

## Übungsserie 6

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name\_S6.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

### Aufgabe 1 (40 Minuten):

[6\\_3\\_2\\_Lineare\\_Ausgleichsrechnung\\_mit\\_Normalgleichungssystem](#)

Die Dichte  $\rho$  von Wasser ist abhängig von der Temperatur  $T$ . Messungen ergeben

| $T_i$ [°C]     | 0     | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90    | 100   |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\rho_i$ [g/l] | 999.9 | 999.7 | 998.2 | 995.7 | 992.2 | 988.1 | 983.2 | 977.8 | 971.8 | 965.3 | 958.4 |

Erstellen Sie ein Skript *Name\_S06\_Aufg1.m*, welches Ihnen die folgenden Aufgaben löst:

a) Nähern Sie die Ausgleichsfunktion  $f(T) = aT^2 + bT + c$  an die obigen Daten optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate an. Lösen Sie dazu das Normalgleichungssystem

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

einmal ohne  $QR$ -Zerlegung und einmal mit. Stellen Sie die Datenpunkte zusammen mit dem berechneten  $f(T)$  in einer geeigneten Auflösung der  $x$ -Achse grafisch dar.

b) Vergleichen Sie die Konditionszahl der auftretenden Matrizen  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  bzw.  $\mathbf{R}$ . Was fällt Ihnen auf?

c) Benutzen Sie jetzt die Python Funktion `numpy.polyfit()` und berechnen Sie die Koeffizienten  $a, b, c$  damit nochmals. Plotten Sie diese Lösung in die gleiche Grafik

d) Berechnen Sie die Fehlerfunktionale für Ihre Lösungen aus a) und c). Gibt es Unterschiede?

### Aufgabe 2 (40 Minuten):

[6\\_3\\_2\\_Lineare\\_Ausgleichsrechnung\\_mit\\_Normalgleichungssystem](#)

Wenn Benzin in einen Tank gepumpt wird, werden Kohlenwasserstoff-Dämpfe aus dem Tank in die umgebende Atmosphäre gepresst. Die Masse  $m_{CH}$  der entwichenen Dämpfe hängt hauptsächlich von den folgenden vier Einflussgrößen ab:

- Anfangstemperatur  $T_{Tank}$  [F] im Tank,
- Temperatur des eingefüllten Benzins  $T_{Benzin}$  [F],
- Gasdruck  $p_{Tank}$  [psi] im Tank,
- Gasdruck des eingefüllten Benzins  $p_{Benzin}$  [psi].

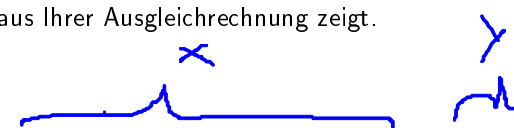
Unter kontrollierten Bedingungen wurden die vier Einflussgrößen in 32 Versuchen variiert und die Masse  $m_{CH}$  [g] der dabei entwichenen Kohlenwasserstoff-Dämpfe gemessen (siehe Datenset am Schluss der Aufgabenstellung). Für  $m_{CH}$  soll nachfolgend eine lineare Ausgleichsrechnung von der Form

$$m_{CH} = \lambda_1 \cdot T_{Tank} + \lambda_2 \cdot T_{Benzin} + \lambda_3 \cdot p_{Tank} + \lambda_4 \cdot p_{Benzin} + \lambda_5$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  sowie  $\lambda_5$  vorgenommen und untersucht werden. Erstellen Sie dazu ein Skript *Name\_S06\_Aufg2.m*:

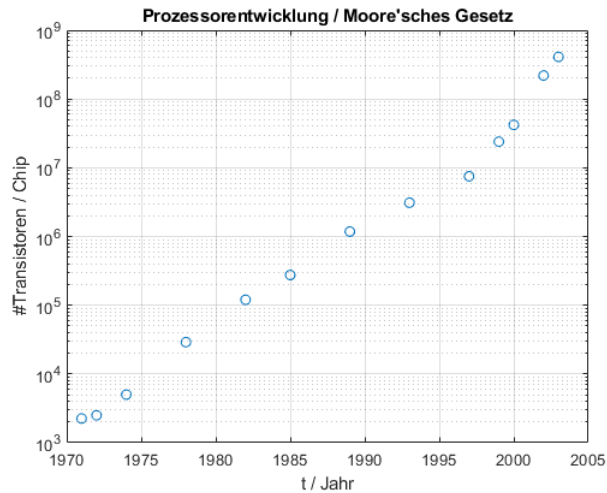
- a) Kopieren Sie das Datenset (am Schluss der Aufgabenstellung bzw. auf Moodle) und führen Sie mit Hilfe der Normalgleichungen die Ausgleichsrechnung durch. Erzeugen Sie eine Grafik, die Ihnen sowohl die Messpunkte für  $m_{CH}$  als auch den Fit aus Ihrer Ausgleichsrechnung zeigt.

