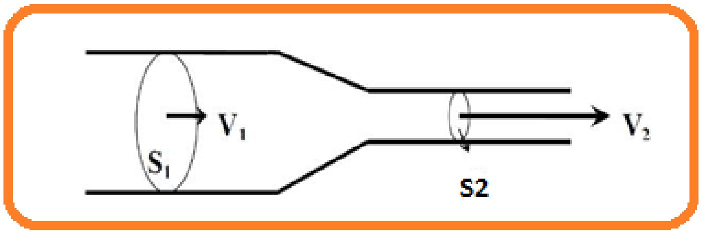
CORRIGE

SERIE

BIOMECANIQUE

DES FUIDES

Exercice 1 :
Une artère supposée horizontale présente une section de 2 cm de diamètre, suivie d'une sténose (rétrécissement) d'un diamètre de 1 cm. Soit la vitesse hypothétique v_1 d'un fluide dans ce conduit (v_1 = 0,1 m/s) et la pression hypothétique P_i (P_i = 80 N/m²). Que valent la vitesse v_2 de ce même fluide et la pression Pi' au niveau de cette sténose ?on donne ρ=1000kg/m3.



- Calcul de la vitesse au niveau du rétrécissement.

D'après le principe de continuité du débit, on a $V_1 * S_1 = V_2 * S_2$ $\quad V_1 * \pi * \frac{(d_1)^2}{4} = V_2 * \pi * \frac{(d_2)^2}{4}$

$V_1 * (d_1)^2 = V_2 * (d_2)^2 \quad V_2 = V_1 * (\frac{d_1}{d_2})^2 \quad V_2 = 0.1 * (\frac{2}{1})^2 \quad V_2 = 0.4\, m/s$

- Calcul de la pression au niveau du rétrécissement.

L'équation de Bernoulli permet d'écrire ;

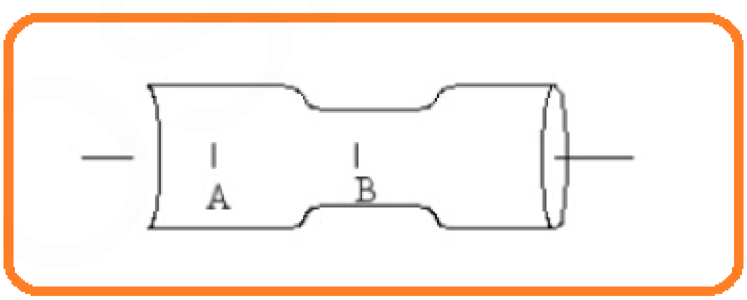
$$z_1 + \frac{v_1{}^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2{}^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

Artère supposée horizontale donc Z1=Z2 , donc

$$\frac{v_1{}^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{v_2{}^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

$$P_2 = P_1 + \rho(\frac{V_1{}^2 - V_2{}^2}{2}) \quad P_2 = 80 + 1000(\frac{0.1^2 - 0.4^2}{2}) \quad P_2 = 5 \text{ Pa}$$

Exercice 2 :
Une artère, supposée cylindrique et horizontale, présente une sténose dont le schéma est donné ci-dessus. Au point A, le diamètre de l'artère est D_A = 18 mm, la pression est P_A = 17 330 Pa, la vitesse du sang est V_A = 30 cm.s^{-1}. L'aire de la section de l'artère est S_A. Au point B, le diamètre de l'artère est D_B, la pression est P_B = 12 000 Pa, la vitesse du sang est V_B. L'aire de la section de l'artère est S_B. Que valent les pressions P_A et P_B en mm Hg ? Que vaut la vitesse V_B ? Que vaut la section S_B au niveau du rétrécissement ? En déduire le débit D_B. [il sera supposé, ici, que la masse volumique du sang est ρ_S = 1050 kg/m^3].



Au point A (D_A = 18 mm, P_A = 17 330 Pa, V_A = 30 cm.s^{-1})

Au point B (D_B =? , P_B = 12 000 Pa, V_B = ?)

- Les pressions P_A et P_B en mm Hg ?

