. APPLICATIONS DES LOIS DE SNELL DESCARTES.

3.1 Lame à faces parallèles.

3.1.1 Définition :

Une lame à faces planes et parallèles est un milieu transparent et homogène, limité par deux faces planes et parallèles.

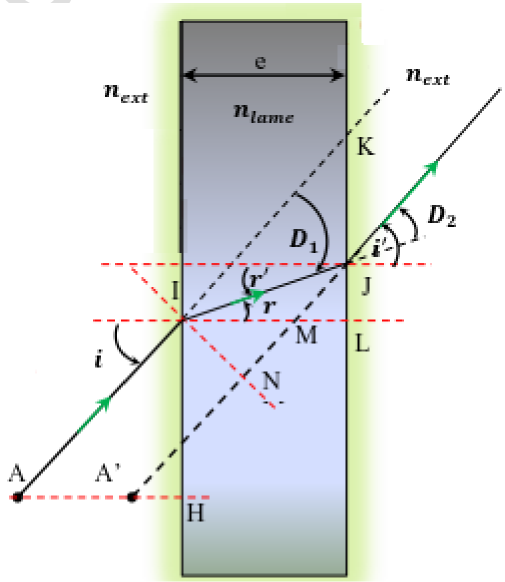


Du point de vue de l'optique géométrique, elle est considérée comme un système optique délimité par deux dioptres parallèles. On définit l'épaisseur $(\mathbf{e})$ par la distance qui sépare ces deux dioptres, par $(\boldsymbol{n_{lame}})$ l'indice de la lame et par$(\boldsymbol{n_{ext}})$ l'indice du milieu extérieur.

On se limitera dans l'étude de la lame au cas où le milieu optique qui la compose est plus réfringent que le milieu extérieur. Cette situation est la plus fréquente.

L'observateur et l'objet doivent être séparés par le système optique (la lame) et ils doivent se trouver dans le même milieu extérieur.

3.1.2 Aspect Géométrique Et Notations :



$(\mathbf{A})$: Est l'objet ponctuel, il émet de la lumière dans tous les sens.

$(\overline{\mathbf{AI}})$: Est le rayon lumineux incident issu de l'objet.

$(\mathbf{I})$: Le point d'incidence.$(\boldsymbol{i})$: Est l'angle d'incidence.

$(\mathbf{J})$: Le point d'émergence du rayon lumineux. $(\overline{\mathbf{IJ}})$: Est le rayon lumineux réfracté dans la lame.

$(\boldsymbol{r})$: Est l'angle de réfraction sur la face d'incidence**.**

$(\boldsymbol{r'})$: L'angle d'incidence sur la face d'émergence.

$(\boldsymbol{i'})$: L'angle d'émergence du rayon lumineux.

$(\mathbf{A'})$: Est l'image ponctuelle de l'objet $(\mathbf{A})$ donnée par la lame à faces parallèles.

$(\boldsymbol{e})$: Est l'épaisseur de la lame. $(\boldsymbol{n_{lame}})$: L'indice de réfraction de la lame,

$(\boldsymbol{n_{ext}})$: L'indice de réfraction du milieu extérieur.

$(\mathbf{L})$: Le point d'intersection de la normale passant par le point d'incidence avec la face d'émergence.

$(\mathbf{K})$: Le point d'intersection de la direction incidente avec la face d'émergence.

$(\mathbf{M})$: Le point d'intersection de la normale passant par le point d'incidence avec la direction émergente.

$(\mathbf{N})$: Le point d'intersection de la direction émergente avec la normale à la direction incidente passant par le point d'incidence $(\mathbf{I})$.

$(\mathbf{H})$: Le point d'intersection de la normale au système optique, passant par l'objet avec la face d'incidence.

3.1.3 Lois De La Réfraction Appliquées À La Lame À Face Parallèles.

$$\boxed{n_{inc} \times \sin(i) = n_{réf} \times \sin(r)}$$

Sur la face d'incidence on a : $n_{inc} = n_{ext}$; et $n_{réf} = n_{lame}$; ce qui donne :

$$\boxed{n_{ext} \times \sin(i) = n_{lame} \times \sin(r).}$$

Et sur la face d'émergence: $n_{inc} = n_{lame}$; et $n_{réf} = n_{ext}$; ce qui donne :

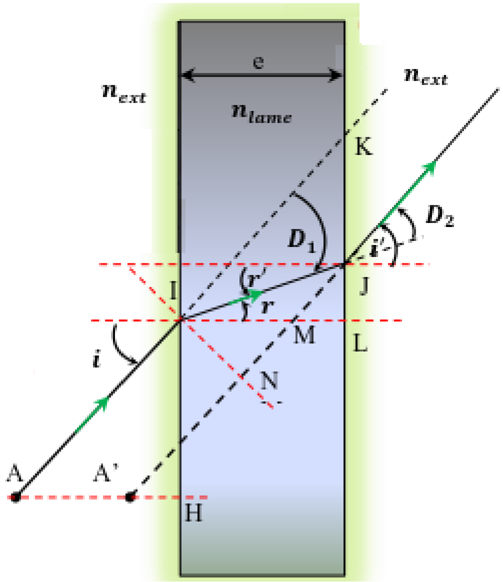
$$\boxed{n_{lame} \times \sin(r') = n_{lame} \times \sin(i').}$$

Les deux angles $(r)\ et\ (r')$ étant égaux (angles alternes internes), on déduit que les angles $(i)\ et\ (i')$ sont aussi égaux.

$$\boxed{r = r' \rightarrow i = i'}$$

3.1.4 Déviation Subit Par Le Rayon Lumineux :

Le rayon lumineux qui émerge d'une lame à faces parallèles subit une double réfraction, la première sur la face d'incidence et la seconde sur la face d'émergence.



