线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$满足: $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\mathbf{2}\boldsymbol{A}^{-1}+\mathbf{2}\boldsymbol{X}$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + 5x_2 - 5x_3 = \lambda \end{cases}$$

试讨论：当λ取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）已知线性空间$F[x]_4$的自然基为$1, x, x^2, x^3$。

(1) 证明：$x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$为$F[x]_4$的一个基；

(2) 求自然基$1, x, x^2, x^3$到基$x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$的过渡矩阵;

(3) 求$h(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3$在后一个基下的坐标。

四、(10 分)已知

$$\alpha_1=(1,-1,1,-1),\quad \alpha_2=(1,0,-1,0),\quad \alpha_3=(2,1,-2,-1),\quad \alpha_4=(-2,2,-1,1),$$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）设矩阵 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 6 & 1 & & & \\ & & 6 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 试写出 A 的初等因子;　　　(2) 求 A 的特征值。

六、（10 分）在 $\mathbf{R}^3$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ ： $\boldsymbol{\sigma}((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, 3x_1)$ 。

求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵。

七、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 的实矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值都为实数的充要条件为

$|\boldsymbol{A}| \le \left(\dfrac{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}}{2}\right)^2$（其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的迹，即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和）。

八、（10 分　已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$。

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）已知线性方程组 $A_{n\times n}X=b$ 对任何 b 的取值都有解的充要条件是 $A_{n\times n}$ 为可逆阵。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵，$\boldsymbol{\lambda_0}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{X_0}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\boldsymbol{\lambda_0}$ 的特征向量，证明：

(1) 秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda_0 I})=$ 秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda_0 I})^2$；

(2) 不存在 $\boldsymbol{Y}$，使得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda_0 I})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X_0}$；