Tests d'hypothèses (tests statistiques) :

Généralités :

Exemple : une variété de souris présente des cancers spontanés avec un taux (une fréquence ou proportion) constant bien connu soit p=20%.
On se demande si un traitement donné modifié ce taux ; c'est-à-dire est actif.
Pour répondre à cette question, on procède à une expérience sur 100 souris. Il s'agira au vu du pourcentage observé f de souris cancéreuses, de dire si le traitement est actif. Mais f sera soumis aux fluctuations d'échantillonnage, on ne peut pas répondre avec certitude à la question posée, alors on répondra mais en acceptant un risque d'erreur α.
On déclarera le traitement actif si le taux observé de cancers après traitement f s'écart (nettement) de p c'est le sens que l'on peut donner à ce nettement qui est le fondement du principe des tests.

Deux hypothèses sont en présence :
H_0 **: Le traitement est inactif** $H_0: f = p$ **et** H_1**: le traitement est actif** $H_1: f \neq p$

1) **Principe général des tests statistique**
   i) **Etapes de mise en œuvre :**
      1ère étape : définir clairement H_0 *et* H_1
      H_0**Engage en général une égalité et** H_1**engage en général une différence**
      H_0 **Est appelée hypothèse nulle et** H_1 **est appelée hypothèse alternative,** H_1**est la négation de** H_0**.**
      $exemple$: $H_0: f = p$ *et* $H_1: f \neq p$
      2ième étape : construire une variable aléatoire ε **à partir d'un échantillon choisi en fonction des données**
      Exemple : $\varepsilon = \frac{If-pI}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ **avec** ε *suit* $N(0\,,1)$
      ε **Est appelée statistique de test on connait la loi de** ε **sous** H_0
      3ième étape : définir la règle de décision rejeter H_0 **ou ne pas rejeter** H_0 *au risque* α **donné.**
   ii) **Types d'erreurs :**
      a) **Erreur de 1ère espèce : ou (erreur de type I** α**)**
      $$\alpha = P(rejeter\ H_0\ alors\ que\ H_0\ est\ vraie)$$
      $$= P(conclure\ H_1 alors\ que\ H_0 est\ vraie)$$
      b) **Erreur de 2nd espèce : ou erreur de type II**β**)**
      $$\beta = P(rejeter\ H_1\ alors\ que\ H_1 est\ vraie)$$
      $$= P(conclure\ H_0 alors\ que\ H_1 est\ vraie)$$
      $Remaque$: **Les hypothèses** $H_0 et\ H_1$**ne sont pas symétriques, les erreurs** α *et* β **n'ont pas le même poids. L'erreur la plus grave est** α **cité ou fixé au préalable** $(\alpha = 5\%)$ **est on choisira** β **minimale.**
      $Exemple$: **Dans un essai thérapeutique ou le but est d'établir l'efficacité d'un traitement, le risque d'erreur le plus grave est de déclarer le traitement efficace.**
      $\alpha = P(traitement\ efficace\ alors\ qu'il\ est\ non\ efficace)$
      $\alpha = P(rejeter\ H_0\ sachant\ H_0 est\ vraie)$ $H_0: traitement\ non\ efficace \Leftrightarrow f = p$
      $\beta = P$**(Traitement non efficace alors qu'il est efficace)**
   iii) **La puissance d'un test** π **:**
      $\pi = 1 - \beta$ **Le test le plus puissant est tel que** $\pi \simeq 1 \Longrightarrow \beta$ **très petit.**

Test de conformité :

A. Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique :

Hypothèses : population μ *connue* σ (*connu ou inconnu*)

Echantillon taille n, $\overline{X}$ *et* S

Question : l'échantillon est-il issu de la population ? Ou bien, existe-t-il une différence significative entre les 2 moyennes (observée et théorique)

Répondre :

a) Par intervalle de pari :

i) On pose H_0 : il n'y a pas de différence significative entre les 2 moyennes

ii) On calcule l'intervalle de pari $IP_{1-\alpha}(\overline{X}) = [\mu \pm h]$ avec h est calculé comme le h dans intervalle de confiance de la moyenne$IC_{1-\alpha}(\mu)$.

iii) Conclusion : si $\overline{X} \in IP_{1-\alpha}(\overline{X}) \Longrightarrow H_0$ est non rejeter au risque α considére.

