09级第一学期工科数学分析期末试题(A卷)解答(2010.1)

一. 1. $\dfrac{y}{e^y - x}$, $\dfrac{1}{e^2}$ (2分, 2分)

2. I_2, $\dfrac{1}{2}$ (2分, 2分)

3. $\dfrac{3\pi}{2}$, 0 (2分, 2分)

4. $u = \dfrac{y}{x}$, $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{-4u^2}{1+3u}$ (2分, 2分)

5. $\dfrac{\pi a}{2}$, $2\pi a^2$ (2分, 2分)

6. $-1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ (多项式3分，余项1分)

7. $-\dfrac{1}{x}$, $Cx + \dfrac{x^3}{2}$ (2分, 2分)

二.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)e^x + x + 2}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3}$$ ……………………..(2分)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + (x-2)e^x + 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x + 1}{3x^2}$$ ……………………….(5分)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + (x-1)e^x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}$$ ……………………….(8分)

$$= \frac{1}{6}$$ ……………………..(9分)

三.

$$\int x\ln(1+x)dx = \frac{1}{2}\int \ln(1+x)dx^2$$ ……………………….(1分)

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x) - \int\frac{x^2}{1+x}dx\right)$$ ………………………..(5分)

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x) - \int\left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx\right)$$ ……………………….(6分)

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)\right) + C$$ ……………………….(9分)

四. $ma=F \qquad a=\dfrac{dv}{dt} \qquad F=-kv$

$$m\frac{dv}{dt}=-kv$$ ……………………(3 分)

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt \qquad \ln v=-\frac{k}{m}t+C_1$$

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$$ ………………………..(6 分)

由 $v(0)=6$ 得 $C=6$ ……………………….(8 分)

由 $v(5)=3$ 得 $\dfrac{k}{m}=\dfrac{\ln 2}{5}$

故 $v=6e^{-\frac{\ln 2}{5}t}$ …………………….(9 分)

五. 当 $x>0$ $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ ……………….(3 分)

当 $x<0$ $f'(x)=\dfrac{\sin x^2\cdot 2x^2-1+\cos x^2}{x^2}=2\sin x^2+\dfrac{\cos x^2-1}{x^2}$ ……………….(6 分)

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\cos x^2}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^4}{2}}{x^2}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$f'(0)=0$$ ……………………..(8 分)

六. $f(x)=e^{-x}+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$ ……………………..(1 分)

$$f'(x)=-e^{-x}-\int_0^x f(t)dt$$ ……………………….(2 分)

$$f''(x)=e^{-x}-f(x) \qquad f''(x)+f(x)=e^{-x}$$ ……………………….(3 分)

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=-1$$ ……………………….(5 分)

$$r^2+1=0 \qquad r=\pm i$$ ……………………….(7 分)

$$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$ ……………………….(8 分)

设 $f^*(x)=Ae^{-x}$ ……………………….(9 分)

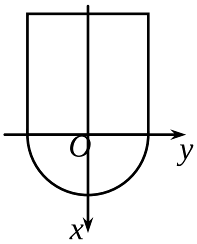
带入方程得 $A=\dfrac{1}{2}$ $f^*(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}$ ……………………….(10 分)

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^{-x}$ ……………………….(11 分)

由初始条件得 $C_1=\frac{1}{2}$ $C_2=-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x+e^{-x})$ ……………………..(13 分)

七.



$dW=(h+x)\mu g\pi y^2dx=\mu g\pi(2+x)(1-x^2)dx$ ……………………(3 分)

$W=\int_0^1\mu g\pi(2+x)(1-x^2)dx$ …………………….(5 分)

$=\int_0^1\mu g\pi(2-2x^2+x-x^3)dx$

$=\frac{19}{12}\pi\mu g=\frac{19000}{12}\pi g\,(\mathrm{J})$ ……………………..(8 分)

八. 令 $F(x)=xf(x)$ ……………………..(2 分)

$F(0)=0$ $F(3)=3f(3)=-3<0$ ……………………..(4 分)

由积分中值定理，$\exists c\in[1,2]$，使 $f(c)=\int_1^2f(x)dx=1$，

故 $F(c)=cf(c)=c>0$ ……………………..(6 分)

根据介值定理，$\exists\eta\in(c,3)$，使 $F(\eta)=0$， ……………………..(7 分)

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,3)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$ …………………….(8 分)

九. 由题设，有 $\lim\limits_{x\to0}(f(x)+f'(x))=0$ ……………………...(1 分)

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$， 得 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$ ……………………….(3 分)

因为 $f'(x)$ 连续，故 $f'(0)=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点. …………………….(4 分)

由 $$2=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$=f'(0)+f''(0)=f''(0)>0$ ……………………….(7 分)

故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 ……………………….(8 分)