

工科数学分析(上) 期末试题(A 卷)

座号 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(试卷共 6 页, 十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

得分	
----	--

一、填空题(每小题4分, 共20分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} =$ _____.
2. 已知 $f(2) = 0$, $f'(2)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \arctan x^3)}{e^{2x^3} - 1} =$ _____.
3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 则 $f(b) - f(a)$, $(b - a)f'(a)$, $(b - a)f'(b)$ 按由大到小的排列次序是: _____.
4. 计算不定积分 $I = \int \left(\frac{x^9}{\sqrt{4 - x^{20}}} + \ln(1 + x) \right) dx =$ _____.
5. 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 _____.

得分	
----	--

二、计算题(每小题5分, 共20分)

1. 求定积分 $\int_{-1}^1 \left(x^2 \ln \frac{2-x}{2+x} + \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \right) dx$.

2. 设方程 $x - y + \cos y = 1$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{x dx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

4. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} + x$ 的通解.

得分	
----	--

实根.

三、(6分) 求证: 方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2} dt = 0$ 有且只有一个

得分	
----	--

点并判断间断点的类型.

四、(8分) 设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}} & x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+\sin x} - 1} & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的间断

得分	
----	--

五、(6分) 设函数 $f(x)$ 二阶可导, $|f''(0)| = 5$, 曲线 $y = f(x)$ 是凸弧, 并且在原点处与 x 轴相切, 求此曲线在原点处的曲率半径, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)}$.

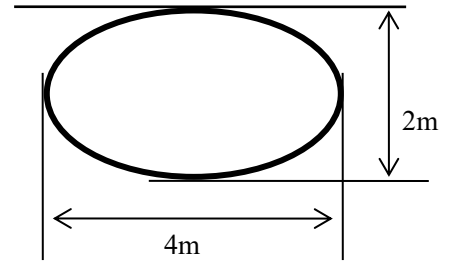
得分	
----	--

六、(8分) 过点 $(-1,0)$ 作曲线 $y = \sqrt{x}$ 的切线, 记此切线与曲线 $y = \sqrt{x}$ 、 x 轴所围成的图形为 D ,

- (1) 求图形 D 的面积;
- (2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

得分	
----	--

七、(8 分) 一椭圆 (如图) 垂直立于水中, 水面与椭圆的最高点相齐, 求椭圆所受到的水压力. (要画出坐标系)



得分	
----	--

八、(8 分) 已知函数 $f(x) = (2x+3)e^{\frac{2}{x}}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值; (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线方程.

得分	
----	--

九、(8 分) 设计厨房用煤气保险器, 使泄露在空气中的煤气浓度达到 0.5% 时报警鸣叫, 切断煤气源, 并打开排烟罩以 $24\text{m}^3/\text{min}$ 向外排气, 直到煤气浓度下降到 0.05% 停止鸣叫和排气. 问在面积为 8m^2 , 高为 3m 的厨房内使用, 报警一次需多长时间?

得分	
----	--

十、(8 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数, 且

$f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1$, 证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$;
- (2) 存在 $\eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta)<-2$.