2003--2004 级《微积分 A》（上）期末试题

解答和评分标准

一． 计算下列各题（每题 6 分，酌情给步骤分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x = e^{-2}$ ……………………………………………….(6分）

2. $y' = \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}} + \frac{\ln(1+x)}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{\ln(1+x)}{4x\sqrt{x}}$ ……………………………………………….(6分）

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{-4t^3}{te^t} = -4t^2e^{-t}$ ……………………………………(3分）

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(2t-t^2)e^{-t}}{te^t} = 4(t-2)e^{-2t}$ ……………..(6分）

4. $\int \ln(1+x^2) = x\ln(1+x^2) - \int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$ …………..(3分）

$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$ …………………(6分）

5. 分离变量，得 $\frac{dy}{y^2} = (2x+e^x)dx$……………………(2分）

两边积分，得 $-\frac{1}{y} = x^2 + e^x + C$ …………………(4分）

由 $y(0)=-1$, 得 $C=0$, 故 $y = \frac{-1}{x^2+e^x}$ …………(6分）

二、求解下列各题

1. $x<0$时, $f'(x)=(x-1)e^{-x}$;

$x>0$时, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ …………………………………(2分)

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	－	不存在	＋	0	－
y	↘		↗		↘

……………………(5 分)

$\therefore y=f(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$内单调递减,

在区间$(0,1)$内单调递增,

$f(0)=0$为极小值; $f(1)=e^{-1}$为极大值. . . . . (7分)

2. $f'(x)=-2x\ln(2-|x|)$ . . . . (3分)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{-2x\ln(2-|x|)}{2(x-1)}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}=1$$ . . . . (7分)

3. $$\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx$$

$$=-4\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}=8\sqrt{2}$$ . . . . (7分)

4. 令 $y'=p=p(x)$, 则原方程化为

(*) $$p'-\frac{2}{x}p=x^2$$ ....(2分)

对应齐次线性方程 $p'-\frac{2}{x}p=0$的通解为 $p=Cx^2$ ....(4分)

又方程(*)有特解 $p=x^3$, 故方程(*)的通解为

$$p=Cx^2+x^3$$ ....(6分)

由 $y'=Cx^2+x^3$ 得原方程的通解为

$$y=C_1x^3+C_2+\frac{x^4}{4}$$ ....(7分)

三．令 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$，则由微分中值定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)=f(\xi)\text{......................(4分)}$$

又 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$在$[0,1]$内严格单调递增，故

$$f(0)<f(\xi)=A<f(1)\quad\text{..(6分)}$$

四、证：令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，则 $f(0)=0$，

且当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时， $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2$ ....(4分）

$$>\cos x+\frac{1}{\cos x}-2\geq 0\quad\text{....... (6分）}$$

故 $f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内严格单调递增，

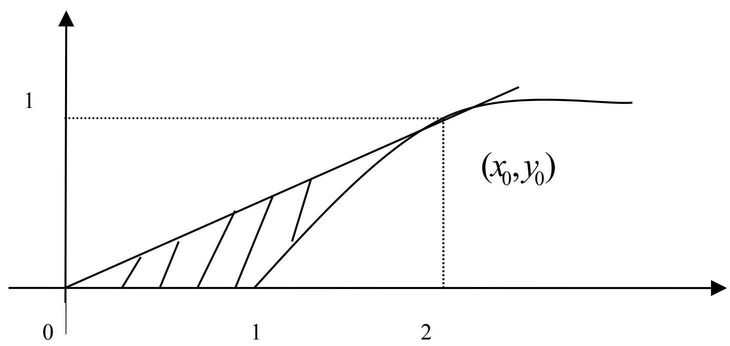
$\therefore x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时， $f(x)>f(0)$，即$\sin x+\tan x>2x$ ....(8分）

五、解 (1)切线L的方程为$y-y_0=\dfrac{x-x_0}{2\sqrt{x_0-1}}$，其中$y_0=\sqrt{x_0-1}$

由于L过（0，0）点，故得 $-2(x_0-1)=-x_0$，

$\therefore x_0=2,y_0=1$，切线L的方程为 $y=\dfrac{x}{2}$ ....(3分）

（2）$ds=\sqrt{1+y'(x)^2}dx=\sqrt{1+\dfrac{1}{4(x-1)}}dx=\sqrt{\dfrac{4x-3}{4(x-1)}}dx$ ....(5分）



(3) 平面图形D的面积

$$A=\int_0^1(y^2+1-2y)dy=\frac{1}{3}\text{...(8分）}$$

（或 $A=\int_0^2\frac{x}{2}dx-\int_1^2\sqrt{x-1}dx=\frac{1}{3}$ ）

(4) $$V_y=\pi\int_0^1[(y^2+1)^2-(2y)^2]dy$$

$$=\pi\int_0^1(y^4-2y^2+1)dy=\frac{8\pi}{15}\text{............................(12分）}$$

六、解法一：以水面上一点为原点，垂直向上建立x轴. 当物体Ω露出水面部分的高为$x(0\le x\le a)$时，Ω所受的重力与浮力的合力 $F(x)=a^3k\rho g-a^2(a-x)\rho g=a^2\rho g(ka-a+x)$

. . . . (5分）

故所需做功为

$$W=\int_0^a F(x)dx=a^2\rho g\int_0^a(ka-a+x)dx=a^4\rho g(k-\frac{1}{2})\text{ ....(8分）}$$

六、解法二：以水面上一点为原点，垂直向下建立x轴，则立方体Ω介于$x=0$和$x=a$之间，任取一小区间$[x,x+dx]\subset[0,a]$，把对应的小薄片物体提升a的位移过程可分为两部分：水中的位移x和水面以上的位移$a-x$，从而将这一薄片提升a所需的做功微元

$$dW=(k-1)a^2\rho gxdx+ka^2\rho g(a-x)dx$$

$$=a^2\rho g(ka-x)dx\text{..(5分）}$$

$$\therefore W=\int_0^a a^2\rho g(ka-x)dx=a^4\rho g(k-\frac{1}{2})\qquad\text{..................(8分）}$$

七、解：（1）做变换 $u=x-t$，则

$$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0(x-u)f(u)\cdot(-1)du$$

$$=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt\quad\text{..................(3分）}$$

（2）将（1）的结果带入原方程，等式两边关于x求导，得

$$f'(x)+4[\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)]=x^2$$

即 $f'(x)+4\int_0^x f(t)dt=x^2$

由原方程及上式可知 $f(0)=0,\ f'(0)=0$ ……………….(5分）

且 $f''(x)+4f(x)=2x,$

上述二阶微分方程的通解为

$$f(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{2},$$

将初值条件代入，得 $f(x)=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{2}$ …………………..(8分）