1 mm de Hg = 133 Pa

1 mm Hg $\longrightarrow$ 133 Pa

PA $\longrightarrow$ 17 330 Pa PA ≡ 130.3 mm de Hg

1 mm Hg $\longrightarrow$ 133 Pa

PB $\longrightarrow$ 12000 Pa PB ≡ 90.2 mm de Hg

- Calcul de la vitesse V_B ;

L'équation de Bernoulli permet d'écrire

$$z_A + \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} = z_B + \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g}$$

Artère supposée horizontale donc Z1=Z2

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} \quad \textbf{donc} \quad \frac{v_B^2}{2g} = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} - \frac{P_B}{\rho g}$$

$$V_B{}^2 = V_A{}^2 + 2\left(\frac{P_A - P_B}{\rho}\right) \qquad V_B = \sqrt{V_A{}^2 + 2\left(\frac{P_A - P_B}{\rho}\right)} \qquad V_B = \sqrt{0.3^2 + 2\left(\frac{17330-12000}{1050}\right)} \qquad V_B = 3.2\ m/s$$

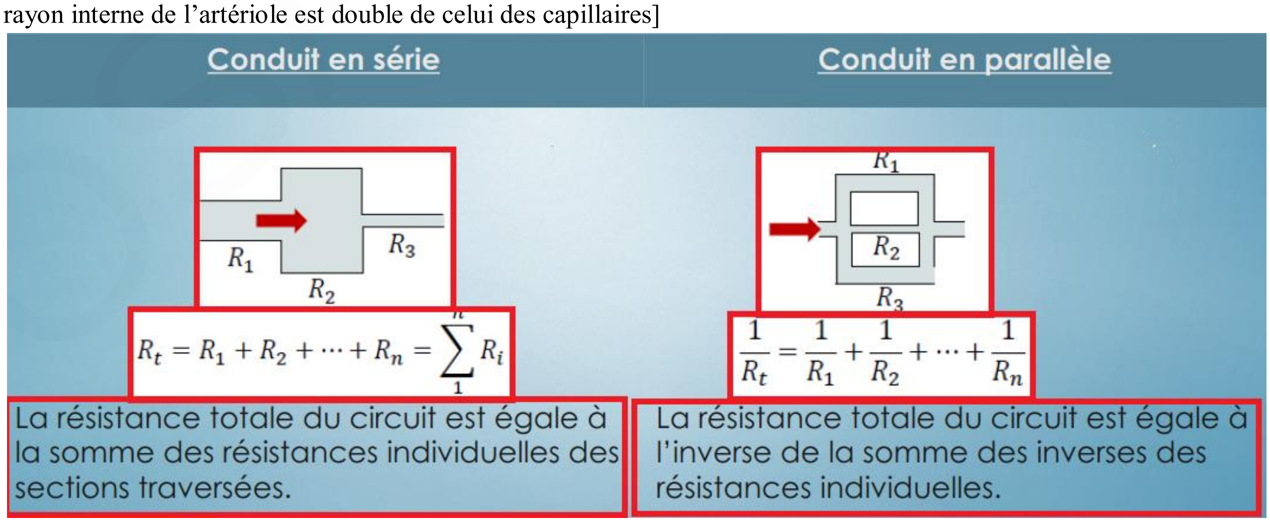
Calcul de la section S_B au niveau du rétrécissement :

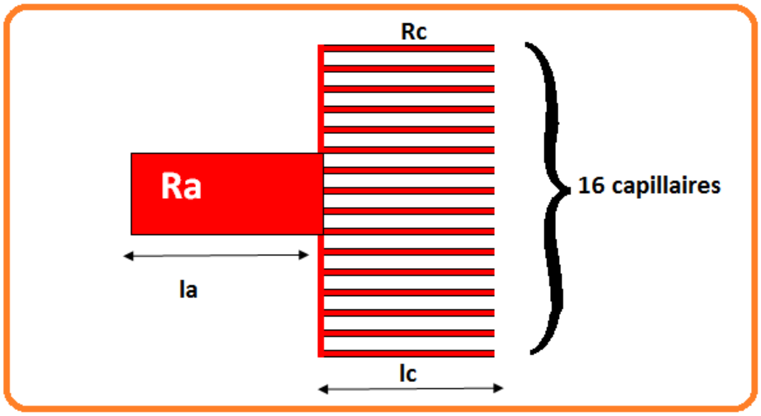
$$V_A * S_A *= V_B * S_B \qquad V_A * \pi * \frac{(d_A)^2}{4} = V_B * S_B \qquad S_B = V_A * \pi * \frac{(d_A)^2}{4 * V_B} \qquad S_B = 0.3 * 314 * \frac{(0.018)^2}{4*3.2}$$

