课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}0&\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}&0\end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

试讨论：当 λ 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(-2,1,0,3),\ \ \alpha_2=(1,-3,2,4),\ \ \alpha_3=(3,0,2,-1),\ \ \alpha_4=(2,-2,4,6)$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基: $\beta_1=(0,1,1),\beta_2=(1,0,1),\beta_3=(1,1,0)$。

(1) 求 $\boldsymbol{R}^3$ 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(2) 求向量 $\alpha=(2,-1,3)$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

六、（10 分）设 X_0 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,X_2,\cdots,X_t$ 是其导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，证明：$X_0,X_1,X_2,\cdots,X_t$ 线性无关。

七、（10 分）已知线性方程组 $AX=0$ 的通解为 $k_1(1,0,0)^T+k_2(1,1,0)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-4x_2x_3$。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）设 α,β 为 3 元单位列向量，且 $\alpha^T\beta=0$，记 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$。证明：

(1) 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解；

(2) A 相似于矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

十、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 都是 3 元向量，且 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 线性无关。

(1) 证明：存在非零向量 γ，使得 γ 既可由 α_1,α_2 线性表出，又可由 β_1,β_2 线性表出；

(2) 当 $\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,5,3)^T$，$\beta_1=(2,3,-1)^T,\beta_2=(-1,0,3)^T$ 时，求出所有既可由 α_1,α_2 线性表出，又可由 β_1,β_2 线性表出的向量。