Si $\overline{X} \notin IP_{1-\alpha}(\overline{X}) \Longrightarrow H_0$ est rejetée au risque α considére.

b) Par le test de l'écart-réduit :

Comparaison des moyennes (Méthode de l'écart réduit)

-	σ^2 inconnue, on l'estime par $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$	σ^2 connue
$n \geq 30$, X suit une loi quelconque. $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$	$Z_c = \frac{\lvert\overline{X}-\mu\rvert}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} = \frac{\lvert\overline{X}-\mu\rvert}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ $Z_c \to N(0,1)$ On compare la valeur de Z_c calculer à $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ lue dans la table de $N(0,1)$ pour un α fixé. *Si* $Z_c \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ *est rejetée au risque* α. Si $Z_c < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 *est acceptée au risque* α	$Z_c = \frac{\lvert\overline{X}-\mu\rvert}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to N(0,1)$ On compare la valeur de Z_c calculer à $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ lue dans la table de $N(0,1)$ pour un α fixé. Si $Z_c \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 *est rejetée au risque* α Si $Z_c < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 *est acceptée au risque*
$n < 30$, on suppose toujours que $X \to N(\mu, \sigma^2)$	$T = \frac{\lvert\overline{X}-\mu\rvert}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} = \frac{\lvert\overline{X}-\mu\rvert}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ $T \to St_{n-1}(\alpha)$ On compare la valeur de T calculer à $St_{n-1}(\alpha)$lue dans la table de Studente à (n-1) ddl et pour un α fixé. Si $T \geq St_{n-1}(\alpha) \to$ H_0 *est rejetée au risque* α Si $T < St_{n-1}(\alpha) \to$ H_0 *est acceptée au risque* α	

B. Comparaison d'une proportion observée f à une proportion théorique p

Hypothèses : Population p connu

Echantillon taille n et f (fréquence) observée

Question : l'échantillon est-il issu de la population ?

Réponse :

a) **par l'intervalle de pari :**

i) on pose H_0: il n'y a pas de différence significative entre les 2 proportions

ii) on calcule $IP_{1-\alpha}(f) = \left[p \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ avec $np \geq 5 \ \ et\, n(1-p) \geq 5$

iii) conclusion : si $f \in IP_{1-\alpha}(f) \Longrightarrow H_0 est\ non\ rejeter\ au\ risque\ \alpha\ considére.$

Si $f \notin IP_{1-\alpha}(f) \Longrightarrow H_0 est\ rejetée\ au\ risque\ \alpha\ considére.$

b) **Par le test de l'écart-réduit :**

On considère le cas de grands échantillons.

$$Z_c = \frac{If-pI}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \ \rightarrow \ N(0,1)\ avec\ np \geq 5\ \ et\, n(1-p) \geq 5$$

On compare la valeur de Z_c calculer à $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ lue dans la table de $N(0,1)$ pour un α fixé.

Si $Z_c \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \rightarrow \ H_0\ \ est\ rejetée\ au\ risque\ \alpha$

Si $Z_c < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \rightarrow \ H_0\ \ est\ acceptée\ au\ risque\ \alpha$

c) comparaison d'une distribution observée à une distribution théorique :

Hypothèses : Population proportions théoriques $p_1, p_2, \dots, p_k$

Avec $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$

Echantillon taille n effectifs observés $O_1, O_2, \dots, O_k$

Avec $O_1 + O_2 + \cdots + O_k = n$

Question : l'échantillon est-il issu de la population ? Ou bien y'a-t-il conformité entre les résultats observés et les résultats théoriques.

