习题一

1. 写出相应于以下增广矩阵的线性方程组:

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 4x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 8. \end{cases}$

2. 判断下列矩阵哪些是阶梯形矩阵, 哪些不是:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1), (3), (5)是阶梯形矩阵; (2), (4), (6)不是阶梯形矩阵.

3. 下列矩阵中, 哪些是阶梯形矩阵? 哪些是简化阶梯形矩阵? 将不是简化阶梯形的矩阵化为简化阶梯形.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解 (1) 是阶梯形矩阵, 但不是简化阶梯形矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(2) 不是阶梯形矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(3) 是阶梯形矩阵, 但不是简化阶梯形矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(4) 是简化阶梯形矩阵;

(5) 不是阶梯形矩阵,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(6) 是简化阶梯形矩阵.

4．求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

解 (1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以矩阵的秩为 3;

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & 1 & -19/17 & 20/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以矩阵的秩为 2;

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -13 & -4 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -17 \end{pmatrix},$$

所以矩阵的秩为 3;

(4)

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&-1&5\\1&1&2&1&3\\2&5&4&-1&0\\3&3&3&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\2&-1&1&-1&5\\2&5&4&-1&0\\3&3&3&-3&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&-3&-3&-3&-1\\0&3&0&-3&-6\\0&0&-3&-6&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&3&3&3&1\\0&0&-3&-6&-7\\0&0&-3&-6&-7\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&3&3&3&1\\0&0&3&6&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&1&1&1&1/3\\0&0&1&2&7/3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以矩阵的秩为 3.

5. 确定参数 a 与 b，使得矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1&3\\2&-1&b&4\\1&5&4&1\end{pmatrix}$的秩达到最小.

解

$$\begin{pmatrix}1&a&1&3\\2&-1&b&4\\1&5&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&4&1\\2&-1&b&4\\1&a&1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&5&4&1\\0&-11&b-8&2\\0&a-5&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&4&1\\0&-11&b-8&2\\0&0&-3+\dfrac{(a-5)(b-8)}{11}&2+\dfrac{2(a-5)}{11}\end{pmatrix},$$

所以要使矩阵的秩达到最小，需要

$$-3+\frac{(a-5)(b-8)}{11}=2+\frac{2(a-5)}{11}=0,$$

求解可得

$$a=-6,b=5.$$

6. 将下列矩阵化为阶梯形，然后再化为简化阶梯形:

(1) $\begin{pmatrix}0&3&-6&6&4&-5\\3&-7&8&-5&8&9\\3&-9&12&-9&6&15\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&4&-6&4&8\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$.

解 (1) 首先将矩阵化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$是阶梯形；接下来，再将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$是简化阶梯形.

(2) 首先将矩阵化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是矩阵的阶梯形；接下来，再将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$是矩阵的简化阶梯形.

7．判断下列命题的真假，并且给出理由:

(1) 线性方程组的初等变换有 3 类;

(2) 如果两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，那么这两个线性方程组具有相同的解集合;

(3) 矩阵的初等行变换都是可逆的;

(4) 对增广矩阵作初等行变换不改变相应的线性方程组的解的集合;

(5) 如果两个矩阵的行数是相同的，那么它们是行等价的;

(6) $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$是一个方程组;

(7) 如果$\begin{pmatrix}0&0&0&3&0\end{pmatrix}$是某个线性方程组的增广矩阵的一行，那么这个线性方程组是无解的;

(8) 如果一个线性方程组的方程的个数多于未知数的个数，那么这个方程组一定无解;

(9) 存在只有两个解的线性方程组;

(10) 矩阵的阶梯形是唯一的;

(11) 矩阵的简化阶梯形是唯一的.

解 (1) 正确. 线性方程组的初等变换有：互换方程组中第i个方程与第j个方程的位置， 将方程组中的第i个方程乘以非零常数h， 将方程组中的第i个方程的k倍加到第j个方程上 3 类;

(2) 正确. 两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，说明这两个增广矩阵经过程等行变换可以互化，而增广矩阵的初等行变换与方程组的初等变换是一一对应的，所以，说明对一个线性方程组作有限次初等变换得到另外一个线性方程组，因此这两个线性方程组是同解的.

(3) 正确. 3 种初等行变换都是可逆的，变换$R_i\leftrightarrow R_j$的逆变换仍然是$R_i\leftrightarrow R_j$本身，hR_i的逆变换是$\dfrac{1}{h}R_i$，而kR_i+R_j的逆变换是 $(-k)R_i+R_j$.

(4) 正确. 增广矩阵的初等行变换与方程组的初等变换是一一对应的, 所以, 对一个线性方程组的增广矩阵作初等行变换不改变相应的方程组的解的集合.

(5) 错误. 等价的矩阵行数一定相等, 但是行数相等的矩阵不一定等价, 如 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, 行数相等但是不等价.

(6) 正确. 这是一个$1\times n$的方程组.

(7) 错误. 根据$\begin{pmatrix}0&0&0&3&0\end{pmatrix}$是某个线性方程组的增广矩阵的一行这个条件不能断定线性方程组是无解的;

(8) 错误. 线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩. 当一个方程组中方程的个数多于未知数的个数时, 这个方程组可能有解也可能无解;

(9) 错误. 方程组有解时, 解要么唯一, 要么有无穷多个;

(10) 错误. 矩阵的阶梯形不唯一, 如对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&-4\\0&0&1&3\end{pmatrix}$都是它的阶梯形.

(11) 正确. 这是定理 1.5 的结论.

8. 下列矩阵是线性方程组的增广矩阵的阶梯形, 讨论方程组的解的情况, 并且当方程组有唯一解时, 求出该解.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&2&-4&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}1&2&2&5\\0&1&-1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

解 (1) 由于增广矩阵的秩等于 3, 大于系数矩阵的秩, 所以方程组无解;

(2) 由于增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩, 等于未知数的个数, 所以方程组有唯一解. 将增广矩阵化为简化阶梯形,

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

容易看出方程组的解为$x_1=-3, x_2=1.$

(3) 由于增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，小于未知数的个数，所以方程组有无穷多个解;

(4) 由于增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，等于未知数的个数，所以方程组有唯一解. 将增广矩阵化为简化阶梯形,

$$\begin{pmatrix}1&2&2&5\\0&1&-1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

容易看出方程组的解为$x_1=-3, x_2=3, x_3=1.$

(5) 由于增广矩阵的秩等于 3，大于系数矩阵的秩，所以方程组无解;

(6) 由于增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，等于未知数的个数，所以方程组有唯一解，方程组的解为$x_1=2, x_2=3, x_3=0.$

9．求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}-x_2-x_3+x_4=0\\x_1+x_2+x_3+x_4=3\\2x_1+4x_2+x_3-2x_4=-1\\3x_1+x_2-2x_3+2x_4=3\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3+4x_4=1\\-3x_1-6x_2+2x_3-6x_4=-1\\3x_1+6x_2-4x_3+6x_4=-1\\x_1+2x_2+5x_3+2x_4=6\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\-x_1-x_2+x_5=-1\\-2x_1-2x_2+3x_5=1\\x_3+x_4+3x_5=3\\x_1+x_2+2x_3+2x_4+4x_5=4\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1\\x_1+3x_2+2x_3-2x_4=-1\\x_1-2x_2+x_3-x_4=3\\x_1-4x_2+x_3+x_4=2\\x_1+2x_2+x_3-x_4=-1\end{cases}$

解 (1) 写出方程组的增广矩阵，并且用初等行变换将其化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1&1&0\\1&1&1&1&3\\2&4&1&-2&-1\\3&1&-2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&-1&-1&1&0\\2&4&1&-2&-1\\3&1&-2&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-3)R_1+R_4]{(-2)R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&-1&-1&1&0\\0&2&-1&-4&-7\\0&-2&-5&-1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)R_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&1&1&-1&0\\0&2&-1&-4&-7\\0&-2&-5&-1&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_2+R_4]{(-2)R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&1&1&-1&0\\0&0&-3&-2&-7\\0&0&-3&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)R_3+R_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&1&1&-1&0\\0&0&-3&-2&-7\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_4}\begin{pmatrix}1&1&1&1&3\\0&1&1&-1&0\\0&0&-3&-2&-7\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_4+R_2\\(-1)R_4+R_1}]{2R_4+R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&0&4\\0&1&1&0&-1\\0&0&-3&0&-9\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1/3)R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&0&4\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)R_3+R_1]{(-1)R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

所以方程组的解为$x_1=5,\ x_2=-4,\ x_3=3,\ x_4=-1.$

(2) 写出方程组的增广矩阵，并且用初等行变换将其化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}2&4&-1&4&1\\-3&-6&2&-6&-1\\3&6&-4&6&-1\\1&2&5&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&2&5&2&6\\-3&-6&2&-6&-1\\3&6&-4&6&-1\\2&4&-1&4&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(-3)R_1+R_3\\(-2)R_1+R_4}]{3R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&2&5&2&6\\0&0&17&0&17\\0&0&-19&0&-19\\0&0&-11&0&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{17}R_2}\begin{pmatrix}1&2&5&2&6\\0&0&1&0&1\\0&0&-19&0&-19\\0&0&-11&0&-11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[11R_2+R_4]{19R_2+R_3}\begin{pmatrix}1&2&5&2&6\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-5)R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

相应的方程组为$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad = 1. \end{cases}$

x_2, x_4为自由未知数，将含有自由未知数的项移到等式的右边

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

令$x_2 = c_1, x_4 = c_2$，得原方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2c_1 - 2c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

其中c_1, c_2为任意常数.

(3) 写出方程组的增广矩阵，并且用初等行变换将其化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应的方程组为$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad = 4 \\ \qquad\quad x_3 + x_4 \quad = -6 \\ \qquad\qquad\qquad x_5 = 3. \end{cases}$

x_2, x_4为自由未知数，将含有自由未知数的项移到等式的右边

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \\ x_3 = -6 - x_4 \\ x_5 = 3. \end{cases}$$

令$x_2 = c_1, x_4 = c_2$，得原方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = 4 - c_1 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = -6 - c_2 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = 3. \end{cases}$$

其中c_1, c_2为任意常数.

(4) 写出方程组的增广矩阵，并且用初等行变换将其化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 24 & -16 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 24 & -16 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & -16 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&1\\0&1&4&-3&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&8&-9\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&1\\0&1&4&-3&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&8&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&1\\0&1&4&-3&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&1\\0&1&4&-3&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&5&-4&0\\0&1&4&-3&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&0&0\\0&1&4&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

由于增广矩阵的秩等于 5，大于系数矩阵的秩，所以原方程组无解.

10. 讨论下列方程组中参数 a, b 的取值与方程组的解的关系，并且在方程组有解时求出它们的解:

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=2\\ x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ x_1-x_2+x_3=2\\ 2x_1+2x_2-5x_3+ax_4=b\end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1\\ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4=2\\ 2x_1+4x_2+7x_3+x_4=a\\ x_1+2x_2+4x_3-bx_4=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y=-a\\ 2x+3y=1\\ x-ay=1/2\end{cases}$

解 (1) 写出方程组的增广矩阵，并且用初等行变换将其化为阶梯形

此时，方程组有无穷多个解. 通解为

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\1&1&-1&1&1\\1&-1&1&0&2\\2&2&-5&a&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&3&-4&2&-1\\0&1&-2&1&0\\0&6&-11&a+2&b-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&3&-4&2&-1\\0&1&-2&1&0\\0&6&-11&a+2&b-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&1&-2&1&0\\0&3&-4&2&-1\\0&6&-11&a+2&b-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&1&-2&1&0\\0&0&2&-1&-1\\0&0&1&a-4&b-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-1/2&-1/2\\0&0&1&a-4&b-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-1/2&-1/2\\0&0&0&a-7/2&b-7/2\end{pmatrix}$$

情况 1. 当$a=\dfrac{7}{2},b\neq\dfrac{7}{2}$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3,\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=4$，所以方程组无解;

情况 2. 当$a\neq\dfrac{7}{2}$时方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{2a-b-7}{2a-7},x_2=-1,x_3=\frac{b-a}{2a-7},x_4=\frac{2b-7}{2a-7}.$$

情况 3. 当$a=b=\dfrac{7}{2}$时，将增广矩阵的阶梯形化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-1/2&-1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&1/2&7/2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&-1/2&-1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1/2&3/2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&-1/2&-1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时，方程组有无穷多个解. 通解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}c \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}c \\ x_4 = c, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

(2) 写出方程组的增广矩阵并化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & b & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & -b+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & -b-2 & -a+2 \end{pmatrix}.$$

情况 1. 当 $b=-2, a \neq 2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3, \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})=4$，所以方程组无解;

情况 2. $b \neq -2$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})=4$，所以方程组有唯一解,

$$x_1 = 1 - \frac{(a-2)(b-6)}{b+2},\quad x_2 = \frac{(a-2)(5-b)}{b+2},$$
$$x_3 = \frac{(a-2)(b-1)}{b+2},\qquad x_4 = \frac{a-2}{b+2};$$

情况 3. 当 $b=-2, a=2$ 时，将增广矩阵的阶梯形化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时，方程组有无穷多个解. 通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 4c \\ x_2 = 7c \\ x_3 = -3c \\ x_4 = c, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

(3) 写出方程组的增广矩阵并化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -a & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 1-a & 1/2+a \end{pmatrix}.$$

① 若 $a=1$，上述矩阵已是阶梯形，此时，由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2, \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 所以方程组无解;

② 若 $a \neq 1$，继续进行初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 1-a & 1/2+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 1+2a \\ 0 & 0 & (2a+1)(2a+3) \end{pmatrix},$$

(i)当 $a \neq 1, a \neq -\dfrac{1}{2}$ 且 $a \neq -\dfrac{3}{2}$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2, \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$，所以方程组无解;

(ii)当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2, \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$，等于未知数的个数，所以方程组有唯一解 $x=-\dfrac{1}{2}, y=0$;

(iii)当 $a=-\dfrac{3}{2}$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2, \mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$，等于未知数的个数，所以方程组有唯一解 $x=\dfrac{11}{10}, y=-\dfrac{2}{5}$.

11．求解下列齐次方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-4x_3=0 \\ -3x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 6x_1+x_2-8x_3=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$

解 (1) 写出方程组的系数矩阵，并且将它化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于系数矩阵的秩小于未知数的个数，所以方程组有非零解，通解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c, \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

(2) 写出方程组的系数矩阵, 并且将它化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/17 & 13/17 \\ 0 & 1 & -19/17 & 20/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由于系数矩阵的秩小于未知数的个数, 所以方程组有非零解, 通解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{17}c_1 - \dfrac{13}{17}c_2 \\ x_2 = \dfrac{19}{17}c_1 - \dfrac{20}{17}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

12. 讨论下列齐次方程组中参数 a 的取值与方程组的解的关系, 并且在方程组有非零解时求出通解:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - a\,x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

解 (1) 写出方程组的系数矩阵, 并且将它化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}.$$

情况 1. 当$a \neq 1,2$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，等于未知数的个数，所以方程组只有零解;

情况 2. 当$a=1$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，小于未知数的个数，所以方程组有非零解，此时系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,所以方程组的通解为$\begin{cases}x_1=-c\\x_2=0\\x_3=c,\end{cases}$ 其中c为任意常数;

情况 3. 当$a=2$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，小于未知数的个数，所以方程组有非零解，此时系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,所以方程组的通解为$\begin{cases}x_1=0\\x_2=-c\\x_3=c,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数.

(2) 写出方程组的系数矩阵，并且将它化为阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&1&1\\2&1&2&-a\\3&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&0&0\\0&-1&0&-a-2\\0&-2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&1&0&a+2\\0&a-1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&-2&a+1\\0&0&-2(a-1)&-(a-1)\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&1&(a+1)/2\\0&0&0&(a-1)(a+2)\end{pmatrix}.$$

情况 1. 当$a \neq 1,-2$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=4$，等于未知数的个数，所以方程组只有零解;

情况 2. 当$a=1$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，小于未知数的个数，所以方程组有非零解，此时系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 所以方程组的通解为$\begin{cases}x_1=c\\x_2=-3c\\x_3=c\\x_4=c,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数;

情况 3. 当$a=-2$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$，小于未知数的个数，所以方程组有非零解，此

时系数矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&0&0&1/2\\0&1&0&0\\0&0&1&1/2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.所以方程组的通解为$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}c\\x_2=0\\x_3=-\dfrac{1}{2}c\\x_4=c,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数.

13．证明方程组$\begin{cases}x_1-x_2=b_1\\x_2-x_3=b_2\\x_3-x_4=b_3\\x_4-x_5=b_4\\x_5-x_1=b_5\end{cases}$有解的充分必要条件是$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=0,$ 当方程组有解时，求出它的解.

证明 写出方程组的系数矩阵，并且将它化为阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&b_1\\0&1&-1&0&0&b_2\\0&0&1&-1&0&b_3\\0&0&0&1&-1&b_4\\-1&0&0&0&1&b_5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&b_1\\0&1&-1&0&0&b_2\\0&0&1&-1&0&b_3\\0&0&0&1&-1&b_4\\0&0&0&0&0&\sum\limits_{i=1}^{5}b_i\end{pmatrix}$$

所以方程组有解的充分必要条件为$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=0.$

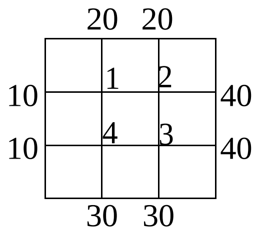
当方程组有解时，增广矩阵的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1&b_1+b_2+b_3+b_4\\0&1&0&0&-1&b_2+b_3+b_4\\0&0&1&0&-1&b_3+b_4\\0&0&0&1&-1&b_4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，所以方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=c+b_1+b_2+b_3+b_4\\x_2=c+b_2+b_3+b_4\\x_3=c+b_3+b_4\\x_4=c+b_4\\x_5=c,\end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

14.(应用题) 在热传导的研究中，一个重要的问题是确定某一块平板的稳恒温度分布. 假设已知边界上的温度分布，$T_1, T_2 T_3, T_4$表示图中 4 个内部结点的温度,

某一结点的温度近似地等于 4 个与它最接近结点(上、下、左、右) 的平均值，如 $T_1=(10+20+T_2+T_4)/4$.



