北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________学号_________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}$ 的值。

解

$$\begin{vmatrix} & 3A^* \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3\times 3}\left|3A^*\right|\left|B\right| = -3^3\left|\left|A\right|A^{-1}\right|\left|B\right| = -27\left|A\right|^2\left|B\right| = -27\cdot(-1)^2\cdot 1 = -27$$

二、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，　其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

（1）证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆；（2）求 $\boldsymbol{X}$。

解　由　$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ 得　X（$A-2I$）$=B$

$A-2I=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$|A-2I|=-1$，故 $A-2I$ 可逆。所以 $X=B(A-2I)^{-1}$

而　　$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&9&-6\\-1&8&5\end{pmatrix}$$

三、（10 分）已知平面上三条直线的方程 $\boldsymbol{x-y+a=0,2x+3y-1=0,x-ay-\frac{1}{2}=0}$

讨论的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&-1&-a\\2&3&1\\1&-a&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&-a\\0&5&1+2a\\0&1-a&\frac{1}{2}+a\end{bmatrix}=\tilde{\boldsymbol{B}}$$

若 $a=1$，上述矩阵已化为阶梯形，此时，方程组无解，三条直线中第一条与第三条平行但不重合，与第二条相交. 若 $a\neq1$，继续进行初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}1&-1&-a\\0&5&1+2a\\0&1-a&\frac{1}{2}+a\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&a\\0&1&1+2a\\0&0&(2a+1)(2a+3)\end{bmatrix}$$

对应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases}2x+3y=1\\ 5y=2a+1\\ 0=(2a+1)(2a+3)\end{cases}$$

当 $a\neq-\frac{1}{2}$ 且 $a\neq-\frac{3}{2}$ 时，方程组无解. 此时，三条直线不交于一点，但任意两条直线都相交.

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，方程组有唯一解 $x=-\frac{1}{2}$，$y=0$. 此时，三条直线交于点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$，且任意两条直线都不重合.

当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，方程组有唯一解 $x=\frac{11}{10}$，$y=-\frac{2}{5}$. 此时，三条直线交于点$\left(\frac{11}{10},-\frac{2}{5}\right)$，且其中后两条直线重合.

四、（10 分）已知

$\alpha_1=(1,2,3,-4)^T$， $\alpha_2=(2,3,-4,1)^T$， $\alpha_3=(2,-5,8,-3)^T$， $\alpha_4=(3,-4,1,2)^T$ （1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：$\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&3&-5&-4\\3&-4&8&1\\-4&1&-3&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

所以秩为 3，$\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

五、（10 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间$\boldsymbol{R}^3$的一个基，$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$， $\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3$，$\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$。

(1) 证明β_1,β_2,β_3为$\boldsymbol{R}^3$的一个基;

(2) 求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(3) 求向量$\gamma=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$关于基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的坐标。

解：

（1）

$$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ 可逆，故β_1,β_2,β_3为$\boldsymbol{R}^3$的一个基;

（2）过度矩阵 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$

（3）坐标

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\6.5\\-2\end{bmatrix}$$

六、（10 分）已知$\alpha_1=(1,0,-1)$，$\alpha_2=(2,2,0)$，$\alpha_3=(0,1,1)$。求生成子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个标准正交基。

解： $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

所以α_1，α_2是$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个基。取

$$\beta_1=\alpha_1=(1,0,-1)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)$$

单位化

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$\gamma_2=\frac{1}{2}(1,2,1)$$

为成生子空间的一组基。

七、（10 分）设为A正交矩阵,且$|A|=-1$，求证$\lambda=-1$为的A一个特征值。

证明：因为

$$|A+I|=|A+AA^T|=|A||I+A^T|=-|I^T+A^T|=-|A+I|,$$

所以

$$|A+I|=0$$

所以$\lambda=-1$为的A一个特征值。

八、

由方程

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4-4\lambda & 4-(\lambda-2)(\lambda-5) \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1(二重)和 10.

对于 $\lambda=1$,特征方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

正交化

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{X}_2-\frac{(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1$$

$$=(2,0,1)^{\mathrm{T}}+\frac{4}{5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$\frac{2}{5}$ $$=\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}}$$

再单位化

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$$

对 $\lambda=10$,特征方程组

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

特征向量

$$\boldsymbol{X}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$$

单位化

$$\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$,得

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

九、（10 分）设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_1\\ 3\boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 都是三维行向量，且已知行列式

$|\boldsymbol{A}|=18, |\boldsymbol{B}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$。

解 两矩阵相减，其对应行分别相减，因而

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_2\\ 3\boldsymbol{\gamma}_3-\boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ 2\boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}.$$

上述行列式的第 1 行为两分行之差，因而可拆分为两行列式之差，得到

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_2\\ 3\boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\gamma}_3\end{vmatrix}$$

$$=(1/3)\times 18-2\times 2=2.$$

十、（10 分）设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r} \quad (\boldsymbol{0} < \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n})$。

(1) 试确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式 $|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}|$ 的值。

解 (1) 设 A 的特征值为 λ，则由 $A^2 - A = 0$

得 $\lambda^2 - \lambda = 0$ 因而 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$

(2) 由 $r(A)=r$，得 $q_{\lambda=0} = n - r$

$$\left.\begin{array}{l} A^2 - A = 0 \Rightarrow -A(I - A) = 0 \\ \Rightarrow r(A) + r(I - A) \le n \\ A + (I - A) = I \\ \Rightarrow r(A) + r(I - A) \ge n \end{array}\right\} \begin{array}{l} r(A) + r(I - A) = n \\ r(I - A) = n - (n - r) = r \\ \text{得 } q_{\lambda=1} = r \end{array}$$

矩阵 A 的两个互异特征值的几何重数之和等于 n，所以 A 可以对角化。

(3) $|A - 3I| = (0 - 3)^{n-r} \cdot (1 - 3)^{r} = (-3)^{n-r} \cdot (-2)^{r}$