SERIE B : ELECTRICITE ET BIOELECTRICITE : Dipôle électrique

Exercice 1 :

Soit un dipôle situé dans un espace où règne un champ électrique $(\vec{E})$ dû à une ou plusieurs charges suffisamment éloignée(s) du dipôle.

1- Comment pouvons-nous exprimer les notions d'équilibre stable et d'équilibre instable qui caractériseraient ce dipôle $(\vec{p})$?

2- Si celui-ci est constitué de deux charges $(+e)$ et $(-e)$ distantes de $(d = 10^{-10}\ m)$, et qu'il est placé dans un espace où règne un champ électrostatique $(\vec{E})$ de module $(|\vec{E}| = 10^{-6}\ N/C)$, quelle est la valeur du moment du couple qui s'exerce sur le dipôle dans les conditions suivantes :

a- Le dipôle $(\vec{p})$ a même direction que le champ $(\vec{E})$.

- Le dipôle $(\vec{p})$ a même sens que le champ $(\vec{E})$.
- Le dipôle $(\vec{p})$ est de sens opposé au champ $(\vec{E})$.

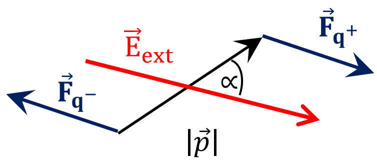
b- Le dipôle $(\vec{p})$ est dans une direction perpendiculaire à celle du champ $(\vec{E})$.

Réponse exercice 1 :

1- Notions d'équilibre stable et d'équilibre instable qui caractériseraient le dipôle $(\vec{p})$?

Les charges du dipôle, influencé par un champ externe, seront soumises à l'action de deux forces induites par ce champ électrique extérieur.

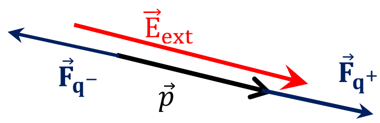
La force $(\vec{F}_{q^+})$ agit sur la charge positive du dipôle électrique, elle est orientée dans le même sens que celui du champ extérieur.
Et la force $(\vec{F}_{q^-})$ agit sur sa charge négative, elle est orientée dans le sens opposé que celui du champ extérieur.



Ces deux forces électriques ont la même intensité mais des sens opposés, elles tendent à faire changer l'orientation du dipôle (voir schéma). L'angle (α) est l'angle formé par l'orientation du moment dipolaire $(\vec{p})$ et celle du champ électrique extérieur $(\vec{E}_{ext})$.

a- Équilibre stable :

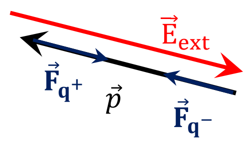
Lorsque l'angle $(\alpha = 0)$, la direction et le sens du moment dipolaire sont les mêmes que ceux du champ électrique extérieur influent. Le schéma équivalent est donné par la figure ci-contre.



Les deux forces induites par ce champ ont la même intensité et sont portées par la même direction, elles ont des sens opposés. Elles tendent à éloigner les deux charges du dipôle. Elles n'auraient aucun effet sur l'orientation du dipôle. Cette orientation du dipôle caractérise celle d'une position d'équilibre de stable.

b- Équilibre instable :

Lorsque l'angle $(\alpha = \pi)$, le moment dipolaire et le champ extérieur ont la même direction et des sens opposés. Le schéma équivalent est donné par la figure ci-contre.



Les deux forces induites par ce champ ont la même intensité et sont portées par la même direction, elles ont des sens opposés. Elles tendent à rapprocher les deux charges du dipôle. Elles n'auraient aucun effet aussi sur l'orientation du dipôle, mais une petite impulsion externe changerait totalement l'orientation du dipôle. Cette orientation du dipôle caractérise celle d'une position d'équilibre instable.

.

2- La valeur du moment du couple qui s'exerce sur le dipôle électrique.

Le moment du couple des forces est défini par : $\vec{M} = \vec{p}\ \Lambda\, \vec{E}_{ext}$, son intensité est donnée par :

$$|\vec{M}| = |\vec{p}|\ \times |\vec{E}_{ext}| \times \sin(\alpha)$$

Calcul de la valeur du moment dipolaire : $|\vec{p}| = e \times |\vec{d}| = 1{,}6\ 10^{-19} \times 1\ 10^{-10} \rightarrow |\vec{p}| = 1.6\ 10^{-29} (C.m)$

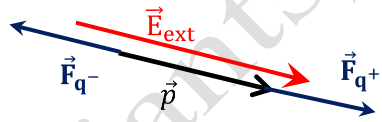
2.1 <u>La direction du champ externe est la même que celle du moment dipolaire.</u>

a- <u>Le sens du dipôle est le même que celui du champ externe</u>, ont déduit que l'angle ($\alpha = 0$).

