2008-2009 第一学期期末数学分析 B(A 卷)参考解答及评分标准(2009.1)

一. 1. $-\frac{1}{x}$

2. $\frac{x^3}{6}-\sin x+2x$

3. 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 分, 2 分)

4. $y=Cx+\frac{x^3}{2}$ (没有 y 扣 1 分)

5. $-1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{4}+o(x^5)$

6. ± 2, $-\frac{1}{4}$ (2 分(没有 $\pm$ 扣 1 分), 2 分)

7. e

二. $r^2+r-2=0$ ……………………….(1 分)

$r_1=1 \quad r_2=-2$ ……………………(3 分)

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ ………………………(5 分)

设 $y^*=Axe^x$ ………………………(6 分)

代入方程得 $A=\frac{1}{3} \quad y^*=\frac{1}{3}xe^x$ ……………………….(8 分)

通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x$ ……………………..(9 分)

三. $\int x^2\arctan x dx=\frac{1}{3}\int \arctan x d(x^3)$ ……………………(2 分)

$=\frac{1}{3}(x^3\arctan x-\int x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx)$ ……………………(5 分)

$=\frac{1}{3}[x^3\arctan x-\int(x-\frac{x}{1+x^2})dx]$ ……………………(7 分)

$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$ ……………………(9 分)

四. 由题设，当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2) \sim x^2$ ……………….(2 分)

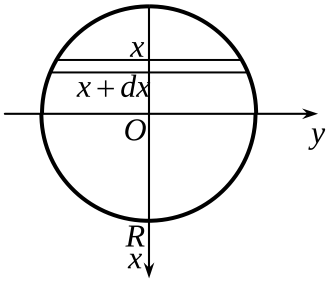
$$\ln(1+x)-(ax+bx^2) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)$$ ……………….(4 分)

$$=(1-a)x+(-\frac{1}{2}-b)x^2+o(x^2)$$ …………………….(5 分)

$1-a=0$ $\quad -\frac{1}{2}-b=1$ …………………….(7 分)

$a=1$ $\quad b=-\frac{3}{2}$ …………………….(9 分)

五. 如图建立坐标系



$$dP=\mu g(x+R)2ydx$$ …..................................(2 分)

$$=2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………...(3 分)

$$P=\int_{-R}^{R}2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………….(5 分)

$$=4\mu gR\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………….(6 分)

$$=\pi\mu gR^3=800\pi gR^3\,(\mathrm{N})$$ ……………………….(9 分)

六. 令$t=\sqrt{x+1}$，即$x=t^2-1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt$$ ……………………………(3 分)

$$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt$$ ……………………………(5 分)

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty}$$ ……………………………(7 分)

$$=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$ ……………………………(9 分)

七. 设曲线方程为$y=y(x)$

$$\int_1^t\sqrt{1+(y')^2}dx=2\int_1^t ydx$$ ……………………(2 分)

两端对t求导

$$\sqrt{1+(y')^2}=2y$$ ……………………(4 分)

$$y'=\sqrt{4y^2-1}$$ ……………………(5 分)

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^2-1}}=dx$$ ……………………(6 分)

积分得 $$\frac{1}{2}\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=x+C_1$$ ……………………(7 分)

由 $y\big|_{x=1}=\frac{1}{2}$，得 $C_1=-1$ ……………………(8 分)

$$\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=2(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}ch2(x-1)=\frac{e^{2(x-1)}+e^{-2(x-1)}}{4}$$ ………………..(9 分)

八. (1) 在 $(0,\pi)$，$e^{\sin x}\sin x>0$，故 $I_1>0$，在 $(\pi,2\pi)$，$e^{\sin x}\sin x<0$，故 $I_2<0$

$I_1>I_2$ ……………………….(3 分)

(2) $F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x$

$=e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}\sin x=0$

所以 $F(x)$ 为常数 ……………………….(5 分)

令 $u=x-\pi$

$$I_2=\int_0^{\pi}e^{\sin(\pi+u)}\sin(\pi+u)du=-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin udu$$

$$F(0)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt=I_1+I_2$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin udu$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt$$

当 $t\in(0,\pi)$，$\sin t>0$，$e^{\sin t}>1$，$e^{-\sin t}<1$，$\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})>0$

故 $F(0)>0$，因此 $F(x)$ 为正的常数 …………………..(9 分)

九. (1) 由题设，得 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$，$f(1)=0$ …………………(2 分)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在驻点 …………………(4 分)

(2) 根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，$\exists\xi_2\in(1,2)$，使

$f'(1)-f'(0)=f''(\xi_1)$ $f'(2)-f'(1)=f''(\xi_2)$ ……………...(6 分)

$|f'(0)|+|f'(2)|=|f'(1)-f'(0)|+|f'(2)-f'(1)|$ ……………..(8 分)

$=|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\le 1+1=2$ …………………(9 分)