写出 $T_1,T_2\,T_3,T_4$所满足的方程组并且求出这个方程组的解.

解 由于

$$
\begin{aligned}
T_1&=(10+20+T_2+T_4)/4,\\
T_2&=(20+40+T_1+T_3)/4,\\
T_3&=(30+40+T_2+T_4)/4,\\
T_4&=(30+10+T_1+T_3)/4,
\end{aligned}
$$

所以$T_1,T_2\,T_3,T_4$所满足的方程组为

$$
\begin{cases}
4T_1-T_2 \qquad\quad -T_4=30\\
-T_1+4T_2-T_3 \qquad\ =60\\
\qquad -T_2+4T_3-T_4=70\\
-T_1 \qquad -T_3+4T_4=40.
\end{cases}
$$

写出方程组的系数矩阵，并且将它化为简化阶梯形

$$
\begin{pmatrix}4&-1&0&-1&30\\-1&4&-1&0&60\\0&-1&4&-1&70\\-1&0&-1&4&40\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&4&40\\-1&4&-1&0&60\\0&-1&4&-1&70\\4&-1&0&-1&30\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&4&40\\0&4&0&-4&20\\0&-1&4&-1&70\\0&-1&-4&15&190\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&4&40\\0&1&0&-1&5\\0&-1&4&-1&70\\0&-1&-4&15&190\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&4&40\\0&1&0&-1&5\\0&0&4&-2&75\\0&0&-4&14&195\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&-1&4&40\\0&1&0&-1&5\\0&0&4&-2&75\\0&0&0&12&270\end{pmatrix}
$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&20\\0&1&0&0&27.5\\0&0&1&0&30\\0&0&0&1&22.5\end{pmatrix},$$

所以方程组的解为$T_1=20, T_2=27.5, T_3=30, T_4=22.5.$

习题二

1. 已知$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&a&6\\7&5&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&3&6\\7&5&2\end{pmatrix}$，求$a,b$.

解 由矩阵相等的定义可得 $a=3,b=2.$

2. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&4\\6&2&5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&4&6\\2&3&7\end{pmatrix}$，求满足等式$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的矩阵$\boldsymbol{X}$.

解 由等式$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$可得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\frac{3}{4}\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&4\\6&2&5\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0&2&3\\1&4&6\\2&3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&5/2&11/4\\9/4&7/2&13/2\\9/2&13/4&31/4\end{pmatrix}.$$

3. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&4&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6&-3&5\\5&4&3\end{pmatrix}$，计算$-2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}.$

解

$$-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\-6&-8&-4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-3&5\\5&4&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&2\\6&8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&3\\-1&-4&-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&-6&10\\10&8&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-6&11\\13&12&8\end{pmatrix}.$$

4. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$，计算$\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}, \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}.$

解

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\\17&7\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10\\5&8\end{pmatrix},$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}7&3\\17&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&10\\5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-7\\12&-1\end{pmatrix}.$$

5. 计算下列矩阵的乘积:

(1) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&4\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&9\\1&2&0\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix}2&1\\2&3\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$;　　(8) $\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&4\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&9\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&20\\4&11&27\\2&2&11\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5\\16&11\\25&17\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=14$;

(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\4&6&4\\6&9&6\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2$;

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 8 & 23 \\ 11 & 32 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & a_1b_{13} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & a_2b_{23} \\ a_3b_{31} & a_3b_{32} & a_3b_{33} \end{pmatrix}$;

(8) $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & a_3b_{13} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & a_3b_{23} \\ a_1b_{31} & a_2b_{32} & a_3b_{33} \end{pmatrix}$.

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & a \end{pmatrix}$，问 a 取什么值时 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$?

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 18+3a \\ -4 & -9+a \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6-a & -9+a \end{pmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，于是 $-6-a=-4$，所以 $a=-2$.

7. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求所有使得等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 成立的 2 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix},$$

所以由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可得 $a=d, c=0$，因此，所有使得等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 成立的 2 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$，其中 a,b 为任意数.

8．举例说明下列命题不成立:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$;

(3) 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；

(4) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

解 (1) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 但是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$；

(2) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$；

(3) 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix},$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，但是 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$． $\blacksquare$

(4)取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, 则 $(\boldsymbol{AB})^2=\begin{pmatrix}4&3\\0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$.

9．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$，求所有使得等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 成立的 2 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-4c&2b-4d\\-a+2c&-b+2d\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 有 $\begin{cases}2a-4c=0\\2b-4d=0\\-a+2c=0\\-b+2d=0,\end{cases}$ 求解这个方程组可以得到 $a=2c, b=2d$，因此，所有使得等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 成立的 2 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2c&2d\\c&d\end{pmatrix}$, 其中 c,d 为任意数.

10．求平方等于零矩阵的所有 2 阶矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则

$$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$ 有

$$\begin{cases}a^2+bc=0\\ab+bd=0\\ac+cd=0\\bc+d^2=0.\end{cases}$$

情况 1. 当 $b=0$ 或 $c=0$ 时，可得 $a=0$ 且 $d=0$，因此，此时所有使得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$ 成立的 2 阶矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\b&0\end{pmatrix}$ 其中 b 为任意数.

情况 2. 当 $b\neq0$ 且 $c\neq0$ 时，可得 $a=-d$，$c=-\dfrac{a^2}{b}$，此时所有使得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$ 成立的 2 阶矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\-\dfrac{a^2}{b}&-a\end{pmatrix}$.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$n$ 为正整数，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA},(\boldsymbol{AB})^n,(\boldsymbol{BA})^n$.

解 $\boldsymbol{AB}=8$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{AB})^n=8^n$，$(\boldsymbol{BA})^n=8^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$

12．已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$; (2) 验证 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{I}_2$; (3) 对所有的正整数 m，计算 $\boldsymbol{A}^m$.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-10\\3&-4\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{PQ}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}^m=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^m\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2^{m+1}-5&-5\cdot2^{m+1}+10\\3\cdot2^m-3&-5\cdot2^m+6\end{pmatrix}$.

13．用数学归纳法证明下列结论:

(1) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{pmatrix}$;

(3) 如果n是奇数，那么

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{(n+1)/2}a_3^{(n-1)/2} \\ 0 & a_2^n & 0 \\ a_1^{(n-1)/2}a_3^{(n+1)/2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

如果n是偶数，那么

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^{n/2}a_3^{n/2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{n/2}a_3^{n/2} \end{pmatrix}.$$

证明 (1) 对 n 用数学归纳法．当$n=1$时，结论显然成立．设$n \geq 2$，并且当$n=k$时，结论成立，即

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix};$$

下面证明结论当$n=k+1$时也成立．因为

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & k\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix},$$

所以对任意的正整数n，都有

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \quad ∎$$

(2) 对 n 用数学归纳法．当$n=1$时，结论显然成立．设$n \geq 2$，并且当$n=k$时，结论成立，即

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k \end{pmatrix}.$$

下面证明结论当$n=k+1$时也成立．因为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{k+1} \end{pmatrix},$$

所以对任意的正整数 n，都有

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{pmatrix};$$

(3) 对 n 用数学归纳法.

情况1. n 为偶数，即 $n=2k$. 当 $k=1$ 时，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_1a_3 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3a_1 \end{pmatrix}$，所以结论显然成立， 对 $k \geq 2$，假设结论对 $k-1$ 成立，即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(k-1)} = \begin{pmatrix} a_1^{(k-1)/2}a_3^{(k-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{2(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(k-1)/2}a_3^{(k-1)/2} \end{pmatrix}.$$

下面证明结论对 k 成立.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(k-1)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^{k-1}a_3^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{2(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{k-1}a_3^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1a_3 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3a_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^ka_3^k & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & a_1^ka_3^k \end{pmatrix},$$

根据归纳法原理，结论对任意偶数都成立.

情况 2 . n 为奇数，即 $n=2k-1$. 当 $k=1$ 时结论显然成立， 对 $k \geq 2$，假设结论对 $k-1$ 成立，即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(k-1)-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{k-1}a_3^{k-2} \\ 0 & a_2^{2k-3} & 0 \\ a_1^{k-2}a_3^{k-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

下面证明结论对 k 成立.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2k-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(k-1)-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{k-1}a_3^{k-2} \\ 0 & a_2^{2k-3} & 0 \\ a_1^{k-2}a_3^{k-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1a_3 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^{k}a_3^{k-1} \\ 0 & a_2^{2k-1} & 0 \\ a_1^{k-1}a_3^{k} & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

根据归纳法原理, 结论对任意奇数都成立. 综合情况 1 和情况 2, 结论成立.

14．设 $f(x)=x^2-2x-3, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $f(\boldsymbol{A})$;

(2) 验证 $f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.

解 (1) $f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=f(\boldsymbol{A})$.

15．已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

分别计算 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$.

解

$$P_1A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_{11}&2a_{12}&2a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$AP_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_{11}&a_{12}&a_{13}\\2a_{21}&a_{22}&a_{23}\\2a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$P_2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\3a_{11}+a_{21}&3a_{12}+a_{22}&3a_{13}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$AP_2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+3a_{12}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+3a_{22}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+3a_{32}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

$$P_3A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix},$$

$$AP_3=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}.$$

16．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1&b_3&b_2\\a_1&a_3&a_2\\c_1+a_1&c_3+a_3&c_2+a_2\end{pmatrix}$，用初等矩阵与 A 的乘积表示 B.

解 因为 B 是 A 经过 3 次初等行变换得到的：将 A 的第 1 行加到第 3 行上，互换 A 的第 1 行与第 2 行，互换 A 的第 2 列和第 3 列。所以令

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

则 $B=P_1P_2AP_3$.

17．证明下列结论:

(1) 如果 A 是可逆矩阵，那么 A^{-1} 是可逆矩阵，并且 $(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) 如果 k 是非零常数，A 是可逆矩阵，那么 kA 是可逆矩阵，并且 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵，并且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$；

(4) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明 (1) 因为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是可逆矩阵，并且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) 因为 $k\boldsymbol{A}k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=kk^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$，所以 $k\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵，并且 $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$;

(4) 因为 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{AA}^{-1}=$ 所以 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，并且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

18．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，证明当 $ad-bc\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

证明 当 $ad-bc\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] \\
&=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

19．求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -20 & 15 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

(3) 将矩阵分块

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$，计算可得

$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$，于是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20．判断下列命题的真假，并且说明理由:

(1) 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的逆矩阵;

(3) 初等矩阵都是可逆的;

(4) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是不可逆矩阵;

(5) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是可逆矩阵;

(6) 如果 $\boldsymbol{AB}$ 是不可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵;

(7) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是方阵，$\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵;

(8) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，那么对任意常数 k，$k\boldsymbol{A}$ 也是可逆矩阵.

解 (1) 正确. 因为 $\boldsymbol{I}$ 是可逆的，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=n$. 于是

$$n=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\le\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}\le n.$$

因此，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩都为 n，从而都是可逆的;

(2) 错误. 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，$\boldsymbol{AB}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) 正确. 初等矩阵都是可逆的，并且

$$[\boldsymbol{E}_n(i\leftrightarrow j)]^{-1}=\boldsymbol{E}_n(i\leftrightarrow j)\,,$$

$$[\boldsymbol{E}_n(i(h))]^{-1}=\boldsymbol{E}_n\left(i\left(1/h\right)\right),$$

$$[\boldsymbol{E}_n(i(k)\to j)]^{-1}=\boldsymbol{E}_n(i(-k)\to j)\,.$$

(4) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵，但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 是可逆矩阵;

(5) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 是不可逆矩阵;

(6) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 是不可逆矩阵，但是 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵;

(7) 正确. 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是方阵，并且 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵;

(8) 错误. 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，当 $k=0$ 时，$k\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

21. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 是可逆的，并且求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$，于是矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 是可逆的，并

且$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

22．设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同阶方阵，且$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$也是可逆矩阵，并且求$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$的逆矩阵.

证明　因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，故存在$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$使$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{I}$．于是，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}&=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1},\end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}^{-1}$ 均可逆，故

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$$

可逆，且

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}&=[A^{-1}(B+A)\ B^{-1}]^{-1}\\&=(B^{-1})^{-1}(B+A)^{-1}(A^{-1})^{-1}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

23．已知方阵$\boldsymbol{A}$满足等式$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明矩阵$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$最多有一个矩阵是可逆的.

证明　因为

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0},$$

所以矩阵$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$最多有一个矩阵是可逆的.

24．求解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-5\\3/2&1/2&4\end{pmatrix};$$

(2)

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&-2\\-8&6&-5\\-7&5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20&15&-12\\-56&41&-32\\-63&46&-37\end{pmatrix};$$

(3)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/9&2/9&2/9\\2/9&1/9&-2/9\\2/9&-2/9&1/9\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1/9&5/9&-1/9\\2/3&0&2/3\\-1/9&4/9&-8/9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

25．已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ 得 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{B}$，容易验证 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$. 因为

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&-9&-6\\-1&8&5\end{pmatrix}$$

26．设 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵(即存在正整数 m，使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$). 证明 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并

且$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}$.

解 因为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}$，所以$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$是可逆的，并且

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}.$$

27．设$\boldsymbol{A}$是幂等矩阵(即$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)，并且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$．证明$\boldsymbol{A}$是不可逆的.

证明 反证法. 假设$\boldsymbol{A}$是可逆的，则由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A},$$

从而得到$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，与条件矛盾，所以$\boldsymbol{A}$是不可逆的.

28．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&0&2\\4&0&1\end{pmatrix}$，利用分块矩阵计算$\boldsymbol{AB}$.

解 令$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3&0\\4&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&0\\0&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&0\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&0\\\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\11&7\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0\\11&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}5&3&0\\11&7&0\\10&0&5\\11&0&4\end{pmatrix}.$$

29. 设$\boldsymbol{A}$是m阶可逆矩阵，$\boldsymbol{D}$是n阶可逆矩阵. 证明$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$是可逆矩阵. 并且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

证明 因为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$，所以$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$是可逆矩阵. 并且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

30．利用分块矩阵求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) 令$\boldsymbol{A} = (5), \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则原矩阵可以写为$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$，已知

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$，容易计算$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{5}, \boldsymbol{B}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，所以所求的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

(2) 令$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，则原矩阵可以写为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

因为$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，容易计算$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$,

所以所求的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

31．设$\boldsymbol{A}_{11}$是可逆矩阵. 求使等式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{Y} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_{22} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_{32} \end{pmatrix}$$

成立的矩阵$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，并且计算$\boldsymbol{B}_{22}$.

解 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{Y} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{32} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22} \\ \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_{22} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_{32} \end{pmatrix}$$

两端比较可得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{21} = 0, \\ &\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{31} = 0, \\ &\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{B}_{22}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}, \\ &\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}, \\ &\boldsymbol{B}_{22} = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}. \end{aligned}$$

32．设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是对称矩阵. 证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$也是对称矩阵.

证明 因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是对称矩阵，所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B},$$

因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵.

33．设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的对称矩阵. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵也是对称矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的对称矩阵, 所以

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是对称矩阵.

34．如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵, 那么 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵, 由对称矩阵的定义, 有 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$, 另一方面, 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶对称矩阵, 所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$, 于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则有 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$, 所以 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵.

35．设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是实对称矩阵, 则对于任意的 $i, j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $a_{ij}=a_{ji}$. 对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 因为 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,i)- 元满足

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}=(a_{i1})^2+(a_{i2})^2+\cdots+(a_{in})^2=0$$

并且 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 都是实数. 所以

$$a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0.$$

因此 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

36．证明主对角元全为 1 的上(下) 三角矩阵的逆矩阵仍然是主对角元全为 1 的上(下) 三角矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元全为 1 的上三角矩阵, 显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 用数学归纳法证明它的逆矩阵仍然是主对角元全为 1 的上三角矩阵. 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 设 $n\geq 2$, 并且结论对 $n-1$ 阶主对角元全为 1 的

上三角矩阵成立. 下面证明结论对n阶主对角元全为 1 的上三角矩阵也成立.

将矩阵$\boldsymbol{A}$按如下方式分块

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{(n-1)n}\\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}\\ 0 & 1 & \cdots & a_{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{(n-1)n}\end{pmatrix}.$$

因为$n-1$阶主对角元全为 1 的上三角矩阵$\boldsymbol{A}_1$是可逆的. 根据归纳假设, $\boldsymbol{A}_1$的逆矩阵$\boldsymbol{A}_1^{-1}$是主对角元全为 1 的上三角矩阵.

令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{B}$是主对角元全为 1 的上三角可逆矩阵. 进一步地,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{I}_n.\end{aligned}$$

因此, 主对角元全为 1 的上三角矩阵$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

因为主对角元全为 1 的上三角矩阵的转置是主对角元全为 1 的下三角矩阵, 并且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$, 结论关于主对角元全为 1 的下三角矩阵也成立.

习题三

1. 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\end{pmatrix}$, 计算$3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}$.

解 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\14\\25\\36\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\3\\6\\7\end{pmatrix}$, 并且 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$. 求 $\boldsymbol{\beta}$.

