Solution de la série N°1

Exercice 1 : on remarque immédiatement l'asymptote verticale x = -4 : c'est-à-dire

$(\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -4}} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -4}} f(x) = -\infty)$

Pour la branche infinie : c'est-à-dire ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow possiblit\acute{e}\ d'une\ droite\ oblique$)

Alors $\frac{2x^2+3x-17}{x+4} = 2x - 5 + \frac{3}{x+4}$ les asymptotes sont donc les droites d'équations :

Y=2x-5 et x = -4

Exercice 2 : la dérivée seconde ne s'annule en changeant de signe que pour $x = -\sqrt{3}\ et\ \sqrt{3}$ qui sont les points d'inflexions

Exercice 3 : f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)$\frac{x^2}{2!} + o(x^2) \Longrightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$

Exercice 4 : $\ln(3x+1) = \ln 4 + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{32}(x-1) + \frac{9}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Exercice 5 : $\cos(x)\sqrt{1+x} =?$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ \ et\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 6 :

1. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
2. $y = x + 1 \Longrightarrow x = y - 1 \quad d'ou\ \ln(y) = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + o((y-1)^3)$
3. $\lim\limits_{y\to 1} \frac{y^2+y-2}{\ln(y)} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{(y-1)(y+2)}{\ln(y)} = \lim\limits_{y\to 1} y + 2 = 3$

Exercice 7 : $Q = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 \cos(ar)\, dr = 4\pi\rho_0 I_1\ \ on\ calcul\ I_1 = \int_0^R r^2 \cos(ar)\, dr$

Par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u = r^2 \Longrightarrow du = 2rdr \\ dv = \cos(ar)\, dr \Longrightarrow v = \frac{\sin(ar)}{a} \end{cases}$

Donc $I_1 = \int_0^R r^2 \cos(ar)\, dr = \int_0^R udv = [uv]_0^R - \int_0^R vdu = \frac{R^2 \sin(aR)}{a} - \frac{2}{a}\int_0^R rsin(ar)dr$

$I_1 = \frac{R^2 \sin(aR)}{a} - \frac{2}{a} I_2$, on opère une 2 intégration par parties pour I_2 à la fin on trouve

$Q = \frac{4\pi\rho_0}{a}[R^2 \sin(aR) + \frac{2R}{a}\cos(aR) - \frac{2}{a^2}\sin(aR)]$

Exercice 8 : il s'agit du rapport de 2 polynômes, le degré du numérateur étant inferieur au degré de dénominateur, on décompose en éléments simples.

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{6}{5} \\ B = \frac{-1}{5} \end{cases} \Longrightarrow I = \int_5^6 \frac{x+2}{(x-4)(x+1)} dx = \int_5^6 \frac{\frac{6}{5}}{x-4} dx + \int_5^6 \frac{\frac{-1}{5}}{x+1} dx$$

$$I = \left[\frac{6}{5}\ln(Ix-4I) - \frac{1}{5}\ln(Ix+1I)\right] = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{2^7 \times 3}{7}\right) = 0{,}801$$

Exercice 9 : on a la courbe inférieure $f_2(x) = x^2$ et la courbe supérieure $f_1(x) = 2 - x$, donc l'aire entre les 2 courbes est donnée par $I = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx = \int_a^b (2 - x - x^{22})dx\ ou\ a\ et\ b\ sont\ les\ abscisses\ des\ points$

Intersection de 2 courbes $x^2 = 2 - x \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

$$I = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = 4{,}5$$

Exercice 10 :

1- $g(x) = e^x \Longrightarrow c(x) = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + k \Longrightarrow y_G = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + k\right)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + ke^{-x}$

2- $g(x) = \sin(x) \Longrightarrow c(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)\, e^x - \cos(x)\, e^x) + k$

$$\Longrightarrow y_G = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + ke^{-x}$$

3- $g(x) = e^{-x} \Longrightarrow c(x) = x + k \Longrightarrow y_G = (x + k)e^{-x}$

Exercice 11 : l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 8 = 0 \Longrightarrow r = 2 \pm 2i$

$\Longrightarrow y_0 = (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))e^{2x} et\ y_p = (5x + 2)e^x$

$\Longrightarrow y_G = (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))e^{2x} + (5x + 2)e^x avec\ c_1 \in IR\ et\ c_2 \in \mathbb{C}$

Mr ARAR D