

线性代数 A 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 计算行列式 $\left| \frac{1}{3} A^* + 2I \right|$ 。

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AX = A + 2X$, 求 X 。

三、(10 分) 已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明: $1, 1+2x, 1+2x+3x^2, 1+2x+3x^2+4x^3$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+2x, 1+2x+3x^2, 1+2x+3x^2+4x^3$ 的过渡矩阵, 以及 $h(x) = 1 - x - x^2 + x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、(10 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$ 。

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组;

(2) 求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个标准正交基。

五、(10 分) 设 A 是 5 阶方阵, 且已知存在 5 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

试写出 A 的初等因子, 同时判断 P 的哪几列是 A 的特征向量。

六、(10 分) 在多项式空间 $R[x]_4$ 中定义变换 σ :

$$\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_3 - a_0 + a_2x + (a_0 + a_1)x^3$$

(1) 证明: σ 是 $R[x]_4$ 上的线性变换;

(2) 求 σ 在 $R[x]_4$ 的自然基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵, 并判断 σ 是否可逆。

七、(10 分) 假设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵, 证明: $\text{秩}(A^T A) = \text{秩}(A)$

八 (10 分) 已知 $\xi = (1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量,

(1) 确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(2) 判断 A 是否可以相似对角化, 说明理由。

九、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

(1) 若 f 正定, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a=2$ 时, 将 f 用正交变换化成标准形, 并写出所用正交变换。

十、(10 分) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 个线性无关的向量, 满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$$

(1) 证明: $|A|=1$;

(2) 证明 A 与 A^{-1} 相似。