课程编号: A073122

北京理工大学 2011-2012 学年第一学期



线性代数 A 试题 A 卷

班级 ______ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 ______

题号	_	11	111	四	五.	六	七	八	九	+	总分
得											
分											
签											
名											

一、
$$(10 分)$$
已知 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 满足: $A^*X = 2A^{-1} + 2X$,其中 A^* 是 A

的伴随矩阵, 求X。

信息与电子二学部学生会 学习部



二、(10分)对下面线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + 5x_2 - 5x_3 = \lambda \end{cases}$$

试讨论: 当**λ**取何值时,它有唯一解?无解?有无穷多解?并在有无穷多解时求其通解。 (用导出组的基础解系表示通解)



三、(10分)已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1,x,x^2,x^3$ 。

(1) 证明:
$$x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$$
 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基
$$1, x, x^2, x^3$$
 到基 $x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$ 的过渡矩阵;

(3) 求
$$h(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3$$
在后一个基下的坐标。





四、(10分)已知

$$\alpha_1 = (1, -1, 1, -1), \quad \alpha_2 = (1, 0, -1, 0), \quad \alpha_3 = (2, 1, -2, -1), \quad \alpha_4 = (-2, 2, -1, 1),$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。



五、(10 分) 设矩阵 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix}
-1 & & & \\
6 & 1 & & \\
6 & & & \\
7 & 7 & 1 & \\
9 & 7 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

(1) 试写出A的初等因子;

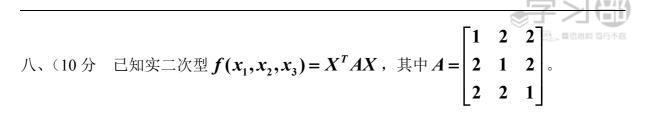
(2) 求 A 的特征值。



六、(10 分)在 \mathbf{R}^3 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$: $\boldsymbol{\sigma}((x_1,x_2,x_3))=(2x_1-x_2,x_2+x_3,3x_1)$ 。 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 \mathbf{R}^3 的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵。

七、(10 分) 设 A 为 2×2 的实矩阵,证明: A 的特征值都为实数的充要条件为 $|A| \le \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2 \text{ (其中 tr} A \to A \text{ 的迹,即 } A \text{ 的主对角元之和)}.$

信息与电子二学部学生会 学习部



- (1) 求一正交变换X = QY,将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;
- (2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。



九、 $(10\, \mathcal{G})$ 已知线性方程组 $A_{n\times n}X=b$ 对任何b 的取值都有解的充要条件是 $A_{n\times n}$ 为可逆阵。

信息与电子二学部学生会 学习部



十、 $(10\, eta)$ 设A 相似于对角阵, $m{\lambda_0}$ 是A 的特征值, $m{X_0}$ 是A 对应于 $m{\lambda_0}$ 的特征向量,证明:

- (1) 秩 $(A \lambda_0 I)$ = 秩 $(A \lambda_0 I)^2$;
- (2) 不存在Y,使得 $(A-\lambda_0 I)Y = X_0$;



信息与电子二学部学生会 学习部