

## Übungsserie 11

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name\_S11.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

### Aufgabe 1 (30 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `Name_S11_Aufg1(f, xmin, xmax, ymin, ymax, hx, hy)`, welche Ihnen das Richtungsfeld der DGL  $y'(x) = f(x, y(x))$  auf den Intervallen  $[x_{min}, x_{max}]$  und  $[y_{min}, y_{max}]$  plottet mit der Schrittweite  $h_x$  in  $x$ -Richtung und  $h_y$  in  $y$ -Richtung. Benutzen Sie dafür die Python-Funktionen `numpy.meshgrid()` und `numpy.quiver()`.

Gehen Sie dafür folgendermassen vor:

- (i) Mit `np.meshgrid()` erzeugen Sie zuerst die Koordinaten des Punkterasters in der  $xy$ -Ebene, z.B. `[X,Y] = np.meshgrid(0:0.1:5,0:0.1:3)`
- (ii) Mit Ihrer Funktion  $f(x, y)$  berechnen Sie anschliessend für jeden dieser Punkte die Steigung, z.B. `Ydiff=f(X,Y)`.
- (iii) Damit `np.quiver()` die entsprechenden Steigungsvektoren für jeden Punkt zeichnen kann, erwartet es für jeden Punkt in der  $(x, y)$ -Ebene neben den Koordinaten  $X$  und  $Y$  auch die  $x$ -Komponenten der jeweiligen Steigungsdreiecke und die entsprechenden  $y$ -Komponenten. Sie erhalten das gewünschte Resultat, wenn Sie für die  $y$ -Komponente des Steigungsdreiecks `Ydiff` übergeben und für die  $x$ -Komponente eine Matrix mit lauter Einsen.

### Aufgabe 2 (45 Minuten):

Betrachten Sie die folgende DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

auf dem Intervall  $0 \leq x \leq 1.4$  mit  $y(0) = 2$ . Lösen Sie die DGL manuell mit

- (a) dem Euler-Verfahren mit  $h = 0.7$ .
- (b) dem Mittelpunkt-Verfahren mit  $h = 0.7$ .
- (c) dem modifizierten Euler-Verfahren mit  $h = 0.7$ .

[8\\_5\\_DGL\\_mit\\_Euler\\_Mittelpunkt\\_und\\_mod-Euler](#)

Die exakte Lösung der DGL ist  $y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 4}$ . Berechnen Sie für (a) - (c) jeweils den absoluten Fehler  $|y(x_i) - y_i|$  für jedes  $x_i$ .

### Aufgabe 3 (45 Minuten):

Schreiben Sie eine Funktion `[x, y_euler, y_mittelpunkt, y_modeuler] = Name_S11_Aufg3(f, a, b, n, y0)`, welche Ihnen das Anfangswertproblem  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(a) = y_0$  auf dem Intervall  $[a, b]$  mit  $n$  Schritten berechnet, sowohl mit dem Euler-Verfahren als auch mit dem Mittelpunkt-Verfahren und dem modifizierten Euler-Verfahren. Die Resultate werden in die Vektoren `y_euler`, `y_mittelpunkt`, `y_modeuler` geschrieben, `x` enthält die entsprechenden  $x_i$ -Werte. Ausserdem soll eine Grafik des Richtungsfeldes erzeugt (benutzen Sie dafür ihre Funktion aus Aufgabe 1) und die drei Lösungen eingezeichnet werden. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate aus Aufgabe 2.