课程编号：100172103　　　　北京理工大学 2021-2022 学年第一学期

工科数学分析（上）期末试题(A 卷)

座号 ________ 　班级______________ 　学号______________ 　姓名______________

(试卷共 6 页,十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

得分	

一、填空（每小题4分，共20分）

1． $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$______________.

2．函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 所确定，则 $dy|_{x=0}=$________.

3. 已 知 两 曲 线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点（0,0）处切线相同. 该切线方程为 ____________________, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n f\left(\frac{2}{n}\right)=$______________ .

4. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int\frac{1}{x}f(\ln ax)\,dx=$________________.

5. 微分方程 $(y^2+1)dx=y(y-2x)dy$ 的通解为________________________.

得分	

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在（$-\infty,+\infty$）内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.
则 a,b 取值需要满足什么条件 .

3. 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x.$

4. 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x.$

得分	

三、（8分）讨论函数$g(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ \mathrm{e}^{x}-x-1 & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性和可导性（$\alpha\neq 0$).

得分	

四、(6分)设函数 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内连续，$f(a)<0$,且当$x>a$时，$f'(x)>l>0$,其中l为常数，判断在区间$\left(a,a+\dfrac{|f(a)|}{l}\right)$内方程 $f(x)=0$的实根个数.

得分	

五、(8分）设$\begin{cases} x=\cot t \\ y=\dfrac{u(t)}{\sin t} \end{cases}$,函数$y=y(x)$满足 $(1+x^2)^2y''=y$,求$\dfrac{d^2u}{dt^2}$.

得分	

六、(6分)　利用泰勒展开式证明：

$$x+x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}<(1+x)\sin x<x+x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{120},$$

$$x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

得分	

七、（8 分）设曲线 $y=x^2-2x\ (1\le x\le 3), y=0, x=1, x=3$ 围成一平面图形 D.

(1) 求平面图形 D 的面积；

(2) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

得分	

八、（8分）设一容器是由曲线 $y=x^2(0\le x\le 2)$ 绕 y 轴旋转一周形成， y 轴垂直地面，现以 $2m^3/\min$ 的速率向容器中注水，水的密度为 ρ,重力单位为 g ,

（1）求容器中水高为1m时，水面上升速率.

（2）容器中注满水后，全部把水抽出至少需要做多少功.

得分	

九、(8分)已知函数 $f(x)$满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{x}$.

(1)求 $f(x)$的表达式.

(2)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$的拐点.

得分	

十、(8分）设函数 $f(x)$在区间$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|\le 1$, 又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=3$,

(1)证明在区间$(-2,0)$内至少存在一点ξ，使 $|f'(\xi)|\le 1$.

(2)证明在区间$(-2,2)$内至少存在一点η，使 $f(\eta)+f''(\eta)=0$.