解 由 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$ 解得 $\boldsymbol{\beta}=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$, 所以

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\5\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\5\\2\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}4\\3\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\7/3\\5/3\\-4/3\end{pmatrix}.$$

3. 判断下列集合是否构成实数集 $\mathbf{R}$ 上的向量空间, 并且说明理由.

(1) $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3,x_1+x_2+x_3=0\}$.

(2) $V_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3,x_1+x_2+x_3=1\}$.

(3) $V_3=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x_1,2,x_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3,x_1,x_3$ 为任意实数$\}$.

解 (1) 显然 $V_1\neq\varnothing$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}\in V_1$, $k\in\mathbf{R}$. 因为

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad y_1+y_2+y_3=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=0,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$. 因为 $k\boldsymbol{\alpha}=(kx_1,kx_2,kx_3)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$kx_1+kx_2+kx_3=k(x_1+x_2+x_3)=0,$$

所以 $k\boldsymbol{\alpha}\in V_1$. 因为 $\mathbf{R}^3$ 的非空子集 V_1 对向量加法和 $\mathbf{R}$ 中的常数与 V_1 中的向量的乘法封闭, 所以 V_1 是 $\mathbf{R}$ 上的向量空间.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}\in V_2$, $k\in\mathbf{R}$. 因为

$$x_1+x_2+x_3=1,\qquad y_1+y_2+y_3=1,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)^{\mathrm{T}}$满足

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=(x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)=2,$$

所以$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_2$. 于是集合$V_2$不构成实数集$\mathbf{R}$上的向量空间.

(3) 设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,2,y_3)^{\mathrm{T}}\in V_3$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1,4,x_3+y_3)^{\mathrm{T}}\notin V_3,$$

所以V_3不是$\mathbf{R}$上的向量空间.

4. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是实数,

$$V=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,x_1-a_1=x_2-a_2=\cdots=x_n-a_n\},$$

讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足什么条件时, V构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

解 设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^{\mathrm{T}}\in V$, $k\in\mathbf{R}$. 则

$$\begin{aligned}x_1-a_1=x_2-a_2=\cdots=x_n-a_n,\\ y_1-a_1=y_2-a_2=\cdots=y_n-a_n,\end{aligned}$$

要使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$，当且仅当

$$x_1+y_1-a_1=x_2+y_2-a_2=\cdots=x_n+y_n-a_n,$$

即

$$(x_1-a_1)+(y_1-a_1)+a_1=(x_2-a_2)+(y_2-a_2)+a_2=\cdots=(x_n-a_n)+(y_n-a_n)+a_n,$$

也即

$$a_1=a_2=\cdots=a_n.$$

当$a_1=a_2=\cdots=a_n=a$时，$k\boldsymbol{\alpha}$满足

$$\begin{aligned}kx_1-a&=k(x_1-a)+(k-1)a,\\ kx_2-a&=k(x_2-a)+(k-1)a,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ kx_n-a&=k(x_n-a)+(k-1)a,\end{aligned}$$

即$kx_1-a=kx_2-a=\cdots=kx_n-a$，所以$k\boldsymbol{\alpha}\in V$. 因此，当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，$V$ 构成

$\mathbf{R}$ 上的向量空间.

5. 证明$\mathbf{R}^2$的下列子集不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间:

(1) $V_1=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2,x\geq 0,y\geq 0\}$;

(2) $V_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2,xy\geq 0\}$;

(3) $V_3=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2,x^2+y^2\leq 1\}$.

证明 (1) 设$\boldsymbol{\alpha}=(x,y)^{\mathrm{T}}\in V_1$. 因为

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-x,-y)^{\mathrm{T}}\notin V_1,$$

所以V_1不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

(2) 取$\boldsymbol{\alpha}=(2,3)^{\mathrm{T}}\in V_2,\boldsymbol{\beta}=(-1,-4)^{\mathrm{T}}\in V_2$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,-1)^{\mathrm{T}}\notin V_2,$$

所以V_2不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

(3) 取$\boldsymbol{\alpha}=(1,0)^{\mathrm{T}}\in V_3,\boldsymbol{\beta}=(0,1)^{\mathrm{T}}\in V_3$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,1)^{\mathrm{T}}\notin V_3,$$

所以V_3不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

6. 设$W=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,x_1x_2\cdots x_n=0\}$, 证明 W 不构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

证明 取$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots 1,0)^{\mathrm{T}}\in W,\boldsymbol{\beta}=(0,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in W$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(1,2,\cdots,2,1)^{\mathrm{T}}\notin W,$$

所以W不能构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

7. 设$W=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2s\\0\\-s\end{pmatrix}$, s为任意实数}, 证明 W 是$\mathbf{R}^3$的一个子空间.

证明 因为$\mathbf{0}\in W$, 所以$W\neq\varnothing$. 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2s\\0\\-s\end{pmatrix}\in W,\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2t\\0\\-t\end{pmatrix}\in W,k\in\mathbf{R}$. 因为

所以$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2(s+t)\\0\\-(s+t)\end{pmatrix}\in W$，$k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2ks\\0\\-ks\end{pmatrix}\in W$. 因此, W是$\mathbf{R}^3$的一个子空间.

8. 设$W=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3a+2b\\a\\b\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3,a,b\text{为任意实数}\}$.

(1) 证明 W是$\mathbf{R}^3$的一个子空间;

(2) 求$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^3$，使得$W=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

证明 (1) 因为$\mathbf{0}\in W$，所以$W\neq\varnothing$. 设

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3a_1+2b_1\\a_1\\b_1\end{pmatrix}\in W,\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3a_2+2b_2\\a_2\\b_2\end{pmatrix}\in W,k\in\mathbf{R}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}3(a_1+a_2)+2(b_1+b_2)\\a_1+a_2\\b_1+b_2\end{pmatrix}\in W,k\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3ka_1\\ka_1\\kb_1\end{pmatrix}\in W$. 所以， W 是$\mathbf{R}^3$的一个子空间.

(2) 取$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$，则$W=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

9. 判断下列命题的真假，并说明理由

(1) $\mathbf{R}^2$是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(2) $V=\{\alpha\,|\,\alpha=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3,x_1,x_2\text{为任意实数}\}$是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(3) $W=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-a+2\\a-2b\\3b+2a\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3\}$是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(4) $m\times n$实矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间$N(\boldsymbol{A})$是向量空间$\mathbf{R}^n$的子空间;

(5) $m\times n$实矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间$R(\boldsymbol{A})$是向量空间$\mathbf{R}^n$的子空间;

(6) $\mathbf{R}^n$中的零向量可以构成$\mathbf{R}$上的向量空间.

解 (1) 错误. 因为$\mathbf{R}^2$不是$\mathbf{R}^3$的子集，所以$\mathbf{R}^2$不是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(2) 正确. 因为 V 是$\mathbf{R}^3$的非空子集, 而且它对$\mathbf{R}^3$上向量的加法和$\mathbf{R}$的数与向量的乘法封闭, V是$\mathbf{R}^3$的子空间;

(3) 错误. W中的向量对向量的加法不封闭, 所以不能构成$\mathbf{R}^3$的子空间.

(4) 正确. $m\times n$实矩阵$\boldsymbol{A}$的零空间$N(\boldsymbol{A})$是$\mathbf{R}^n$的子集合, 并且对向量的加法和数与向量的乘法封闭, 所以是$\mathbf{R}^n$的子空间;

(5) 错误. $m\times n$实矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间$R(\boldsymbol{A})$是向量空间$\mathbf{R}^m$的子空间;

(6) 正确. $\{\mathbf{0}\}$是$\mathbf{R}$上的向量空间.

10. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\3&2&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}2\\-7\\8\end{pmatrix}$, 试确定$\boldsymbol{\xi}$是否属于$N(\boldsymbol{A})$.

解 由于$\boldsymbol{A\xi}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 所以$\boldsymbol{\xi}$属于$N(\boldsymbol{A})$.

11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2\\4&1&2&1\\2&5&4&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}6\\9\\0\\1\end{pmatrix}$, 试确定$\boldsymbol{\alpha}$是否在$\boldsymbol{A}$的列空间中, 是否在$\boldsymbol{A}$的零空间中, 或者同时在这两个空间中.

解 因为$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2\\4&1&2&1\\2&5&4&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\9\\0\\1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$, 所以$\boldsymbol{\alpha}$不在$\boldsymbol{A}$的零空间中;

因为

$$(\boldsymbol{A},\alpha)=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&6\\4&1&2&1&9\\2&5&4&-1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&-2&6\\0&1&2/3&1&-5/3\\0&0&0&1&-1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

说明$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$有解, 即$\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{A}$的列构成的向量组线性表示, 所以$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{A}$的列空间中.

12. 判断下列向量组是否线性相关:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\12\\7\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$; (4) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

解 (1) 考虑方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由于

$$\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&2\\2&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组的系数矩阵的秩为 2，未知数个数等于 3，所以方程组有非零解，因此，向量组是线性相关的.

(2) 考虑方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由于

$$\begin{pmatrix}3&-1&3\\6&0&12\\2&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组的系数矩阵的秩为 2，未知数个数等于 3，所以方程组有非零解，因此，向量组是线性相关的.

(3) 考虑方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由于

$$\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&4&-6\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

方程组的系数矩阵的秩为 3，未知数个数等于 3，所以方程组只有零解，因此，向量组是线性无关的.

(4) 考虑方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由于

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\3&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

方程组的系数矩阵的秩为 3，未知数个数等于 3，所以方程组只有零解，因此，向量组是线性无关的.

13. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的.

证明 设有常数x_1,x_2,x_3使得$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，即

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-x_1+2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(3x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，所以

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \\ -x_1+2x_2 \qquad = 0 \\ \qquad 3x_2+x_3=0, \end{cases}$$

这个方程组的系数矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$的秩等于 3，所以方程组只有零解，因此，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的.

14. 证明如果一个向量组的部分向量构成的向量组是线性相关的，那么这个向量组是线性相关的.

证明 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中的部分向量构成的向量组线性相关，不妨假设前$m(m\le t)$个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，于是存在不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

所以

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+0\boldsymbol{\alpha}_{m+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0},$$

而$k_1,k_2,\cdots,k_m,0,\cdots,0$不全为零，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性相关.

15. 设m,n是两个正整数，并且$m<n$，$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^{\mathrm{T}}$是$m$元向量，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi},a_{(m+1)i},\cdots,a_{ni})^{\mathrm{T}}$是$n$元向量，$i=1,2,\cdots,t$. 证明：如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是

线性无关的，那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是线性无关的；如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是线性相关的，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是线性相关的.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是线性无关的. 令

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的前 m 个分量是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的分量，于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}.$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是线性无关的，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是线性无关的.

假设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是线性相关的，于是存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},$$

因而

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是线性相关的.

16. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的，问 s，t 满足什么条件时 $s\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,t\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的?

解 令

$$k_1(s\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(t\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

即

$$(-k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(sk_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(tk_2-k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的，所以

$$\begin{cases}-k_1+\quad\quad k_3=0\\ sk_1-k_2\quad\quad=0\\ \quad\quad tk_2-k_3=0\end{cases}$$

这是一个关于未知数 k_1,k_2,k_3 的方程组，将它的系数矩阵化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ s & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & st-1 \end{pmatrix},$$

可以得到，当 $st \neq 1$ 时，$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，此时 $s\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1, t\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个线性无关的 n 元向量. 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n$ 是线性无关的.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n$ 是线性无关的. 用反证法，设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$. 因为

$$(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

所以

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n) = \mathrm{r}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)] \le \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\} < n,$$

于是 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n$ 是线性相关的，与条件矛盾，因此，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$.

充分性. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 令

$$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{A\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{A\alpha}_n = \boldsymbol{0},$$

在等式两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，可得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0},$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的，所以

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0,$$

因此 $\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_n$ 是线性无关的.

18. 已知 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$，问 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示?

解 考虑方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta}$，即

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 3x_3 + \ x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad\quad + \ x_4 = 3 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 7x_3 + 3x_4 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 1, \end{cases}$$

将方程组的增广矩阵化为阶梯形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

因为方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，故方程组有解. 因此，$\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

19. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是 n 元向量. 已知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 是线性无关的.

证明 由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$ 可知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即存在常数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \qquad ①$$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$ 可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是线性无关的. 令

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + l_3\boldsymbol{\alpha}_3 + l_4(2\boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5) = \mathbf{0} \qquad ②$$

将①式代入②式，得

$$(l_1+2l_4k_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2+2l_4k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (l_3+2l_4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + l_4\boldsymbol{\alpha}_5 = \mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 是线性无关的，得 $l_4=0$，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $l_1=l_2=l_3=0$, 因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 是线性无关的.

20. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$，分别求 a, b 的值，使得下列结论成立:

(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，并且表示方法是唯一的;

(3) 向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是表示方法是不唯一的.

解 考虑方程组$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，即

$$\begin{cases} ax_1-2x_2-\ x_3=1 \\ 2x_1+\ x_2+\ x_3=b \\ 10x_1+5x_2+4x_3=-1, \end{cases}$$

将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -4-a & -2-a & 2-ab \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{pmatrix}$$

当$a\neq -4$时，阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & \dfrac{2+a}{4+a} & \dfrac{ab-2}{4+a} \\ 0 & 0 & 1 & 1+5b \end{pmatrix}$$

增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩等于未知数的个数，所以方程组的解唯一，即向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，并且表示方法是唯一的;

当$a=-4$时，阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2+4b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

此时，当$b=0$时，增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩，小于未知数的个数，所以方程组有解，但是不唯一，即向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是表示方法是不唯一的;

当$b\neq 0$时，增广矩阵的秩等于 3，系数矩阵的秩等于 2，所以方程组无解，即向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

综上所述，得到

(1) 当$a=-4$且$b\neq 0$时，向量$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) 当$a\neq -4$时向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，并且表示方法是唯一的;

(3) 当$a=-4$且$b=0$时，向量$\boldsymbol{\beta}$能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是表示方法是不唯一的.

21. 举例说明下列命题不成立:

(1) 如果存在一组不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \mathbf{0}$，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性无关的;

(2) 如果不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 满足

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{0},$$

那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 都是线性相关的;

(3) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性相关的，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示;

(4) 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 一定是线性无关的;

(5) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量的分量不成比例;

(6) 线性相关的向量组至少有一个部分组(真子集)也线性相关.

解 (1) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, k_1 = 1, k_2 = 1$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}$，但是显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关;

(2) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, k_1 = 1, k_2 = 1$，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0},$$

但是显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关;

(3) 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的，但是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(4) 取 $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，但是

$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是线性相关的;

(5) 取$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性相关的，但是其中任意两个向量的分量不成比例;

(6) 取$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性相关的，但是其中任意真子集都是线性无关的.

22. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是$n$元向量. 已知$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但是$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示. 证明$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

解 因为$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，所以存在常数$k_2,k_3,k_4$，使得$\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，由于$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，所以$k_4=0$，因此，$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

23. 判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$是否等价.

解 由于$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，所以这两个向量组不等价.

24. 设n元单位向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$可以由$n$元向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关的.

证明 因为$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，所以存在$n$阶矩阵$\boldsymbol{C}$，使得

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$$

于是

$$n=\mathrm{r}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\le\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$$

即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是线性无关的.

25. 设$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$的一个极大无关组，证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}_k$都可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示.

证明 根据极大无关组的定义，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是线性无关的，并且对$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}_k$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_k$都是线性相关的，即存在不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_r,l$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}+l\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

如果$l=0$，则有$k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零，而且$k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\mathbf{0}$，这与$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是线性无关的矛盾，故$l\neq 0$．于是

$$\boldsymbol{\alpha}_k=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{\alpha}_{i_2}-\cdots-\frac{k_r}{l}\boldsymbol{\alpha}_{i_r},$$

所以向量$\boldsymbol{\alpha}_k$都可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示.

26. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$m\times n$矩阵，证明$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

证明 将$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$按列分块为$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n),$$

因而$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的列构成的向量组可以由矩阵$\boldsymbol{A}$的列和矩阵$\boldsymbol{B}$的列构成的向量组线性表示，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)\\&\le \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\\&\le \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\\&=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

27. 求下列向量组的一个极大无关组，并且将不在极大无关组中的向量用极大无关组线性表示:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix};$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\2\\3\\7\end{pmatrix}$.

解 (1) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2,3$列，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组．由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(2) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&2&1&5\\2&0&3&-1\\1&1&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2,3$列，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组．由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(3) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$按列排成矩阵，并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}3&1&2&1&4\\1&1&0&-1&2\\2&1&1&0&3\\5&2&3&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&-1&-2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2$列，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的一个极大无关

组. 由简化阶梯形可以看出

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

28. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是向量空间 V 中的一个向量组, 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的极大无关组是$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$的一个基.

证明 设$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大无关组. 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中的任意向量都可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 因而$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}$都可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示, 所以$\boldsymbol{\alpha}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$线性表示, 因此$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$的一个基.

29. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$是$\mathbf{R}^4$中的一个向量组.

(1) 求$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5)$的一个基;

(2) 将求得的基扩充成为$\mathbf{R}^4$的一个基.

解 (1) 将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$按列排成矩阵, 并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为阶梯形的主元位于第$1,2,4$列, 所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的一个极大无关组, 也是$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5)$的一个基;

(2) 将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$按行排成矩阵, 并且用初等行变换将其化为阶梯形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\1&-2&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&1&0&4\\0&0&1&-10\end{pmatrix}$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_6=\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_6$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基.

30. (1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标.