$$S_B = 2{,}38\ 10^{-5}\ m^2$$

Calcul du débit D_B ; $Q_B = V_B * S_B$ $\quad Q_B = 3.2 * 2{,}38\ 10^{-5}$ $\quad Q_B = 7{,}6\ 10^{-5} m^3/s$

Exercice 3 : Soit une artériole qui se subdivise en 16 capillaires selon un réseau parallèle. Comment peut s'écrire la résistance Ra à l'écoulement au sein de cette artériole ? Comment peut s'écrire la résistance Rc à l'écoulement dans ces capillaires ? [Il sera supposé que les longueurs La de l'artériole et Lc de chacun des capillaires sont identiques. Il sera également supposé que le rayon interne de l'artériole est double de celui des capillaires]





Calcul de la résistance Ra à l'écoulement au sein de cette artériole ;

$$R_a = \frac{8 * \mu * l}{\pi * r^4}$$

Calcul de la résistance Rc à l'écoulement dans ces capillaires ;

$$\frac{1}{R_{equ}} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_c} \ldots\ldots\ldots. + \frac{1}{R_c} \qquad \frac{1}{R_{equ}} = \frac{16}{R_c} \qquad R_{equ} = \frac{R_c}{16} \;\; avec \;\; R_c = \frac{8*\mu*l}{\pi*(\frac{r}{2})^4} \qquad R_c = \frac{128*\mu*l}{\pi*r^4}$$

$$R_{equ} = \frac{\frac{128*\mu*l}{\pi*r^4}}{16} \qquad R_{equ} = \frac{8*\mu*l}{\pi*r^4}$$

On remarque que la résistance équivalente des capillaires est égale à résistance de l'artériole.

Exercice 4 :

a- une artère coronaire présente un rétrécissement (figure 1). Les 3 portions 1, 2 et 3 sont de même longueur ($L_1 = L_2 = L_3 = L = 1$ cm). Le diamètre de la portion 2 est égal à la moitié du diamètre de la portion 1 et de la portion 3. ($r_1 = r_3 = 2r_2 = 2$ mm). Il est considéré que le sang est un fluide parfait (et $\rho = 1$ g/cm^3). Le débit massique dans la portion 1 de cette coronaire est : $D_m = 0,3$ kg/min.

1- La vitesse V_2 dans la portion 2 vaut :

a- $V_2 = 4$ cm/s b- $V_2 = 20$ cm/s c- $V_2 = 1,6$ m/s d- toutes ces réponses sont fausses.

2- La pression relative ($P-P_0$) dans l'aorte est de 100 mm Hg, la pression relative au niveau du rétrécissement (la portion 2) vaut :

a- $P_2 = 200$ mm Hg b- $P_2 = 50$ mm Hg c- $P_2 = 151$ mm Hg d- toutes ces réponses sont fausses.

3- le diamètre minimum au niveau du rétrécissement qui donnerait une pression relative nulle à ce niveau est :

a- $d_{min} = 1,24$ mm b- $d_{min} = 1,54$ mm c- $d_{min} = 0,62$ mm d- toutes ces réponses sont fausses.

4- le sang est considéré réel et de viscosité dynamique $\mu = 4.10^{-3}$ Pa.s. Le nombre de Reynolds Re au niveau du rétrécissement (la portion 2) vaut :

a- Re = 400 b- Re = 200 c- Re = 800 d- toutes les réponses sont fausses.