- La première réfraction sur la face d'incidence produit une déviation (D_1), tel que :

$$\boxed{D_1 = i - r}$$

3. La déviation (D_2) que subit le rayon lumineux sur la face d'émergence est :

$$\boxed{D_2 = i' - r'}$$

4. Donc la déviation totale que subit le rayon lumineux à sa traversée d'une lame à face parallèle est :

$$D_{tot} = D_1 - D_2 = (i - r) - (i' - r') \rightarrow \boxed{D_{tot} = 0°}$$

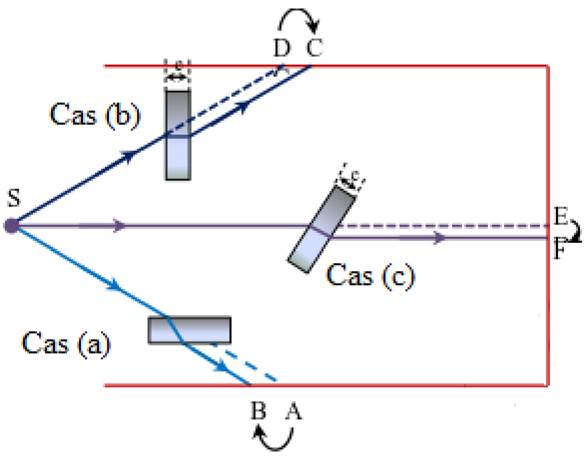
Ce phénomène de double réfraction **ne modifie** pas la **direction** de propagation de la lumière, entre **rayon incident et rayon émergent**.

La déviation totale que subit un rayon lumineux traversant une lame à face parallèle est toujours nulle. Sa **direction incidente est parallèle** sa **direction émergente**.

3.1.5 Action D’une Lame À Faces Parallèle Sur La Trajectoire De La Lumière.

Nous venons de voir qu'un rayon lumineux, traversant une lame à faces planes et parallèles, conserve sa direction de propagation. En revanche, il subit trois déplacements différents lorsqu’il émerge de celle-ci.

Afin de montrer ces différents déplacements, considérons une source lumineuse (S) qui éclaire trois écrans différents. Les écrans sont disposés comme l’indique le schéma de la figure suivante.



Les points D, E et A sont les spots lumineux de la source (S) et observés sur les écrans sans présence de la lame à faces parallèles. En présence de la lame, ces spots lumineux se déplacent de manière différente selon la disposition de la lame.

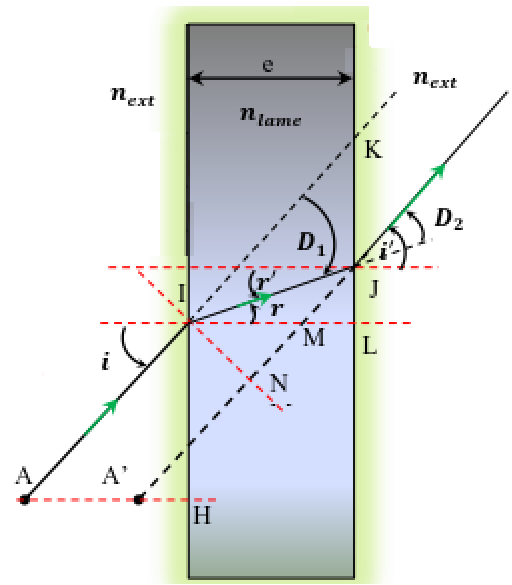
Lorsque la lame est placée verticalement (Cas (b)), le spot lumineux se déplace du point (D) vers le point (C) perpendiculairement à la face de la lame.

Si la lame est placée horizontalement (Cas (a)), le spot lumineux se déplace du point (A) vers le point (B) parallèlement à la face de la lame.

Alors que si on la place inclinée par rapport à l’horizontale (Cas (c)), le spot lumineux se déplace latéralement à la face de la lame du point (E) vers le point (F).

3.1.5.1 Expression Du Déplacement Parallèle.

Le déplacement parallèle représente la translation du point (K) au point (J). Cette translation (déplacement) est parallèle à la face d’émergence de la lame. Il est représenté sur le schéma par $\overline{KJ}$. L’expression $\overline{KJ}$ en fonction du point L est donnée par:



$$\boxed{\overline{KJ} = \overline{KL} - \overline{JL}} \dots (1)$$

Dans le triangle $I\widehat{L}K$, déterminons l’expression de $\overline{KL}$:

On a : $i = r + D_1$ et : $\operatorname{tg}(r + D_1) = \dfrac{\overline{KL}}{\overline{IL}}$

Ce qui donne → $\boxed{\overline{KL} = \overline{IL} \times tg(i)}$ .... (2).

De la même manière, dans le triangle $I\widehat{L}J$, déterminons l’expression de $\overline{JL}$:

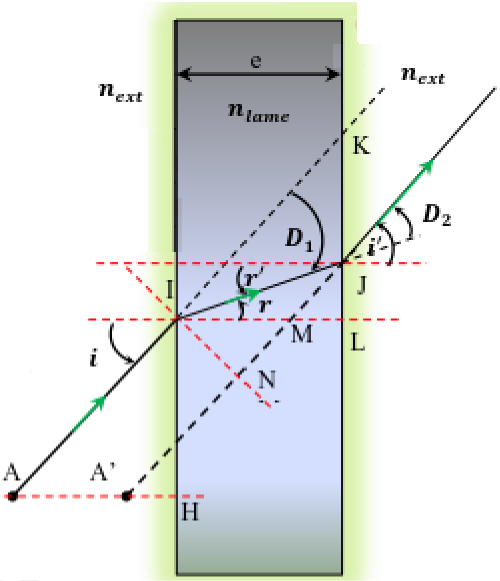
On a : $\operatorname{tg}(r) = \dfrac{\overline{JL}}{\overline{IL}}$, ce qui donne → $\boxed{\overline{JL} = \overline{IL} \times tg(r)}$ ... (3).

On remplace les deux expressions (2) et (3) dans l’équation (1) et on retrouve l’expression du déplacement parallèle.

$$\overline{KJ} = \overline{KL} - \overline{JL} = \overline{IL} \times \left(tg(i) - tg(r)\right) \rightarrow \boxed{\overline{KJ} = e \times \left(tg(i) - tg(r)\right)}$$

Expression Du Déplacement perpendiculaire.

Le déplacement perpendiculaire est donné par la translation $\overline{\mathrm{IM}}$. Cette translation est égale à la distance $\overline{\mathrm{AA'}}$ elle represente la position de l'image donnée par le système optique.