Réponse :

a) **par le test du khi-deux :**

i) on pose H_0 : il y a conformité entre les résultats observés et les résultats théoriques

ii) a) on calcule les effectifs théoriques (ou effectifs calculés)

$C_i = np_i$ (n = taille de l'échantillon) avec $\sum_{i=1}^{k} C_i = \sum_{i=1}^{k} O_i = n$

b) on vérifier que les C_i sont tous ≥ 5 sinon on regroupe des classes

iii) on calcule $\chi^2{}_{cal} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i} \quad \forall C_i \geq 5$

iv) a) pour α fixé et un nombre de modalités après éventuel regroupement des classes successive avec un degré de liberté égale à ddl= (k-1) on lit $\chi^2{}_{k-1}(\alpha)$ sur la table de khi-deux a (k-1) ddl

b) on compare $\chi^2{}_{cal}$ à $\chi^2{}_{k-1}(\alpha)$

Si ${\chi^2}_{cal} < {\chi^2}_{k-1}(\alpha) \Longrightarrow H_0$est non rejeter au risque α considére.
Si ${\chi^2}_{cal} \geq {\chi^2}_{k-1}(\alpha) \Longrightarrow H_0$ est rejetée au risque α considére.

Remarques : - pour plus de facilité, on peut résumer les données sous forme de tableau suivant :

Modalités	1	2	………………………	k	Total
Pourcentage théoriques p_i	p_1	p_2	………………………	p_k	1
Effectifs observés O_i	O_1	O_2	………………………	O_k	n
Effectifs théoriques C_i	C_1	C_2	……………	C_k	n
$\frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$	$\frac{(O_1 - C_1)^2}{C_1}$		………………………		${\chi^2}_{cal}$

Quand on a 2 modalités est on a l'une des $C_i < 5 \Longrightarrow ddl = 0$ en utilise la correction de Yates. ${\chi^2}_{yat} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(IO_i - C_i I - 0{,}5)^2}{C_i}$

<u>Test d'homogénéité</u> :

Généralités : soient 2 échantillons pris dans 2 endroits différents. Peut-on considérer qu'ils proviennent de la même population ou bien de 2 populations différentes ? (s'ils proviennent de la même population on dira que la population est homogène)

1) <u>Comparaison entre 2 moyennes observées :</u>

Hypothèses : Population 1 μ_1 inconnue Echantillon taille n_1 ,$\overline{X}_1$ et S_1

Population 2 μ_2 inconnue Echantillon taille n_2 ,$\overline{X}_2$ et S_2

Le problème consiste à comparer les 2 échantillons à partir de leurs moyennes $\overline{X}_1 et\ \overline{X}_2$.

Doit-on attribuer la différence $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ au hasard, ou au contraire doit-on la considérer comme significative ?

Question : $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$? Autrement dit les 2 échantillons sont-ils issus de la même population ? Ou bien existe-t-il une différence significative entre les 2 moyennes observées ?

Réponse : pour un risque α donné, on calcule les intervalles de confiances de $\mu_1 et\ \mu_2$ qu'on compare par intersection (3 cas se posent) :

1er cas : $IC_{1-\alpha}(\mu_1) \cap IC_{1-\alpha}(\mu_2) = \emptyset$ alors, il existe une différence significative entre les 2 moyennes au risque α considére.

2ème cas : $\begin{cases} IC_{1-\alpha}(\mu_1) \cap IC_{1-\alpha}(\mu_2) \neq \emptyset \\ et\ (\overline{X}_1 \in IC_{1-\alpha}(\mu_2) \quad et\ \overline{X}_2 \in IC_{1-\alpha}(\mu_1)) \end{cases}$ alors, il n'y a pas de différence significative entre les 2 moyennes au risque α considére.

