I. Chapitre analyse

Fonction numérique

Généralités

Rappels et définitions

Définition 1: (fonction numérique d'une variable réelle). Soit $A \subset \mathbb{R}$, une fonction numérique d'une variable réelle est une application définie par $f\!:\ A \to \mathbb{R}\ avec\ x \to f(x)$

Définition 2 :

1- f(x) s'appelle l'image de A par f
2- si ∀ x∈A f(x) = f (-x), alors la fonction f est dite paire (symétrie de la courbe par rapport à l'axe YY').
3- Si ∀x∈A f(x) = -f (-x), alors la fonction f est dite impaire (symétrie de la courbe par rapport à l'origine o).
4- Si ∀x∈A f(x) = f(x+T), alors la fonction f est dite périodique et si T est la plus petite valeur telle qu'on ait cette propriété T s'appelle la période (la courbe est dite invariable par translation).

Limite, continuité

1- On dira qu'une fonction f possède en x_0 une limite (respectivement une limite à droite ou à gauche) s'il existe une valeur finie l telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
2- Si $f(x_0)$ existe et que $f(x_0) = l$ on dira que la fonction est continue en x_0
3- Si $\forall x_0 \in A$, f est continue en x_0, on dit que f est continue sur A.
4- Si f et g sont continues en x_0, alors f+g, f×g, f/g (si g $(x_0) \neq 0$) sont continues en x_0.
5- Si f est continue enx_0, et g continue en$f(x_0)$, alors fog est continue enx_0.

Fonctions réciproques

Théorème : soit f une fonction définie, continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $[a, b]$, alors il existe une fonction notée f^{-1}appelée fonction réciproque de f définie, continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (respectivement $[f(b), f(a)]$ et à valeurs dans $[a, b]$ et on à :

1- $\forall x \in [a, b]\ \ alors\ \ f^{-1}\big(f(x)\big) = x$
2- $\forall x \in [f(a), f(b)]\ (respectivement\ [f(b), f(a)])\ alors\ \ f\big(f^{-1}(x)\big) = x$
3- Graphiquement les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétrique par rapport à la droite d'équation y=x

Dérivées – Différentielles

Définition 3 : une fonction f est dite dérivable en point $x_0\ si\ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe, cette limite s'appelle alors la dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$, on parle de dérivée à droite (respectivement à gauche) si la limite existe uniquement lorsque $h \to 0\ \ si\ h > 0\ (respectivement\ h \to 0\ si\ h < 0)$ les dérivées d'une fonction f se notent $f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}, \dots \dots$ ou $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \dots, \frac{d^nf}{dx^n}, \dots \dots$

Propriétés :

1. U et V étant des fonctions de x, on a :
   i- $(\alpha U)' = \alpha U' \;\; \forall \alpha \in IR$
   ii- (U+V)'=U'+V'
   iii- $(U\times V)' = U'V + UV'$
   iv- $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V-UV'}{V^2} \; (V \neq 0)$
   v- $(U^\alpha)' = \alpha U^{\alpha-1}U' \;\; \forall \alpha \in IR$
2. $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe en x_0.
3. f' s'annule en x_0 et change de signe $\Leftrightarrow f$ a un extrémum au point d'abscisse x_0 .

Fonctions usuelles

1) Logarithme népérien

Proposition 1: il existe une unique fonction notée $Ln:]0,+\infty] \to IR$ tel que

1. $Ln'(x) = \frac{1}{x} \;\; \forall x > 0$
2. $Ln(a \times b) = Ln(a) + Ln(b) \;\; avec \; (\; a \; et \; b) \; > 0$
3. $Ln\left(\frac{1}{a}\right) = -Ln(a) \quad a > 0$
4. $Ln(a^\alpha) = \alpha Ln(a) \;\; \forall \alpha \in IR \quad et \;\; a > 0$
5. Ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0,+\infty] \; sur \;\; IR$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Ln(x+1)}{x} = 1$
7. La fonction Ln vérifie que $Ln(x) \leq x - 1 \; \forall x > 0$

