课程编号：MTH17005　　北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

2011 级《微积分 A》期末试卷(A)

班 级________________ 学 号_______________ 姓 名________________

(注：本试卷共 6 页，十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿。)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
评阅人												

一、填空（每小题 4 分，共 20 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=$_________；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt=$_______________.

2. 设 $y=x^2+\ln x$，则 $\dfrac{dx}{dy}=$_______________；设 f 可导，$y=f(\tan x)+\sqrt{1-x^2}$，

则 $dy=$______________________.

3. 广义积分 $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=$____________；定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2\arcsin x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$__________.

4. 微分方程 $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的通解为____；

以 $y_1=-\cos x,\ y_2=5\sin x$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程是__________.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{x} & x>0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x} & x<0\end{cases}$ 是连续函数，则 $a=$_________，$b=$_________.

二、（8 分）求不定积分 $\int\left(\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}\right)dx$

三、（8 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 及参数 $t=0$ 时的曲率。

四、（8 分）已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求证： $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$，并计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx.$

五、（8 分）求微分方程 $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + \cos x$ 的通解.

六、(8 分) 设当 $x \geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 满足微分方程 $xf'(x) - 3f(x) = -6x^2$，且由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = 1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为最小，求 $f(x)$ 的表达式及平面图形 D 的面积.

七、(8 分)设有一半径为 1 米的圆板，垂直放在水中，圆板的圆心与水平面距离为 2 米，试求圆板的一侧所受水的侧压力.(注：设水的比重为 μ)

八、(8 分) 设 $e<a<b<e^2$, 证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

九、（8 分）设 $\rho=\rho(\theta)$ 为非负函数，$\rho(0)=1$，且对任一 $\theta>0$，极坐标曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 在区间 $[0,\theta]$ 上所对应的一段弧长等于该区间所对应的曲边扇形面积的 2 倍，求此曲线的方程。

十、（8 分）设方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $y=y(x)$ 在 $x>0$ 范围内的极值，并判断是极大值还是极小值.

十一、(8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$，

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)dx = 0.$