解 (1) 因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4/3\\0&0&1\end{pmatrix}$, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(2) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 按列排成矩阵, 并且用初等行变换将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&2&3&3&-2\\-1&1&1&0&3\\0&3&2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5/6&-7/2\\0&1&0&1/3&-3\\0&0&1&1/2&5/2\end{pmatrix},$$

所以向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标分别为 $\left(\frac{6}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}},\left(-\frac{7}{2},-3,\frac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

31. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 V 的一个基, 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 V 的一个基;

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标.

解 (1) 令 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$, 即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

也即

$$(k_1+2k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+2k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(3k_1+4k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是$V$的一个基，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，因而

$$\begin{cases} k_1+2k_2+3k_3=0 \\ 2k_1+2k_2+\ k_3=0 \\ 3k_1+4k_2+3k_3=0, \end{cases}$$

这个方程组只有零解，即$k_1=k_2=k_3=0$，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性性无关，从而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$V$的一个基；

(2) 由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，所以向量$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

32. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$与

$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\end{pmatrix}$是$\mathbf{R}^4$的两个基.

(1) 求基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵；

(2) 如果向量$\boldsymbol{\xi}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的坐标为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{\xi}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的坐标；

(3) 如果向量$\boldsymbol{\eta}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的坐标为$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{\eta}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的坐

标.

解 (1) 基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵为

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix};$$

(2) $\boldsymbol{\xi}$关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix};$

(3) $\boldsymbol{\eta}$关于基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的坐标为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix};.$

33. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是$\mathbf{R}^3$的两个基,

求$\mathbf{R}^3$中关于这两个基有相同坐标的所有向量.

解 设所求向量为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

也即

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

求解方程组得$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c, \end{cases}$ 即向量$c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$为所求向量，其中 c 为任意常数.

34. 已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的维数与一个基;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的列空间的维数与一个基.

解 (1) 因为

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的零空间的维数为 3，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 是一个基;

(2) 因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \\ -7 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 13/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列空间的维数为 2，$(-3,6,-1,1,-7)^{\mathrm{T}}, (1,-2,2,3,-1)^{\mathrm{T}}$是列空间的一个基.

35. 求下列齐次方程组的基础解系，并且用求得的基础解系表示方程组的通解.

(1) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ (4) $nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0.$

解 (1) 写出方程组的系数矩阵并将矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

写出以阶梯形矩阵为系数矩阵的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad -\dfrac{4}{3}x_3 = 0 \\ \qquad x_2 \qquad = 0, \end{cases} \qquad ①$$

其中x_3是自由未知数．将方程组①中含自由未知数的项移到等式的右端，得到

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}x_3 \\ x_2 = 0. \end{cases} \qquad ②$$

在方程组②中令$x_3 = 1$，得到$x_1 = \dfrac{4}{3}, x_2 = 0$，得到方程组的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi} = c\boldsymbol{\xi}_1,$$

其中c为任意常数．

(2) 写出方程组的系数矩阵并将它化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

写出以阶梯形为系数矩阵的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 \quad - \ x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad = 0, \end{cases} \qquad ①$$

其中x_2, x_5是自由未知数．将方程组①中含自由未知数的项移到等式的右端，得到

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = 0, \end{cases} \qquad ②$$

在方程组②中分别令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，将 5 个未知数按自然顺序排列，得到方程组的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中c_1, c_2为任意常数.

(3) 写出方程组的系数矩阵并将它化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

写出以阶梯形为系数矩阵的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad + \ x_5 = 0 \\ \qquad\quad x_3 \quad - \ x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 + 2x_5 = 0, \end{cases} \qquad ①$$

其中x_2, x_5是自由未知数. 将方程组①中含自由未知数的项移到等式的右端，得到

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = -2x_5, \end{cases} \qquad ②$$

在方程组②中分别令$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$，将 5 个未知数按自然顺序排列，得到方程组的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中c_1,c_2为任意常数.

(4) 将方程的两端同除以常数 n

$$x_1+\frac{(n-1)}{n}x_2+\cdots+\frac{2}{n}x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n=0,$$

其中$x_2,x_3,\cdots,x_n$是自由未知数. 将方程中含自由未知数的项移到等式的右端, 得到

$$x_1=-\frac{(n-1)}{n}x_2-\cdots-\frac{2}{n}x_{n-1}-\frac{1}{n}x_n$$

分别令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, 得到$x_1=-\dfrac{n-1}{n},\cdots,-\dfrac{2}{n},-\dfrac{1}{n}$, 将未知数合并, 得到方程组的一个基础解系,

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-(n-1)/n\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-2}=\begin{pmatrix}-2/n\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1/n\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

于是, 方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+c_{n-2}\boldsymbol{\xi}_{n-2}+c_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1},$$

其中$c_1,\cdots,c_{n-2},c_{n-1}$为任意常数.

36. 求下列非齐次方程组的解(用导出方程组的基础解系表示方程组的通解).

(1) $\begin{cases}3x_1+5x_2-4x_3=7\\-3x_1-2x_2+4x_3=-1\\6x_1+x_2-8x_3=-4.\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\x_1-x_2+x_3+x_4=1.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\x_1+x_3-x_4=-3\\3x_1+x_2+x_3=1\\7x_1+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$　　(4) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8.$

解 (1) 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

写出以简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad -\dfrac{4}{3}x_3 = -1 \\ \quad x_2 \qquad = 2, \end{cases} \qquad ①$$

方程组①中令 $x_3 = 0$，得到 $x_1 = -1, x_2 = 2$，得到方程组的一个特解

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

去掉方程组①的常数项，得到原方程组的导出方程组的简化形式

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}x_3 \\ x_2 = 0. \end{cases} \qquad ②$$

在方程组②中令 $x_3 = 1$，得到 $x_1 = \dfrac{4}{3}, x_2 = 0,$ 于是得到导出方程组的一个基础解系，

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此，原方程组的通解为

$$\gamma = \gamma_0 + c\xi_1,$$

其中 c 为任意常数.

(2) 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 2 & 7/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix},$$

写出以简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \dfrac{5}{3}x_3 + 2x_4 = \dfrac{7}{3} \\ \qquad x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 + x_4 = \dfrac{4}{3}, \end{cases} \qquad ①$$

方程组①中令 $x_3 = 0, x_4 = 0,$ 得到 $x_1 = \dfrac{7}{3}, x_2 = \dfrac{4}{3}$，得到方程组的一个特解

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}7/3\\4/3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

去掉方程组①的常数项，得到原方程组的导出方程组的简化形式

$$\begin{cases}x_1 \quad +\dfrac{5}{3}x_3+2x_4=0\\ \quad x_2+\dfrac{2}{3}x_3+x_4=0,\end{cases} \qquad ②$$

在方程组②中令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,得到$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/3\\-2/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$，于是导出方程组的一个基础解系为,

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-5/3\\-2/3\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

因此，原方程组的通解为

$$\gamma=\gamma_0+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中c_1,c_2为任意常数.

(3) 用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

写出以简化阶梯形为增广矩阵的线性方程组

$$\begin{cases}x_1 \quad +x_3 \quad =3\\ \quad x_2-2x_3 \quad =-8\\ \qquad\qquad x_4=6,\end{cases} \qquad ①$$

方程组①中令$x_3=0$，得到$x_1=3,x_2=-8,x_4=6$，得到方程组的一个特解

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}3\\-8\\0\\6\end{pmatrix}.$$

去掉方程组①的常数项，得到原方程组的导出方程组的简化形式

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad = 0 \\ \qquad\qquad x_4 = 0, \end{cases} \qquad ②$$

在方程组②中令 $x_3 = 1$，得到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，于是导出方程组的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

于是，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + c_1\boldsymbol{\xi}_1,$$

其中 c_1 为任意常数.

(4) 在方程中取 $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$，得到方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

去掉方程的常数项，分别令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得到导出方程组的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是，原方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2 + c_3\boldsymbol{\xi}_3 + c_4\boldsymbol{\xi}_4,$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数.

37. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$. 证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的任意 $n - r$ 个

线性无关的解向量都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的维数是 $n-r$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是 $N(\boldsymbol{A})$ 的基，也就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

38. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n-m$，并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. 证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组为齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

证明 将 $\boldsymbol{B}$ 按列分块 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,...,\boldsymbol{B}_{n-m}),\boldsymbol{B}_i\in\mathrm{R}^n$，由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n-m$ 得

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,...,\boldsymbol{B}_{n-m})=n-m,$$

则 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,...,\boldsymbol{B}_{n-m}$ 线性无关. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,...,\boldsymbol{B}_{n-m})=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{AB}_i=\boldsymbol{0}$，也即 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,...,\boldsymbol{B}_{n-m}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，所以 $n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-m$. 所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

39. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times p$ 矩阵. 证明

(1) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$;

(2) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=n$.

证明 (1) **必要性**. 设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解. 记 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$，将矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 按列分块

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\ j=1,2,\cdots,n,$$

也即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，于是

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\},$$

所以

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\},$$

即$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$;

充分性. 设$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 将矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$按列分块

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

于是

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\},$$

所以$\boldsymbol{\beta}_j,\ j=1,2,\cdots,n,$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，即有

$$\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\ j=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),$$

其中$\boldsymbol{X}=(x_{ij})$. 即存在$\boldsymbol{X}$，使得矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解.

(2) **必要性**. 设矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有唯一解. 记$\boldsymbol{X}=(x_{ij})$，将矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$按列分块$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i,\ j=1,2,\cdots,n,$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，而且表示的方法唯一，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的，即 $\mathbf{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=n.$ 因此由(1) 的结论，我们有

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=n.$$

充分性. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，在矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，所以矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解.

40. 已知 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+3x_3=4\\ax_1+bx_2+cx_3=d.\end{cases}$ 的两个解，求这个方程组的通解.

解 因为方程组有两个解，即解不唯一，所以系数矩阵的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\le 2$，又因为系数矩阵的前两行对应分量不成比例，即系数矩阵的前两行作为向量是线性无关的，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 因此，方程组的导出方程组的基础解系中含有 $3-2=1$ 个线性无关的解向量. 因为 γ_1,γ_2 是线性方程组的两个解，所以 $\boldsymbol{\xi}_0=\gamma_1-\gamma_2=\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$ 是导出方程组的一个基础解系解. 因此方程组的通解为

$$\gamma=\gamma_1+c\boldsymbol{\xi}_0,$$

其中 c 为任意常数.

41. 设 γ_0 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系. 证明 $\gamma_0,\gamma_0+\xi_1,\gamma_0+\xi_2,\cdots,\gamma_0+\xi_t$ 是线性无关的，并且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意一个解均可表示为 $k_0\gamma_0+k_1(\gamma_0+\xi_1)+k_2(\gamma_0+\xi_2)+\cdots+k_t(\gamma_0+\xi_t)$，其中 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=1.$

证明 令

$$l_0\gamma_0+l_1(\gamma_0+\xi_1)+l_2(\gamma_0+\xi_2)+\cdots+l_t(\gamma_0+\xi_t)=\mathbf{0},$$

则

$$(l_0+l_1+l_2+\cdots+l_t)\gamma_0+l_1\xi_1+l_2\xi_2+\cdots+l_t\xi_t=\mathbf{0}, \qquad ①$$

在①式两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$(l_0+l_1+l_2+\cdots+l_t)A\boldsymbol{\gamma}_0+l_1A\boldsymbol{\xi}_1+l_2A\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_tA\boldsymbol{\xi}_t=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{A\gamma}_0=\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A\xi}_i=\mathbf{0}, i=1,2,\cdots,t$，所以

$$(l_0+l_1+l_2+\cdots+l_t)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$

而 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，故

$$l_0+l_1+l_2+\cdots+l_t=0, \qquad ②$$

于是由①式得

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\xi}_t=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系，所以 $l_1=l_2=\cdots=l_t=0$，代入②式，得 $l_0=0$，因此，$\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_t$ 是线性无关的.

设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解，那么有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}&=\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\xi}_t\\&=(1-k_1-k_2-\cdots k_t)\boldsymbol{\gamma}_0+k_1(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_t)\\&=k_0\boldsymbol{\gamma}_0+k_1(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_1)+k_2(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\xi}_t),\end{aligned}$$

其中 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=1.$

42. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是实数，并且满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明 $\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量.

证明 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\eta}&=k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\eta}_s\\&=k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\beta}+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{\beta}\\&=\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解向量.

43. 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的，并且

$\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$. 求方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性无关的，并且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 写为 $\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$, 可以看出 $\boldsymbol{\xi} = (1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的一个解，也是 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 又由 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 得到 $\boldsymbol{\gamma}_0 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的一个解，所以方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{\gamma}_0 + c\boldsymbol{\xi}$，其中 c 为任意常数.

44. 求一个齐次线性方程组，使它的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解 令

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

将其化为简化阶梯形，

$$\boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

所以方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$$

因此，以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}$ 作行向量构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，那么 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$.

45. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是 3 元向量，并且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是线性无关的.

(1) 证明存在既可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$;

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1 = (2,3,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = (-1,0,3)^{\mathrm{T}}$ 时，求出所有既可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，又可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示的向量.

解 (1) 由题意知，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 都是 3 元向量，则必是线性相关的，所以存在不全为零的 l_1, l_2, k_1, k_2 满足

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{0}. \qquad ①$$

假设$l_1=l_2=0$，那么k_1,k_2不全为零，并且$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，这与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是线性无关的矛盾，所以$l_1,l_2$不同时为零．同理可证$k_1,k_2$不同时为零．将①式写为

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2=-(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2),$$

令

$$\boldsymbol{\gamma}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2=-(k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2),$$

故$\boldsymbol{\gamma}$非零，而且$\boldsymbol{\gamma}$既可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，又可以由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示.

(2) 由(1) 知

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=-y_1\boldsymbol{\beta}_1-y_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

所以

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}.$$

因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\2&5&3&0\\1&3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},$$

解得

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)^{\mathrm{T}}=c(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

于是

$$\boldsymbol{\gamma}=c\boldsymbol{\alpha}_1-c\boldsymbol{\alpha}_2=c(-1,-3,-2)^{\mathrm{T}}.$$

46. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，并且线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$存在两个不同解.

(1) 求λ,a;

(2) 求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

解 (1) 因为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有两个不同的解，所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<3$，而

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a+1-\lambda\end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{cases}1-\lambda^2=0\\ a+1-\lambda=0\\ \lambda-1\neq 0,\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1,a=-2$.

(2) 当 $\lambda=-1,\quad a=-2$ 时

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 3/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}3/2\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, c 为任意常数.

47. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 中的三个向量，求

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}),\ |\boldsymbol{\alpha}|,\ |\boldsymbol{\beta}|,\ \langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle,\ \langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle.$$

解 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=1\times4+2\times3+0\times2+1\times1=11,$

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=1\times(4-2)+2\times(3+3)+0\times(2+1)+1\times(1+4)=19,$

$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2+1^2}=\sqrt{6},$

$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{30},$

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\arccos\dfrac{11\sqrt{5}}{30},$

$$\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \arccos \frac{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})}{|\boldsymbol{\beta}||\boldsymbol{\gamma}|} = \arccos \frac{7}{30}.$$

48. 设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$是$\mathbf{R}^n$中的两个向量，证明

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 = 2|\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2|\boldsymbol{\beta}|^2.$$

证明 因为

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),$$

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 = (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2 - 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),$$

所以

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 = 2|\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2|\boldsymbol{\beta}|^2.$$

49. 在$\mathbf{R}^4$中求一个单位向量，使它与$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$都正交.

解 设与$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$都正交的向量为$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$，将其单位化得到$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$是与$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$都正交的单位向量.

50. 用施密特正交规范化方法将下列线性无关向量组规范正交化:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) 首先将向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$正交化，得到

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2+\alpha_3=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

然后将β_1,β_2,β_3规范化，得到

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(2) 首先将向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化，得到

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\alpha_2=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2+\alpha_3=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

然后将β_1,β_2,β_3规范化，得到

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}.$$

向量组η_1,η_2,η_3是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的正交规范化.

51. 实数a,b,c分别取何值时，下列矩阵$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为正交矩阵?

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&1/2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a&b\\c&2c\end{pmatrix}.$$

解 由

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^2+c^2&ab+c/2\\0&ab+c/2&b^2+1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

可以得到

$$\begin{cases}a^2+\ c^2=1\\ab+c/2=0\\b^2+1/4=1,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=\pm\dfrac{1}{2},b=\dfrac{\sqrt{3}}{2},c=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\a=\pm\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$$

由

$$BB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a&b\\c&2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+2bc\\ac+2bc&5c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

可以得到

$$\begin{cases}a^2+\ b^2\ =1\\ac+2bc=0\\5c^2\qquad\ =1,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},b=\mp\dfrac{1}{\sqrt{5}},c=\mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}},b=\mp\dfrac{1}{\sqrt{5}},c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

52. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元单位列向量. 证明 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是正交矩阵.

证明 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + 4\alpha(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\
&= \boldsymbol{I},
\end{aligned}
$$

所以$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$是正交矩阵.

53. 用最小二乘法求直线方程$y = kx + b$，拟合下列数据点

$$(2, 1), (5, 2), (7, 3), (8, 3).$$

解 将拟合数据代入直线方程，得

$$\begin{cases} 2k + b = 1 \\ 5k + b = 2 \\ 7k + b = 3 \\ 8k + b = 3, \end{cases}$$

令$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix}$，则方程组可以表示为$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$. 因为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 142 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ 57 \end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$的最小二乘解$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/14 \end{pmatrix}$，因此直线方程为$y = \dfrac{2}{7}x + \dfrac{5}{14}$.