L'intensité du moment du couple $(|\vec{M}|)$ serait donnée par :

$$|\vec{M}| = |\vec{p}| \times |\vec{E}_{ext}| \times \sin(\alpha) = 0, \text{ car le } (\sin(0) = 0).$$

$$|\vec{M}| = 0.$$



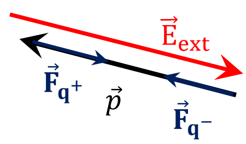
Le dipôle électrique ne va pas bouger, il est dans une position d'équilibre stable.

b- <u>Le sens du dipôle est opposé à celui du champ externe</u>, donc l'angle serait ($\alpha = \pi$).

L'intensité du moment du couple des forces serait :

$$|\vec{M}| = |\vec{p}| \times |\vec{E}_{ext}| \times \sin(\alpha) = 0, \text{ car le } (\sin(\pi) = 0).$$

$$|\vec{M}| = 0.$$



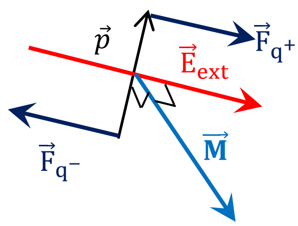
Le dipôle électrique ne va pas bouger aussi, il est dans une position d'équilibre instable, mais une petite impulsion externe lui fait changer son orientation.

2.2 <u>La direction du champ externe est perpendiculaire à celle du moment dipolaire.</u>

a- <u>Le sens du moment dipolaire est orienté vers le haut</u>, l'angle <u>**α = π/2**</u>,

Son intensité serait maximale : $|\vec{M}| = 1{,}6\ 10^{-29} \times 1\ 10^{6} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$|\vec{M}| = 1{,}6\ 10^{-23} (C.V).$$

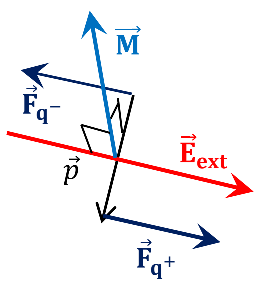


Le sens d'orientation du moment du couple des forces, appliquées sur les charges du dipôle est rentrant. C'est-à-dire que le vecteur moment du couple est orienté vers l'intérieur du plan formé par le champ externe et le moment dipolaire voir le schéma ci-contre.

b- <u>Le sens du dipôle est orienté vers le bas</u>, l'angle <u>**α= -π/2**</u>,

Son intensité serait la même que la précédente orientation.

$$|\vec{M}| = 1.6\ 10^{-23} (C.V).$$



Le sens de l'orientation du moment du couple des forces est sortant. C'est-à-dire que le vecteur moment est orienté vers l'extérieur du plan formé par le champ externe et le moment dipolaire.

<u>**Remarque :**</u> la direction du moment du couple des forces est toujours perpendiculaire au plan formé par les forces électriques et le champ électrique externe.

Exercice 2 :

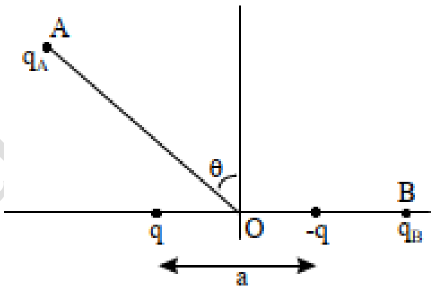
Le moment dipolaire $(\vec{p})$ de la molécule (NH_3) vaut $(\|p\| = 5\ 10^{-30} C.m)$. Cette molécule peut en effet être assimilée à un dipôle formé par des charges $(+e)$ et $(-e)$ distantes d'une distance (d). Calculer la distance (d).

Réponse exercice 2 :

La distance qui sépare les deux charges du dipôle se déduit de l'expression du moment dipolaire. $\vec{p} = q \times \vec{d}$

$$|\vec{p}| = q \times |\vec{d}| \rightarrow d = \frac{|\vec{p}|}{e} = \frac{5\ 10^{-30}}{1{,}6\ 10^{-19}} \rightarrow d = 3{,}125\ 10^{-11}\ (m)$$

Exercice 3 :



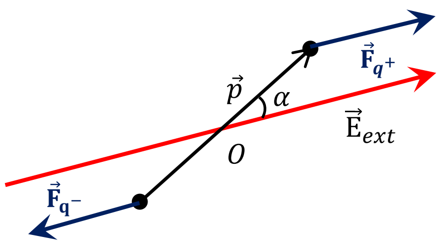
1- Écrire l'expression de l'énergie potentielle (Ep) d'un dipôle $(\vec{p})$ situé dans un espace où règne un champ électrique $(\vec{E})$.
2- Est-il possible de traduire de manière graphique l'évolution de l'énergie potentielle (Ep) en fonction de son orientation vis-à-vis du champ $(\vec{E})$? Si oui, établir ce graphe et caractérisez sur celui-ci les positions d'équilibre stable et instable.
3- Application : quatre charges (Q_A), (Q_B), q et (-q) sont disposées comme l'indique la figure suivante : On donne $\overline{OA} = 20$ cm , $\overline{OB} = 15$ cm, $(a = 2\ cm)$, $(\theta = 30°)$, $(q = 10^{-12}C)$, $(Q_A = -5{,}33\ 10^{-6}\ C)$; $(Q_B = 3\ 10^{-6}C)$.

a- Déterminer l'énergie potentielle et le moment du couple du dipôle dans cette position.
b- Quelles sont les valeurs limites que peut prendre l'énergie potentielle de ce dipôle ?
c- Calculer le travail nécessaire pour ramener le dipôle à sa position d'équilibre stable ?