3ème cas : $\begin{cases} IC_{1-\alpha}(\mu_1) \cap IC_{1-\alpha}(\mu_2) \neq \emptyset \\ et\ (\overline{X}_1 \notin IC_{1-\alpha}(\mu_2)\ ou\ \overline{X}_2 \notin IC_{1-\alpha}(\mu_1)) \end{cases}$ ici on ne peut pas conclure directement on utilise le test de l'écart-réduit

a) <u>Test de l'écart réduit</u> :

i) On pose H_0 : il n'y a pas de différence significative entre les 2 moyennes observées

ii) Tes de comparaison de deux moyennes :

Soit X une variable aléatoire observée sur deux populations suivant une loi Normale et deux échantillons indépendants d'effectifs n_1 et n_2 extraits de ces deux populations.
On test au risque α, l'hypothèse
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Contre l'hypothèse $H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$

σ_1^2, σ_2^2 connues $\bar{X}_1 \to N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ $\bar{X}_2 \to N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$	$Z_c = \frac{\lvert\bar{X}_1 - \bar{X}_2\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $Z_c \to N(0,1)$	On compare la valeur de Z_c calculer à $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ lue dans la table de $N(0,1)$ pour un α fixé. Si $Z_c \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 $est\ rejetée\ au\ risque\ \alpha$ Si $Z_c < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 $est\ acceptée\ au\ risque\ \alpha$
σ_1^2, σ_2^2 $inconnues$, et <u>égales</u> $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ on les estime par $\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$,	$T = \frac{\lvert\bar{X}_1 - \bar{X}_2\rvert}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$ Test de Student	On compare la valeur de T calculer à la valeur de $St_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ lue dans la table de Studente à n_1+n_2-2 degré de liberté (ddl) et pour un α fixé. Si $T \geq St_{n_1+n_2-2}(\alpha) \to$ H_0 $est\ rejetée\ au\ risque\ \alpha$ Si $T < St_{n_1+n_2-2}(\alpha) \to$ H_0 $est\ acceptée\ au\ risque\ \alpha$
σ_1^2, σ_2^2 $inconnues$, et in<u>égales</u> $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ Si n_1 et $n_2 \geq 30$ on estime les variances inconnues par $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{n_1}{n_1-1}S_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{n_2}{n_2-1}S_2^2$	$Z_c = \frac{\lvert\bar{X}_1 - \bar{X}_2\rvert}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}}$ $Z_c \to N(0,1)$	On compare la valeur de Z_c calculer à $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ lue dans la table de $N(0,1)$ pour un α fixé. Si $Z_c \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 $est\ rejetée\ au\ risque\ \alpha$ Si $Z_c < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \to$ H_0 $est\ acceptée\ au\ risque\ \alpha$

Remarques :

1- SI n_1 et $n_2 \geq 30$ l'hypothèse de normalité n'est pas nécessaire.

2- Si σ_1^2, σ_2^2 $inconnues$, et <u>égales</u> $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ n_1 et $n_2 < 30$ on suppose toujours la normalité de la variable aléatoire.

3- Si σ_1^2, σ_2^2 $inconnues$, et <u>inégales</u> $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$, n_1 et $n_2 < 30$ on utilise les tests non paramétriques.

4 - On peut directement procéder par le test de l'écart réduit sans calculer, ni comparer les intervalles de confiances

2) Comparaison de 2 proportions observées :

Hypothèses : Population 1 p_1 inconnu Echantillon 1 taille n_1 et f_1

Population 2 p_2 inconnu Echantillon 2 taille n_2 et f_2

Question : $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2$? Autrement dit, existe-t-il une différence significative entre les 2 %tages observés

Réponse : on procède exactement de la même manière que pour les moyennes jusqu'au test de l'écart-réduit, ou seul la formule du test de l'écart-réduit

a) Test de l'écart-réduit :

i) On pose H_0 : il n'y a pas de différence significative entre les 2 %tages observés

ii) On calcule $Z = \frac{I f_1 - f_2 I}{\sqrt{p_c(1-p_c)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$ avec condition $(n_1 p_c \geq 5 \; et \; n_1(1-p_c) \geq 5$

Et $n_2 p_c \geq 5 \; et \; n_2(1-p_c) \geq 5$) la valeur de %tage commun est $p_c = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$

iii) On compare $Z \; avec \; z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Si $Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Longrightarrow H_0$ est non rejeter au risque α considère.

Si $Z \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Longrightarrow H_0$ est rejetée au risque α considére.