L'expression de $\overline{\mathrm{IM}}$ est donnée par :

$$\boxed{\overline{\mathrm{IM}} = \overline{\mathrm{IL}} - \overline{\mathrm{ML}}} \ldots (4)$$

Dans le triangle $\widehat{\mathrm{MLJ}}$, déterminons l'expression de $\overline{\mathrm{ML}}$:

On a : $\operatorname{tg}(i) = \frac{\overline{\mathrm{JL}}}{\overline{\mathrm{ML}}} \rightarrow \overline{\mathrm{ML}} = \frac{\overline{\mathrm{JL}}}{tg(i)} = \frac{\mathrm{e} \times tg(r)}{tg(i)} \ldots .(5)$

On remplace les deux expressions (5) et (3) dans l'équation (4) et on retrouve l'expression du déplacement parallèle.

$$\overline{\mathrm{IM}} = \overline{\mathrm{IL}} - \overline{\mathrm{ML}} = e - \left(\frac{e \times tg(r)}{tg(i)}\right) \rightarrow \boxed{\overline{\mathrm{IM}} = e \times \left(1 - \frac{tg(r)}{tg(i)}\right)}$$

3.1.5.2 Expression Du Déplacement Latéral.

Nous venons de voir qu'un rayon lumineux, traversant une lame à faces parallèles, conserve sa direction de propagation. En revanche, il est déplacé latéralement et la translation $\overline{\mathrm{IN}}$ qu'il subit est telle que:

Dans le triangle $\widehat{\mathrm{INJ}}$ on a : $\sin(\mathrm{D}_1) = \frac{\overline{\mathrm{IN}}}{\overline{\mathrm{IJ}}} \rightarrow \overline{\mathrm{IN}} = \overline{\mathrm{IJ}} \times \sin(\mathrm{D}_1) = \overline{\mathrm{IJ}} \times \sin(\mathrm{D}_1) \ldots .(6)$

Et dans le triangle $\widehat{\mathrm{IJL}}$ on a : $\cos(\mathrm{r}) = \frac{\overline{\mathrm{IL}}}{\overline{\mathrm{IJ}}} \rightarrow \overline{\mathrm{IJ}} = \frac{\overline{\mathrm{IL}}}{\cos(r)} = \frac{\mathrm{e}}{\cos(r)} \ldots (7)$

On remplace les deux expressions (7) dans l'équation (6) et on retrouve l'expression du déplacement latéral.

$$\boxed{\overline{\mathrm{IN}} = \frac{e \times sin(i - r)}{cos(r)}}$$

3.1.6 Caractéristiques De L'image Donnée Par La Lame À Faces Parallèles :

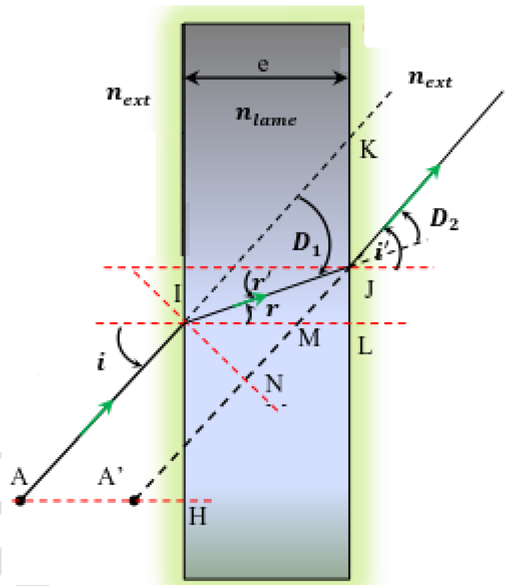
Considérons une lame à faces planes et parallèles et un objet ponctuel (A), déterminons les caractéristiques de l'image données par ce système optique.

Position De L'image :

L'image ponctuelle donnée par la lame à faces parallèles est due à la double réfraction que subit le rayon lumineux issu de source lumineuse (objet ponctuel).

Lorsque ce rayon lumineux traverse les des deux dioptres **son déplacement perpendiculaire** dans le cas des **faibles incidences** nous donnera la **position** de l'image.

$$\overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{IM}} = e \times \left(1 - \frac{tg(r)}{tg(i)}\right)$$



L'image est **nette** (stigmatisme rapproché) **uniquement** dans le cas particuliers des **faibles incidences**.

Les approximations de **GAUSS** dans le cas des faibles incidences donnent :

$$\sin(i) \cong tg(i) \text{ et } \sin(r) \cong tg(r)$$

Donc : $\overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{IM}} = e \times \left(1 - \frac{\sin(r)}{\sin(i)}\right) \ldots (8)$

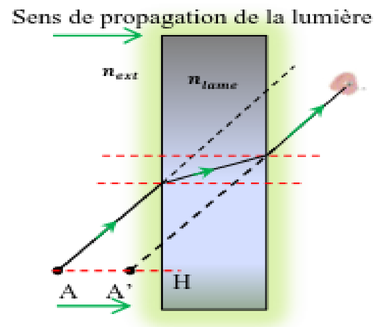
Et sachant que $\frac{\sin(r)}{\sin(i)} = \frac{n_{ext}}{n_{lame}} \ldots . (9)$

On remplace l'équation (9) dans l'équation (8) et on obtient l'expression de la position de l'image donnée par la lame à faces parallèles.

$$\overline{\mathrm{AA'}} = e \times \left(1 - \frac{n_{ext}}{n_{lame}}\right) \rightarrow \boxed{\overline{\mathrm{AA'}} = e \times \left(\frac{n_{lame} - n_{ext}}{n_{lame}}\right)}$$

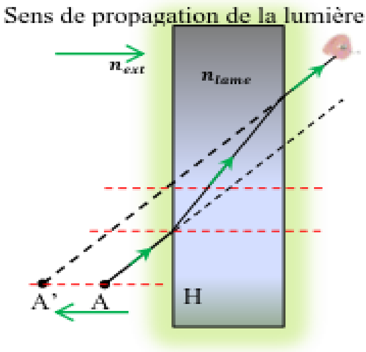
Remarque :

La distance $\overline{\mathrm{AA'}}$ est appelée le déplacement apparent, elle représente la position de l'image par rapport à celle de l'objet. Deux cas peuvent se présentés :



- Si l'objet se trouve dans le milieu le moins réfringent ($n_{ext} < n_{lame}$) le **déplacement apparent est positif**. L'image se **rapproche** du système optique (voir schéma).

