2011 级《微积分 A》第一学期期末试题

参考答案及评分标准（A 卷）

2012 年 1 月 13 日

一、 填空（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\frac{1}{2}$, e^2;

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2x^2+1}$, $dy=[f'(\tan x)\sec^2 x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}]dx$;

3. 1, $\frac{\pi}{3}$;

4. $y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$, $y''+y=0$;

5. $a=2$, $b=4$.

二、(8 分)令 $\sqrt{1+x}=t, x=t^2-1,\quad dx=2tdt$ ……………2 分

原式= $\int\frac{\sin x\cos xdx}{1+\sin^4 x}+\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x}+\int\frac{2tdt}{1+t}$ ……………4 分

$=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+2t-2\ln|1+t|+C$ ……………6 分

$=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+2\sqrt{1+x}-2\ln(1+\sqrt{1+x})+C$ …8 分

（注：两个积分各 4 分）

三、（8 分）$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(t-1)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(1+t^2)}{(t-1)^5}$. ……………….4 分

当$t=0$时。有$\frac{dy}{dx}=1$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2$ ……………….6 分

曲率：$k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ ………………..8 分

四、(8 分) 证明：做定积分换元，令$x=a+b-t,\quad dx=-dt$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=b\int_a^b f(a+b-t)dt)$$

$$=\int_a^b f(a+b-x)dx\,.$$ ……………4 分

对$a=\dfrac{\pi}{6},b=\dfrac{\pi}{3}$用前一部分结果，有

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx$$ ……………6 分

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x}{\pi-2x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\pi}\ln 2\,.$$ ……………8 分

五、(8 分) 特征方程：$r^2+r-2=0$

特征根：$r_1=-2,r_2=1$

对应齐次方程通解为：$Y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$ ………………..2 分

设非齐次方程 $y''+y'-2y=e^{-2x}$ (1) 的特解为：$y_1{}^*=Axe^{-2x}$

代入方程(1)，得 $A=-\dfrac{1}{3},\quad y_1{}^*=-\dfrac{1}{3}xe^{-2x}$ ………………..4 分

设非齐次方程 $y''+y'-2y=\cos x$ (2) 的特解为：

$y_2{}^*=B\cos x+C\sin x$

代入方程(2)，得 $B=-\dfrac{3}{10},C=\dfrac{1}{10}\quad y_2{}^*=-\dfrac{3}{10}\cos x+\dfrac{1}{10}\sin x$ ...6 分

由解的叠加原理知原非齐次方程的通解为：

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-\frac{1}{3}xe^{-2x}-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x.$$ **.......8 分**

六、(8 分) $f(0)=0$, 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 满足微分方程：

$f'(x)-\frac{3}{x}f(x)=-6x$ ，一阶线性非齐次方程。

$$f(x)=e^{\int\frac{3}{x}dx}[\int -6xe^{\int-\frac{3}{x}dx}dx+C]$$

$$=x^3(\frac{6}{x}+C)=6x^2+Cx^3$$ **...............2 分**

$$V=\int_0^1\pi(6x^2+Cx^3)^2dx$$

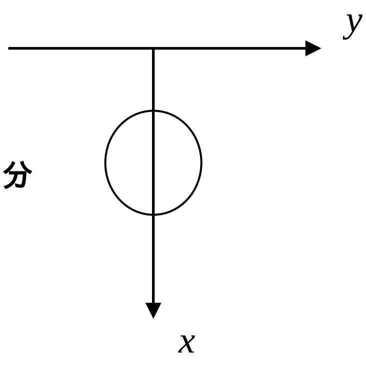
$$=\pi(\frac{36}{5}+2C+\frac{C^2}{7})$$ **...............4 分**