Réponse exercice 3 :

1- L'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle soumis à l'action d'un champ électrique externe est donnée par :

$$Ep = -\ |\vec{p}|\ \times |\vec{E}_{ext}| \times \cos(\alpha),$$



L'angle (α) est l'angle formé entre l'orientation du dipôle et celle du champ extérieur (voir le schéma ci-contre).

2- Évolution de l'énergie potentielle en fonction de son orientation.

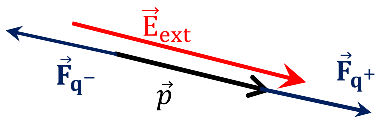
Le dipôle $(\vec{p})$ est soumis à l'action d'un champ uniforme extérieur $(\vec{E}_{ext})$. L'énergie potentielle de ce dipôle dépend de son orientation (α) par rapport à celle du champ.

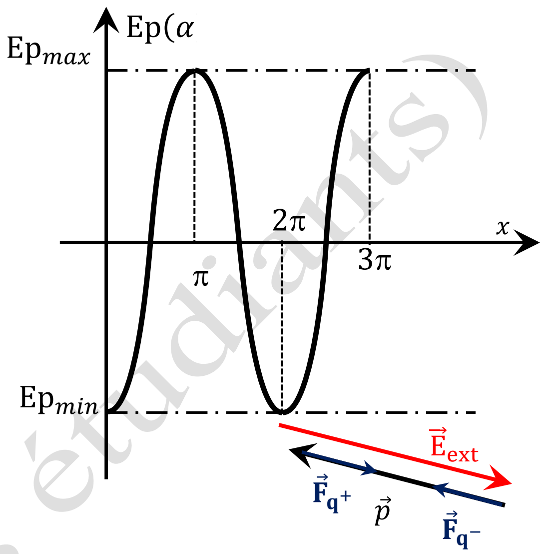
Les deux forces électriques $(\vec{F}_{q^+}; \vec{F}_{q^-})$ qui s'appliquent sur les charges du dipôle changent son orientation, et son énergie potentielle est :

$$Ep(\alpha) = -\ |\vec{p}|\ \times |\vec{E}_{ext}| \times \cos(\alpha),$$

De la courbe Ep (α), on déduit que l'énergie potentielle d'un dipôle soumis à l'action d'un champ extérieur est comprise entre une valeur maximale obtenue lorsque l'angle (**α = π**) et une valeur minimale lorsque l'angle (**α = 0**).

a- La valeur minimale de l'énergie potentielle (Ep_{min}) du dipôle est obtenue pour l'angle ($\alpha = 0$)**.** Le moment dipolaire aurait la même direction et le même sens que le champ extérieur, les deux forces, $(\vec{F}_{q^+})$ et $(\vec{F}_{q^-})$ équilibrent le moment dipolaire.





La valeur de cette énergie potentielle minimale, est :

$Ep_{min} = -|\vec{p}| \times |\vec{E}_{ext}|$. **<u>Cet état d'équilibre est stable.</u>**

b- La valeur maximale de l'énergie potentielle (Ep_{min}) du dipôle est obtenue pour l'angle ($\alpha = \pi$)**.** Le moment dipolaire aurait la même direction que le champ extérieur, mais son sens sera opposé à celui du champ. Les deux forces, $(\vec{F}_{q^+})$ et $(\vec{F}_{q^-})$ équilibrent aussi le moment dipolaire, mais une petite impulsion change l'orientation de ($\vec{p}$).

La valeur de cette énergie potentielle est maximale, elle est donnée par :

$Ep = +|\vec{p}| \times |\vec{E}_{ext}|$. **<u>Cet état d'équilibre est instable.</u>**

3- Application :

a- <u>Calcul de l'énergie potentielle du dipôle dans cette position.</u>

L'expression de l'énergie potentielle est : $Ep = -|\vec{p}| \times |\vec{E}_{ext}| \times \cos(\alpha)$.

Calculons séparément la valeur du moment dipolaire ($\vec{p}$), celle du champ extérieur ainsi que l'angle (α).

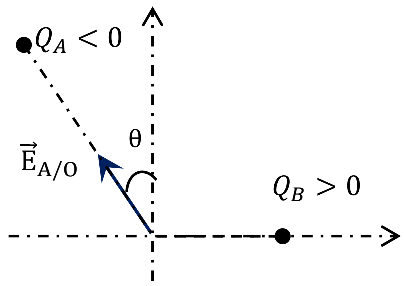
i. Calcul de l'intensité du moment dipolaire $|\vec{p}|$: $|\vec{p}| = q \times d$.

$$|\vec{p}| = 1.10^{-12} \times 2.10^{-2} \rightarrow |\vec{p}| = 2.10^{-14}(V.m)$$

ii. Calcul du champ électrique extérieur $(\vec{E}_{ext})$ résultant généré par les deux charges (Q_A) et (Q_B) au point (O) milieu du dipôle électrique.

