Übungsserie 8

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S8.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 30 Minuten):

Beweisen Sie, dass ausgehend von der Trapezregel für ein Intervall $[a, b]$

$$Tf = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)$$

a) die summierte Trapezregel in der Form gilt

$$Tf(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

wenn eine tabellierte, nicht äquidistante Wertetabelle $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ vorliegt mit $x_0 = a$, $x_n = b$ und $y_i = f(x_i)$.

b) die summierte Trapezregel in der Form gilt

$$Tf(h) = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right),$$

wenn das Intervall $[a, b]$ aufgespalten wird in n äquidistante Subintervalle, wobei $x_i = a + ih$ und $h = (b - a)/n$ und $i = 0, ..., n$ (also $x_0 = a$ und $x_n = b$)

Aufgabe 2 (ca. 50 Min.):

Ein Teilchen der Masse m, das sich durch eine Flüssigkeit bewegt, wird durch den Widerstand R der Flüssigkeit abgebremst. Der Widerstand ist dabei eine Funktion der Geschwindigkeit, $R = R(v)$, d.h. je grösser die Geschwindigkeit, desto grösser ist der Widerstand und umgekehrt. Die Beziehung zwischen dem Widerstand R und der Zeit t ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)} dv$$

Angenommen, es sei für eine spezielle Flüssigkeit $R(v) = -v\sqrt{v}$, wobei R in [N] (Newton) und v in [m/s] gegeben sind. Approximieren Sie für m =10 kg und $v(0)$ =20 m/s die Zeit, die das Teilchen benötigt, um seine Geschwindigkeit auf v =5 m/s zu verlangsamen. Führen Sie die Herleitung manuell durch (Zahlenwerte berechnen Sie natürlich z.B. mit Python).

(a) Verwenden Sie die summierte Rechtecksregel mit $n = 5$

(b) Verwenden Sie die summierte Trapezregel mit $n = 5$

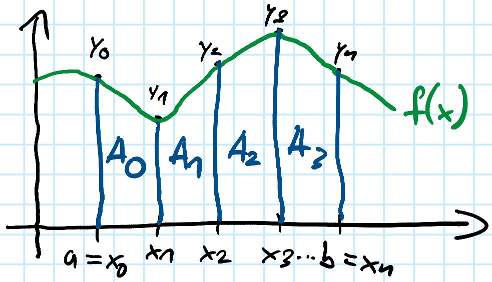
(c) Verwenden Sie die summierte Simpsonregel mit $n = 5$

Geben Sie für (a) - (c) immer auch an, wie gross der tatsächliche absolute Fehler der Näherung ist. Berechnen Sie dazu den exakten Wert des Integrals.

Lösung Serie08 A1 & A2

Montag, 19. April 2021 11:21

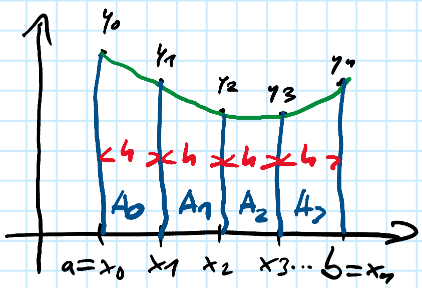
1) a)



$$Tf = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a)$$

$$Tf = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \underline{\underline{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)}}$$

b)



$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i \cdot h$$

$$\Rightarrow b = n \cdot h - a, \quad \Rightarrow a = x_i - i \cdot h$$

$$Tf = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a), \quad \text{für } n=1$$

$$n=2: \quad \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot h$$

$$n=3: \quad \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} \cdot h$$

$$= h \cdot \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{2} \right)$$

$\Leftrightarrow$ für n (beliebig):

$$h \cdot \left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$= \underline{\underline{h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right)}}$$

2a) $Rf(h) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$

$h = -3$

$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = f(20-1{,}5) + f(17-1{,}5) + f(14-1{,}5) + f(11-1{,}5) + f(8-1{,}5) = -1{,}46077$

$\underline{\underline{Rf(h) = 4{,}3823}}$

Fehlerabschätzung max. $= \underline{\underline{0{,}755}}$

Abs. Fehler $= \underline{\underline{0{,}0898}}$

2b) $Tf(h) = h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$

$h = -3$

$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{20} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = f(20) + f(17) + f(14) + f(11) + f(8) = \underline{-1{,}16142}$

$Tf(h) = \underline{\underline{3{,}4842 + 0{,}675 \cdot \sqrt{5}}}$

Fehlerabschätzung max. $= \underline{\underline{1{,}509}}$

Abs. Fehler $= \underline{\underline{-0{,}9879 + 0{,}675 \cdot \sqrt{5}}}$

2c) $Sf(h) = \frac{h}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \frac{f(b)}{2}\right)$

$Sf(h) = \underline{\underline{0{,}225 \cdot \sqrt{5} + 3{,}2579}}$

Fehlerabschätzung max. $= \underline{\underline{0{,}03566}}$

Abs. Fehler $= 1{,}21424 - 0{,}225\sqrt{5}$

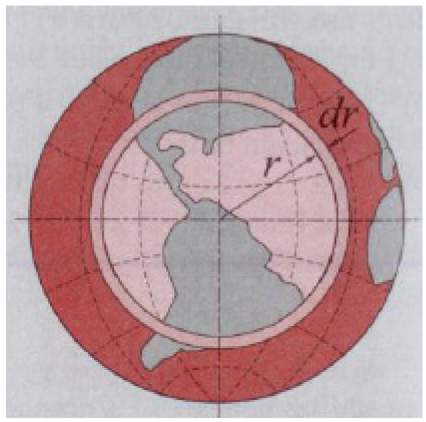
Aufgabe 3 (40 Minuten):.

Die Dichte ρ der Erde variiert mit dem Radius r gemäss der folgenden Tabelle, in der die Abstände in r nicht äquidistant sind (aus [9]):

r (km)	0	800	1200	1400	2000	3000	3400	3600	4000	5000	5500	6370
ρ $(\mathrm{kg/m^3})$	13000	12900	12700	12000	11650	10600	9900	5500	5300	4750	4500	3300

Berechnen Sie die Masse m der Erde mit folgendem Integral

$$m = \int_0^{6370} \rho \cdot 4\pi r^2 dr,$$



in dem sie die beiden folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Schreiben Sie zuerst eine Funktion `[Tf_neq] = Name_S8_Aufg3a(x,y)`, welche Ihnen für eine tabellierte, nicht äquidistante Wertetabelle $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ in den Vektoren `x` und `y` das entsprechende bestimmte Integral `Tf_neq` mittels der summierten Trapezregel für nicht äquidistante x-Werte löst gemäss Aufgabe 1b):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx Tf_{neq} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

b) Schreiben Sie ein Skript `Name_S8_Aufg3b.m`, welches Ihnen mit Funktion aus a) die Erdmasse berechnet. Beachten sie dabei, dass r im km gegeben ist, ρ aber in $\mathrm{kg/m^3}$. Vergleichen Sie Ihr Resultat für die Erdmasse mit einem Refernzwert aus der Literatur. Berechnen Sie den absoluten und den relativen Fehler Ihrer Integration im Vergleich mit dem Literaturwert.