北京理工大学 2020-2021 学年第一学期《工科数学分析》（上）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准 2021年1月29日

一、填空（每小题4分，共20分）

1． e^2； 2． -2； 3． $y=x-5$；

4． $F(t)+C$； 5． $x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}$(注意，$C$形式可变)

二、计算题（每小题5分，共20分）

1． 解： $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$ **………… 3分**

$$=\ln 2.$$ **………… 5分**

2． 解： $\lim\limits_{x\to\pi}a\cos x+bx=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{a\cos x+bx}{\sin x}\cdot\sin x=0$

所以， $\lim\limits_{x\to\pi}a\cos x+bx=b\pi-a=0$ **………… 2分**

又 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{a\cos x+bx}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{b-a\sin x}{\cos x}=-b=5,$

从而 $a=-5\pi,b=-5.$ **………… 5分**

3． 解： $\int_0^a xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^a xde^{2x}$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^a-\frac{1}{2}\int_0^a e^{2x}dx$$

$$=(\frac{a}{2}-\frac{1}{4})e^{2a}+\frac{1}{4}$$ **………… 3 分**

由题设知， $(\frac{a}{2}-\frac{1}{4})e^{2a}=0,$ 则 $a=\frac{1}{2}.$ **………… 5分**

4． 解：对应齐次方程的特征方程： $r^2+1=0$

特征根： $r=\pm i$

齐次方程的通解: $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$. **………… 3 分**

设非齐次方程的特解为: $\overline{y}=Ae^{2x}$,

代入原方程,得 $A=\frac{1}{5}$.

原方程的通解: $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{5}e^{2x}$. **………… 5分**

三 、解： $x<0$ 时， $f'(x)=(x-1)e^{-x}$;

$x>0$ 时， $f'(x)=(1-x)e^{-x}$. …………**2** 分

列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	—	不存在	＋	0	—
y	↘		↗		↘

…………**4** 分

所以， $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(1,\infty)$ 内单调递减，在区间 $(0,1)$ 内单调递增，
$f(0)=0$ 为极小值； $f(1)=e^{-1}$ 为极大值. …………**6**分

四、解：当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=g'(x)\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}g(x)\cos\frac{1}{x}$. …………**3** 分

当 $x=0$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\sin\frac{1}{x}$

由已知条件知： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$， $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$，所以

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$ …………**7** 分

$$f'(x)=\begin{cases} g'(x)\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}g(x)\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$ …………**8** 分

五、解： $\begin{cases} x'_t=\frac{(t-1)^2}{1+t^2} \\ y'_t=\frac{1}{1+t^2} \end{cases}$， 故 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{(t-1)^2}$， $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=2}=1$, …………**2**分

得参数方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{1}{(t-1)^2} \\ x=t-\ln(1+t^2) \end{cases}$，

故 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}/x'_t=\frac{-2(1+t^2)}{(t-1)^5}$， $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=2}=-10$ …………**4**分

曲率为： $\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$，曲率半径 $\rho=\frac{1}{\kappa}=\frac{\sqrt{2}}{5}$. …………**6**分

六、解： $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3),$

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3),$ …………4分

则 $f(x)=(1+a)x+(b-\dfrac{a}{2})x^2+\dfrac{a}{3}x^3+o(x^3)$ …………6分

由于当 $x\to 0$ 时， $f(x)\sim kx^3$，则

$$\begin{cases}1+a=0\\ b-\dfrac{a}{2}=0,\\ \dfrac{a}{3}=k\end{cases}$$

得 $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}.$ …………8分

七、解：以圆心处为极点，平分中心角 φ 的射线为极轴，建立极坐标系.

则细棒的极坐标方程为： $r=R,\theta\in(-\dfrac{\varphi}{2},\dfrac{\varphi}{2}).$ …………2分

$dF=k\dfrac{m\mu Rd\theta}{R^2},$ …………4分

水平方向的分力微元 $dF_x=k\dfrac{m\mu Rd\theta}{R^2}\cdot\cos\theta,$

$$F_x=\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\frac{km\mu}{R}\cdot\cos\theta d\theta=\frac{2km\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2},$$ …………6分

由对称性知，引力在铅直方向分力为 $F_y=0.$ …………8 分

注：坐标系的建立可以有其他形式，力的大小不变，方向都是由中心角 φ 的角平分线指向细棒.

八、解：(1) $V_1=\pi\int_a^2 y^2\,\mathrm{d}x$

$=\pi\int_a^2(2x^2)^2\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5$ …………2 分

$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_a^{2a^2}x^2\,\mathrm{d}y$

$=2\pi a^4-\pi\int_0^{2a^2}\dfrac{y}{2}\,\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4$

$=\pi a^4.$ …………5 分

注： 还可以下方法（评分标准同上）

$$V_2 = 2\pi\int_0^a xy\,\mathrm{d}\,x$$

$$= 2\pi\int_0^a x\cdot 2x^2\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \pi a^4.$$

(2) $V = V_1 + V_2 = \dfrac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4,$

$$\frac{dV}{da} = 4\pi a^3(1-a),$$

当 $a=1$， $\dfrac{dV}{da}\Big|_{a=1} = 0$

当 $0<a<1,$ 时， $\dfrac{dV}{da}>0,$ V 单调增；当 $a>1,$ 时， $\dfrac{dV}{da}<0,$ V 单调减.

故 $a=1$ 时 V 最大，且最大值为 $V_1+V_2=\dfrac{129}{5}\pi.$ …………**8 分**

九、解：由题意知：

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -kv \\ v(0)=5, v(4)=2.5 \end{cases}$$ …………**3 分**

解方程得 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$,由 $v(0)=5,$ 得 $C=5.$

由 $v(4)=2.5,$ 得 $\dfrac{k}{m} = \dfrac{\ln 2}{4},$

$\therefore v(t) = 5e^{-\frac{\ln 2}{4}t}.$ …………**6 分**

游艇滑行的最长距离:

$$S = \int_0^{+\infty} v(t)dt = \int_0^{+\infty} 5e^{-\frac{\ln 2}{4}t}dt$$

$= \dfrac{20}{\ln 2}.$ …………**8 分**

十、证明：(1) 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，

则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a) = 0 = f(a),$

又 $f'(x)>0,$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，故

$f(x) > f(a) = 0, x\in(a,b).$ ………… **2 分**

(2) 设 $F(x) = x^2, g(x) = \int_a^x f(t)dt, (a\le x\le b)$

则 $g'(x) = f(x) > 0,$ 故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理条件，于是 $\exists\xi\in(a,b)$，

使 $$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)dt\right)'}\bigg|_{x=\xi}$$

即 $$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$ **…………5 分**

(3) 因为 $f(\xi)=f(\xi)-f(a)$, 在 $[a,\xi]$ 上应用拉格朗日中值定理，

$\exists\eta\in(a,\xi)$，使 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$,

从而由(2)的结论得, $$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

故, $$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$$ **…………8 分**