Chapitre 4 : LOIS USUELLES

A. LOIS USUELLES DISCRETES

I. Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues possibles, l'une appelée succès(S) et de probabilité p, l'autre appelée échec(E) et de probabilité $q=1-p$.

$$\Omega = \{S, E\} \quad \text{on posera} \quad X = 1 \text{ si } S \quad \text{et} \quad X = 0 \text{ si } E$$

La loi de probabilité est alors appelée loi de Bernoulli de paramètre p. $(0 < p < 1)$

C'est la loi discrète basique et fondamentale que l'on rencontre tout le temps.

1. Définition

Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p si et seulement si elle ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1, ie $\mathcal{X} = \{0,1\}$

$P(X=1) = P(S) = p$ et $P(X=0) = P(E) = 1-p = q$ soit

x_i	0	1	$\sum$
p_i	$1-p$	p	1

On note traditionnellement : $X \rightarrow \mathcal{B}(p)$

Exemple :

On lance un dé cubique équilibré. On s'intéresse à l'événement : « obtenir un six » qu'on considérera comme succès (S). On pose $X = 1$ si S et $X = 0$ si E alors $X \rightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p = P(S) = 1/6$

2. Espérance et variance

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$ et $V(X) = pq = p(1-p)$.

On a $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = p$ $\qquad V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

x_i	0	1	$\sum$
p_i	$1-p$	p	1
$x_i p_i$	0	p	$P = E(X)$
$x_i^2 p_i$	0	p	$P = E(X^2)$

<u>Exemple précédent</u> : $E(X) = p = 1/6$ et $V(X) = pq = 1/6\,(1 - 1/6) = 5/36$.

II - Loi binomiale

1. Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes : donc la probabilité de succès reste inchangée).

2. Loi binomiale

a) modélisation

On considère un schéma de Bernoulli constitué de *n* épreuves **indépendantes**, et on note *X* la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus à la suite de la réalisation des *n* épreuves.

La loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est appelée loi binomiale de paramètres *n et p,* et elle est notée $\mathcal{B}(n, p)$ et donnée

i) son support $\chi = \{0, 1, 2, ..., n\}$

ii) $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall\ k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

En effet, on a

$P(X=k) = P$(avoir *k* succès sur *n* essais) = P(avoir *k* succès et $(n-k)$ Echecs) .

Chaque liste formée de *k* succès, et donc *de* $n - k$ échecs, a pour probabilité : $p^k(1 - p)^{n-k}$. car les événements S et E sont indépendants.

Il y a $P_n(k, n-k) = C_n^k$ façons différentes de choisir la position des k succès (et donc des (n-k) échecs alors

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall\ k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

b) Définition

X est une variable aléatoire binomiale de paramètres et $n \in N^*$ et p $(0 < p < 1)$ si et seulement si elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\chi = \{0, 1, 2, ..., n\}$

et $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall\ k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

On écrit traditionnellement : $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$

c) Exemple:

On lance un dé équilibré 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement *S* : "obtenir un six" est réalisé

Déterminer la loi de probabilité de *X*.

Solution

Soit *X* la v.a représentant le nombre de fois où on a obtenu un six après avoir jeté un dé 3 fois.

Soit ξ l'expérience aléatoire qui consiste à jeter le dé la première fois $\Omega = \{S, E\}$

S : "obtenir un six" et E : "ne pas obtenir un six"

ξ est une épreuve de Bernoulli , on répète cette expérience 3 fois de façon indépendante

Alors X qui représente le nombre de succès (S) obtenus est de loi binomiale

$X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 3$ et $p = P(S) = 1/6$

$$\Leftrightarrow P(X = k) = C_3^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-k} \quad \forall\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

d) proposition

Soit $(X_i)_{i=1,..,n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même de loi de Bernoulli de paramètre p. On montre que la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$

e) Espérance et variance

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq = np(1 - p)$.

Démonstration

si $Xi \rightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $E(Xi) = p$ *et* $V(Xi) = pq \ \forall\ i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

de plus en utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance, et la proposition précédente,

on a $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$ car les v.a Xi sont indépendantes

Remarque :

- Lorsque les tirages sont avec remise, les tirages sont indépendants, mais lorsqu'il n'y a pas remise, les tirages sont dépendants.

- Cependant, lorsque la population de base est très grande, les résultats sont quasiment les mêmes que l'on considère les tirages avec remise ou sans.
- Dans la pratique dès que $\frac{n}{N} \leq 10\%$, alors on considère que la loi binomiale s'applique.

N étant la taille de la population et n de l'échantillon.

Exemple

Une urne contient 20 boules dont 12 noires, 8 blanches. On tire successivement et sans remise 2 boules. Soit X la v.a désignant le nombre de boules blanches obtenues.
Quelle est la loi de probabilité de X ?