$\frac{dV}{dC}=\pi(2+\frac{2C}{7})$ ，令 $\frac{dV}{dC}=0$, 得唯一驻点 $C=-7$

又因为 $\frac{d^2V}{dC^2}=\frac{2\pi}{7}>0$ ，所以当 $C=-7$ 时，旋转体的体积最小，此时

$f(x)=6x^2-7x^3$ ，平面图形 D 的面积为： **...............6 分**

$$S=\int_0^1|6x^2-7x^3|dx=\frac{521}{1372}.$$ **...............8 分**



七、(8 分)建立如图所示坐标系

圆方程为: $(x-2)^2+y^2=1$ **...............2 分**

选 x 为积分变量， $x\in[1,3]$

考虑典型小区间 $[x,x+dx]$ ，

则压力微元为： $dp=\mu x\cdot 2|y|dx=2\mu x\sqrt{1-(x-2)^2}dx$ **......4 分**

$p=\int_1^3 2\mu x\sqrt{1-(x-2)^2}dx$ 　　令 $x-2=\sin t, x=2+\sin t, dx=\cos tdt$

$$=2\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin t)\cos^2 t dt$$ ……………6 分

$$=8\mu\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2\mu\pi.$$ ……………8 分

（注：本题也可取圆心为坐标原点建立坐标系

$$p=\int_{-1}^{1}2\mu(x+2)\sqrt{1-x^2}dx=2\mu\pi.$$）

八、(8 分)

设 $f(x)=\ln^2 x$,则$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，有

$$\ln^2 b-\ln^2 a=f'(\xi)(b-a)\quad (a<\xi<b)$$ ……………2 分

而 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ ，所以$\ln^2 b-\ln^2 a=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)\quad (a<\xi<b)$

……………4 分

令 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$,则$g'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}<0\quad (x>e)$ ……6 分

所以$g(x)$单调递减，又$\xi<b<e^2$,$\therefore\dfrac{2\ln\xi}{\xi}>\dfrac{2\ln e^2}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$

所以$\ln^2 b-\ln^2 a=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.证毕 ………8 分

（注：本题也可以构造辅助函数 $f(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$，然后利用单调性进行证明）

九、（8 分）由题意知：$\int_0^\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta=2\int_0^\theta\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$ ………..2 分

两边对θ求导，得 $\rho^2=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$

$$\rho'=\pm\rho\sqrt{\rho^2-1}$$ ……………4 分

分离变量：$\dfrac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}=\pm d\theta$

$\arcsin\dfrac{1}{\rho}=\mp\theta+C$ ，**由** $\rho(0)=1$, 得 $C=\dfrac{\pi}{2}$ ……………6 分

即 $\dfrac{1}{\rho}=\sin(\dfrac{\pi}{2}\pm\theta)=\cos\theta$ ，**即** $\rho\cos\theta=1$

即曲线的方程为：$x=1$ ……………8 分

十、(8 分)方程两边对 x 求导，得

$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0,$ (1)

$\Rightarrow y'=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$ ……………4 分

令 $y'=0$, 得 $y=x^2$ **,再代入原方程，得驻点**：$x=\sqrt[3]{2}$

此时，$y=\sqrt[3]{4}$ **,(1)式两端再求导，得** ……………6 分

$2x+2yy'^2+y^2y''-y'-y'-xy''=0$

$\Rightarrow y''=\dfrac{2x-2yy'^2-2y'}{x-y^2}$ ，$y''\big|_{\substack{x=\sqrt[3]{2}\\ y=\sqrt[3]{4}}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}}<0$

$\therefore x=\sqrt[3]{2}$ 时 y 取得极大值，极大值为：$y=\sqrt[3]{4}$ ……………8 分

十一、(8 分) 构造辅助函数：$F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$ ， ……………2 分

则 $F(0)=0,\quad F(1)=\int_0^1(1-t)f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt=0$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)$, 由罗尔定理，有至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0.$ ……………4 分

又 $F'(x)=[x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt]'_x$

$=\int_0^x f(t)dt$ ……………6 分

所以 $F'(\xi)=\int_0^{\xi} f(t)dt=0$ ……………**8 分**

（**或令** $F(x)=\int_0^x[\int_0^u f(t)dt]du$ ，然后应用罗尔定理）