2004 级《微积分 A》第一学期期末试卷

参考答案及评分标准

一、1、$\int(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})dx$

$$=\int \arcsin x dx - \int x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\underline{x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}}+\underline{\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C}$$

3分分　　　　　　3

2、对应齐次方程的特征方程：$r^2+1=0$

特征根：$r=\pm i$

齐次方程的通解分 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ……………………………3

设非齐次方程的特解为: $\overline{y}=Ae^{2x}$

代入原方程得分 $A=\frac{1}{5}$ …………………………………………………………5

原方程的通解:分 $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{5}e^{2x}$ …………………………6

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t^2)dt}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+4x^2)}{3x^2}$$ ……………………………………………………4分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times 4x^2}{3x^2}=\frac{8}{3}$$ ………………………………………………………6分

4、$\ln(1+x)$ 的麦克劳林展式为：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\therefore \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)$$

$$f(x)=x^2\ln(1+x^2)=x^4-\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{3}+o(x^8)$$ ………………………………4分

由 Taylor 公式中系数的唯一性有，

$$a_8=\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{1}{3}\qquad \therefore f^{(8)}(0)=\frac{8!}{3}=13440$$ ……………………………6分

5、$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$　　切点分 $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$ ………………………2

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$ ……………………………………………5分

切线方程为 $y-e^{\frac{\pi}{2}}=-x$ ……………………………………………………6分

二、1、令 $\sqrt{x}=t,\quad x=t^2, dx=2tdt$ ……………………………………………………2分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}=\int_1^{+\infty}\frac{2t^2dt}{1+t^3}$$ ……………………………………………………4分

$$=\frac{2}{3}\ln(1+t^3)\Big|_1^{+\infty}$$ ……………………………………………6分

$$=+\infty$$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x\sqrt{x}}$ 发散. ……………………………………………………7分

2、只须 $f(x)$在$x=0$处可导即可。由可导与连续的关系知 $f(x)$在$x=0$处应连续。又 $f(0)=a+b, f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(ae^x+be^{-x})=a+b$

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1$$

$\therefore$ 有 $a+b=1$ ……………………………………………………………………3分

$$f_-'(0^-)=\lim_{x\to0^-}(ae^x+be^{-x})'=a-b$$

$$f_+'(0^+)=\lim_{x\to0^+}[\frac{1}{x}\ln(1+x)]'=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 有 $a-b=-\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………5分

结合得 $a+b=1,\quad a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$ ……………………………………………………6分

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^x-\frac{3}{4}e^{-x}, & x<0\\ -\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}, & x>0\end{cases}$$ ……………………………………7分

3、原方程为伯努利方程。令 $u=y^2, \frac{du}{dx}=2yy'$ ……………………………2分

原方程化为 $u'+4xu=2x$ ……………………………………………………3分

$$u=e^{-\int 4xdx}[\int 2xe^{\int 4xdx}dx+C]$$

$$=e^{-2x^2}[\frac{1}{2}e^{2x^2}+C]$$

$\therefore y^2=\frac{1}{2}+Ce^{-2x^2}$ ……………………………………………………5分

由 $y(0)=1$, 得 $C=\frac{1}{2}$

特解为 $y^2=\frac{1}{2}(1+e^{-2x^2})$ ……………………………………………7分

4、原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{i^2}{n^2}}}\bullet\frac{1}{n}$ ……………………………………………………4分

$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ……………………………………………………6分

$=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$ ……………………………………………………7分

三、等式两边直接积分，得

$\int f(x)F(x)dx=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ ……………………………………2分

$\frac{1}{2}F^2(x)=\arctan^2\sqrt{x}+C$ ……………………………………………4分

由 $F(1)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$, 得 $C=0$

$\therefore F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$ ……………………………………………………6分

$f(x)=F'(x)=\sqrt{2}\bullet\frac{1}{1+x}\bullet\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}$ ……………………………8分

四、解交点：

$(1)S=S_{D_1}+S_{D_2}=\int_0^a(ax-x^2)dx+\int_a^{\sqrt{2}}(x^2-ax)dx$

$=\frac{a^3}{3}-a+\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………………………4分

$\frac{dS}{da}=a^2-1$, 令 $\frac{dS}{da}=0$, 得唯一 $a=1\ (\because 0<a<\sqrt{2})$

又 $\frac{d^2S}{da^2}=2a$, $\frac{d^2S}{da^2}\Big|_{a=1}=2>1$ $\therefore a=1$ 时 S 取最小值

$S_{最小}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$ ……………………………………………………6分

$$(2)V_1=\pi\int_0^1((\sqrt{y})^2-y^2)dy=\frac{\pi}{6}\text{……………………………………………9分}$$

$$V_2=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(x^4-x^2)dx=\frac{2\pi(\sqrt{2}+1)}{15}\text{………………………………………12分}$$

五、证明：设 $F(x)=x\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}-2\sqrt{1+x^2}+2$

$$F(0)=0\text{…………………………………………………………1分}$$

又 $F'(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},F'(0)=0$ …………………………4分

$$F''(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}>0\text{…………………………………………………6分}$$

$\therefore$ 对 $\forall x>0,\quad F'(x)>F'(0)=0$

有 $F(x)>F(0)=0$

$$\therefore x\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}>2\sqrt{1+x^2}-2\text{…………………………………………8分}$$

[或利用积分中值定理知使得 $\xi\in(0,x)$,

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$\therefore F'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+\xi^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$,从而有 $F(x)>F(0)=0$]

六、由题意知：

$$\begin{cases}m\frac{dv}{dt}=-kv\\v(0)=5,v(4)=2.5\end{cases}\text{………………………………………………………3分}$$

解方程得 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$, 由 $v(0)=5$, 得 $C=5$

由 $v(4)=2.5$, 得 $\frac{k}{m}=\frac{\ln 2}{4}$

$$\therefore v(t)=5e^{-\frac{\ln 2}{4}t}\text{…………………………………………………………6分}$$

游艇滑行的最长距离:

$$S=\int_0^{+\infty}v(t)dt=\int_0^{+\infty}5e^{-\frac{\ln 2}{4}t}dt\text{………………………………………………7分}$$

$$=\frac{20}{\ln 2}\text{…………………………………………………………8分}$$

七、证明：对$\forall x\in(0,a)$，由柯西定理知$\exists \xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad(\because \frac{f'(x)}{g'(x)}\text{单增})\text{…………………2分}$$

又$g'(x)>0, g(0)=0\quad \therefore g(x)>0$ ……………………………………………4分

$$而[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}[\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}]>0$$

$\therefore \frac{f(x)}{g(x)}$在$(0,a)$内单调递增 ……………………………………………………6分