

2014级《微积分A上》期末试卷(A)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(注: 本试卷共6页, 十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
评阅人												

一、填空 (每小题4分, 共28分)

(1) 已知 a, b 为常数, 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x-b)} \right)^x =$ _____

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{2n^2} + \cdots + \sqrt[3]{n \cdot n^2}) =$ _____

(3) 抛物线 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处的曲率是: _____

(4) 已知 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x^2 f(\ln x) dx =$ _____

(5) 曲线段 $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = \frac{3}{2}t^2 - 1 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$ 的弧长是: _____

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $\int_1^3 f(x-2) dx =$ _____

(7) 已知二阶常系数齐次线性微分方程的一个特解为 $y = xe^x$, 则该方程为: _____

二、(7分) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x + y = \arctan(x - y)$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{dy}{dx}$

三、(7分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2} + 3$ ，请列表给出:函数 $f(x)$ 的增减区间、凹凸区间、极值点以及图像的拐点；并给出函数 $f(x)$ 的所有渐近线.

四、(7分)求一组使得极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (\sqrt{1+t^4}-1)dt}{\ln(1-x^\alpha)} = \beta \neq 0$, (α, β 为实数)成立的 α, β 的值.

五、(7分) 求函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数 $F(x)$, 使得 $F(0) = 1$.

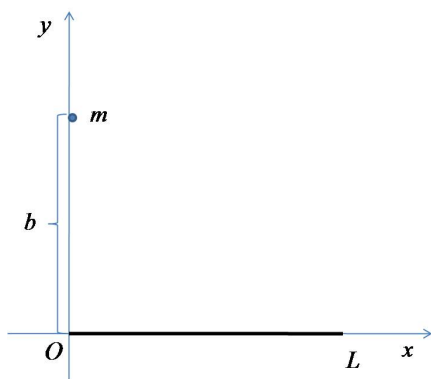
六、(7分) 计算定积分 $\int_0^\pi \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$.

七、(7分) 已知函数 $f(x)$ 连续, 请讨论 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ 的大小关系, 并计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\sqrt{\sin x}) - \ln(1+\sqrt{\cos x}) + \sin^3 x}{2} dx$.

八、(8分) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一阶连续导数, 且对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 满足 $x \int_0^1 f(tx) dt = 2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) + x^3$, 且 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$.

九、(8分) 求由平面曲线 $y = x \sin x$, $y = x$, $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 所围成图形的面积, 及此图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

十、(8分) 水平放置着一根长为 L ，密度为 ρ 的均匀细棒，在其左端的垂线上与棒相距 b 处有一质量为 m 的质点，求棒对质点的引力沿 x 轴方向的分力(设引力常数为 k).



十一、(6分) 证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.