2) Exponentielle

Définition 4 : la bijection réciproque de $Ln:]0,+\infty] \to IR$ est $exp: IR \to]0,+\infty]$

Proposition 2 : la fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp\big(Ln(x)\big) = x \;\; \forall x > 0 \;\;\; et \;\;\; Ln(\exp(x)) = x \;\;\; \forall x \in IR$
2. $\exp(a \times b) = \exp(a) \times \exp(b) \quad \forall (a,b) \in IR^2$
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n \;\;\; \forall n \in IN \;\;\; et \;\; \forall x \in IR$
4. $exp: IR \to]0,+\infty]$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\,(x) = 0 \qquad et \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \exp\,(x) = +\infty$
5. La fonction exponentielle est dérivable $(\exp(x))' = \exp(x) \quad \forall x \in IR \;\; et \;\; elle \; vérifie \;\; \exp(x) \geq 1 + x$

Remarque : la fonction exponentielle est unique fonction qui vérifie (exp(x))'=exp(x) $\forall x \in IR$ et exp(1)=e ou e=2,718….. et Ln(e)=1

3) Fonction de puissance

Définition 5 : $f(x) = x^\alpha = \exp\big(\alpha Ln(x)\big) \quad \forall \alpha \in IR \quad et \;\; x > 0$ c'est une fonction définie, continue, dérivable et positive $\forall x > 0$

Dérivée et variations : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \begin{cases} < 0 \;\; si \;\; \alpha < 0 \;\; \Rightarrow x^\alpha \downarrow \\ = 0 \;\; si \; \alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha \rightarrow \\ > 0 \;\; si \; \alpha > 0 \;\; \Rightarrow x^\alpha \uparrow \end{cases}$

Limite : $\underset{x\to+\infty}{x^\alpha\to} \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha < 0 \\ 1 & si \;\; \alpha = 0 \\ +\infty & si \; \alpha < 0 \end{cases} \qquad \underset{x\to 0}{x^\alpha\to} \begin{cases} +\infty & si \; \alpha < 0 \\ 1 & si \;\; \alpha = 0 \\ 0 & si \;\; \alpha > 0 \end{cases}$

Réciproque : la fonction réciproque de $x^\alpha \;\; est \; x^{\frac{1}{\alpha}}$

Exemple 1 : $\forall x \in IR \quad \sqrt{x^2} = x \quad et \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \forall x > 0$

Comparaison de e^x, x^α et $Ln(x)$:

On a coutume de dire que e^x l'emporte sur x^α et x^α l'emporte sur Ln(x)

Exemple 2 : 1- $\underset{x\to+\infty}{(\frac{e^x}{x^\alpha})\to+\infty}$ $\forall x$ 2- $\underset{x\to+\infty}{\left(\frac{x^\alpha}{Ln(x)}\right)\to+\infty}$ $\forall\alpha>0$ 3- $\underset{x\to+\infty}{(\frac{e^x}{Ln(x)})\to+\infty}$ 4- $\underset{x\to0}{x^\alpha Ln(x)\to0}$ $\forall\alpha>0$

5- $\underset{x\to+\infty}{e^{-x}Ln(x)\to0}$

4) **Fonctions trigonométriques :**

Définition 6 : dans un cercle de rayon R=1 les fonctions sinus, cosinus et tangente sont définies

Propriétés :

1. **sinus et cosinus sont de période 2π et tangente est de période π**
2. **sinus et tangente sont impaires et cosinus est paire**
3. **(sin(x))'=cos(x) (cos(x))'=- sin(x) (tan(x))'=1-tan^2(x)=1/cos^2(x)**
4. $\left(\boldsymbol{sin(x)\sim x \quad , \; cos(x)-1\sim-\frac{x^2}{2} \; et \; \; tan(x)\sim x}\right) \boldsymbol{quand \; x\to 0}$

5) **Fonction trigonométrique réciproques** :

Définition 7 : sur des intervalles judicieusement choisis pour qu'elles soient strictement monotones, les fonctions trigonométriques ont alors, des fonctions réciproques, les intervalles les plus classiquement choisis et fonctions réciproque correspondantes sont :