习题四

1．用行列式求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 25 \\ 2x_1 + 3x_2 = 18; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 33 \\ 4x_1 + 3x_2 = 81; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

解 (1) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 25 & 4 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{3}{1} = 3, x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 25 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{4}{1} = 4.$

(2) $x_1=\frac{\begin{vmatrix}33 & 1\\81 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{vmatrix}}=\frac{18}{2}=9, x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 33\\4 & 81\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{vmatrix}}=\frac{30}{2}=15.$

(3) $x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 1\\3 & 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-1}{1}=-1, x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{1}{1}=1, x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{1}{1}=1.$

2．计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 0\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\4 & -3 & 0\\2 & 4 & 1\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\6 & 5 & 2\\9 & 7 & 3\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}8 & 1 & 6\\4 & 0 & 3\\3 & -2 & 4\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 5 & 0\\2 & 0 & 4 & 1\\3 & 1 & 0 & 7\\0 & 4 & -2 & 0\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 0\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & -2 & 2\end{vmatrix}=0$;

(2)

$$\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\4 & -3 & 0\\2 & 4 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\4 & -3 & 0\\0 & 5 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\0 & -11 & -2\\0 & 5 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 5 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2;$$

(3) $\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\6 & 5 & 2\\9 & 7 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\6 & 5 & 2\\1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\6 & 5 & 2\\4 & 3 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\0 & -1 & -16\\0 & -1 & -12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 16\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}=4$;

(4)

$$\begin{vmatrix}8&1&6\\4&0&3\\3&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&1&6\\1&2&-1\\3&-2&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-1\\8&1&6\\3&-2&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-15&14\\0&-8&7\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&-8&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&0&7\end{vmatrix}=-7;$$

(5) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-8$;

(6)

$$\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\2&0&4&1\\3&1&0&7\\0&4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&4&-6&1\\0&7&-15&7\\0&4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&4&-6&1\\0&-1&-3&5\\0&4&-2&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&1&3&-5\\0&4&-6&1\\0&4&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&1&3&-5\\0&0&-18&21\\0&0&-14&20\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&-2&5&0\\0&1&-1&-5\\0&0&-6&7\\0&0&0&11/6\end{vmatrix}$$

$$=-66.$$

3. 求下列各组矩阵的行列式，考察矩阵的行列式在初等变换下的变化：

(1) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$;　　　(2) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2\\3+2k&4+2k\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a&b+ak\\c&d+ck\end{pmatrix}$;　　　(4) $\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&4&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2k&3k&k\\1&2&0\\3&4&2\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&0\\3&4&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&0\\4&3&2\end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$, $\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=cb-ad$;(互换矩阵的两行，行列式取负)

(2) $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2$, $\begin{vmatrix}1&2\\3+2k&4+2k\end{vmatrix}=(4+2k)-2(3+2k)=-2$; (将矩阵的某一行的倍数加到另外一行上，行列式不变)

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $\begin{vmatrix} a & b+ak \\ c & d+ck \end{vmatrix} = a(d+ck) - c(b+ak) = ad - bc$;(将矩阵的某一列的倍数加到另外一列上, 行列式不变)

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2k & 3k & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$;(将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某行乘以常数 k, 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 那么 $|\boldsymbol{B}| = k|\boldsymbol{A}|$.)

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$. (矩阵的转置的行列式等于矩阵的行列式)

4. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $\det(2\boldsymbol{A})$, $\det(-\boldsymbol{A})$.

解 $\det(2\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8$, $\det(-\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -2$.

5. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$, 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & 2a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & 2a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & 2a_{32} \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解 (1) 因为所求行列式是已知行列式的第三行乘以常数 3 得到的, 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 18;$$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{13}+a_{11} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23}+a_{21} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33}+a_{31} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 18$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & 2a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & 2a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & 2a_{32} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12$;

(4) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = 6$;

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 6$.

6. 计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ a & 2+a & a \\ a & a & 2+a \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-c-a & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3;$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ a & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b & 1-b \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2;$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \\ c^2 & 2c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(a-b)(a-c)(b-c);$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$= -(ad-bc)^2;$$

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ a & 2+a & a \\ a & a & 2+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2a & a & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1+2a)$;

(6)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)(a-1)^2.$$

7. 计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+10)$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-10);$$

(2)

$$\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ 0 & \lambda-8 & \lambda-1\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-8)\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)[\lambda(\lambda+3)-4]-(\lambda-1)(-4\lambda+4)$$

$$=\lambda^3-\lambda^2-36\lambda+36$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6).$$

8. 计算行列式.

(1) $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$;

(2) $D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$;

(3) $D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\end{vmatrix}$;

(4) $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}$;

(5) $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n\\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$.

解 (1)

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+a_1+a_2+\cdots+a_n;$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{vmatrix};$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1);$$

(3) 将行列式按第一列展开，得 $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$，即

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$$

所以有

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=D_{n-2}-D_{n-3}=\cdots=D_2-D_1=1$$

因此,

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+1+1=\cdots=D_1+(n-1)=n+1;$$

(4)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n(n+1)/2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n(n+1)/2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ n(n+1)/2 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n(n+1)/2 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n(n+1)/2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1) \cdot (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot (-n)^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2};$$

(5)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} \{[a-(i-1)][a-(j-1)]\}$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} (j-i)$$

$$= (-1)^n n!(-1)^{n-1}(n-1)!\cdots(-1)1$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!(n-1)!\cdots 1.$$

9. 判断下列命题真假，并且说明理由:

(1) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的倍数加到另一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，那么 $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$;

(2) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行乘以常数 k 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，那么 $\det \boldsymbol{A} = k \det \boldsymbol{B}$;

(3) 如果对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 连续作两次行的交换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，那么 $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$;

(4) 如果 $\det \boldsymbol{A} = 0$，则其两行或两列相等或者某一行或某一列为 $\mathbf{0}$;

(5) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶矩阵，并且 $\det \boldsymbol{A} = 0$，那么 $\boldsymbol{A}$ 的一行是另一行的倍数;

(6) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组是线性相关的，那么 $\det \boldsymbol{A} = 0$.

解 (1) 正确; (2) 正确; (3) 正确;

(4) 错误，如 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$，但是 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行或两列不相等而且没有零行或零列;

(5) 正确，但是此结论只对 2 阶矩阵成立;

(6) 正确.

10. 证明下列等式:

(1) $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1};$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_1^{\ n} & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^{\ n} \\ a_2^{\ n} & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\ n} \prod_{n+1 \ge i > j \ge 1} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j} \right),$$ 其中 $a_i \ne 0, b_i \ne 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

证明 (1) 将行列式的第 i 行乘以 x 加到第 $i+1$ 行，$i=1,2,\cdots,n-1$，将得到的行列式按照第 n 行展开，则

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1+a_0x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1x+a_0x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2}+\cdots+a_1x^{n-3}+a_0x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2}+a_0x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2}+a_0x^{n-1})(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2}+a_0x^{n-1})(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2}+a_0x^{n-1};$$

(2) 将行列式的第 i 行提出公因子，将其化为范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n} a_i^{\,n}\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n} a_i^{\,n}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right).$$

11. 计算行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\5&6&1&2&1\\7&8&1&4&3\\9&10&2&-3&1\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\\3&4&1&0&0\\4&4&5&0&0\\1&2&3&0&0\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\5&6&1&2&1\\7&8&1&4&3\\9&10&2&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&3\\2&-3&1\end{vmatrix}=-2\cdot 2\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&6\end{vmatrix}=-24$;

(2) $\begin{vmatrix}0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\\3&4&1&0&0\\4&4&5&0&0\\1&2&3&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{2\times 3}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4&1\\4&4&5\\1&2&3\end{vmatrix}=-2\cdot(-18)=36.$

12. 已知 4 阶行列式的值为 92, 第 2 行的元素依次为$1, 0, a+3, 2$,并且第 2 行元素的余子式分别为$1, 3, -5, 2$　求a的值.

解 将行列式按第 2 行展开得

$$(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot 1+(-1)^{2+2}\cdot 0\cdot 3+(-1)^{2+3}\cdot(a+3)\cdot(-5)+(-1)^{2+4}2\cdot 2=92,$$

即　$5a=74$, 所以$a=\dfrac{74}{5}$..

13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\a_2&a_2&a_4&a_5\\a_3&a_2&a_4&a_5\\a_4&a_2&a_6&a_7\end{pmatrix}$, 求$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$的值, 其中$A_{13}$为$\boldsymbol{A}$中$(i,3)-$元的代数余子式, $i=1,2,3,4$.

解 将$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$写成$1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+0\cdot A_{44}+0\cdot A_{45}$, 理解为将矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式的第 3 列全部换成常数 1 , 计算可得

$$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&1&a_4\\a_2&a_2&1&a_5\\a_3&a_2&1&a_6\\a_4&a_2&1&a_7\end{vmatrix}=0.$$

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}|=27$, 求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$, 其中 A_{4j} 为 $\boldsymbol{A}$ 中 $(4,\ j)-$元的代数余子式, $i=1,2,3,4,5.$

解 因为 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+0\cdot A_{44}$, 所以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的第 4 行换成常数 1, 1, 1, 0 ,0, 计算行列式的值, 于是

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&0&0\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=-9,$$

同理

$$A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\0&0&0&1&1\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=18.$$

15. 设 a, b, c, d 是不全为零的实数, 证明线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0\\bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0\\cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0\\dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0\end{cases}$ 只有零解.

解 令方程组得系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&-a&d&-c\\c&-d&-a&b\\d&c&-b&-a\end{pmatrix}$, 则

$$(\det\boldsymbol{A})^2=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det[(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{I}]=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4,$$

于是 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$, 所以方程组只有零解.

16. 讨论 a 取何值时，线性方程组$\begin{cases} 2x_1+ax_2-x_3=1 \\ ax_1- \ x_2+ \ x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 有唯一解？有无穷多个解? 无解？在有解时，求出全部解.

解 考虑方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}=(5a+4)(a-1).$$

讨论:

情况 1. 当$D\neq 0$，即$a\neq 1$，$a\neq -\dfrac{4}{5}$时，方程组有唯一的解

$$x_1=\frac{9}{5a+4},x_2=\frac{6}{5a+4},x_1=\frac{a+14}{5a+4};$$

情况 2. 当$a=-\dfrac{4}{5}$时，将方程组的增广矩阵为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 2 & -4/5 & -1 & 1 \\ -4/5 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & -4/5 & -1 & 1 \\ -4 & -5 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 2 & -4/5 & -1 & 1 \\ 0 & -33/5 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -5/11 & -20/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

增广矩阵的秩等于 4，大于系数矩阵的秩，所以此时方程组无解.

情况 3. 当a=1时，将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时增广矩阵的秩等于 2，等于系数矩阵的秩，小于未知数的个数，所以方程组有无穷多个解. 在方程组中令自由未知数$x_3=0$，得到一个特解$\boldsymbol{\gamma}_0=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，求得方程组的导出方程组的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，于是其一般解为$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+c_1\boldsymbol{\xi}_1$，其中$c_1$为任意常数.

17. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，其中$\boldsymbol{I}$为 3 阶单位矩阵. 如果

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\det \boldsymbol{B}$.

解: 由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 得

$$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A},$$

由 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆，得到

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1},$$

而

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\det \boldsymbol{B}=\det[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}]=[\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})]^{-1}=-1.$$

18. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-2, |\boldsymbol{B}|=3$，求

(1) $|-2\boldsymbol{A}|$;　(2) $|\boldsymbol{A}^{-1}|$;　(3) $|\boldsymbol{A}^*|$;　(4) $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|$;

(5) $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)^{-1}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*\right|$;　(6) $|\boldsymbol{B}^5|$.

解 (1) $|-2\boldsymbol{A}|=(-2)^3|\boldsymbol{A}|=(-2)^3(-2)=16$;

(2) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}=-\frac{1}{2}$;

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=4$;

(4) $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}|=12$;

(5)

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{AB})^{*}\right| \\
&=\left|2\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}-\frac{1}{3}\,|\,\boldsymbol{AB}\,|\,(\boldsymbol{AB})^{-1}\right| \\
&=\left|2\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}+2(\boldsymbol{AB})^{-1}\right| \\
&=\left|4\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}\right| \\
&=4^{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \\
&=-\frac{32}{3};
\end{aligned}
$$

(6) $|\boldsymbol{B}^5|=|\boldsymbol{B}|^5=3^5=243$.

19. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，证明 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

证明 因为

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{pmatrix},
$$

上式两端取行列式，有

$$
\begin{vmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{vmatrix},
$$

所以

$$
\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|.
$$

20. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，判断下列命题是否成立，并且说明理由:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都不可逆，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不可逆;

(2) 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆;

(3) 如果 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆;

(4) 如果 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆，那么 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都不可逆;

(5) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $k\boldsymbol{A}$ 也可逆，其中 k 是常数;

(6) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆.

解 (1) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都不可逆, 但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆;

(2) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆, 但是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆;

(3) 正确. $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 则 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$, 于是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0, \boldsymbol{B}|\neq 0$, 所以么 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆;

(4) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆, 但是 $\boldsymbol{A}$ 可逆;

(5) 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, k=0$, 则 $k\boldsymbol{A}$ 不可逆;

(6) 正确. 因为 $|A|=0$ 的充分必要条件是 $|A^*|=0$.

21. 利用行列式判断下列向量组是否线性无关:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}4\\6\\-7\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-7\\0\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-6\\0\\7\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$.

解 (1) 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 因为

$$\det \boldsymbol{A}=\det\begin{pmatrix}4&-7&-3\\6&0&-5\\-7&2&6\end{pmatrix}=11,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的;

(2) 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 因为

$$\det \boldsymbol{A}=\det\begin{pmatrix}3&2&-2&0\\5&-6&-1&0\\-6&0&3&0\\4&7&0&3\end{pmatrix}=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性相关的.

22. 利用行列式, 判断下列矩阵是否可逆:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 3 & -7 \\ 9 & -5 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

解 (1) 因为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 3 & -7 \\ 9 & -5 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 3 & -4 \\ 9 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -27 & 15 & 0 \\ 9 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)[(-27)\cdot(-5)-15\cdot 9]=0,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆;

(2) 因为

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 20 & -8 & 0 & 20 \\ 18 & -9 & 0 & 20 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 20 & -8 & 20 \\ 18 & -9 & 20 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 18 & -9 & 20 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 0 & 18 & -25 \\ 0 & 63 & -88 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}=36\begin{vmatrix} 2 & -25 \\ 7 & -88 \end{vmatrix}=-36,$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不可逆

23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 元列向量, 并且 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)=a$, $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=b$, 求 4 阶行列式 $\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$ 的值.

解

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)&=\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+\det(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\\ &=-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)\\ &=-a-b\end{aligned}$$

24. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \\ 2\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \\ 3\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 是 3 阶矩阵, 并且 $|\boldsymbol{A}|=18$, $|\boldsymbol{B}|=2$, 求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

解

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\2\gamma^{\mathrm{T}}-\gamma^{\mathrm{T}}\\3\eta^{\mathrm{T}}-\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\gamma^{\mathrm{T}}\\2\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\gamma^{\mathrm{T}}\\\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\\gamma^{\mathrm{T}}\\\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\gamma^{\mathrm{T}}\\\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\2\gamma^{\mathrm{T}}\\\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\gamma^{\mathrm{T}}\\\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\2\gamma^{\mathrm{T}}\\3\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\\gamma^{\mathrm{T}}\\\eta^{\mathrm{T}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}|A|-2|B|$$

$$=2.$$

25. 设$n\geq 2$是正整数，$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵. 证明:

(1) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，那么$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n$;

(2) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$，那么$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$;

(3) 如果$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$，那么$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$.

解 (1) 因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$，所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，于是$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq 0$，因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=n$;

(2) 因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$，所以$|\boldsymbol{A}|=0$，而且 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个$n-1$阶子式不为零，于是$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，从而$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\geq 1$；另一方面，因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|A|\,\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\leq n$,于是$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)\leq 1$. 因此，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(3) 因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的所有$n-1$阶子式全部为零，于是$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=0$.

26. 设$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$是$4\times 3$线性方程组.

(1) 证明如果a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等，那么此方程组无解;

(2) 设$a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k,\ k\neq 0$，并且$\boldsymbol{\gamma}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$是方程组的两个解，求此方程组的通解.

解 (1) 方程组增广矩阵行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{vmatrix}$$

为范德蒙行列式，当a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等时，$D\neq 0$，所以方程组增广矩阵的秩

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=4$，而系数矩阵的秩$r(\boldsymbol{A})\leq\min(3,4)<4$，故方程组无解.

(2) 当$a_1=a_3=k,\ a_2=a_4=-k,\ k\neq 0$，原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$$

此时方程组系数矩阵的秩为 2，所以基础解系中只有一个解向量，令

$$\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=(-2,0,2)^{\mathrm{T}},$$

则方程组的通解为

$$\gamma_1+k\xi_0,k\in\mathbf{R}.$$

27. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求行列式$\begin{vmatrix}\mathbf{0} & 3\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0}\end{vmatrix}$的值.

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} & 3\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{B} & 0\end{vmatrix}&=(-1)^{3\times3}\left|3\boldsymbol{A}^*\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\\ &=-3^3\left|\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|\\ &=-27\left|\boldsymbol{A}\right|^2\left|\boldsymbol{B}\right|\\ &=-27\cdot(-1)^2\cdot 1\\ &=-27.\end{aligned}$$

28. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，证明$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$也是可逆矩阵.

证明　因为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，故存在$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$使$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{I}$．于是，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}^{-1}|\\ &=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}|\\ &=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})| \\
&=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}| \\
&=|\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|,
\end{aligned}
$$

又 A^{-1}、$B+A$、B^{-1} 均可逆，于是$|\boldsymbol{A}^{-1}|\neq 0, |\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq 0$，故

$$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|\neq 0,$$

因此，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$是可逆矩阵.

