课程编号：A073122 北京理工大学2015-2016学年第一学期

**线性代数A试题 A卷**

班级 \_\_\_\_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题  号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
| 得  分 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 签  名 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

一、（10分）已知矩阵, 矩阵*X*满足, 求*X*.

**解：**由有

,

进而有 , 即



又因为

,

所以

.

二、（10分）已知平面上三条直线的方程

****

讨论参数*a*的取值与这三条直线相互位置之间的关系.

**解：**写出方程组的增广矩阵并化为阶梯形



（1）若, 上述矩阵已化为阶梯形, 此时, 方程组无解, 三条直线中第一条与第三条平行但不重合, 与第二条相交.

（2）若, 继续进行初等行变换, 有



1. 当, 且时, 方程组无解. 此时, 三条直线不交于一点, 但任意两条直线都相交.
2. 当时, 方程组有唯一解, 此时, 三条直线交于点（）,

且任意两条直线不重合.

1. 当时, 方程组有唯一解, 此时, 三条直线交于（）, 且其中后两条直线重合.

三、（10分）已知向量组



1. 讨论的取值与向量组的秩之间的关系;
2. 对的不同取值, 确定向量空间的维数与基.

**解：**（1）

①当时, 向量组的秩为1;

②当时, 向量组的秩为3;

③当时, 向量组的秩为4.

（2）

①当时, 向量空间的维数为1, 是一个基;

②当时, 向量空间的维数为3, 是一个基;

③当时, 向量空间的维数为4, 是一个基.

四、（10分）在实数域上的二阶矩阵构成的线性空间中,

（1）求基底到基底

的过渡矩阵.

（2）求非零矩阵*A***,** 使*A*在这两组基下的坐标相等.

**解：**（1）



所以过渡矩阵为

（2）设*A*在两组基下的坐标分别为, 则由坐标变换公式, 有, 两组坐标相同, 即,



其解为, 所以所求矩阵为.

五、（10分）在多项式空间中定义变换*σ*：



1．证明：*σ*是上的线性变换;

2．求*σ*在的自然基下的矩阵, 并判断*σ*是否可逆.

**解：**(1) 设则



且



则*σ*是上的线性变换;

(2) , , , 

所以*σ*在的自然基下的矩阵为

.

由于, 故不可逆.

六、（10分）设*A*是5阶方阵, 且已知存在5阶可逆矩阵*P*, 使得

.

1. 试写出*A*的初等因子;
2. 判断***P***的哪几列是*A*的特征向量.

**解：***A*的初等因子为

（2）*P*的第一列是对应于的特征向量, 第三列是对应于1的特征向量, 第四列是对应于0的特征向量.

七、（10分）已知是矩阵, , ; 是矩阵, , 且. 证明：的列向量组为线性方程组的一个基础解系.

**证明：**将按列分块：由得：, 则线性无关.

由得：, 即, 是方程组的解.

是矩阵 , , , 则

的列向量组为线性方程组的一个基础解系.

八、（10分）已知实二次型, 其中.

1. 求一正交变换, 将二次型化为标准形;
2. 判断二次型是否正定.

**解：**（1） 因为

,

所以的全部特征值为（二重）, 5.

对于特征值, 求出方程组的一个基础解系：.

正交化 

单位化

对于特征值5, ,求出方程组的一个基础解系：, 单位化得：.

取

.

则得标准形

.

（2）由（1）易知, 不是正定的.

九、（10分） 已知矩阵有三个线性无关的特征向量.

（1）求*a*；

（2）求.

**解：**由于所以

当时, 特征方程组的系数矩阵为由于*A*有三个线性无关的特征向量, 所以*A*可以对角化, 因此, , 故

（2）的特征向量为的特征向量为

令则, 因此

.

十、（10分）已知阶矩阵与,

1. 求矩阵与的特征值;
2. 证明与是相似的.

**解：**由于, 则*A*的特征值为, (重).

同样 , 则*B*的特征值为, (重).

（2）属于的特征向量为；, 故基础解系有个线性无关的解向量, 即属于有个线性无关的特征向量, 故相似于对角阵.

的特征值为, (重), 同理属于有个线性无关的特征向量, 故相似于对角阵.

由相似关系的传递性, 相似于.