1- **Arccosinus** : considérons la fonction cosinus $\begin{matrix} Cos: & IR\to[-1,1] \\ & x\to Cos(x)\end{matrix}$ pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0;\pi]$ sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction $Cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ est une bijection est sa bijection réciproque est la fonction Arccosinus $Arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ on a donc, par définition de la bijection réciproque $Cos\big(Arccos(x)\big)=x \quad \forall x\in[-1,1]$ et $Arccos\big(Cos(x)\big)=x \quad \forall x\in[0,\pi]$

La dérivée de $\big(Arccos(x)\big)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x\in\,]-1,1[$

2- **Arcsinus** : la restriction $sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction Arcsinus :$[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Propriétés:

1. $\sin(Arcsin(x))=x \quad \forall x\in[-1,1]$
2. $Arcsin(\sin(x))=x \quad \forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
3. Sa dérivée $(Arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\forall x\in\,]-1,1[$

3- **Arctangnte** : la restriction $tan:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to IR$ est une bijection, sa bijection réciproque est la fonction Arctangente : $Arctan: IR\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1. $\tan\big(Arctan(x)\big)=x \quad \forall x\in IR$

2. $Arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
3. Sa dérivée $\left(Arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in IR$

Formule de Taylor, Formule de Mac Laurin et Développements Limités

Définition : une fonction f définie et continue au voisinage de x_0, admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de x_0, s'il existe un polynôme $P(x-x_0)$ de degré n au plus tel que :

$$f(x) = P(x-x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \quad avec \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Ou $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$

$$avec \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Formule de Taylor

Si la fonction f est définie, continue et dérivable jusqu'à l'ordre n sur un intervalle A contenant x_0, alors le développement limité de f, à l'ordre n, au voisinage de x_0 s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$

$$avec \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0)$$

Exemple : déterminer le développement limité de la fonction exp(x) au voisinage de 1 d'ordre 2

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} = e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2})$$

Formule de Mac Laurin

Quand le développement de Taylor s'effectue au voisinage de $x_0 = 0$, nous obtenons la formule de Mac Laurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!} \varepsilon(x)$$

Propriétés :

1. On démontre que si le développement limité existe, celui-ci est unique, et que si f est justifiable de la formule de Taylor- MacLaurin f possède un développement limité
2. Si f a un développement limité, alors les dérivées de f, les primitives de f et 1/f ont des développements limités, qui sont respectivement les dérivées, primitives et inverse du développement limité de f
3. Si f et g ont des développements limités, alors $f+g, \quad f\times g, \quad \frac{f}{g} \ et\ fog$ ont aussi des développements limités qui sont respectivement les sommes, produit, quotient et composée des développements limités de f et g

Tableau des développements limités usuelles de Taylor MacLaurin

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$
Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n} x^n + x^n \varepsilon(x)$
Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n} x^n + x^n \varepsilon(x)$
Pour $\alpha = -1$ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
$Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$

$Sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$
$Arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{1 \times 4 \times 5} x^5 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$
$Arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$

Remarque : en remplaçant $x^n \varepsilon(x)\ par\ O(x^n)\ alors\ \ si\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \Longrightarrow O(x^n) = 0$

Calcul Intégral

1- Primitive :

Définition : soit une fonction f définie sur un intervalle A, une primitive de f sur l'intervalle A est une fonction F dérivable sur A telle que :

$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)\ \ \forall x \in A$ De plus sachant que $\frac{d(F(x)+c)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

On peut en déduire :

Théorème 1: f admet une primitive F, alors il existe un ensemble infini e primitif de f $\int f(x)dx = F(x) + c\ \ avec\ c \in IR$

Théorème 2 : toute fonction continue sur A admet une primitive sur A

Propriétés : soient a et b deux réels, f et g deux fonctions admettant des primitives sur A

- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
- $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$