29. 设$\boldsymbol{A}$是n阶正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|<0$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$.

解 因为

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})| \\
&= |\boldsymbol{A}|\cdot|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})| = |\boldsymbol{A}|\cdot|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| \\
&= |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|,
\end{aligned}
$$

所以

$$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0,$$

因此$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=0$.

30. 计算由点$(-2,2), (0,3), (4,-1), (6,4)$确定的平行四边形的面积.

解 先将这个平行四边形平移到使原点作为它的一顶点的情形. 为此，将四个点分别向下、向右平移两个单位，得到的点记为$O(0,0), A(2,5), B(6,1), C(8,6)$，则平行四边形 $OABC$ 的面积等于原平行四边形的面积，并且$\overrightarrow{OA}=(2,5)$，$\overrightarrow{OB}=(6,1)$，$\overrightarrow{OC}=(8,6)$ 容易验证，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$O, A, B, C$四点构成一个以$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形，所以这个平行四边形的面积为

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=-28$$

的绝对值，等于 28.

31. 求一个顶点在原点，相邻顶点在$(1,0,-2), (1,2,4), (7,1,($的平行六面体的体积.

解 这个平行六面体的体积为行列式

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

的绝对值 22.

32. 设三角形的 3 个顶点坐标为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$，证明三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值.

证明 先将这个三角形平移到使原点作为它的一顶点的情形. 为此, 我们将每个顶点减去点 (x_1, y_1), 得到的点记为

$$A'(0,0), B'(x_2 - x_1, y_2 - y_1), C'(x_3 - x_1, y_3 - y_1),$$

则三角形 ABC 的面积等于三角形 $A'B'C'$ 的面积, 等于以 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ 为邻边的平行四边形的面积的一半. 而以 $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ 为邻边的平行四边形的面积四边形的面积等于

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

的绝对值. 将行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 按照第三列展开, 整理可得

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
&= x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_1 - x_1 y_1 \\
&= (x_2 - x_1) y_3 - (x_2 - x_1) y_1 - (y_2 - y_1) x_3 + (y_2 - y_1) x_1 \\
&= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \\
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

所以三角形 ABC 的面积等于$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$的绝对值.

习题五

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(8) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解 (1) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -6 \\ -5 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-28=(\lambda-7)(\lambda+4)$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=7,\lambda_2=-4.$

当$\lambda=7$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 是任意非零常数.

当$\lambda=-4$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$，其中$k$是任意非零常数.

(2) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-0.5 & 0.6 \\ -0.75 & \lambda-1.1 \end{vmatrix}=\lambda^2-1.6\lambda+1$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=0.8+0.6\mathrm{i},\lambda_2=0.8-0.6\mathrm{i}.$

当$\lambda_1=0.8+0.6\mathrm{i}$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.3+0.6\mathrm{i} & 0.6 \\ -0.75 & -0.3+0.6\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} -2+4i \\ 5 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k\begin{pmatrix} -2+4i \\ 5 \end{pmatrix}$,其中$k$是任意非零常数.

当$\lambda_2=0.8-0.6\mathrm{i}$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.3-0.6\mathrm{i} & 0.6 \\ -0.75 & -0.3-0.6\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} -2-4i \\ 5 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k\begin{pmatrix} -2-4i \\ 5 \end{pmatrix}$，其中$k$是任意非零常数.

(3) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -1-\lambda & \lambda-1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & - \\ 0 & \lambda & -3 \\ 0 & -3 & \lambda- \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-9\lambda)$$

$$=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=9.$

当$\lambda=0$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中$k$是任意非零常数;

当$\lambda=-1$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中$k$是任意非零常数;

当$\lambda=9$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，其中 k 是任意非零常数.

(4) 因为

$$
\begin{aligned}
|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 0 & -\lambda+3 & \lambda-3\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -4 & 2\\ 3 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 2\\ 3 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+2)\\
&= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1),
\end{aligned}
$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3.$

当$\lambda=1$时,

$$
(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},
$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 是任意非零常数;

当$\lambda=2$时,

$$
(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 3 & -2 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},
$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$，其中 k 是任意非零常数;

当$\lambda=3$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\3 & -1 & 0\\3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为

$k\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，其中 k 是任意非零常数.

(5) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -2\\-2 & \lambda-4 & -2\\-2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-8 & -2 & -2\\\lambda-8 & \lambda-4 & -2\\\lambda-8 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\1 & \lambda-4 & -2\\1 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\1 & \lambda-4 & 0\\1 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -2\\1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)(\lambda-2)^2,$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=8.$

当$\lambda=2$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\-2 & -2 & -2\\-2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$是不同时为零的常数;

当$\lambda=8$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_3$是任意非零常数.

(6) 因为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda&4&6\\1&\lambda&3\\-1&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&4&6\\1&\lambda&3\\0&\lambda-2&\lambda-2\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&4&6\\1&\lambda&3\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&-2&6\\1&\lambda-3&3\\0&0&1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&-2\\1&\lambda-3\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)\\&=(\lambda-2)^2(\lambda-1),\end{aligned}$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=1.$

当$\lambda=2$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$是不同时为零的常数;

当$\lambda=1$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&4&6\\1&1&3\\-1&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_3$是任意非零常数.

(7) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1&1\\-1&1&\lambda-1&1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\0&\lambda-2&0&2-\lambda\\0&0&\lambda-2&2-\lambda\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2&-1\\0&\lambda-2&2-\lambda&2-\lambda\\0&0&0&2-\lambda\\-1&1&\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\0&1&-1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&-2\\0&0&-1\\-1&\lambda+1&\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}\lambda-1&-3\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-4)$$

$$=(\lambda-2)^3(\lambda+2),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=2,\lambda_3=-2.$

当$\lambda=2$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_1,k_2,k_3$是不同时为零的常数;

当$\lambda=-2$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\xi_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_4\boldsymbol{\xi}_4$，其中$k_4$是任意非零常数.

(8) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & \lambda-3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)(\lambda-5),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=3,\lambda_3=5.$

当$\lambda=2$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$是不同时为零的常数;

当$\lambda=3$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\xi_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_3$是任意非零常数;

当$\lambda=5$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\xi_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_4\boldsymbol{\xi}_4$，其中$k_4$是任意非零常数.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是所有元素都为 1 的 n 阶矩阵，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与相应的特征向量.

解 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\cdots\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n.$

当 $\lambda=0$ 时，

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

所以矩阵的属于特征值的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$， 其中 $k_1,k_{\mathbf{2}}\cdots k_{n-}$ 是不同时为零的常数;

当 $\lambda=n$ 时，

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_n\boldsymbol{\xi}_n$，其中$k_n$是任意非零常数.

3. 设 5 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$，$\lambda_4=2, \lambda_5=3$. 求$\boldsymbol{A}$的对角元之和$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{55}$与$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|$.

解 由特征值的性质得到

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{55}=-2-2-2+2+3=-1;$$

$$|\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot 2\cdot 3=-48.$$

4. 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&a\end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=12$.

(1) 求常数 a; (2) 求$\boldsymbol{A}$的特征向量.

解 (1) 根据特征值的性质有 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和等于全部特征值之和，可得$7+7+a=3+3+12$, 所以$a=4$;

(2) 当$\lambda=3$时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4&-4&1\\-4&-4&1\\4&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$是不同时为零的常数;

当$\lambda=12$时,

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求解方程组得到它的一个基础解系为$\xi_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,所以矩阵的属于特征值的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_3$是任意非零常数;

5. 设ξ_1,ξ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量，证明$\xi_1+\xi_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

证明 设λ_1,λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同的特征值，ξ_1,ξ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$的分别属于λ_1,λ_2的特征向量. 用反证法证明结论. 假设$\xi_1+\xi_2$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2, \qquad ①$$

又因为

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2 \qquad ②$$

用等式①减去等式②，得到

$$(\lambda-\lambda_1)\xi_1+(\lambda-\lambda_2)\xi_2=0,$$

因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以ξ_1,ξ_2线性无关，于是$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$，从而$\lambda_1=\lambda_2$，与条件矛盾，所以$\xi_1+\xi_2$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

6. 设λ是方阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，$\boldsymbol{X}$ 是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的一个特征向量. 求$f(\boldsymbol{A})=3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$的一个特征值及相应的一个特征向量.

解 因为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} &= (3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} \\ &= 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{X} \\ &= 3\lambda^2\boldsymbol{X}-2\lambda\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{X} \\ &= (3\lambda^2-2\lambda+4)\boldsymbol{X}, \end{aligned}$$

所以$f(\boldsymbol{A})$的一个特征值为$f(\lambda)=3\lambda^2-2\lambda+4$，$\boldsymbol{X}$ 是$f(\boldsymbol{A})$的属于特征值$f(\lambda)$的一

个特征向量.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，并且 $|\boldsymbol{A}|=-1$. 证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

证明 因为

$$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I})|=|\boldsymbol{A}||(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}|=-|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|,$$

所以

$$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$$

因此，$\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

8. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$.

(1) 确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围；　　(2) 用(1)的结果证明 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

解 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，所以 $\lambda^2=1$，于是 $\lambda=\pm1$，因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围是 $\{-1,1\}$；

(2) 由(1)可知, 3 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以 $|3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq0$，因此 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&2\\3&6&4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值与特征向量.

解 因为

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-2&\lambda-5&-2\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-2\lambda+2&\lambda-1&0\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-2&1&0\\-3&-6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-1\\0&1&0\\-15&-6&\lambda-4\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-6&-1\\-15&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-10\lambda+9)\\&=(\lambda-1)^2(\lambda-9),\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1$(2重)和 $\lambda=9$.

当 $\lambda=1$ 时，$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-2&-4&-2\\-3&-6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得方程组的一个基

础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=1$的两个特征向量;

当$\lambda=9$时，$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7&-2&-1\\-2&4&-2\\-3&-6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，解得方程组的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，所以$\boldsymbol{\xi}_3$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=9$的一个特征向量;

因为$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda=1(2\text{重})\text{和}\lambda=9,$ 所以$|\boldsymbol{A}|=9$ 而$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以$\boldsymbol{A}^*$的特征值为$\lambda^*=9(2\text{重})\text{和}\lambda^*=1,$ $\boldsymbol{A}^*$的属于特征值$\lambda^*=9$的特征向量为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中$k_1,k_2$为不同时等于的数，$\boldsymbol{A}^*$的属于特征值$\lambda^*=1$的特征向量为$k_3\boldsymbol{\xi}_3$，其中$k_3$为任意非零常数.

10. 证明奇数阶反对称矩阵必有零特征值.

证明 设$\boldsymbol{A}$是$2t+1$阶反对称矩阵. 因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A},$ 所以

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^{2t+1}|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|.$$

因此，$|\boldsymbol{A}|=0,$ 所以矩阵必有零特征值.

11. 判断下列命题的真假，并且说明理由:

(1) 如果对某个向量有$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，那么$\lambda$是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值;

(2) 矩阵$\boldsymbol{A}$不可逆的充分必要条件是零为$\boldsymbol{A}$的一个特征值;

(3) 常数c是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值的充分必要条件是$(c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有非零解;

(4) 如果存在常数λ，使得$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，那么$\boldsymbol{X}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量;

(5) 如果ξ_1,ξ_2是$\boldsymbol{A}$的线性无关的特征向量，那么它们一定属于$\boldsymbol{A}$的不同特征值;

(6) 如果$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$，那么$\boldsymbol{A}$只有零特征值;

(7) 如果$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$，那么$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的一个特征值.

解 (1) 错误. 必须有$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$的条件;

(2) 正确. $\boldsymbol{A}$不可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow$零为$\boldsymbol{A}$的一个特征值;

(3) 正确. 这是特征值的等价命题;

(4) 错误. 必须有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 的条件;

(5) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&2\\3&6&4\end{pmatrix}$, 则 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ 是线性无关的, 但是 ξ_1,ξ_2 都属于特征值 $\lambda=1$;

(6) 正确.

(7) 错误. 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 但是 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\neq3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}$;　　　(2) 对正整数 n, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 (1) 因为 $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, 所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix};$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$, 所以

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot5^n-3^n&5^n-3^n\\-2\cdot5^n+2\cdot3^n&-5^n+2\cdot3^n\end{pmatrix}.$$

13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 当 a,b 满足什么条件时, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似?

解 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 一定有相同的特征值, 容易看出 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 2, 1, 0, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也一定是 2, 1, 0, 因此

$$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{vmatrix}=0,\qquad ①$$

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & -a & -1\\ -a & 0 & -b\\ -1 & -b & 0\end{vmatrix}=0, \qquad ②$$

由式①解得$a=b$. 将$a=b$代入由式②，解得$a=0$，所以，$a=b=0$时$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似。

14. 判断下列矩阵中，哪些可以相似对角化，并且对可以相似对角化的矩阵，求出相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$以及相似对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -3 & -5 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 4 & -3 & 0\\ -1 & -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

解 (1) 因为矩阵的特征值为$\lambda_1=7,\lambda_2=-4$，所以矩阵可以相似对角化.

(2) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

所以矩阵的特征值为$\lambda=1$(3 重)，而$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$， 故$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$，所以特征值$\lambda=1$的几何重数$3-\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})<3$，因此，矩阵不可以相似对角化.

(3) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & -3\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda+2 & 0\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+2)^2,$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$ (2重).

当$\lambda=-2$时，因为$\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}-4 & -4 & -3\\ 4 & 4 & 3\\ -3 & -3 & -3\end{pmatrix}=2$，所以特征值$\lambda=-2$的几何重数$3-\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})<2$，因此，矩阵不可以相似对角化.

(4) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3 & -3\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda+2 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+2)^2,$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$ (2重).

当$\lambda=-2$时，因为$\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ 3 & 3 & 3\\ -3 & -3 & -3\end{pmatrix}=1$，所以特征值$\lambda=-2$的几何重数$3-\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$，因此，矩阵可以相似对角化.

(5) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-5 & 0 & 0\\ -1 & -4 & \lambda+3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+3)^2,$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=5\,(2重)$，$\lambda_2=-3\,(2重)$.

当$\lambda=5$时，因为$\mathrm{r}(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-4&8&0\\1&2&0&8\end{pmatrix}=2$，所以特征值$\lambda=5$的几何重数$4-\mathrm{r}(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$；

当$\lambda=-3$时，因为$\mathrm{r}(-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}-8&0&0&0\\0&-8&0&0\\-1&-4&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}=2$ 所以特征值$\lambda=-3$的几何重数$4-\mathrm{r}(-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$. 因此，矩阵可以相似对角化.

(6) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&-1\\-1&\lambda-3&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&-1\\-1&\lambda-4&-1\\0&0&1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)^2(\lambda-5),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1\,(2重)$，$\lambda_2=5$.

当$\lambda=1$时，因为$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-1&-2&-1\\-1&-2&-1\end{pmatrix}=1$ 所以特征值$\lambda=1$的几何重数$3-\mathrm{r}(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$，因此，矩阵可以相似对角化.

15. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$，确定$a, b, c$的值，使得$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

解 容易解得矩阵的特征值为$\lambda_1=5\,(2重)$，$\lambda_2=-3\,(2重)$. 要使得$\boldsymbol{A}$可以相似对角化，特征值的几何重数必须等于它们的代数重数，即

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-a&0&0&0\\-2&-b&-1&0\\-2&-3&-c&-1\end{pmatrix}=2 \qquad ①$$

且

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-a&1&0&0\\-2&-b&0&0\\-2&-3&-c&0\end{pmatrix}=2 \qquad ②$$

同时成立时$\boldsymbol{A}$可以相似对角化. 当且仅当$a=b=0$等式①和②成立, 所以当$a=b=0$, c为任意常数时, 矩阵$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

16. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&5\\0&1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&0\\7&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 证明$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是不相似的.

证明 容易得到$\lambda=1$是矩阵$\boldsymbol{B}$的一个特征值, 但是由于

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-2&-5\\0&-1&-1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以$\lambda=1$不是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值, 所以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是不相似的.

17. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$.

(1) 证明$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都可以相似对角化, 并且相似于同一个对角矩阵;

(2) 求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

所以矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 6 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，而且都是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可以相似对角化，并且相似于同一个对角矩阵;

(2) 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以求得它的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$ 分别为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}(1,-1,2)$;

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以求得它的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$ 分别为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\mathrm{diag}(1,-1,2)$. 因此，令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶实矩阵. 证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的行列式小于零，那么 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. 如果 $ad-bc=1$，$|a+d|>2$，那么 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值为 λ_1,λ_2，因为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式小于零，所以 $\lambda_1\lambda_2<0$，于是 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化;

(2) 因为

$$|\lambda I-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2+(a+d)\lambda+ad-bc=\lambda^2+(a+d)\lambda+1,$$

从而关于 λ 的二次函数的判别数 $\Delta=(a+d)^2-4>0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不相等的实特征值，因此 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化;

19. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$，相应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 令 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(-2,-2,1)$，所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(-2,-2,1)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\mathrm{diag}(-2,-2,1)\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\0&1&-3\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

20. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{pmatrix}$ 是相似的.

(1) 求 x,y 的值;　　(2) 求行列式 $|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}|$ 的值.

解：(1) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式和特征值，而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{vmatrix}=-2,\ |\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{vmatrix}=-2y,$$

所以 $-2y=-2$，即 $y=1$，由特征值的性质有，$2+x=2+1-1$，即 $x=0$;

(2) $|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}|=|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{A}^{-1}||2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=-\dfrac{1}{2}\cdot 12=-6.$

21. 已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{A}^5$.