5- la résistance hydraulique totale R_h de l'artère coronaire vaut :

a- $R_h = 5,78\ 10^7$ SI b- $R_h = 9,37\ 10^7$ SI c- $R_h = 1,46\ 10^7$ SI d- toutes les réponses sont fausses

6- la chute de pression totale ΔP dans toute l'artère coronaire (les 3 portions) vaut :

a-$\Delta P = 572,8$ Pa b- $\Delta P = 340,5$ Pa c- $\Delta P = 340,5$ Pa d- toutes ces réponses sont fausses.

7- du fait de ce rétrécissement partiel de l'artère coronaire, un pontage est réalisé par voie chirurgicale (figure 2). Le pontage a une longueur $L_P = 6$ cm et un rayon r_P ($r_P = 2,134$ mm). La résistance totale (artère coronaire et pontage) R vaut :

a- R = 2,12 10^7 SI b- R = 2,34 10^7 SI c- R = 4,17 10^7 SI d- toutes les réponses sont fausses.

8- le débit D_P au niveau du pontage coronarien vaut :

a-$D_P = 10,47.10^{-4}$ litre/s b- $D_P = 5.10^{-4}$ litre/s c- $D_P = 4.10^{-3}$ litre/s d- toutes les réponses sont fausses.

9- le débit D_a dans l'artère coronaire vaut :

a- $D_a = 10^{-3}$ litre/s b-$D_a = 0,21.10^{-3}$ litre/s c- $D_a = 0,5.10^{-3}$ litre/s d- toutes les réponses sont fausses.

1- La vitesse V_2 dans la portion 2 vaut :

Le débit massique est donné par ; $Q_m = \rho * Q \quad Q = \frac{Q_m}{\rho} \quad Q = \frac{0..3/60}{1000} \quad Q = 5 * 10^{-6}$ m3/s

On a Q = $V_2 * S_2$ Q = $V_2 * \pi * \frac{(d_2)^2}{4}$ $V_2 = \frac{4*Q}{\pi*(d_2)^2}$ $V_2 = \frac{4*5*10^{-6}}{3.14*(0.002)^2}$ $V_2 = 1.6\ m/s$

2- **la pression relative au niveau du rétrécissement (la portion 2) ;**

L'équation de Bernoulli permet d'écrire

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

Artère supposée horizontale donc Z1=Z2

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

$$P_2 = P_1 + \rho(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2})$$

La pression relative p1 = (P-P0) dans l'aorte est de 100 mm Hg en pascal elle vaut 100*133 = 13300 Pa

Remarque ; on travaille en pression relative donc même la pression au niveau du rétrécissement sera en pression relative.

Calcul de la vitesse V1 ; D'après le principe de continuité du débit on a

$V_1 * S_1 *= V_2 * S_2$ $V_1 * \pi * \frac{(d_1)^2}{4} = V_2 * \pi * \frac{(d_2)^2}{4}$

$V_1 * (d_1)^2 = V_2 * (d_2)^2$ $V_1 = V_2 * (\frac{d_2}{d_1})^2$ $V_1 = 1.6 * (\frac{2}{4})^2$ $V_1 = 0.4\ m/s$

$P_2 = P_1 + \rho(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2})$ $P_2 = 13300 + 1000(\frac{0.4^2 - 1.6^2}{2})$ P_2 = 12100 Pa

1 mm Hg $\longrightarrow$ 133 Pa

P_2 $\longrightarrow$ 12100 Pa P2 ≡ 91 mm de Hg

3- le diamètre minimum au niveau du rétrécissement qui donnerait une pression relative nulle à ce niveau est :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

La pression P 2= 0 donc

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g}$$

$V_2^2 = V_1^2 + 2\frac{P_1}{\rho}$ $V_2 = \sqrt{0.4^2 + 2(\frac{13300}{1000})}$ $V_2 = 5.17\ m/s$