Tableau des primitives des fonctions usuelles

$\alpha \in IR$	$\alpha x + c\ \ /c \in IR$
$x^\alpha\ \ /\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ \ /c \in IR$
$\frac{1}{x}\ \ \ /\ x \neq 0$	$LnIxI + c\ \ \ /c \in IR$
$Sin(x)$	$-Cos(x) + c\ \ /c \in IR$
$Cos(x)$	$Sin(x) + c\ \ /c \in IR$
$Tan(x)$	$-LnICos(x)I + c\ \ /c \in IR$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ /x \neq \pm 1$	$Arcsin(x) + c\ \ /c \in IR$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ /x \neq \pm 1$	$Arccos(x) + c\ \ /c \in IR$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x) + c\ \ /c \in IR$
e^x	e^x +c /c$\in IR$

2- **Intégrales définies**

Définition : si f est une fonction continue sur A ($[a,b]\subset A$) et F une primitive de f sur A, l'intégrale définie de f entre les bornes d'intégration a et b est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3- **Interprétation géométrique de l'intégrale définie**

Soit f une fonction continue sur A avec $[a,b]\subset A$

Aire de la surface comprise entre la courbe représentative de f, l'axe x et les droites x=a et x=b

Remarque : l'aire est une grandeur algébrique qui peut être positive ou négative

Propriétés : soient a, b et c des nombres réels tels que $a < b < c$ et f et g deux fonctions continues sur$[a,b]$, on a les résultats suivants :

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ (relation de chasles)
5. $f(x) \geq 0 \quad \forall x\in[a,b] \;\; \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
6. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x\in[a,b] \;\; \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Propriétés : cas des fonctions paires et impaires

1. Si f est une fonction paire et continue sur l'intervalle $[-a,a]$
   $alors \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
2. Si f est une fonction impaire et continue sur l'intervalle $[-a,a]$ $alors$
   $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Définition : la quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

4- Quelques méthodes pour intégrer

i) **Intégration par parties :**

Théorème : soient U et V deux fonctions à dérivées continues sur A.

Alors $\int UdV = UV - \int VdU$ et pour une intégration définie :

$$\int_a^b UdV = [UV]_a^b - \int_a^b VdU$$

ii) **Intégration par changement de variable :**

Théorème : soit φ une fonction à dérivée continue et strictement monotone sur A et f une fonction continue sur $\varphi(A)$

Posons :$x = \varphi(u) \Rightarrow dx = \varphi'(u)du \;\; alors \int f(x)dx = \int f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du$
$= \int g(u)du$ Ou $\int g(u)du$ est plus facilement calculable si le changement de variable et pertinent.

Pour une intégration définie :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du = \int_\alpha^\beta g(u)du \;\; avec \;\; a = \varphi(\alpha) \; et \; b = \varphi(\beta)$$

Equations différentielles

1- Introduction

Définition :

- On appelle équation différentielle d'ordre n toute relation de la forme
  $\forall x \quad F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$
  Entre la variable x, la fonction y et ses n dérivées successives $y', y", \dots, y^{(n)}$ ou F est une fonction de IR^{n+2} $dans\ IR$
- L'ordre de l'équation différentielle est égal à l'ordre maximum des dérivées
- Résoudre l'équation différentielle consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables n fois en x vérifiant cette équation

Notation : par souci de simplification des écritures, y représentes-y (x)

2- Equations différentielles du premier ordre

Définition : on appelle équation différentielle du premier ordre toute relation de la forme
$\forall x \;\; F(x, y, y') = 0$ entre la variable x, la fonction y et sa dérivée première y' ou F une fonction de $IR^3 dans\ IR$
la résolution de l'équation différentielle dépend de la forme de la fonction F

3- Equation à variables séparables

Définition : on appelle équation à variables séparables toute équation de la forme
$b(y)y' - a(x) = 0$ soit $a(x)dx = b(y)dy$ avec a(x) dépend de x mais pas de y et b(y) dépend de y mais pas de x, la séparation des variables passe par :

$$y' = \frac{dy}{dx}\ d'ou\ \ b(y)\frac{dy}{dx} - a(x) = 0 \Leftrightarrow a(x)dx = b(y)dy \Leftrightarrow \int a(x)dx = \int b(y)dy$$