- Alors que si **l'objet** se trouve dans le milieu le **plus réfringent** $(n_{ext} > n_{lame})$ le **déplacement apparent est négatif**. L'image **s'éloigne** du système optique (voir schéma).



3.1.6.1 Nature, Taille, Et Orientation :

L'image ponctuelle d'un point objet ponctuel (source lumineuse) à travers une lame à faces planes et parallèles est toujours de **nature différente de celle de l'objet**. C'est-à-dire que si la nature de l'objet est **réelle** celle de l'image est **virtuelle**, et **vice-versa**.

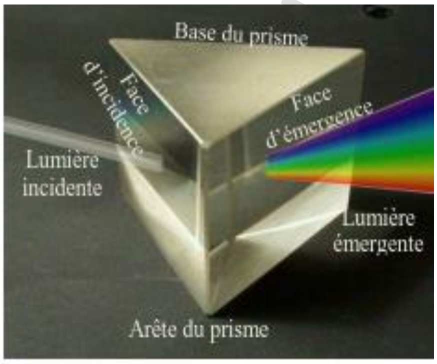
Le sens de **l'orientation** de cette image est le **même** que celui de l'objet. Si l'objet est orienté vers le **haut**, l'image sera orientée vers le **haut**, et si l'objet est orienté vers le **bas**, l'image sera orientée vers le **bas**.

La **grandeur** de l'image est la **même** taille que celle de l'objet.

3.2 PRISME

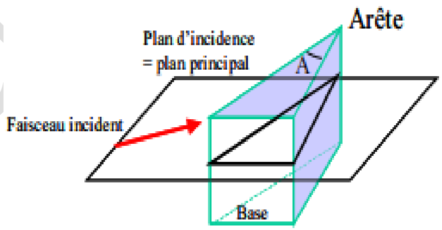
3.2.1 Définition Et Notations:

Les prismes sont des blocs taillés dans des substances (verres) transparentes, ils sont limités par deux plans sécants. Ils sont composés classiquement de trois faces sur une base triangulaire mais pouvant adopter des formes plus complexes et éloignées du prisme à base triangulaire usuel.



L'arête de coupe des deux plans est appelée arête de réfraction notée généralement (C), et la face opposée à cette arrête est dite la base du prisme. L'angle (A) à l'arête de réfraction est appelé angle du prisme.

Lorsqu'un rayon lumineux tombe sur une face d'un prisme, il est en général réfracté deux fois et sort ainsi dans une nouvelle direction de l'autre côté. La face d'entrée du rayon lumineux est dite la face d'incidence, celle de sortie de cette lumière est dite face d'émergence.



L'angle formé par les directions du rayon lumineux incident et du rayon lumineux sortant du prisme est appelé angle de déviation noté (D).

Il faut noter aussi que si le rayon incident arrive du côté de l'angle au sommet sa valeur sera prise négativement, et s'il arrive du côté de la base elle sera positive.

Le rayon lumineux **incident** et le rayon lumineux **émergent** doivent se trouver dans le **même milieu ambiant extérieur,** l'indice de réfraction de ce milieu sera noté (n_{ext}), celui du prisme par (n_p).

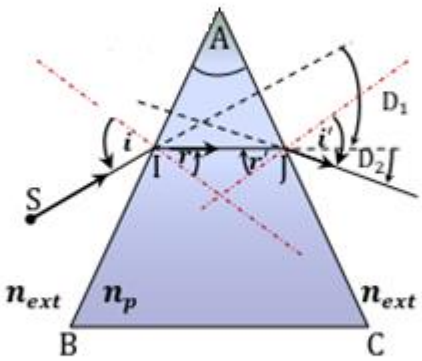
Cet **instrument d'optique** est utilisé pour **réfracter** la lumière, la **réfléchir** ou la **disperser**. Il existe des prismes spéciaux pouvant servir à diffracter la lumière, la polariser ou en séparer les polarisations ou encore créer des interférences.

3.2.2 La Marche Du Rayon Lumineux.

Soit un prisme défini dans son par son angle au sommet (A) d'indice de réfraction (n_p). On supposera que le milieu ambiant est **moins réfringent** que celui du prisme $(n_p > n_{ext})$.

Soit (**SI**) un rayon incident quelconque et monochromatique qui frappe en (**I**) la face d'entrée (**AB**) du prisme ; provenant d'un milieu moins réfringent que celui du prisme, ce rayon subit en (**I**) le phénomène de réfraction en respectant les deux lois de Descartes.

$$\boxed{n_{inc} \times \sin(i) = n_{réf} \times \sin(r)}$$



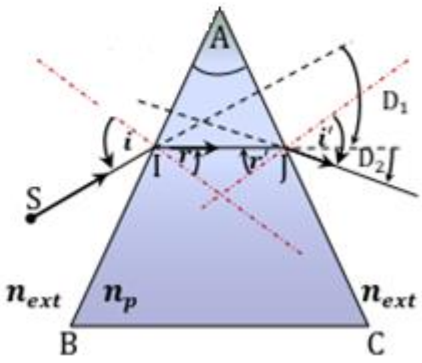
➢ **<u>Sur la face d'incidence</u>** : $(n_{inc} = n_{ext})$ et $(n_{réf} = n_p)$, l'angle d'incidence est noté (i) et l'angle de réfraction (r) ce qui donne :

$$\boxed{n_{ext} \times \sin(i) = n_p \times \sin(r)} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Le rayon lumineux se réfracte dans le prisme sans aucune condition en se rapprochant de la normale car $(n_p > n_{ext})$.

La déviation qu'il va subir sera donnée par :

$$(\mathrm{D}_1 = i - r).$$



➢ **<u>Sur la face d'émergence</u> <u>supposons que les conditions d'émergence soient satisfaites</u>** pour que le rayon lumineux émerge du prisme au niveau du point **(J)**. Les indices $(n_{inc} = n_p)$ et $(n_{réf} = n_{ext})$, l'angle d'incidence est noté (r') et l'angle de d'émergence sera noté (i') ce qui donne :

$$\boxed{n_p \times \sin(r') = n_{ext} \times \sin(i')} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Si le rayon émerge du prisme, il se rapproche de sa base, et va subir alors une seconde déviation qui sera donnée par :

$$(\mathrm{D}_2 = i' - r')$$

Les angles (r) et (r') sont dits les angles de réfractions internes. Le point (I) et le point d'incidence et le point (J) le point d'émergence du rayon lumineux.