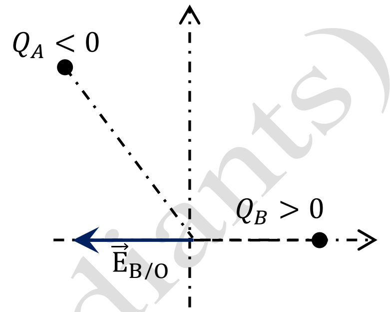
$$\vec{E}_O = \vec{E}_{A/O} + \vec{E}_{B/O}$$

- Le champ généré par la charge (Q_A) au point (O) est : $\vec{E}_{A/O} = K\frac{Q_A}{AO^2}\vec{u}_1$, son intensité est :
  $\left|\vec{E}_{A/O}\right| = 1{,}2\ 10^6 (V/m)$; il est rentrant.



- Le champ produit par la charge (Q_B) au point (O) est :

  $\vec{E}_{B/O} = K\frac{Q_B}{BO^2}\vec{u}_2$. Son intensité est :
  $\left|\vec{E}_{B/O}\right| = 1{,}2\ 10^6 (V/m)$, il est sortant.

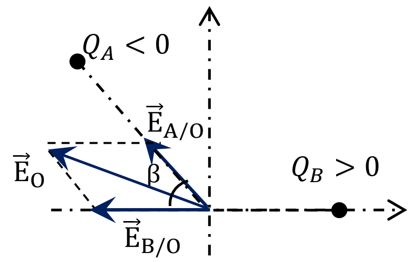


- L'intensité du champ résultant $\left(\left|\vec{E}_O\right|\right)$généré par les deux charges au point (O) est :

$$\left|\vec{E}_O\right| = \sqrt{\left|\vec{E}_{A/O}\right|^2 + \left|\vec{E}_{B/O}\right|^2 + 2 \times \left|\vec{E}_{A/O}\right| \times \left|\vec{E}_{B/O}\right| \times \cos(\beta)}$$

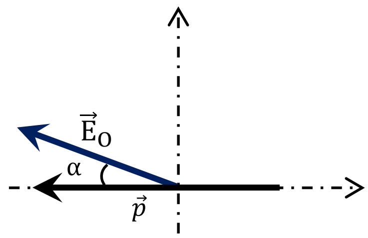
La valeur de l'angle (β) formé entre les deux vecteurs champs $\left(\vec{E}_{A/O}\right)$ et $\left(\vec{E}_{B/O}\right)$ vaut :

$\beta = 90° - \theta = 60°$. $\rightarrow \left|\vec{E}_O\right| = 1{,}2 \times \sqrt{3}\ 10^6 (V/m)$



iii. Calcul de l'angle (α) formé par l'orientation du dipôle $(\vec{p})$ et celle du champ extérieur $\left(\vec{E}_O\right)$:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = 30°$$



Ce qui donne comme valeur de l'énergie potentielle :

$$Ep = -2.10^{-14} \times 1.2\sqrt{3}\ 10^6 \times \cos(30°)$$

$$\rightarrow Ep = -3.6\ 10^{-8}\ (j).$$

b- <u>Les valeurs limites de l'énergie potentielle</u> :

- La première valeur est minimale lorsque l'angle $(\alpha = 0)$. $Ep_{min} = -2.10^{-14} \times 1.2\sqrt{3}\ 10^6$
  $\rightarrow Ep_{min} = -2.4\sqrt{3}\ 10^{-8}(j)$
- La deuxième valeur est maximale lorsque l'angle $(\alpha = \pi)$:
  $Ep_{max} = +2.4\sqrt{3}\ 10^{-8}(j)$

c- <u>Le travail des forces électriques :</u>

Le travail est déduit de la variation de l'énergie potentielle par : $W_{départ \rightarrow arrivée} = -\Delta Ep$

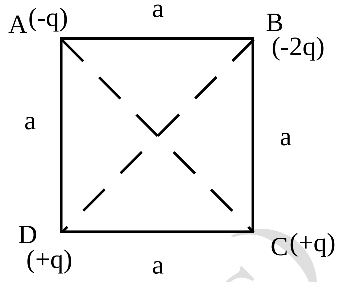
$$W_{\alpha=30\rightarrow\alpha=0} = Ep_{\alpha=30} - Ep_{\alpha=0}.$$

$$W_{\alpha=30\rightarrow\alpha=0} = (-3.6\ 10^{-8}) - \left(-2.4\sqrt{3}\ 10^{-8}\right) \rightarrow W_{\alpha=30\rightarrow\alpha=0} = 0.57\ 10^{-8}(j)$$