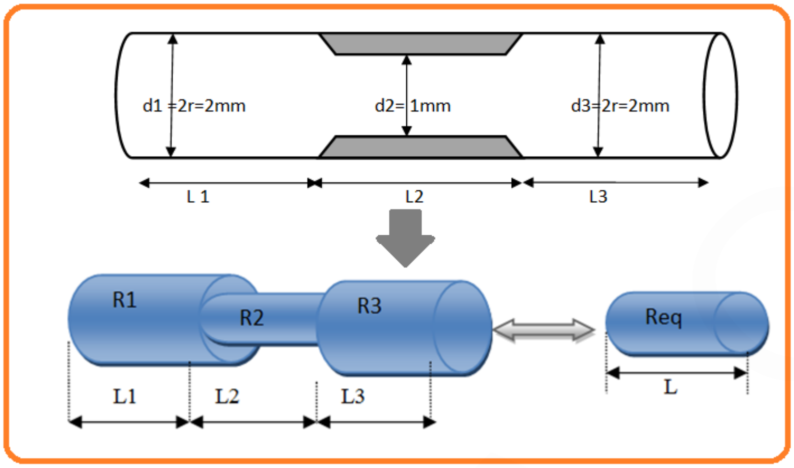
Le débit étant le même on a Q = $V_2 * S_2$ Q = $V_2 * \pi * \frac{(d_2)^2}{4}$ $(d_2)^2 = \frac{4*Q}{\pi*V_2}$

$d_2 = \sqrt{\frac{4*Q}{\pi*V_2}}$ $d_2 = \sqrt{\frac{4*5*10^{-6}}{3.14*5.17}}$ $d_2 = 1.1\ 10^{-3}$ m $d_2 = 1.1$ mm

4-Le nombre de Reynolds Re au niveau du rétrécissement (la portion 2) vaut :

On a $R_e = \frac{\rho*V*d_2}{\square}$ $R_e = \frac{1000*1.6*0.002}{4.10^{-3}}$ $R_e = 800$

5- la résistance hydraulique totale R_a de l'artère coronaire vaut :



Les trois troncons sont en série , don la resistane de l'artere est ;

$$Requ = R_a = R_1 + R_2 + R_3$$

($L_1 = L_2 = L_3 = L = 1$ cm) et ($r_1 = r_3 = 2r_2 = 2$ mm).

$R_1 = \frac{8*\mu*L}{\pi*r^4}$ $R_1 = \frac{8*4.10^{-3}*0.01}{3.1*0.002^4}$ $R_1 = 6369426\ SI$ $R_3 = R_1\ car$ même $longueur\ et$ même $rayon$

$R_2 = \frac{8*\mu*L}{\pi*(\frac{r}{2})^4}$ $R_2 = 16(\frac{8*\mu*L}{\pi*r^4})$ $R_2 = 16*R_1$ $R_2 = 101910816\ SI$

$$R_a = R_1 + R_2 + R_3$$

$R_a = 6369426 + 101910816 + 6369426$ $R_a = 11.456 * 10^7$ SI

2ieme méthode ;

$R_1 = \frac{8*\mu*L}{\pi*r^4}$ On a $R_3 = R_1\ car$ même $longueur\ et$ même $rayon.$

$R_2 = \frac{8*\mu*L}{\pi*(\frac{r}{2})^4}$ $R_2 = 16(\frac{8*\mu*L}{\pi*r^4})$

$R_a = R_1 + R_2 + R_3$ $R_a = \frac{8*\mu*L}{\pi*r^4} + 16*(\frac{8*\mu*L}{\pi*r^4}) + \frac{8*\mu*L}{\pi*r^4}$