Solution

Soit ξ l'expérience aléatoire qui consiste à tirer **une** boule alors $\Omega = \{S, E\}$

S : « la boule est blanche » et E : « la boule n'est pas blanche »

ξ est une épreuve de Bernoulli , on répète cette expérience 2 fois mais **pas de façon indépendante car les tirages se font sans remise**

Alors la v.a X qui représente le nombre de succès (S) obtenus n'est pas est de loi binomiale.
est donnée par

$\Leftrightarrow\ P(X = k) = \dfrac{C_8^k \times C_{12}^{2-k}}{C_{20}^2}\ \ \forall\ k \in \{0, 1, 2,\}$ appelée une loi hypergéométrique

Cependant on a N=20, n=2 alors $\dfrac{n}{N} \le 10\%$ donc cette loi hypergéométrique peut être approximée par une loi binomiale de paramètre n = 2 et $p = P(S)$ = 8/20 =0.4

III - Loi de Poisson

1. Définition

Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) si pour tout entier naturel k, sa loi de probabilité est donnée par

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \ge 0$$

On écrit traditionnellement : X $\to \mathcal{P}(\lambda)$

2. Domaine d'application

La loi de Poisson est souvent liée au temps.
ex : X= le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard pendant période de temps T

3. Espérance mathématique et variance

Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \Leftrightarrow$ ***E(X) = V(X)*** $= \lambda$

4. Propriétés

i) La moyenne est proportionnelle au temps.

Soit X le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard pendant période de temps T et Y le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard pendant période de temps T'

Supposons que $X \to \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \to \mathcal{P}(\lambda')$ alors $\dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\lambda'}{T'} \Leftrightarrow \lambda' = \lambda\dfrac{T'}{T}$

ii) Soit X et une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit Y et une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ' telles que X et Y soient indépendantes, alors la variable S = X+Y est de loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.

5. Exercice

Un standard téléphonique reçoit en moyenne 10 appels entre 9h et 10h

1. Calculer la probabilité que le nombre d'appels 9h et 10h soit de 3 ; supérieur à 3.
2. Calculer la probabilité que le nombre d'appels 11h 30 et 12h soit de 3 ; supérieur à 3.

Solution

1. Soit X le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard entre 9h et 10h (T=1h=60mn)

On sait que $X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \geq 0$ avec $\lambda = E(X) = 10$

Alors $P(X=k) = e^{-10}\dfrac{10^k}{k!} \quad \forall k \geq 0$ d'où $P(X=3) = e^{-10}\dfrac{10^3}{3!} = 7.57\ 10^{-3}$

et $P(X>3) = 1 - P(X\leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = k) = 1 - e^{-10}[\dfrac{10^0}{0!} + \dfrac{10^1}{1!} + \dfrac{10^2}{2!} + \dfrac{10^3}{3!}] = 0.99$

2. Soit Y le nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard entre 11h 30 et 12h (ici T'=30mn)

On sait que $Y \rightarrow \mathcal{P}(\lambda')$ tel que $\lambda' = \lambda\dfrac{T'}{T} = 10\dfrac{30}{60} = 5$ alors $P(Y=k) = e^{-5}\dfrac{5^k}{k!} \quad \forall k \geq 0$

Donc $P(Y=3) = e^{-5}\dfrac{5^3}{3!} = 0.14$

et $P(Y>3) = 1 - P(Y\leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = 0.735$

6. Relation de récurrence

Soit X une v.a.r qui suit une loi de Poisson de paramètre λ , on montre facilement que :

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} \qquad P(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1} P(X = k) \qquad \forall k \geq 0$$

Remarque

Cette méthode de calcul s'avérera très utile dans le test d'ajustement d'une distribution expérimentale à une distribution de Poisson à voir dans la $3^{ième}$ partie du programme

7. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

La loi de Poisson régit les phénomènes rares, elle apparaît comme la loi limite de la loi binomiale dans certaines conditions

Lorsque p est petit, n est grand et le produit $n \times p$ pas trop grand on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ à la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = n \times p$.

Dans la pratique, l'approximation se fait quand $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$ et $n \times p \leq 10$.

Exercice 16 de la série de TD

Dans une population donnée, une maladie rare se présente avec une probabilité p=0,01.

On extrait un échantillon de taille 100 et soit X le nombre d'individus présentant cette maladie.

1. Quelle est la loi de X ? Par quelle loi peut-on l'approximer ? Justifier

2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux personnes ayant cette maladie ?