4- Condition initiales

Définition : en faisant varier la constante d'intégration c, la solution y décrit une famille de fonctions représentée par une famille de courbes, de la connaissance d'une valeur de y en un point x_0, $y(x_0) = y_0$, on déduit la valeur de a constante c, est alors unique
On appelle condition initiale, la relation $y(x_0) = y_0$

5- Equations différentielles linéaires du 1^er^ ordre sans 2^nd^ membre

Définition : toute équation de la forme $a(x)y' + b(x)y = 0 \;\; (I)$ est appelée équation différentielle linéaire du 1er ordre sans 2nd membre (avec a et b des fonctions de x et $a(x) \neq 0$
Remarque : la résolution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre sans 2nd membre est directe en se ramenant à une équation à variables séparables :

$$y = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \quad c \in IR$$

6- Equations différentielles linéaires du 1er ordre avec 2nd membre

Définition : toute équation de la forme $a(x)y' + b(x)y = g(x)\ (II)$ est appelée équation différentielle linéaire du 1er ordre avec 2nd membre (avec a, b et g des fonctions de x, et $a(x) \neq 0$)

Deux méthodes pour la résolution de cette équation :

1. L'une simple, mais d'utilisation limitée, s'appelle la méthode d'identification
2. L'autre générale, mais plus laborieuse, s'appelle la méthode de variation de la constante de LAGRANGE

Remarque : la méthode d'identification n'est applicable que si :

i) Les coefficients sont constantes : a(x)=a et b(x)=b
ii) Le second membre est identifiable sous la forme d'une fonction polynomiale, exponentielle ou sinus ou cosinus

Théorème : la solution générale de l'équation avec 2nd membre (SGEA2M), y_G, s'obtient en rajoutant à la solution générale de l'équation sans 2nd (SGES2M), notée y_0, une solution particulière de l'équation avec 2nd membre (SPEA2M), notée $y_p \quad y_G = y_0 + y_p$

- Recherche de la (SGES2M) : $y_0\ verifie\ l'équation$:

$ay_0' + by = 0 \Longrightarrow y_0 = ce^{-(\frac{b}{a})x}\ c \in IR$

- Recherche d'une (SPEA2M) : de la forme du second membre g(x), on déduit la forme de y_p. d'où le nom de la méthode par identification.

Forme de g(x)	Forme de y_p
$g(x) = P_n(x) = Mx^n + Nx^{n-1} + \cdots$	$y_p = Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots$ (ou apparaissent toutes les puissances de x)
$g(x) = P_n(x)e^{kx}$	$y_p = Q_n(x)e^{kx}$ Sauf si : $y_0 = ce^{kx}\ alors$: $y_p = xQ_n(x)e^{kx}$
$g(x) = Msin(kx) + Ncos(kx)$ Cas particuliers : $g(x) = Msin(kx)$ $g(x) = Ncos(kx)$	$y_p = Asin(kx) + Bcos(kx)$
ou $P_n(x) et\ Q_n(x)\ sont\ des\ polynômes\ de\ degre\ n\ et\ les\ coefficients\ de\ Q_n(x) sont$ à déterminer par la méthode d'identification des polynômes *si g(x) est une combinaison linéaire des formes vues ci-dessus, alors $y_p\ l'est\ aussi$* *la solution particulière vérifier l'équation $ay_p' + by_p = g(x), en\ remplaçant\ dans\ cette$ expression y_p par la forme déduite de celle de g(x) suivant le tableau ci-dessus, on obtient un système d'équations permettant d'obtenir valeurs A,B, … puis d'en déduire y_p*	

7- Résolution par la méthode de variation de la constante de LAGRANGE

Nous traitons maintenant la résolution de l'équation (II) : $a(x)y' + b(x)y = g(x)$ dans le cas où les coefficients ne sont plus nécessairement constants :

De la forme de la (SGES2M) $y_0 = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$ nous déduisons la forme de solution générale de l'équation avec 2nd membre en considérant c non plus comme une constante mais comme une fonction de x ainsi, à partir de : $y_0 = ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \Longrightarrow y_G = c(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$