<u>3.2.2.1 Relation Entre Les Angles De Réfractions Internes</u>.

Dans le triangle $\widehat{\mathrm{AIJ}}$, $(\widehat{\mathrm{A}})$ étant l'angle au sommet du prisme, et la somme des angles internes du triangle est égale à (π).

$$\widehat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{I}} + \hat{\mathrm{J}} = \pi\text{; L'angle } \hat{\mathrm{I}} = \frac{\pi}{2} - r\text{. Et l'angle } \hat{\mathrm{J}} = \frac{\pi}{2} - r'.$$

Ce qui donne $\widehat{\mathrm{A}} + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$, lorsque l'on simplifie on obtient :

$$\boxed{\widehat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'}} \ldots\ldots\ldots \mathbf{(3)}$$

<u>3.2.2.2 Angle De Déviation Du Rayon Lumineux.</u>

Lorsqu'un rayon lumineux monochromatique arrive sur la face d'entrée d'un prisme d'angle **(A)** et d'indice de réfraction (n_p), il subit à la sortie du prisme, si les conditions d'émergence sont satisfaites, une déviation $(\mathbf{D}_{tot})$, dont l'expression est facilement déterminée.

$$\mathbf{D}_{tot} = \mathbf{D_1} + \mathbf{D_2} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{i'} - \boldsymbol{r'}) \rightarrow \mathrm{D}_{tot} = (i + i') - (r + r') \rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{D}_{tot} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i'} - \mathbf{A}} \ldots\ldots\ldots \mathbf{(4)}$$

3.2.3 Conditions D'utilisation Du Prisme :

On sait en effet **que lorsqu'un** rayon lumineux se propage d'un **milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent**, il peut être soit **réfracté** soit **totalement réfléchi**, selon que son angle d'incidence est inférieur ou non à l'angle limite d'incidence attaché au milieu le plus réfringent.

Le rayon incident se réfracte dans le prisme quel que soit son angle d'incidence (i), puisque on a supposé que le **prisme est plus réfringent que le milieu extérieur** ambiant $\left(n_{inc} = n_{ext} < n_{réf} = n_p\right)$. En revanche, **le rayon n'émerge du prisme** que si la **condition d'émergence est satisfaite** (voir cours de réfraction), $\left(n_{inc} = n_p > n_{réf} = n_{ext}\right)$. La fonction $(sin(r') \leq 1)$.

Deux conditions doivent être satisfaites pour que le rayon lumineux qui arrive sur la face d'incidence $(\overline{\mathbf{AB}})$ émerge du prisme par la face opposée $(\overline{\mathbf{AC}})$.

3.2.3.1 Condition D'émergence :

➢ **Sur la face d'incidence** $(\overline{\mathbf{AB}})$: le rayon lumineux se réfracte dans le prisme, c.-à-d. que toute la lumière arrivant sur la face $(\overline{\mathrm{AB}})$ pénètre dans le prisme. On peut écrire alors que :
L'angle d'incidence (i) est compris entre :

$$(0 \leq i \leq i_{max} = 90°),$$

et L'angle de réfraction (r) doit être compris entre :

$$(0 \leq r \leq r_{max}), \text{ avec } r_{max} = \left[\sin\left(\frac{n_{ext}}{n_p}\right)^{-1}\right].$$

L'angle de réfraction de valeur maximale $(\boldsymbol{r_{max}})$ est obtenu pour un rayon lumineux incident rasant la face d'émergence $(\overline{\mathbf{AC}})$ du prisme.

➢ **Sur la face d'émergence** $(\overline{\mathbf{AC}})$: l'émergence du rayon lumineux est conditionnée par la valeur de l'angle d'incidence $(\mathbf{r'})$ sur la face $(\overline{\mathbf{AC}})$. **Pour que** le rayon lumineux **émerge** du prisme, **il faut que :**

$$[\mathbf{sin}(\boldsymbol{r'}) \leq \mathbf{1}].$$

On peut dire donc que **toute** la lumière qui arrive sur la face d'incidence $(\overline{\mathbf{AB}})$ **est réfractée** à l'intérieur du prisme, **mais celle-ci ne ressort** pas forcément par sa face $(\overline{\mathbf{AC}})$.

L'angle d'incidence $(\boldsymbol{r'})$ du rayon lumineux sur la face $(\overline{\mathbf{AC}})$ doit être compris entre :

$$(\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r'} \leq \boldsymbol{r'_{max}}),$$

Pour ces valeur on a $(\sin(r') \leq 1)$, et l'angle d'émergence $(\mathbf{0} \leq \boldsymbol{i'} \leq \boldsymbol{i'_{max}} = \mathbf{90°})$.

Le rayon lumineux dont la valeur de l'angle d'incidence est maximale $(\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r'_{max}})$émerge en rasant cette dernière face avec :

$$(\boldsymbol{i'_{max}} = \mathbf{90°}), \text{ avec } \boldsymbol{r'_{max}} = \left[\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{n_{ext}}}{\boldsymbol{n_p}}\right)^{-\mathbf{1}}\right].$$

Deux remarques importantes peuvent être déduites :

a- **Remarque 1 :** L'expression qui donne la **valeur maximale** de **l'angle de réfraction** sur la face **d'incidence** ($\overline{\mathbf{AB}}$) **est la même** que celle qui donne la **valeur maximale** de l'angle d'incidence sur la **face d'émergence** ($\overline{\mathbf{AC}}$). On peut déduire que :

$$\boxed{r_{max} = r'_{max} = \left[\sin\left(\frac{n_{ext}}{n_p}\right)^{-1}\right]}$$

Cette valeur maximale est notée $\left(\theta_{limite} = r_{max} = r'_{max}\right)$ et elle est **appelée angle limite du prisme**.

b- **Remarque 2 :** La **deuxième remarque importante** est que la valeur de **l'angle au sommet du prisme** $(\mathbf{A})$ **doit être obligatoirement inférieure à deux fois la valeur de son angle limite** (θ_{limite}).

