课程编号：A073003　　北京理工大学 2009-2010 学年第一学期

线性代数(B)试题 A 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}A^*&0\\0&2B\end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^{-1}XA=2A+XA$，求 X。

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\ x_1+ax_2+x_3=a\\ x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$$

试讨论：当 a 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \ \alpha_2=(1,1,0),\ \ \alpha_3=(1,0,0),\ \ \alpha_4=(1,2,-3)$$

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间$\boldsymbol{R}^3$的一个基，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3$。

(1) 证明β_1,β_2,β_3为$\boldsymbol{R}^3$的一个基;

(2) 求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(3) 求向量$\gamma=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$关于基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的坐标。

六、（10分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是欧氏空间$V$的一个正交向量组，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

七、（10分）已知线性方程组$AX=0$的通解为$k_1(1,0,0)^T+k_2(2,1,0)^T$，其中$k_1,k_2$为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10分）已知A相似于对角矩阵$\mathrm{diag}(1,-1,0)$。

(1) 求A^2-I的所有特征值;

(2) 证明A^2-I为不可逆矩阵。

十、（10分）设n阶矩阵A满足$A^2=A$, $\mathrm{r}(A)=r \quad (0<r\le n)$。

(1) 试确定A的特征值的取值范围;

(2) 证明A一定可以相似对角化;

(3) 求行列式$|A-2I|$的值。