解 因为$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$所以 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，由$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$可以得到

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

22. 设$n\geq 2$是正整数，$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^{\mathrm{T}}$是$\mathbf{R}^n$中的两个非零向量，$b_1\neq 0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求$\boldsymbol{A}^2$；

(2) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量；

(3) 判断$\boldsymbol{A}$是否可以相似对角化. 如果可以，写出相似变换矩阵$\boldsymbol{P}$与对角矩阵$\boldsymbol{\varLambda}$；如果不可以，请说明理由.

解 (1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}=\left(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\boldsymbol{A}$;

(2) 设λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，则λ^2是$\boldsymbol{A}^2$的特征值. 由(1)得$\lambda^2=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$，所以$\lambda=0$或$\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

若$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$，则$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的n重特征值，此时$\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，求

解方程组得到一个基础解系

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-b_2\\ b_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}-b_3\\ 0\\ b_1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\dots,\boldsymbol{X}_{n-1}=\begin{pmatrix}-b_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ b_1\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{X}_{n-1}$.

若$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\neq 0$，则$\lambda=0$和$\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 分别是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重和 1 重特征值，此时$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=0$的全部特征向量仍然为$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{X}_{n-1}$. 因为$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，并且

$$\boldsymbol{A\alpha}=\left(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\boldsymbol{\alpha},$$

所以属于$\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 的特征向量为$\boldsymbol{X}_n=k\boldsymbol{\alpha}$.

(3) 由(2)的结果可知，若$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\neq 0$，则$\boldsymbol{A}$有 n 个线性无关的特征向量，矩阵$\boldsymbol{A}$可以相似对角化，此时

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\varLambda},$$

其中$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\dots,\boldsymbol{X}_n\right),\boldsymbol{\varLambda}=\operatorname{diag}\left(0,0,\dots,0,\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)$;

若$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$，则$\boldsymbol{A}$只有$n-1$个线性无关的特征向量，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

23. 已知$\boldsymbol{A}$是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的 3 元向量组，满足

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值；　(2) 求$\boldsymbol{A}$的特征向量(表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合).

解 (1) 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性无关的，所以矩阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆矩阵. 而等式

$$\boldsymbol{A\alpha}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3 , \boldsymbol{A\alpha}_2 = 4\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 , \boldsymbol{A\alpha}_3 = -2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$$

可以写为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

也即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

说明 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 相似，所以有相同的特征值．下面求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值．由

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1),$$

由此可得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda=1, \lambda=2, \lambda=3$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=1, \lambda=2, \lambda=3$.

(2) 由(1)可以得到，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量，则有 $\boldsymbol{B\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, 将 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 代入得到

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\boldsymbol{AP\alpha} = \lambda\boldsymbol{P\alpha},$$

因为 $\boldsymbol{P\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{P\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 可以求得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda=1$的一个特征向量.

当$\lambda=2$时，由$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-4&2\\3&-2&0\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$可以求得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=2$的一个特征向量.

当$\lambda=3$时，$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&-4&2\\3&-2&0\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$可以求得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda=3$的一个特征向量.

因此，矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

$$k_2\boldsymbol{\eta}_2=k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$k_3\eta_3 = k_3(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha$$

24. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ a & 1 & a-2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

(1) 求 a 的值;　　(2) 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解　(1) 由于 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -a & \lambda-1 & 2-a\\ 3 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 所以

$\lambda=1$ (二重) $\lambda=$,

当 $\lambda=1$时, 特征方程组的系数矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -a & 0 & 2-a\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 因此, $\mathrm{r}\left(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)=1$, 故 $a=1$.

(2) $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $\lambda=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. 令

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(1,1,2)$, 因此

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(1,1,2^n)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3-2^{n+1} & 0 & -1+2^{n+1}\\ -1+2^n & 1 & 1-2^n\\ 3-3\cdot 2^n & 0 & -1+3\cdot 2^n\end{pmatrix}.$$

25. 对下列实对称矩阵, 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

解 (1) 因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1\,(2重),\lambda_2=10.$

当$\lambda=1$时，因为$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}$的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

当$\lambda=10$时，因为$10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\ 4/5\\ 1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\xi}_3$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10).$

(2) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-4 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -1 & -1\\ \lambda-6 & \lambda-4 & -1\\ \lambda-6 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda-4 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-6)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 0\\ 1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)(\lambda-3)^2,$$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1=3\,(2重),\lambda_2=6.$

当 $\lambda=3$ 时，因为 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=6$ 时，因为 $6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以 $(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\xi}_3$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(3,3,6).$

(3) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8,$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda=4.$

当 $\lambda=1$ 时，因为 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=2$ 时，因为 $-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=4$ 时，因为 $4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，所以 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1\ \boldsymbol{\eta}_2\ \boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,-2,4)$.

(4) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & \lambda-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & \lambda-1 & -1\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1(2\text{重})$, $\lambda_2=3,\lambda_3=-1$.

当$\lambda=1$时，因为$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$的简化阶梯形为$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

所以$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=3$ 时，因为 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-1$ 时，因为 $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}$ 的简化阶梯形为 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\xi_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/2&1/2\\0&1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\\1/\sqrt{2}&0&-1/2&-1/2\\0&1/\sqrt{2}&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,3,-1)$.

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵，其特征值为$1,0,-2$，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值1和-2的特征向量分别是$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$和$(1,-1,a)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a 的值；　　(2) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解 因为$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$和$(1,-1,a)^{\mathrm{T}}$是 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值1和-2的特征向量，所以正交，即$1-2+a=0$,所以$a=1$;

(2) 由特征值的定义，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量，设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1-\ \ x_2+x_3=0, \end{cases}$$

这个方程组的一个基础解系为$(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，因此，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 k 为任意常数.

27. 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将$\dfrac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\dfrac{2}{3}$成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记为向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 验证$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值;

(3) 当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$时，求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

解 (1) 由于

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5}{6}x_n + \dfrac{2}{5}(\dfrac{1}{6}x_n + y_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{3}{5}(\dfrac{1}{6}x_n + y_n) \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{9}{10}x_n + \dfrac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{10}x_n + \dfrac{3}{5}y_n. \end{cases}$$

于是

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{A\eta}_1 = \boldsymbol{\eta}_1$，说明$\boldsymbol{\eta}_1$为$\boldsymbol{A}$的特征向量，且$\lambda_1 = 1$为对应的特征值;$\boldsymbol{A\eta}_2 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$，说明$\boldsymbol{\eta}$为$\boldsymbol{A}$的特征向量，且$\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$为对应的特征值．又$|\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$，说明$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$线性无关.

(3) 由$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$得$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.$\boldsymbol{A}$有两个线性无关的特征向量，则$\boldsymbol{A}$可以相似对角化．令$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2)$,则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1, \dfrac{1}{2})$,故

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + \dfrac{1}{2^n} & 4 - \dfrac{4}{2^n} \\ 1 - \dfrac{1}{2^n} & 1 + \dfrac{4}{2^n} \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-\dfrac{3}{2^n} \\ 2+\dfrac{3}{2^n} \end{pmatrix}.$$

习题六

1. 已知矩阵$\boldsymbol{A}$，写出对应的二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+10x_1x_2+6x_1x_3+8x_2x_3.$

2. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-x_1x_2+8x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+5x_2^2+9x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3+14x_2x_3$;

(3) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4)^2$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(5) $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 (1) 根据二次型的系数可知

$$a_{11}=5,\ a_{22}=3,\ a_{33}=2,$$

$$a_{12}=a_{21}=-\frac{1}{2},\ a_{13}=a_{31}=0,\ a_{23}=a_{32}=4.$$

因此，二次型f的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

(2) 根据二次型的系数可知

$$a_{11}=1,\ a_{22}=5,\ a_{33}=9,$$

$$a_{12}=a_{21}=3,\ a_{13}=a_{31}=5,\ a_{23}=a_{32}=7.$$

因此，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix};$$

(3) 首先将二次型写成一般形式,

$$\begin{aligned} f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=&\,b_1^2x_1^2+b_2^2x_2^2+b_3^2x_3^2+b_4^2x_4^2 \\ &+2b_1b_2x_1x_2+2b_1b_3x_1x_3+2b_1b_4x_1x_4+2b_2b_3x_2x_3+2b_2b_4x_2x_4+2b_3b_4x_3x_4, \end{aligned}$$

根据二次型的系数可知

$$a_{11}=b_1^2,\ a_{22}=b_2^2,\ a_{33}=b_3^2,a_{44}=b_4^2,$$

$$a_{12}=a_{21}=b_1b_2,\ a_{13}=a_{31}=b_1b_3,a_{14}=a_{41}=b_1b_4,$$
$$a_{23}=a_{32}=b_2b_3,a_{24}=a_{42}=b_2b_4,a_{34}=a_{43}=b_3b_4,$$

因此，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 & b_1b_4 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 & b_2b_4 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 & b_3b_4 \\ b_1b_4 & b_2b_4 & b_3b_4 & b_4^2 \end{pmatrix};$$

(4) 首先将二次型写成一般形式,

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1^2+5x_2^2+7x_3^2+8x_1x_2+10x_1x_3+12x_2x_3,$$

根据二次型的系数可知

$$a_{11}=3,\ a_{22}=5,\ a_{33}=7,$$

$$a_{12}=a_{21}=4,\ a_{13}=a_{31}=5,a_{23}=a_{32}=6_3,$$

因此，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

(1) 根据二次型的系数可知

$$a_{11}=1,\ a_{22}=1,\cdots,a_{nn}=1,$$

$$a_{i(i+1)}=a_{(i+1)i}=\frac{1}{2},\ i=1,2,\cdots,n-1,$$

因此，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 证明一个二次型没有交叉项的充分必要条件是二次型对应的矩阵为对角矩阵.

证明 必要性 设 n 元二次型没有交叉项，则对任意的 $i\neq j$, 有 $a_{ij}=0$, 于是二次型对应的矩阵为对角矩阵.

充分性 设二次型对应的矩阵为对角矩阵，即当 $i\neq j$ 时，有 $a_{ij}=0$, 所以二次型没有交叉项.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵. 证明如果对任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 都有 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵.

证明 因为对任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 都有 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$, 所以取

$$\boldsymbol{X}=(0,\cdots 0,\underset{i}{1},0,\cdots 0)^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,n,$$

可以得到 $a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$; 再取

$$\boldsymbol{X}=(0,\cdots 0,\underset{i}{1},0,\cdots 0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n,i\neq j,$$

可以得到 $a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0$, 而 $a_{ii}=0,a_{jj}=0$, 且 $a_{ij}=a_{ji}$, 所以对所有的 $i\neq j$, 有 $a_{ij}=0$, 因此，$\boldsymbol{A}$ 为零矩阵.

5. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4+x_1)^2$ 的秩.

解 由于

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4)&=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+x_3^2+x_4^2-2x_3x_4+x_4^2+x_1^2+2x_1x_4 \\ &=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_4+2x_1x_4, \end{aligned}$$

于是，二次型 f 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

它的阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以二次型的矩阵的秩为 3, 因此二次型的秩为 3.

6. 用配方法将下列二次型化为标准形:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_2x_3$;

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_2x_3$

$$=(x_1+x_2)^2+x_2^2-6x_2x_3$$
$$=(x_1+x_2)^2+(x_2-3x_3)^2-9x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=x_2-3x_3 \\ y_3=x_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2-3y_3 \\ x_2=y_2+3y_3 \\ x_3=y_3. \end{cases}$$

二次型经过非退化线性替换得到的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2-9y_3^2;$$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

$$=x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3+3x_2^2+5x_3^2$$

$$\begin{aligned}&=(x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2+3x_2^2+5x_3^2\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-x_3^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+3y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3.\end{cases}$$

二次型经过非退化线性替换得到的标准形为

$$f=y_1^2+2y_2^2-y_3^2.$$

(3) 令

$$\begin{cases}y_1=x_2\\y_2=x_1\\y_3=x_3,\end{cases}$$

则

$$f=y_1^2+y_3^2-2y_1y_2+4y_1y_3$$

$$\begin{aligned}&=y_1^2-2y_1y_2+4y_1y_3+y_3^2\\&=(y_1-y_2+2y_3)^2-y_2^2-4y_3^2+4y_2y_3+y_3^2\\&=(y_1-y_2+2y_3)^2-(y_2^2-4y_2y_3)-3y_3^2\\&=(y_1-y_2+2y_3)^2-(y_2-2y_3)^2+y_3^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}z_1=y_1-y_2+2y_3\\z_2=y_2+2y_3\\z_3=y_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}y_1=z_1+z_2\\y_2=z_2+2z_3\\y_3=z_3.\end{cases}$$

因此，二次型经过非退化线性替换$\begin{cases} x_1 = z_2 + 2z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$ 得到的标准形为

$$f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2;$$

(4) 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3. \end{cases}$$

因此，二次型经过非退化线性替换$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$得到的标准形为

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

7. 对下列矩阵，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;　　　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix};$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则有

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 1 & 1/2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶对称矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}$, 判断下列结论是否成立. 如果成立, 则给出证明; 如果不成立, 则举出反例.

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$;

(2) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$.

解 (1) 错误. 取

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 14 & 20\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}9 & 14\\ 14 & 19\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ 不是合同矩阵;

(2) 正确. $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{D}$, 于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$, 所以

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}.$$

9. 证明如果对所有的 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$, 都有 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 是合同的, 那么准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$$

也是合同的.

证明 设 $i\in\{1,2,\cdots,s\}$, $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{B}_i$ 是合同的, 于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_i$, 使得

$P_i^{\mathrm{T}}A_iP_i = B_i$，所以

$$\begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}A_1P_1 & & & \\ & P_2^{\mathrm{T}}A_2P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s^{\mathrm{T}}A_sP_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$$

是合同的.

10. 用初等变换法将下列二次型化为标准形，并且求出所用的非退化线性替换：

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

(4) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$.

解 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&-9\\1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-9\\1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-9\end{pmatrix}.$$

因此，经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X})=y_1^2+y_2^2-9y_3^2;$$

(2)

$$\begin{pmatrix}2&2&4\\2&6&3\\4&3&9\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&4\\2&4&3\\4&-1&9\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&4\\0&4&-1\\4&-1&9\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-1\\4&-1&1\\1&-1&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-1\\0&-1&1\\1&-1&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&-1&3/4\\1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&3/4\\1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-9/4&1/4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&4\\2&6&3\\4&3&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}.
$$

$$
=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&3/4\end{pmatrix}.
$$

因此，经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，得到的二次型 f 的标准形为

$$
f(\boldsymbol{X})=2y_1^2+4y_2^2+\frac{3}{4}y_3^2;
$$

(3)

$$
\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&4\\1&4&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\6&0&4\\1&4&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&6&1\\6&0&4\\1&4&0\\1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\6&-18&4\\1&1&0\\1&-3&0\\0&1&0\\1&-3&1\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-18&1\\1&1&0\\1&-3&0\\0&1&0\\1&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&1\\1&1&-1/2\\1&-3&-1/2\\0&1&0\\1&-3&1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&1\\0&1&-1/2\\1&-3&-1/2\\0&1&0\\1&-3&1/2\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&0\\0&1&-4/9\\1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&0\\0&0&-4/9\\1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix},
$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的，并且

$$
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&1&-3\\-2/3&1/18&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&4\\1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}.
$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-18&0\\0&0&-4/9\end{pmatrix}.$$

因此, 经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$, 得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X})=2y_1^2-18y_2^2-\frac{4}{9}y_3^2;$$

(4)

$$\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2\\4&1&-5\\-2&-1&3\\1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&1&-5\\-2&-1&3\\1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\-2&-1&1\\1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\\1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\\1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{P}$ 是非奇异的, 并且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此, 经过非退化的线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$, 得到的二次型 f 的标准形为

$$f(\boldsymbol{X})=2y_1^2+y_2^2.$$

11. 用正交替换法将下列二次型化为标准形, 并且求出所用非退化线性替换:

(1) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$;

(3) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(4) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

解 (1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1=1\,(2重),\lambda_2=10$.

求 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得到 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

求 $(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得到 $(10\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

用施密特方法将$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = -\frac{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

令

$$Q = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型$f(x_1, x_2, x_3)$作正交替换$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

(2) 写出二次型$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0&1\\-1&\lambda-1&1&0\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0&1\\0&\lambda-1&0&\lambda-1\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\lambda-1&0\\0&\lambda-1&0&\lambda-1\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&\lambda-1&-1\\1&0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&\lambda-1&-1\\0&0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&1\\1&\lambda-1&-1\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&0&1\\0&\lambda-1&-2\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)(\lambda+1),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1(2\text{重})$, $\lambda_2=3, \lambda_3=-1.$

求$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 的简化阶梯形为，所以

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

求 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．用初等行变换将 $3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

求 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系．用初等行变换将 $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&0&1\\-1&-2&1&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是正交的，所以将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&1/2&1/2\\0&1/\sqrt{2}&1/2&-1/2\\1/\sqrt{2}&0&-1/2&-1/2\\0&1/\sqrt{2}&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵．对二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 作正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 - y_4^2.$$

(3) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)^2,$$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1 = -1\,(2重), \lambda_2 = 2.$

求 $(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到 $(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到 $(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

用施密特方法将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型$f(x_1,x_2,x_3)$作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2.$$

(4) 写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

因为

$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2-2\lambda & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & 2 \\ -10 & \lambda-4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 \\ -10 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6),
\end{aligned}
$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6.$

求$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$
\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

得到$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$
\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

求$(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.用初等行变换将$6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$
6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

得到$(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$
\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

求$(-6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$-6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ -2 & -10 & -4\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得到$(-6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix},$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型$f(x_1,x_2,x_3)$作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$$

12. 用正交替换法将下列方程化为标准方程，并且指出其在平面或直角坐标系中图形的名称:

(1) $5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2=8$;

(2) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3=4$.