En effet, si l'ont fait la somme des deux inéquations suivantes donne :

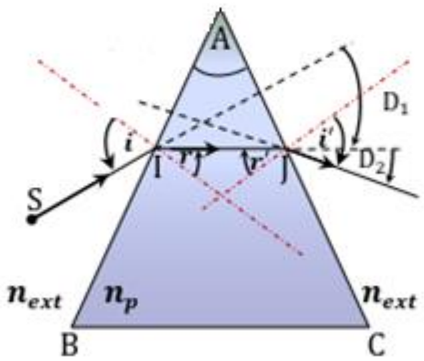
$$\begin{cases} \quad (0 \leq r \leq r_{max}) \ldots\ldots (5) \\ + \quad (0 \leq r' \leq r'_{max}) \ldots\ldots (6) \\ = \ 0 \leq (r + r') = \mathrm{A} \leq r_{max} + r'_{max} = 2 \times \theta_{limite} \\ \boxed{\mathbf{A} \leq 2 \times \theta_{limite}} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \leq 2 \times \theta_{limite}}$$

Cette condition dite **condition d'émergence** du rayon lumineux. C'est-à-dire **que si** cette condition **n'est pas** vérifiée **aucun rayon lumineux** ne va émerger du prisme par la face ($\overline{\mathbf{AC}}$) s'il pénètre dans le prisme par la face ($\overline{\mathbf{AB}}$).

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante, il existe **une seconde condition** qui nous permet d'affirmer que le rayon incident qui pénètre par la face ($\overline{\mathrm{AB}}$) émerge effectivement de la face opposée ($\overline{\mathrm{AC}}$)

3.2.3.2 Condition D'incidence :



On sait que lorsqu'un rayon lumineux se propage d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent, il peut être soit réfracté soit totalement réfléchi

Dans le cas du prisme, **cette alternative existe au niveau du rayon intermédiaire ($\overline{\mathrm{IJ}}$)** .

$$(\ \sin(r') \leq 1.)$$

Ainsi, pour qu'il y ait émergence du rayon lumineux au point $(\mathbf{J})$, il est nécessaire, compte tenu de la condition précédentes que :

$$\sin(r') \leq 1 \rightarrow r' \leq r'_{max} = \theta_{limite}$$

Sachant de (équation (3)) que:

$$\mathbf{A} = r + r' \rightarrow r' = \mathbf{A} - r \leq r'_{max} = \theta_{limite} \text{ ; Avec : } \theta_{limite} = \left[\sin\left(\frac{n_{ext}}{n_p}\right)^{-1}\right]$$

La condition $(r' \leq \theta_{limite})$ impose que : $r \geq \mathbf{A} - \theta_{limite}$.

Ce qui donne aussi que $\sin(r) \geq \sin(\mathbf{A} - \theta_{limite})$, lorsque l'on multiplie les deux termes de l'inéquation par une même constante positive (n_p) l'inéquation reste valable.

Donc: $n_p \times \sin(r) \geq n_p \times \sin(\mathbf{A} - \theta_{\mathbf{limite}})$.

De l'équation (1) on peut écrire maintenant aussi que :

$$n_{ext} \times \sin(i) \geq n_p \times \sin(\mathbf{A} - \theta_{\mathbf{limite}})$$

$$\sin(i) \geq \frac{n_p \times \sin(\mathbf{A} - \theta_{\mathbf{limite}})}{n_{ext}}$$

Donc :

$$i \geq i_0 \ avec : \sin(i_0) = \frac{n_p \times \sin(\mathbf{A} - \theta_{\mathbf{limite}})}{n_{ext}}$$

$$\boxed{i_0 \leq i \leq 90°}$$

3.2.4 Étude De La Déviation Totale Du Rayon Lumineux :

L'expression de la déviation totale du rayon lumineux qui émerge d'un prisme est donnée par l'équation (4)

$$\mathrm{D}_{tot} = i + i' - \mathbf{A}$$

3.2.4.1 Domaine de définition de cette fonction.

La déviation totale que subit le rayon lumineux qui traverse le prisme dépend de l'angle d'incidence (i). Elle est définit uniquement pour les valeurs de (i) comprise entre :

$$i_0 \leq i \leq 90°$$

i_0 : Étant la valeur minimale de l'angle d'incidence du rayon lumineux qui émerge du prisme.

3.2.4.2 Expression de la déviation en fonction de l'angle d'incidence D (i) :

De l'équation (2) on peut tirer l'expression de l'angle d'émergence (i').

$$n_p \times \sin(r') = n_{ext} \times \sin(i') \rightarrow i' = \left[\frac{n_p}{n_{ext}} \times \sin(r')\right]^{-1} \ldots\ldots\ldots (7)$$

De l'équation (3) on tire aussi l'expression de l'angle (r').

$$\widehat{\mathrm{A}} = r + r' \rightarrow r' = \mathrm{A} - r \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Et de l'équation (1) on peut déterminer l'expression de l'angle (r).

$$n_{ext} \times \sin(i) = n_p \times \sin(r) \rightarrow r = \left[\frac{n_{ext}}{n_p} \times \sin(i)\right]^{-1} \ldots\ldots\ldots (9)$$

On remplace l'équation (9) dans l'équation (8) et l'expression obtenue dans de l'équation (7) et on obtient l'équation donnant la valeur de l'angle d'émergence (i') en fonction de l'angle d'incidence (i)

$$i' = \left[\frac{n_p}{n_{ext}} \times \sin\left[\mathrm{A} - \left[\frac{n_{ext}}{n_p} \times \sin(i)\right]^{-1}\right]\right]^{-1}$$

L'expression de l'angle de déviation $\left(\mathrm{D}(i)\right)$ en fonction de l'angle d'incidence (i) sera donnée par :

$$\boxed{\mathbf{D}_{tot} = \mathbf{D}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} + \left[\frac{\boldsymbol{n_p}}{\boldsymbol{n_{ext}}} \times \mathbf{sin}\left[\mathbf{A} - \left[\frac{\boldsymbol{n_{ext}}}{\boldsymbol{n_p}} \times \mathbf{sin}(\boldsymbol{i})\right]^{-1}\right]\right]^{-1} - \mathbf{A}}$$

3.2.4.3 Évolution de la courbe donnant la déviation du rayon lumineux.