Exercice 4 :

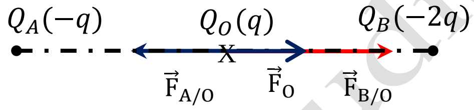
Une charge ponctuelle q est placée au milieu du segment AB. [$q = 10^{-9}$ C, a = 4 cm]

1- Déterminer la force qui s'exerce sur la charge q. Quelle énergie potentielle possède cette charge ?
2- On place maintenant deux charges aux points C et D de telle sorte qu'est formé un carré (comme indiqué par la figure ci-dessous). Déterminer les composantes du champ électrique dans un repère orthonormé placé au centre du carré. En déduire le champ résultant.
3- Quelle serait l'énergie potentielle d'un dipôle [$q = 10^{-10}$ C ; $d = 10^{-10}$ m] placé horizontalement au centre du carré ?
4- Quel est le travail qu'il faut fournir pour tourner le dipôle de sa position d'équilibre stable à sa position d'équilibre instable ?



Réponse exercice 4 :

1. a**- La force qui s'exerce la charge Q_O.**



$$\vec{F}_O = \vec{F}_{A/O} + \vec{F}_{B/O}$$

- La force $\vec{F}_{A/O}$: $\vec{F}_{A/O} = K \times \frac{Q_A \times Q_O}{AO^2}\overrightarrow{u_1}$, (**attractives** car $Q_A<0$, $Q_O>0$). $\left|\vec{F}_{A/O}\right| = 2{,}25\ 10^{-5}(N)$
- La force : $\vec{F}_{B/O} = K \times \frac{Q_B \times Q_O}{BO^2}\overrightarrow{u_2}$, (**attractives** car $Q_B<0$, $Q_O>0$). $\left|\vec{F}_{B/O}\right| = 4{,}5\ 10^{-5}(N)$

L'intensité de la force résultante est de : $\left|\vec{F}_O\right| = \left|\vec{F}_{B/O}\right| - \left|\vec{F}_{\frac{A}{O}}\right| = 2{,}25\ 10^{-5}$ (N)

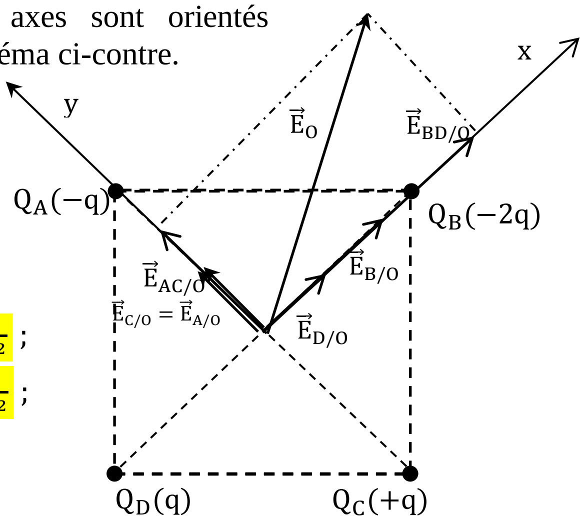
b**- L'énergie potentielle de la charge Q_O :**

$$Ep_O = Ep_{A/O} + Ep_{B/O} = Q_O \times \left(V_{A/O} + V_{B/O}\right) = q \times \left(k\frac{-q}{a/2} + \frac{-2q}{a/2}\right) = -6\frac{kq^2}{a} = -1.35\ 10^{-6}(j)$$

2. a**- Les composantes du champ électrique au centre du carré**.

Le repère choisit est orthonormé de centre (O), les axes sont orientés respectivement selon la droite (OB) et la droite (OA) voir le schéma ci-contre.

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{O_x} + \vec{E}_{O_y}$$



Les distances sont toutes égales à :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = \frac{a^2}{2}$$

Avec : $\vec{E}_{O_x} = \vec{E}_{B/O} + \vec{E}_{D/O} \rightarrow \left|\vec{E}_{O_x}\right| = 3 \times \left|\vec{E}_{B/O}\right| = 6 \times K \times \frac{q}{a^2}$;

Et $\vec{E}_{O_y} = \vec{E}_{A/O} + \vec{E}_{C/O} \rightarrow \left|\vec{E}_{O_y}\right| = 2 \times \left|\vec{E}_{A/O}\right| = 4 \times K \times \frac{q}{a^2}$;

Les différentes expressions des quatre champs sont données par :

- Le champ, $\vec{E}_{A/O} = K \times \frac{Q_A}{AO^2}\vec{u}_1$, d'intensité : $\left|\vec{E}_{A/O}\right| = K \times \frac{2\times q}{a^2}$, (**rentrant**).
- Le champ, $\vec{E}_{B/O} = K \times \frac{Q_B}{BO^2}\vec{u}_2$, d'intensité :$\left|\vec{E}_{B/O}\right| = K \times \frac{4\times q}{a^2}$, **(rentrant).**
- Le champ, $\vec{E}_{C/O} = K \times \frac{Q_C}{CO^2}\vec{u}_3$, d'intensité : $\left|\vec{E}_{C/O}\right| = K \times \frac{2\times q}{a^2}$, **(rentrant).**
- Le champ, $\vec{E}_{D/O} = K \times \frac{Q_D}{DO^2}\vec{u}_4$, d'intensité : $\left|\vec{E}_{D/O}\right| = K \times \frac{2\times q}{a^2}$, (**sortant**).