解 (1) 写出方程左端的二次型$f=5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 3\\ 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-8),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=8$.

求$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求$(8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 用初等行变换将$8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到$(8\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=2y_1^2+8y_2^2 .$$

所以标准方程是

$$\frac{y_1^2}{4}+y_2^2=1,$$

这是平面上的一个椭圆.

(2) 写出方程左端的二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2-6x_1x_2$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}.$$

因为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\lambda-2&0\\2&2\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

所以矩阵的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-2.$

求$(I-A)X=0$的一个基础解系．用初等行变换将$I-A$化为简化阶梯形

$$I-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(I-A)X=0$的一个基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

求$(4I-A)X=0$的一个基础解系．用初等行变换将$4I-A$化为简化阶梯形

$$4I-A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(4I-A)X=0$的一个基础解系

$$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$$

求$(-2I-A)X=0$的一个基础解系．用初等行变换将$-2I-A$化为简化阶梯形

$$-2I-A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-2/3 & 2/3 & 1/3\\-1/3 & -2/3 & 2/3\\2/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵. 对二次型f作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得到的标准形为

$$f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$$

所以标准方程是

$$\frac{y_1^2}{4}+y_2^2-\frac{y_3^2}{2}=1,$$

这是一个单叶双曲面.

13. 设$\boldsymbol{A}$是一个秩为r的n阶实对称矩阵，证明:

(1) $\boldsymbol{A}\simeq\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$, 其中$d_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,r$;

(2) $\boldsymbol{A}$可以表示为r个秩为1 的对称矩阵之和.

证明 (1) 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，所以存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}_1$，使得

$$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\mathrm{diag}(d_1',d_2',\cdots,d_n'),$$

由于$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 所以$d_1',d_2',\cdots,d_n'$中只有$r$个数不为零，设为$d_{i_1}',d_{i_2}',\cdots,d_{i_r}'$，令

$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{E}_n(i_1\leftrightarrow 1)\boldsymbol{E}_n(i_2\leftrightarrow 2)\cdots\boldsymbol{E}_n(i_r\leftrightarrow r),$$

则

$$\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\mathrm{diag}(d_{i_1}',d_{i_2}',\cdots,d_{i_r}',0,\cdots,0),$$

令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2,\quad d_1=d_{i_1}^{'},d_2=d_{i_2}^{'},\cdots,d_r=d_{i_r}^{'},$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0);$$

(2) 因为

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0),$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{diag}(d_1,0,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(d_1,0,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}+\cdots+(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_r,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1},\end{aligned}$$

而对所有的$i\in\{1,2,\cdots,r\}$，$\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_i,0,\cdots,0)$的秩为 1，故

$$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(0,0,\cdots,d_i,0,\cdots,0)\boldsymbol{P}^{-1}$$

是秩为 1 的对称矩阵. 因此，$\boldsymbol{A}$可以表示为r个秩为 1 的对称矩阵之和.

14. 证明如果实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$能分解成为两个实一次齐次式的乘积，即$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)$，那么$f$的秩为 2，符号差为零，或者$f$的秩为 1.

证明 设二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n),$$

分两种情况讨论.

情况 1 向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$与$(b_1,b_2,\cdots,b_n,)^{\mathrm{T}}$是线性无关的. 不妨假设$a_1,a_2$与$b_1,b_2$不成比例，于是作非退化线性替换

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n\\y_3=x_3\\\quad\vdots\\y_n=x_n,\end{cases}$$

则二次型化为

$$f=y_1y_2,$$

进一步，令

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_2 \\ y_2 = z_1 - z_2 \\ y_3 = z_3 \\ \quad \vdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

得二次型的规范形

$$f = z_1^2 - z_2^2,$$

所以，此时 f 的秩为 2，符号差为零；

情况 2　向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $(b_1, b_2, \cdots, b_n,)^{\mathrm{T}}$ 是线性相关的，即存在常数 k 使得

$$(b_1, b_2, \cdots, b_n,)^{\mathrm{T}} = k(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}},$$

则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2,$$

因为 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ 是一次齐次式，故 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零，不妨假设 $a_1 \neq 0$，作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \quad \vdots \\ y_n = x_n, \end{cases}$$

则二次型化为

$$f = y_1^2,$$

所以，此时 f 的秩为 1.

15. 将下列二次型在复数集上化为规范形，并且求出所用的非退化线性替换:

(1) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(3) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

(4) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

解 (1) 由 10(1), 取

$$P_1=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/3i\end{pmatrix},$$

令

$$P=P_1P_2=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/3i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&i\\0&1&-i\\0&0&1/3i\end{pmatrix},$$

作线性替换 $X=PZ$, 得到的二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2+z_3^2;$$

(2) 由 10(2), 取

$$P_1=\begin{pmatrix}1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0\\0&1/2&0\\0&0&2/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

令

$$P=P_1P_2=\begin{pmatrix}1&-1&-9/4\\0&1&1/4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0\\0&1/2&0\\0&0&2/\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/2&-9/2\sqrt{3}\\0&1/2&1/2\sqrt{3}\\0&0&2/\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

作线性替换 $X=PZ$, 得到的二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2+z_3^2;$$

(3) 由 10(3), 取

$$P_1=\begin{pmatrix}1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0\\0&1/\sqrt{18}i&0\\0&0&3/2i\end{pmatrix},$$

令

$$P=P_1P_2=\begin{pmatrix}1&-3&-2/3\\0&1&1/18\\1&-3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0\\0&1/\sqrt{18}i&0\\0&0&3/2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-3/\sqrt{18}i&i\\0&1/\sqrt{18}i&1/12i\\1/\sqrt{2}&-3/\sqrt{18}i&1/2i\end{pmatrix},$$

作线性替换 $X=PZ$, 得到的二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2+z_3^2;$$

(4) 由 10(4), 取

$$P_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

令

$$P=P_1P_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

作线性替换 $X=PZ$, 得到的二次型 f 在复数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2.$$

16. 将下列二次型在实数集上化为规范形, 并且求出所用的非退化线性替换:

(1) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$;

(3) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(4) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

解 (1) 由 11(1), 取

$$P_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{10}\end{pmatrix},$$

令

$$P=P_1P_2=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3\sqrt{10}\\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3\sqrt{10}\end{pmatrix},$$

作线性替换 $X=PZ$, 得到的二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2+z_3^2;$$

(2) 由 11(2), 取

$$P_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

令

$$\begin{aligned}P=P_1P_2&=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2\sqrt{3} & -1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{3} & -1/2\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2\sqrt{3} & 1/2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

作线性替换 $X=PZ$，得到的二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2;$$

(3) 由 11(3)，取

$$P_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

令

$$\begin{aligned}P=P_1P_2&=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

作线性替换 $X=PZ$，得到的二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2-z_2^2-z_3^2;$$

(4) 由 11(4)，取

$$P_1=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

令

$$\begin{aligned}P=P_1P_2&=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6}\\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5} & 1/6\sqrt{5} & 1/6\\ 0 & 5/6\sqrt{5} & -1/6\\ 1/\sqrt{5} & 1/3\sqrt{5} & 1/3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

作线性替换 $X=PZ$，得到的二次型 f 在实数集上的规范形为

$$f(X)=z_1^2+z_2^2-z_3^2.$$

17. 证明所有的 n 阶实对称矩阵按合同分类，共有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

证明 实对称矩阵合同的充分必要条件是他们有相同的秩和正惯性指数，于是可以按照秩和正惯性指数将矩阵进行分类.

当矩阵的秩为 0 时，这时正惯性指数只有 1 种可能，即 $p=0$;

当矩阵的秩为 1 时，这时正惯性指数有 2 种可能，即 $p=0, p=1$;

当矩阵的秩为 2 时，这时正惯性指数有 3 种可能，即 $p=0, p=1, p=2$;

…

当矩阵的秩为 n 时，这时正惯性指数有 $n+1$ 种可能，即 $p=0, p=1,\cdots, p=n$;

因此，n 阶实对称矩阵按合同分类，共有 $1+2+\cdots+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

18. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(1) A 与 B 在复数集上是否合同？A 与 C 在复数集上是否合同？说明理由;

(2) A 与 B 在实数集上是否合同？A 与 C 在实数集上是否合同？说明理由.

解 (1) 计算可得 $\mathrm{r}(A)=3, \mathrm{r}(B)=3, \mathrm{r}(C)=2$，因为 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$，所以 A 与 B 在

复数集上是合同的，而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{C})$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 在复数集上不是合同的;

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $1,-2,3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数等于 3，而 $\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数等于 2，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在实数集上不是合同的，而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \neq \mathrm{r}(\boldsymbol{C})$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 在实数集上不是合同的.

19. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 在正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下的标准型为 $6y_1^2$，并且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$. 求原二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解 因为二次型经过正交替换得到的标准形为 $6y_1^2$，所以 $\lambda=0$ 是二次型对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列与 $\boldsymbol{X}$ 是正交的，即

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{3}}x_3=0,$$

这个方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

用施密特方法将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 规范化，得到

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$
$$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

令

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(6,0,0)$，因此

$$A=Q\mathrm{diag}(6,0,0)Q^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

20. 设实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的正、负惯性指数都不为零. 证明存在非零向量 X_1, X_2, X_3，使得 $X_1^{\mathrm{T}}AX_1>0, X_2^{\mathrm{T}}AX_2=0, X_3^{\mathrm{T}}AX_3<0.$

证明 因为实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的正、负惯性指数都不为零，所以经过非退化线性替换 $X=PY$ 将其化为规范形

$$f=b_1y_1^2+\cdots+b_py_p^2-b_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-b_ry_r^2,$$

其中 $p\geq 1, r-p\geq 1$，分别取

$$Y_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_2=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{r\text{个}},0\cdots,0)^{\mathrm{T}},$$

$$Y_3=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{p\text{个}},0\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

则有

$$Y_1^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)Y_1>0,$$
$$Y_2^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)Y_2=0,$$
$$Y_3^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}AP)Y_3<0,$$

令

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_1,\ \boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_2,\ \boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_3,$$

于是

$$\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1>0,\ \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2=0,\ \boldsymbol{X}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3<0.$$

21. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正、负惯性指数都为 1, 求参数 a.

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix},$$

因为二次型的正、负惯性指数都为 1, 所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & -1+a\\ 0 & -1+a & 1-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & -1+a\\ 0 & 0 & -(a-1)^2(a+2)\end{pmatrix},$$

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 可以得到 $a=-2$.

22. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经过正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化成 $y_1^2+2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 是 3 元向量, $\boldsymbol{Q}$ 是 3 阶正交矩阵, 求常数 a, b.

解 正交替换前后, 二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

容易看到, 设 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 0, 1, 2, 它们也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=0, \qquad ①$$

将 $\lambda=0$ 代入①式得 $a=b$, 将 $\lambda=1$ 代入①式得 $a=0$, 因此, $a=b=0$.

23. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$, 求满足关系式 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$ 的实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵. 由

$$
\begin{aligned}
|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-6 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda-4)(\lambda-9),
\end{aligned}
$$

所以特征值为 0, 4, 9. 分别求出它们相应的一个特征向量,

$$
\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.
$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 规范化，得到

$$
\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.
$$

令

$$
\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/3 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/3 \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/3\end{pmatrix},
$$

则

$$
\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(0,4,9),
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(0,4,9)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \\
&= \left(\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(0,2,3)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(0,2,3)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\right),
\end{aligned}
$$

因此

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(0,2,3)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

24. 判断下列二次型是否正定:

(1) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+12x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

(3) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

(4) $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 (1) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=6,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}6&-2\\-2&5\end{pmatrix}=34,$$

$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}=162.$$

顺序主子式全部大于零, 所以二次型是正定的;

(2) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&6&-2\\6&2&-4\\-2&-4&-1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1&6\\6&2\end{pmatrix}=-34,$$

2 阶顺序主子式小于零, 所以二次型不是正定的;

(3) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}=5,$$

$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=8.$$

顺序主子式全部大于零，所以二次型是正定的;

(4) 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1/2\\ & & & 1/2 & 1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}=\frac{3}{4},$$

$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2},$$

利用数学归纳法可以证明

$$\Delta_m=\det\begin{pmatrix}1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1/2\\ & & & 1/2 & 1\end{pmatrix}=\frac{m+1}{2^m},m=1,2,\cdots,n,$$

顺序主子式全部大于零，所以二次型是正定的.

25. 判断下列矩阵是否正定:

(1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;　　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 26 & 0 \\ 4 & 0 & 26 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;　　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

解 (1) 矩阵的顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = -2,$$

1 阶顺序主子式小于零，所以矩阵不是正定的;

(2) 矩阵的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = 1,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 26 \end{pmatrix} = 17,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 26 & 0 \\ 4 & 0 & 26 \end{pmatrix} = 26.$$

顺序主子式全部大于零，所以矩阵是正定的;

(3) 矩阵的顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = 1,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -4,$$

2 阶顺序主子式小于零，所以矩阵不是正定的;

(4) 矩阵的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = a_{11} = 2,$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 6,$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 14.$$

顺序主子式全部大于零，所以矩阵是正定的;

26. 确定参数 a 的取值范围，使得下列二次型是正定的:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + ax_2^2 + ax_3^2$;

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

解 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & a & 0\\ 4 & 0 & a\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & a\end{pmatrix}=a-9,$$

$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & a & 0\\ 4 & 0 & a\end{pmatrix}=a^2-25a.$$

由 $\Delta_2>0$ 可得 $a>9$；由 $\Delta_3>0$ 可得 $a>25$ 或 $a<0$．于是 A 为正定矩阵的充分必要条件是 a 满足下列条件

$$a>25.$$

因此，当 $a>25$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型.

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=a_{11}=1,$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}=1-a^2,$$

$$\Delta_3=\det\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}=-5a^2-4a.$$

由 $\Delta_2>0$ 可得 $-1<a<1$；由 $\Delta_3>0$ 可得 $-\dfrac{4}{5}<a<0$．于是 A 为正定矩阵的充分必要条件是 a 满足下列条件

$$-\frac{4}{5}<a<0.$$

因此，当$-\frac{4}{5}<a<0$时，$f(x_1,x_2,x_3)$为正定二次型.

27. 设

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

是n元二次型，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为实数．当$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足什么条件时，

$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$为正定二次型?

解　因为二次型对任意不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，都有$f(k_1,k_2,\cdots,k_n)\geq 0$，所以二次型正定的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0 \\ x_n+a_nx_1=0 \end{cases} \qquad ①$$

只有零解．而方程组①有解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

即$1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$．因此，当$1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$时，$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$为正定二次型.

28. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$为2阶实矩阵，并且$\det\boldsymbol{A}\neq 0$, $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$．证明:

(1) 如果$\det\boldsymbol{A}>0$，并且$a>0$，那么f是正定的;

(2) 如果$\det\boldsymbol{A}>0$，并且$a<0$，那么f是负定的;

(3) 如果$\det\boldsymbol{A}<0$，那么f是不定的.

证明　(1) 因为二阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$的各阶顺序主子式

$$\Delta_1=a,\qquad \Delta_2=\det\boldsymbol{A}$$

都是大于零的，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的，即二次型 f 是正定的；

(2) 因为 $\det \boldsymbol{A} = ad - b^2 > 0$, 并且 $a < 0$, 所以 $d < 0$, 设 λ_1, λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由特征值的性质，有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d < 0,$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = ad - b^2 > 0,$$

于是 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 所以二次型 f 的负惯性指数为 2，即 f 是负定的.

(3) 因为 $\det \boldsymbol{A} < 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值的乘积 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, 即 λ_1, λ_2 是一正一负，因而二次型 f 的正、负惯性指数都为 1，所以 f 是不定的.

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵;

(3) $\boldsymbol{A}^k$ 是正定矩阵, k 为正整数;

(4) $s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，其中 s, t 为正数.

证明 (1)~(3) 由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵可知，$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，$|\boldsymbol{A}| > 0$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 全部大于零. 于是由特征值的性质，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_i^{-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$，全部大于零；$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $|\boldsymbol{A}| \lambda_i^{-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$，全部大于零；$\boldsymbol{A}^k$ 的特征值为 $\lambda_i^k (i = 1, 2, \cdots, n)$，全部大于零. 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^k$ 是正定矩阵；

(4) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_i, \mu_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 全部大于零，所以，当 s, t 为正数时，$s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$ 的特征值 $s\lambda_i + t\mu_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 也全部大于零，因此，$s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

30. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵. 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定的，则对任意的 m 元列向量 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$ 都有，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} > 0$, 即 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} > 0$, 于是必有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$, 因而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 只有零解，

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m.$

充分性 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m.$ 显然 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵. 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，于是当 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时，一定有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，即对任意的 m 元列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}>0,$$

因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定的.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，则 λ 满足

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0,$$

即

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0,$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda\in\{1,2,3\}$，全部大于零，所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

32. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 实矩阵. 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

证明 必要性 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，则对任意的 n 元列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 都有，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}>0$，即 $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})>0$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以必有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，因而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$.

充分性 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$. 因为 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵. 因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=n$，所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，于是当 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时，一定有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，即对任意的 n 元列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})>0,$$

因此，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

33. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵. 证明如果 $a>0$，那么 $a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定的.

证明 因为

$$(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=(a\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},$$

所以 $a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

对于任意 n 元列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0,$$

所以 $a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定的.