Datenset:



| $T_{Tank}$ | $T_{Benzin}$ | $p_{Tank}$ | $p_{Benzin}$ | $m_{CH}$ |
|------------|--------------|------------|--------------|----------|
| 33.00      | 53.00        | 3.32       | 3.42         | 29.00    |
| 31.00      | 36.00        | 3.10       | 3.26         | 24.00    |
| 33.00      | 51.00        | 3.18       | 3.18         | 26.00    |
| 37.00      | 51.00        | 3.39       | 3.08         | 22.00    |
| 36.00      | 54.00        | 3.20       | 3.41         | 27.00    |
| 35.00      | 35.00        | 3.03       | 3.03         | 21.00    |
| 59.00      | 56.00        | 4.78       | 4.57         | 33.00    |
| 60.00      | 60.00        | 4.72       | 4.72         | 34.00    |
| 59.00      | 60.00        | 4.60       | 4.41         | 32.00    |
| 60.00      | 60.00        | 4.53       | 4.53         | 34.00    |
| 34.00      | 35.00        | 2.90       | 2.95         | 20.00    |
| 60.00      | 59.00        | 4.40       | 4.36         | 36.00    |
| 60.00      | 62.00        | 4.31       | 4.42         | 34.00    |
| 60.00      | 36.00        | 4.27       | 3.94         | 23.00    |
| 62.00      | 38.00        | 4.41       | 3.49         | 24.00    |
| 62.00      | 61.00        | 4.39       | 4.39         | 32.00    |
| 90.00      | 64.00        | 7.32       | 6.70         | 40.00    |
| 90.00      | 60.00        | 7.32       | 7.20         | 46.00    |
| 92.00      | 92.00        | 7.45       | 7.45         | 55.00    |
| 91.00      | 92.00        | 7.27       | 7.26         | 52.00    |
| 61.00      | 62.00        | 3.91       | 4.08         | 29.00    |
| 59.00      | 42.00        | 3.75       | 3.45         | 22.00    |
| 88.00      | 65.00        | 6.48       | 5.80         | 31.00    |
| 91.00      | 89.00        | 6.70       | 6.60         | 45.00    |
| 63.00      | 62.00        | 4.30       | 4.30         | 37.00    |
| 60.00      | 61.00        | 4.02       | 4.10         | 37.00    |
| 60.00      | 62.00        | 4.02       | 3.89         | 33.00    |
| 59.00      | 62.00        | 3.98       | 4.02         | 27.00    |
| 59.00      | 62.00        | 4.39       | 4.53         | 34.00    |
| 37.00      | 35.00        | 2.75       | 2.64         | 19.00    |
| 35.00      | 35.00        | 2.59       | 2.59         | 16.00    |
| 37.00      | 37.00        | 2.73       | 2.59         | 22.00    |

Aufgabe 3 (40 Minuten):



Die Graphik zeigt die Entwicklung der Anzahl Transistoren einer Auswahl von 13 Prozessorchips im Jahr ihrer Einführung in halblogarithmischer Darstellung. Die entsprechenden Daten finden Sie in der Tabelle resp. auf Moodle.

| Jahr | Anzahl Transistoren |
|------|---------------------|
| 1971 | 2250                |
| 1972 | 2500                |
| 1974 | 5000                |
| 1978 | 29000               |
| 1982 | 120000              |
| 1985 | 275000              |
| 1989 | 1180000             |
| 1993 | 3100000             |
| 1997 | 7500000             |
| 1999 | 24000000            |
| 2000 | 42000000            |
| 2002 | 220000000           |
| 2003 | 410000000           |

1. Fitten Sie die Daten mit dem Ansatz

$$\log_{10}(N) = \theta_1 + (t - 1970) \cdot \theta_2$$

Stellen Sie diesen Fit in einem halblogarithmischen Graphen zusammen mit den Daten dar. Hinweis: Der Logarithmus zur Basis 10 wird in Python mit der Funktion `numpy.log10()` berechnet.

2. Bestimmen Sie durch Extrapolation mit der Fitfunktion die Anzahl Transistoren im Z13 von IBM, welcher im Jahre 2015 erschienen ist (tatsächliche Zahl ca.  $4 \cdot 10^9$ ).
3. Interpretieren Sie die Größen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  und ziehen Sie einen Vergleich mit dem Moore'schen Gesetz: 'Die Anzahl Transistoren pro Chip verdoppelt sich alle 1.5 bis 2 Jahre'