Les champs produits par les charges Q_A et Q_C au point 'O', **<u>ont la même direction, le même sens et le même module</u>**.

L'intensité résultante : $\left|\vec{E}_{AC/O}\right| = \vec{E}_{O_y} = 2 \times \left|\vec{E}_{A/O}\right| = 2 \times K \times \frac{2\times q}{a^2} = 4 \times K \times \frac{q}{a^2}$

Les champs produits par les charges Q_B et Q_D au point 'O', **ont la même direction, le même sens**.

L'intensité résultante : $\left|\vec{E}_{BD/O}\right| = \vec{E}_{O_x} = 3 \times \left|\vec{E}_{A/O}\right| = 3 \times K \times \frac{2\times q}{a^2} = 6 \times K \times \frac{q}{a^2}$

b- Le champ résultant généré par les quatre charges au point 'O' est :

L'intensité de ce champ résultant au centre du carré est :

$$\boxed{\left|\vec{E}_O\right| = \sqrt{\left(4 \times k\frac{q}{a^2}\right)^2 + \left(6 \times k\frac{q}{a^2}\right)^2} = \sqrt{52} \times K \times \frac{q}{a^2} = 4{,}05\ 10^4 (V/m)}.$$

3. **<u>L'énergie potentielle d'un dipôle placé au centre du carré.</u>**

$$Ep = -\left|\vec{p}\right| \times \left|\vec{E}_{ext}\right| \times \cos(\propto)$$

a- Calcul de $\left|\vec{p}\right| = 1\ 10^{-20} (C.m)$

b- Le champ au point 'O' est calculé précédemment :

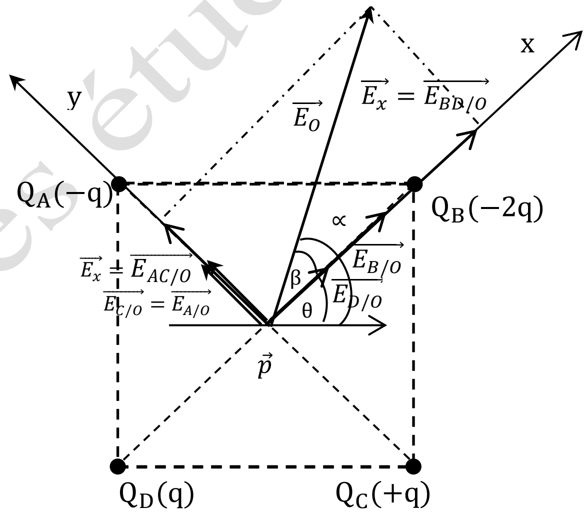
$$\left|\vec{E}_O\right| = \left|\vec{E}_{ext}\right| = 4{,}05\ 10^4 (V/m).$$

c- L'angle '∝' est calculé par :

$$\propto = \beta + \theta$$

Avec θ= 45°, et l'angle β est calculé à partir de la tangente.

$$\tan(\beta) = \frac{\left|\vec{E}_y\right|}{\left|\vec{E}_x\right|} = \frac{4 \times k\frac{q}{a^2}}{6 \times k\frac{q}{a^2}} = \frac{4}{6} \rightarrow \beta = 33{,}69°$$



$$Ep(\propto) = -1.10^{-20} \times 4.05\ 10^4 \times \cos(45 + 33.69) = -7.95\ 10^{-17} (j)$$

4. Le travail des forces électrostatiques.

$$W_{\propto=0\rightarrow\propto=\pi} = Ep_{\propto=0} - Ep_{\propto=\pi}$$

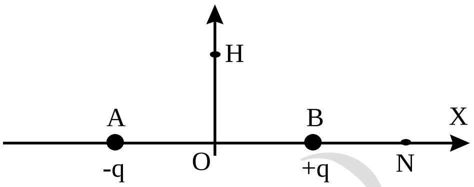
$$Ep_{\propto=0} = -1\ 10^{-20} \times 4{,}05\ 10^4 = -4{,}05\ 10^{-16} (j)$$
$$Ep_{\propto=\pi} = +1\ 10^{-20} \times 4{,}05\ 10^4 = +4{,}05\ 10^{-16} (j)$$
$$W_{\propto=0\rightarrow\propto=\pi} = -4{,}05\ 10^{-16} - 4{,}05\ 10^{-16} = -8{,}1\ 10^{-16} (j)$$

Exercice 5 :

Soit un dipôle AB constitué d'un ensemble de deux charges ponctuelles (-q) en A et (+q) en B. La distance séparant les deux charges est d. Celle-ci est très petite par rapport à la distance r, du centre du dipôle au point M, où l'on désire calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ généré par le dipôle AB.