Solution

Soit X le nombre d'individus présentant cette maladie parmi l'échantillon de taille 100

1. $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 100$ et $p = 0.01$

On a n = 100 > 50 , p = 0.01< 0.1 et $n \times p$ =1 < 10 alors on peut approximer cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p = 1$

$$X \rightarrow \mathcal{P}(1) \Leftrightarrow P(X = k) = e^{-1}\frac{1}{k!} \quad \forall k \geq 0$$

2. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - [e^{-1} + e^{-1}] = 0.26$

Exercice 5 de la série de TD

Une urne contient 10 boules dont 5 rouges, 3 blanches et 2 noires. On tire successivement et avec remise 2 boules. Soit X la v.a désignant le nombre de boules blanches obtenues.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Soit Y= -3X+2. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Solution

Soit X la v.a désignant le nombre de boules blanches obtenues.

1. Soit ξ l'expérience aléatoire qui consiste à tirer **une** boule alors $\Omega = \{S, E\}$

S : « la boule est blanche » et E : « la boule n'est pas blanche »

ξ est une épreuve de Bernoulli , on répète cette expérience 2 fois de façon indépendante car les tirage se font avec remise

Alors la v.a X qui représente le nombre de succès (S) obtenus est de loi binomiale

$$X \rightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ avec } n = 2 \text{ et } p = P(S) = 3/10 = 0.3$$

$$\Leftrightarrow P(X = k) = C_2^k\, 0.3^k (1-0.3)^{2-k} \quad \forall\, k \in \{0, 1, 2,\}$$

2. $E(X) = n \times p = 2 \times 0.3 = 0.6$ et $V(X) = n \times p \times q = n \times p \times (1-p) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$

3. E(Y) = E(-3X+2) = -3 E(X) +2 = 0.2 V(Y) = V(-3X+2) = $(-3)^2$ V(X) = 3.78

Exercice 12 de la série de TD

La probabilité qu'un individu présente une allergie à un certain sérum donné est p=0,3. On injecte le sérum à 5 individus.

1. Quelle est la loi de probabilité de la v.a nombre d'individus présentant une allergie ?
2. Quel est le nombre moyen d'individus allergiques ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au plus un individu présentant cette allergie ?

Solution

Soit X la v.a représentant le nombre d'individus présentant une allergie parmi les 5 individus auxquels on a injecté le sérum.

1. $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec n = 5 et $p = P(S) = 0.3$

$\Leftrightarrow \quad P(X = k) = C_5^k\, 0.3^k (1-0.3)^{5-k} \quad \forall\, k \in \{0, 1, 2, .., 5\}$ voir exercice précédent

1. $E(X) = n \times p = 5 \times 0.3 = 1.5$

2. $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = C_5^0 (0.3)^0 (1-0.3)^{5-0} + C_5^1 (0.3)^1 (1-0.3)^{5-1} = 0.6842$

Exercice 15 de la série

On a constaté qu'au service d'urgence d'un certain hôpital se présentaient en moyenne 3 malades chaque jour. Le nombre de patients se présentant chaque jour est supposé de distribution de Poisson. Lorsque 3 malades au plus se présentent, un médecin peut assurer seul leur prise en charge. Lorsqu'il y a au moins 4 malades, un second médecin est mobilisé.

A. La probabilité qu'aucun malade ne se présente de la journée est 0,1 environ (à 0,01 près)
B. La probabilité qu'au plus un malade se présente de la journée est 0,2 environ (à 0,01 près)
C. Le nombre moyen de médecins mobilisés pour cette consultation est1,35 environ
D. Le nombre moyen de médecins mobilisés pour cette consultation est1,65 environ
E. Le nombre moyen de médecins mobilisés pour cette consultation est1,92 environ

Solution B et C

A. X : Le nombre de patients se présentant chaque jour X $\rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 3$

$$\Leftrightarrow P(X = k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!} \quad \forall k \geq 0 \Rightarrow P(X=0) = e^{-3} = 0.05 \qquad \text{A fausse}$$

B. $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-3} + 3e^{-3} = 0.1991 = 0.2$ B vraie

C. N = nombre de médecins mobilisés, E(N)= ?
N prend la valeurs $n_1 = 1$ si $X \leq 3$ et la valeurs $n_2 = 2$ si $X \geq 4$

$$E(N) = \sum_{i=1}^{n} n_i P(N = n_i) = 1\, P(X \leq 3) + 2\, P(X \geq 4) = P(X \leq 3) + 2(1 - P(X \leq 3)) = 2 - P(X \leq 3)$$

$=2-0.6472=1.353 = 1.35$ C vraie

pour $\lambda = 1$, $P(X = k) = e^{-1}\frac{1}{k!} \quad \forall k \geq 0$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [\, P(X=0) + P(X=1)\,] = 1 - [\, e^{-1}(1+1)] = 0.26$