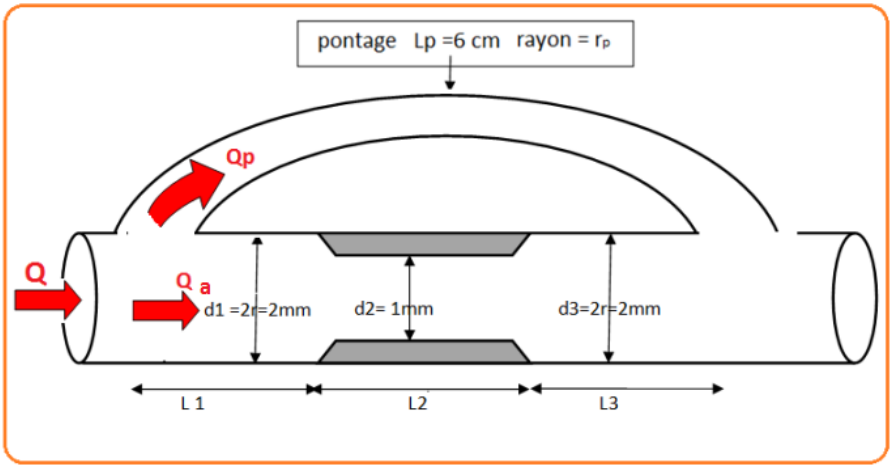
$R_a = 18(\frac{8*\mu*L}{\pi*r^4})$ $R_a = \frac{144*\mu*L}{\pi*r^4}$ $R_a = \frac{144*4.10^{-3}\ *0.01}{3.14*(0.002)^4}$ $R_a = 11.456 * 10^7$ SI

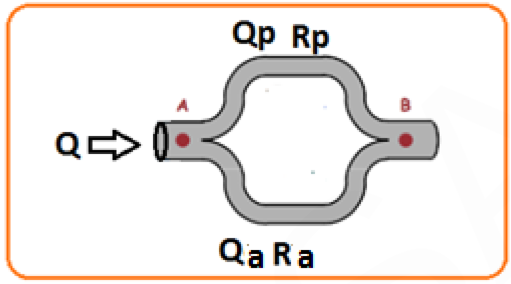
6-Calcul de la chute de pression totale ΔP dans toute l'artère coronaire (les 3 portions) :

ΔP =R*Q ΔP = $11.456 * 10^7 * 5 * 10^{-6}$ ΔP = 572.8 Pa

7-Calcul de l**a résistance totale (artère coronaire et pontage) ;**

L'artère et le pontage sont en parallèle ; donc on a 2 résistances Ra et Rp en parallèle





$$\frac{1}{R_{equ}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_p}$$

Calcul de la résistance du pontage

$$R_p = \frac{8*\mu*L}{\pi*r^4} \qquad R_p = \frac{8*4.10^{-3}*0.06}{3.14*(0.002134)^4} \qquad R_p = 2.948\ 10^7 SI$$

On a $R_a = 11.456 * 10^7$ SI

$$\frac{1}{R_{equ}} = \frac{1}{11.456 * 10^7} + \frac{1}{2.948\ 10^7}$$

$$R_{equ} = 2.34\ 10^7 \text{ SI}$$

8- Calcul du débit Q_P au niveau du pontage coronarien

Les résistances étant en parallèle donc la déférence de pression du pontage est égale à celle de l'artère elle est égale à ΔP

La conservation du débit donne Q = Qa + Qp

Les résistances en parallèle donc ΔP = Ra*Qa = Rp*Qp

$$Qa = \frac{Rp*Qp}{Ra}$$

Q=Qa + Qp $\quad Q= \frac{Rp*Qp}{Ra} + Qp \quad$ Q= $Q_p * (1 + \frac{R_P}{R_a}) \quad Q_p = \frac{Q}{1+\frac{R_P}{R_a}}$

$$Q_p = \frac{5*10^{-6}}{1+\frac{2.948\ 10^7}{11.456*10^7}} \qquad Q_p = 4*10^{-6} \text{ m3/s} \quad Q_p = 4\ 10^{-3}\ l/s$$

9-Calcul du débit Qa dans l'artère coronaire

$Qa = \frac{Rp*Qp}{Ra} \qquad Qa = \frac{2.948\ 10^7*4*10^{-6}}{11.456*10^7} \qquad Qa = 10^{-6}$ m3/s $\quad Qa = 10^{-3}$ l/s

Vérification ;

Q = Qa + Qp $\quad$ Q = $4.10^{-6} + 10^{-6}$ $\quad$ Q = 5.10^{-6} m3/s