1- Déterminer l'expression du potentiel V_M au point M.
2- En déduire l'expression en coordonnées polaires du champ électrostatique $\vec{E}$ au point M.
3- Établir l'expression du champ $\vec{E}$ en un point N situé sur l'axe X du dipôle, à une distance x de B.
4- Calculer le potentiel V_N au point N.
5- Établir l'expression du champ $\vec{E}$ en un point H situé sur la médiatrice de AB, à une distance y de O (milieu de [AB]).
6- Calculer le potentiel V_H au point H.

1-



Réponse exercice 5 :

1- Expression du potentiel au point (M) :

Soit un dipôle électrique placé dans un espace le (vide), déterminons l'expression du potentiel électrique créé par ce dipôle en tout point de ce milieu extérieur, (voir le schéma).

Le potentiel électrique résultant généré par ces deux charges (q_A)et (q_B) est donné par l'expression suivante :

$$V_M = V_{A/M} + V_{B/M},\ avec \begin{cases} V_{A/M} = K \times \frac{q_A}{r_1} \\ V_{B/M} = K \times \frac{q_B}{r_2} \end{cases} \rightarrow V_M = K \times \frac{-q}{r_1} + K \times \frac{q}{r_2} \dots\ \acute{e}quation\ (1)$$

L'équation (1) peut être écrite sous forme :

$$V_M = K \times q \times \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 \times r_2}\right)$$

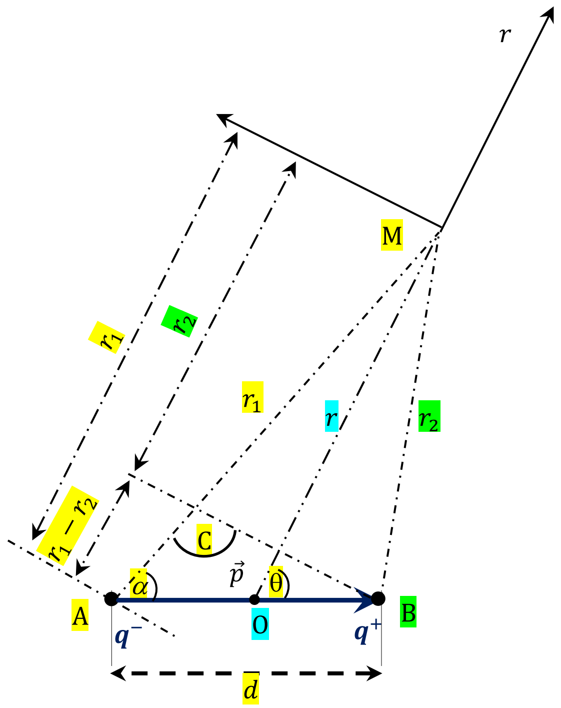
Déterminons l'expression du potentiel électrique en fonction de la distance $(\overline{OM} = r)$ qui représente la distance qui sépare le point (M) du centre du dipôle, ainsi que de l'angle (θ), angle formé par l'orientation du dipôle et l'axe $(\overline{OM} = r)$.

D'un côté, la distances (d), qui sépare les deux charges est très petite, les distances $(\overline{AM} = r_1)$ et $(\overline{BM} = r_2)$ sont très proche l'une de l'autre. Elles sont approximativement égales à la distance $(\overline{OM} = r)$, on peut écrire que $(r_1 \cong r_2 \cong r)$.

Le produit $(r_1 \times r_2)$ est de l'ordre de (r^2)

$(r_1 \times r_2 \cong r^2)$.

D'un autre côté, voir le schéma ci-contre, lorsque la distance (d) est très petite, l'angle $(\hat{C})$ tend vers la valeur limite de (90°), $(\hat{C} \cong 90°)$. Et dans le triangle (ABC) l'angle (α) se rapproche l'angle (θ), car les deux côtés $(\overline{AM})\ et\ (\overline{BM})$ sont approximativement parallèles entre eux.



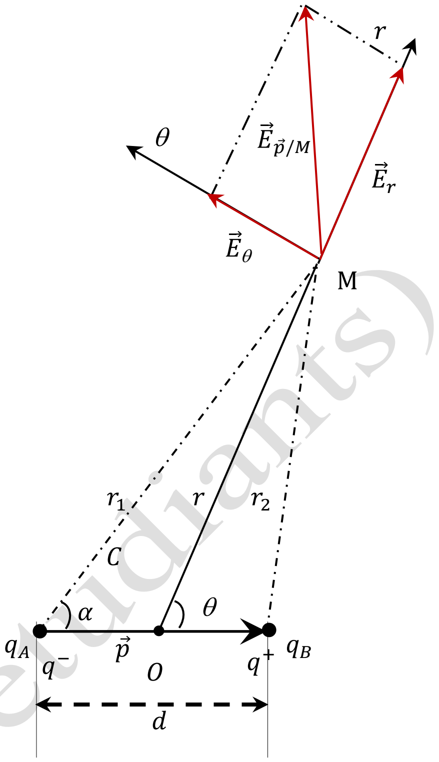
On peut donc écrire l'expression du cos (α) en fonction de ses cotés :