$avec\ c(x) = \int \frac{g(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} dx \Longrightarrow y_G = \int [(\frac{g(x)}{a(x)} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}) e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}] dx$

8- Equations différentielles du 2nd ordre

Définition : on appelle équation différentielle du 2nd ordre toute relation de la forme :
$\forall x\ F(x, y, y', y") = 0$

9- Equation différentielle linéaire du 2nd ordre sans 2nd membre

Définition : une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constantes sans 2nd membre est définie par : $ay" + by' + cy = 0\ \ (III)$ ou $a \neq 0,\ b\ et\ c \in IR$ et y un e fonction de x

Propriété : si $y_1\ et\ y_2$ sont deux solutions linéairement indépendantes (c'est-à-dire non proportionnelles) de l'équation (III), l'ensemble des solutions du système est donné par :

$y_0 = c_1y_1 + c_2y_2\ \ tel\ que\ \ c_1\ et\ c_2\ \in IR$

Vérifions que les solutions $y_1\ et\ y_2$ sont de la forme $y_0 = e^{rx} \Longrightarrow re^{rx} = y_0' \Longrightarrow r^2e^{rx} = y_0''$en remplaçant dans l'équation (III) : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Longrightarrow e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$

$\Longrightarrow e^{rx} \neq 0\ \forall x \in IR\ d'ou\ ar^2 + br + c = 0$ appelée équation caractéristique :

Les solutions dépendent des racines de cette équation caractéristique

$\Delta = b^2 - 4ac$	Racines	Solutions y_0 (SGES2M)
$\Delta > 0$	$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_0 = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}\ c_1etc_2 \in IR$
$\Delta = 0$	$r = \frac{-b}{2a}$	$y_0 = (c_1 + xc_2)e^{rx}\ \ c_1\ et\ c_2\ \in IR$

$\Delta < 0$	$r_1 = \alpha + i\beta \ et \ r_2 = \alpha - i\beta$	$y_0 = (c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x))e^{\alpha x} \ c_1 \in IR \ et c_2 \in \mathbb{C}$

10- Equations différentielles du 2nd ordre à coefficients constantes avec 2nd membre

Définition : une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constantes avec 2nd membre est une équation de la forme : $ay" + by' + cy = g(x) \ \ (IV) \ \ avec \ a \neq 0, b \ et \ c \in IR$ et g(x) le 2nd membre

Résolution par la méthode d'identification :

Théorème : la solution générale de l'équation différentielle avec 2nd membre (SGEA2M) y, s'obtient en rajoutant à la solution générale de l'équation sans 2nd membre (SGES2M) notée $y_0$une solution particulière de l'équation avec 2nd membre (SPEA2M) notée y_p: $\quad y_G = y_0 + y_p$

Forme de g(x)	Forme de y_p
$g(x) = P_n(x) = Mx^n + Nx^{n-1} + \cdots$	$y_p = Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots$(ou apparaissent toutes les puissances décroissantes de x)
$g(x) = P_n(x)e^{kx}$	$y_p = Q_n(x)e^{kx} \ sauf \ si: y_0 = R(x)e^{kx} et$ ➢ k est la racine simple de l'équation caractéristique $y_p = xQ_n(x)e^{kx}$ ➢ k est racine double de l'équation caractéristique $y_p = x^2Q_n(x)e^{kx}$
$g(x) = Msin(kx) + Ncos(kx)$ $g(x) = Msin(kx)$ $g(x) = Ncos(kx)$	$y_p = Asin(kx) + Bcos(kx) \ sauf \ si$:l'équation caractéristique admet des racines imaginaires a savoir $r = \pm i\beta \ et \ k = \beta$ $\Longrightarrow y_p = x(Asin(kx) + Bcos(kx))$
Ou A,B,…, sont des constantes à déterminer par la méthode d'identification des polynômes ou $P_n(x) et Q_n(x)$ sont des polynômes de degré n et R(x) un polynôme de degré 0 ou 1	