Pour tracer la courbe précédente on doit étudier l'évolution de sa dérivée.

$$d(\mathrm{D}) = d(i) + d(i')\,;$$

La valeur de l'angle au sommet (A) est constante sa dérivée est nulle. On peut écrire l'expression de cette dérivée sous forme :

$$\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} = 1 + \frac{d(i')}{d(i)}$$

Il nous faut calculer l'expression de la dérivée $\left[\frac{d(i')}{d(i)}\right]$ et l'étudier.

On peut la calculer en l'écrivant sous forme : $1 + \frac{d(i')}{d(i)} = 1 + \frac{d(i')}{d(r')} \times \frac{d(r')}{d(r)} \times \frac{d(r)}{d(i)}$

Suivons les étapes suivantes pour calculer les différentes dérivées :

a- Première étape :

Déterminons de l'équation (1) la dérivée $\frac{d(r)}{d(i)}$:

$$n_{ext} \times \cos(i) = n_p \times \cos(r) \times \frac{d(r)}{d(i)} \rightarrow \frac{d(r)}{d(i)} = \frac{n_{ext} \times \cos(i)}{n_p \times \cos(r)} \ldots\ldots\ldots (10).$$

b- <u>Deuxième étape :</u>

De l'équation (3) on détermine $\frac{d(r')}{d(r)}$:

$$A = r + r' \rightarrow d(r) + d(r') = 0, A\ \textit{étant une constante}. \rightarrow \frac{d(r')}{d(r)} = -1 \dots\dots (11)$$

c- <u>Troisième étape :</u>

De l'équation (2) on peut calculer $\frac{d(i')}{d(r')}$

$$n_{ext} \times \cos(i') = n_p \times \cos(r') \times \frac{d(r')}{d(i')} \rightarrow \frac{d(i')}{d(r')} = \frac{n_p \times \cos(r')}{n_{ext} \times \cos(i')} \dots\dots\dots (12).$$

d- <u>Quatrième étape :</u>

Finalement :

$$\frac{d(i')}{d(i)} = \frac{d(i')}{d(r')} \times \frac{d(r')}{d(r)} \times \frac{d(r)}{d(i)} = \left(\frac{n_p \times \cos(r')}{n_{ext} \times \cos(i')}\right) \times (-1) \times \left(\frac{n_{ext} \times \cos(i)}{n_p \times \cos(r)}\right)$$

En simplifiant on obtient l'expression de la dérivée $\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)}$:

$$\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} = 1 + \frac{d(i')}{d(i)} \rightarrow \boxed{\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} = 1 - \frac{\cos(r') \times \cos(i)}{\cos(i') \times \cos(r)}}$$

<u>3.2.4.4 Étude de la dérivée :</u>

1er cas : Pour une incidence rasante sur la face $(\overline{AB})$ du prisme($i = 90°$), le $\cos(90°) = 0$. Sachant que les autres expressions $\cos(r')$, $\cos(i')$ et $\cos(r)$ sont non nulles, on déduit que :

$$\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} = 1 > 0$$

2éme cas : Pour une émergence rasante du rayon lumineux sur la face $(\overline{AC})$ du prisme($i' = 90°$), l'angle d'incidence ($i = i_0$), ($r = \mathrm{A} - r_{min}$) et ($r' = r'_{max} = \theta_{limite}$), on déduit que :

$$\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} \rightarrow -\infty$$

3éme cas : recherche des extremums de la fonction.

$$\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} = 0 \rightarrow 1 - \frac{\cos(r') \times \cos(i)}{\cos(i') \times \cos(r)} = 0 \rightarrow 1 = \frac{\cos(r') \times \cos(i)}{\cos(i') \times \cos(r)} \rightarrow \cos(r') \times \cos(i) = \cos(i') \times \cos(r)$$

$$\cos(r') \times \cos(i) = \cos(i') \times \cos(r)$$

Les angles sont tous compris entre 0 et 90°, donc les cosinus sont tous positifs. La dernière égalité est donc équivalente à son carré :

$$[\cos(r')]^2 \times [\cos(i)]^2 = [\cos(i')]^2 \times [\cos(r)]^2$$

On peut remplacer la fonction :$[\cos(\alpha)]^2 = 1 - [\sin(\alpha)]^2$ on obtient :

$$\{1 - [\sin(r')]^2\} \times \{1 - [\sin(i)]^2\} = \{1 - [\sin(i')]^2\} \times \{1 - [\sin(r)]^2\}$$

On peut faire remplacer les fonctions $sin\ (r)$ et $sin\ (r')$ par la loi de Snell Descartes (équation (1)).

$$sin\ (r) = \frac{n_{ext}}{n_p} \times \sin(i) \text{ et } sin\ (r') = \frac{n_{ext}}{n_p} \times \sin(i')$$

On obtient :

$$\left\{1 - \left[\frac{n_{ext}}{n_p} \times \sin(i')\right]^2\right\} \times \{1 - [\sin(i)]^2\} = \{1 - [\sin(i')]^2\} \times \left\{1 - \left[\frac{n_{ext}}{n_p} \times \sin(i)\right]^2\right\}$$

Afin de simplifier l'équation on peut considérer **que le milieu ambiant est de l'air $n_{ext} = 1$**, après simplifications on obtient :

$$\left(1 - \frac{1}{n_p}\right) \times [\sin(i')]^2 = \left(1 - \frac{1}{n_p}\right) \times [\sin(i)]^2 \rightarrow [\sin(i')]^2 = [\sin(i)]^2 \rightarrow \sin(i) = \sin(i')$$

Donc la dérivée s'annule lorsque la valeur de l'angle d'incidence (i) est égale à la valeur de l'angle d'émergence (i')