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.\ \text{Sachant que :} \begin{cases} \overline{AC} = r_1 - r_2 \\ et\ que \\ \overline{AB} = d \end{cases},\ \text{on déduit que :}\ r_1 - r_2 = \cos(\theta) \times d$$

Les deux approximations précédentes nous permettent d'écrire l'expression du potentiel électrique généré par un dipôle électrique en un point (M) de l'espace en fonction de la distance $(r = \overline{OM})$ et de l'angle (θ), elle sera donnée par :

$$V_M = K \times q \times \left(\frac{\cos(\theta) \times d}{r^2}\right) \rightarrow V_M = K \times \frac{|\vec{p}| \times \cos(\theta)}{r^2}$$

2- Expression en coordonnées polaires du champ électrique au point (M)



Le champ électrique $(\vec{E}_{\vec{p}/M})$ généré par le moment dipolaire possède deux composantes, voir le schéma ci-contre :

Pour déterminer ces composantes dans un repère polaire, on utilise :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,(\mathbf{V}).$$

- La composante sur l'axe (r) appelée composante radiale est notée $(\vec{E}_r)$.
- L'autre composante sur l'axe tangentiel (θ) est notée $(\vec{E}_\theta)$. voir le schéma ci-contre.

L'expression du champ électrique résultant généré par ce dipôle peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E}_{\frac{\vec{p}}{M}} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$$

$$avec: \begin{cases} \vec{E}_r = -\dfrac{d(V_{\vec{p}/M})}{d(r)} \rightarrow \vec{E}_r = 2 \times K \times |\vec{p}| \times \dfrac{\cos(\theta)}{r^3}\vec{u}_r \\ \vec{E}_\theta = -\dfrac{d(V_{\vec{p}/M})}{r \times d(\theta)} \rightarrow \vec{E}_\theta = K \times |\vec{p}| \times \dfrac{\sin(\theta)}{r^3}\vec{u}_\theta \end{cases}.$$

Connaissant les expressions des deux composantes, l'expression finale de l'intensité du champ en ce point (M), est :

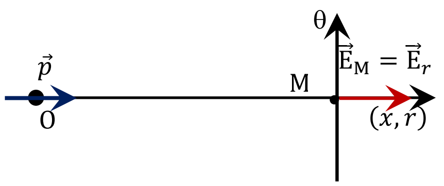
$$|\vec{E}_{\vec{p}/M}| = \sqrt{|\vec{E}_r|^2 + |\vec{E}_\theta|^2} \rightarrow |\vec{E}_{\vec{p}/M}| = \sqrt{\left(2 \times K \times |\vec{p}| \times \frac{\cos(\theta)}{r^3}\right)^2 + \left(K \times |\vec{p}| \times \frac{\sin(\theta)}{r^3}\right)^2}$$

$$|\vec{E}_{\vec{p}/M}| = K \times \frac{|\vec{p}|}{r^3} \times \sqrt{4 \times \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}$$

$$|\vec{E}_{\vec{p}/M}| = K \times \frac{|\vec{p}|}{r^3} \times \sqrt{3 \times \cos(\theta)^2 + 1}$$

3- Expression de champ et du potentiel électrique au point N :

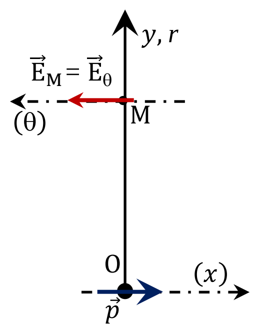
Si l'angle $(\theta = 0°)$, le point (N) se trouve sur l'axe (x) qui porte le vecteur $(\vec{p})$, voir le schéma, suivant.



$$\text{Si } \theta = 0° \rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = 1 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{\vec{p}/N} = K \times \frac{|\vec{p}|}{r^2} \\ |\vec{E}|_r = 2 \times K \times \frac{|\vec{p}|}{r^3} \rightarrow \vec{E}_{\vec{p}/N} = \vec{E}_r \\ |\vec{E}|_\theta = 0 \end{cases}$$

4- Expression de champ et du potentiel électrique au point H :

Si l'angle $(\theta = 90°)$ le point (H) se trouve sur l'axe (y) perpendiculaire à l'axe (x) qui porte le vecteur $(\vec{p})$, voir le schéma ci-contre.



$$\text{Si } \theta = 90° \rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = 0 \\ \sin(\theta) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_{\vec{p}/H} = 0 \\ |\vec{E}|_r = 0 \\ |\vec{E}|_\theta = K \times \frac{|\vec{p}|}{r^3} \rightarrow \vec{E}_{\vec{p}/H} = \vec{E}_\theta \end{cases}$$