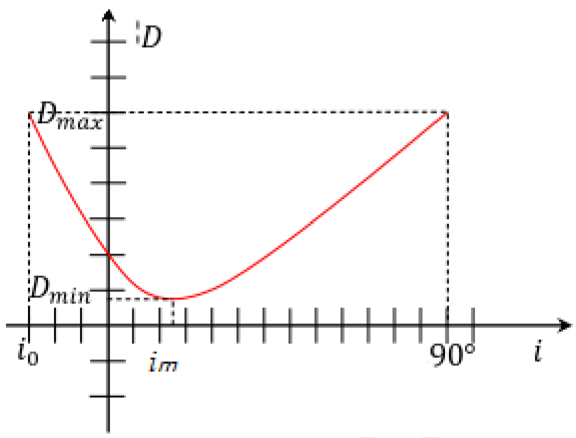
$$\boxed{\frac{d(\mathrm{D})}{d(i)} = 0 \rightarrow i = i' = i_m \rightarrow r = r' = \frac{\mathrm{A}}{2}}$$

3.2.4.5 Tableau De Variation

i	i_0	$i = i' = i_m$	90°
$\frac{d\ (D)}{d\ (i)}$	-∞	**0**	**+ 1**
D	↘	D_{min}	↗

En résumé, lorsque l'on fait varier l'angle d'incidence (i) de sa valeur minimale (i_0) jusqu'à sa valeur maximale $(i = 90°)$ nous remarquons que la déviation totale diminue passe par une valeur minimale puis croît jusqu'à sa valeur maximale.

3.2.4.6 Représentation Graphique.



La courbe suivante donne l'évolution de la déviation (D) en fonction de l'angle d'incidence (i).

Elle montre que la déviation du rayon lumineux présente deux valeurs particulières.

- **Une valeur maximale :** cette valeur maximale peut être obtenue pour deux valeurs de l'angle d'incidence du rayon lumineux différentes.

  a- L'angle d'incidence $(i = i_0)$.

  b- L'angle d'incidence $(i = 90°)$.

Pour ces deux valeurs de l'angle d'incidence, la déviation totale du rayon lumineux sera égale à :

$$\boxed{D_{tot} = i_0 + 90° - A}$$

- **Une valeur minimale** : cette valeur minimale peut être obtenue dans le cas particulier ou les valeurs des angles d'incidences sont égales.

$$\boxed{r = r' = r_m = \frac{A}{2}}$$

- Il faut noter que $(i = i' = i_m)$ correspond à la valeur de l'angle d'incidence donnant une valeur minimale de la déviation, et son expression sera :

$$\boxed{\mathbf{D = D_{min} = 2 \times i_m - A}}$$

3.2.4.7 Expression De L'indice De Réfraction Du Prisme en fonction de D_{min} :

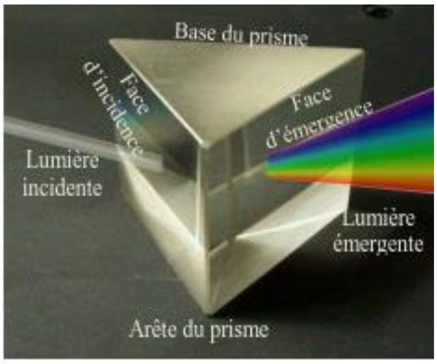
Déterminons comment varie l'indice de réfraction du prisme (n_p) dans le cas particulier de la déviation minimale.

Connaissant l'expression de l'angle d'incidence $\left(i_m = \frac{D_{min}+A}{2}\right)$ et celle de l'angle de réfraction$\left(r_m = \frac{A}{2}\right)$ sur la face $(\overline{AB})$. L'équation (1) dans le cas de la déviation minimale sera donnée par :

$$n_{ext} \times \sin\left(\frac{D_{min} + A}{2}\right) = n_p \times \sin\left(\frac{A}{2}\right) \rightarrow \boxed{n_p = \frac{n_{ext} \times \sin\left(\frac{D_{min} + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

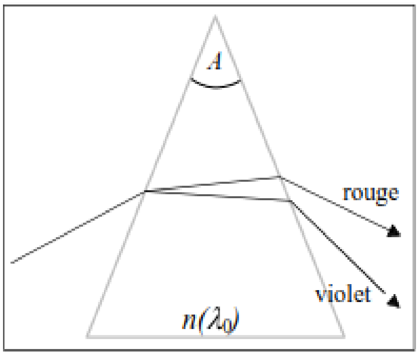
3.2.4.8 Dispersion De La Lumière À La Traversée D'un Prisme.

a-Dispersion : Quand le prisme est éclairé en lumière blanche naturelle avec une même valeur de l'angle d'incidence, on observe à sa sortie, un pinceau lumineux qui se décompose en couleurs de l'arc-en-ciel.



Ces couleurs varient, dans le cas des prismes en verre, du violet au rouge en passant par l'indigo, le bleu, le vert, le jaune et l'orange. L'indigo est un violet tirant sur le bleu.

b-Influence De La Longueur D'onde Sur La Déviation : Avec des prismes de verre, on constate expérimentalement que la lumière rouge est moins déviée que la lumière violette, on peut déduire que la déviation dépend de la longueur d'onde de la radiation incidente.



De plus la déviation dépend de l'indice du prisme, lui-même fonction de la longueur d'onde car le milieu est dispersif. Ceci explique la décomposition de la lumière blanche en ses différentes couleurs.

c-Loi de Cauchy : En première approximation, la loi de Cauchy donne les variations de l'indice de réfraction d'un verre en fonction de la longueur d'onde :

$$\boxed{n_p = a + \frac{b}{\lambda^2}}$$

Où a et b sont des constantes qui caractérisent le milieu transparent.

Cette loi montre que l'indice augmente quand la longueur d'onde diminue, c'est à dire lorsque l'on passe du rouge au violet. Par conséquent, la lumière rouge sera moins déviée que la lumière violette. Ce qui est conforme aux constatations expérimentales.

d-Utilisation de la dispersion produite par un prisme

Lorsque de la lumière produite par une source lumineuse (lampe, soleil ou étoile) traverse un prisme, elle est décomposée en ses différentes couleurs. **Un spectrophotomètre** est un appareil qui permet d'analyser spectre de la lumière étudiée. Ceci permet, pour une étoile par exemple, de recueillir des informations sur les espèces chimiques constituant l'étoile car chaque élément chimique émet des couleurs déterminées et spécifiques. Dans le cas d'une solution elle permet de déterminer les différentes concentrations de celle-ci