(2014-2015-1)工科数学分析期末试题(A 卷)解答（信二学习部整理）

一. **1.** $y-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{7}(x-\frac{\sqrt{3}}{4})$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)},\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx,$

4. 1 ， $-\frac{2}{3}$

5. $f(x)$

二. $$I=2\int_{0}^{1}x^{10}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$ ……………..(2 分)

令 $x=\sin t$ $$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}t\cos^{2}t\,dt$$ ……………..(4 分)

$$=2(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}t\,dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{12}t\,dt)$$ ……………..(6 分)

$$=\frac{21}{1024}\pi$$ ……………..(8 分)

三. $$y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx)$$ ……………..(4 分)

$$=e^{x-\ln x}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}e^{\ln x-x}dx)$$ ……………..(6 分)

$$=\frac{e^{x}}{x}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}xe^{-x}dx)$$

$$=\frac{e^{x}}{x}(C+\int e^{2x}dx)$$ ……………..(8 分)

$$=\frac{e^{x}}{x}(C+\frac{1}{2}e^{2x})$$ ……………..(9 分)

四. (1) $y(0)=1$ ……………..(1 分)

爱学习，更爱学习部
学习部
信息与电子二学部学生会
学习部

$$y' = -e^{y} - xe^{y}y'$$ ……………..(分)

$$y'(0) = -e$$ ……………..(3 分)

$$y'' = -e^{y}y' - e^{y}y' - xe^{y}(y')^{2} - xe^{y}y''$$ ………..(4 分)

$$y''(0) = 2e^{2}$$ ……………..(5 分)

(2)由题设，应有 $f(0) = y(0) \quad f'(0) = y'(0) \quad f''(0) = y''(0)$ ………..(6 分)

$$c = f(0) = 1$$ ……………..(7 分)

$$f'(x) = 2ax + b \qquad b = f'(0) = -e$$ ……………..(8 分)

$$f''(x) = 2a \qquad 2a = f''(0) = 2e^{2} \qquad a = e^{2}$$ ……………..(9 分)

五.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln\cos x \, d\tan x$$ ……………..(2 分)

$$= \tan x \ln cosx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\tan x dx$$ ……………..(5 分)

$$= \sqrt{3}\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^{2} x} - 1\right)dx$$ ……………..(6 分)

$$= -\sqrt{3}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + (\tan x - x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$ ……………..(8 分)

$$= \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\ln 2 + \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$$ ……………..(9 分)

信息与电子二学部学生会
学习部

六. 设 $f(x) = \ln x - \dfrac{x^{2}}{2} - a \qquad x \in (0,+\infty)$ ……………..(1 分)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x$$ ……………..(2 分)

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ ……………..(3 分)

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0^{+}} f(x) = -\infty$$ ……………..(4 分)

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$ ……………..(5 分)

$$f(1) = -\frac{1}{2} - a$$ ……………..(6 分)

当 $a < -\dfrac{1}{2}$ $f(1) > 0$ 二曲线有两个交点 ……………..(7 分)

当 $a=-\frac{1}{2}$　　$f(1)=0$　二曲线有一个交点　　……………..(8 分)

当 $a>-\frac{1}{2}$　　$f(1)<0$　二曲线有没有交点　　……………..(9 分)

七.　设 $$\frac{2x^2-4x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+D}{x^2+1}$$ ……………..(2 分)

$$2x^2-4x-1=A(x^2+1)+(Bx+D)(x+2)$$

得　$A=3$　$B=-2$　$D=-1$　…（1+1+1）…..(5 分)

$$\int\frac{2x^2-4x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{x+2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=3\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\arctan x+C$$ （每项 1 分）…..(9 分)

八.　$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$ ……………..(1 分)

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$ ……………..(2 分)

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{-\frac{1}{2}x^2}$$ ……………..(3 分)

$$=-6a$$ ……………..(4 分)

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$$ ……………..(5 分)

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\frac{x}{2}}$$ ……………..(6 分)

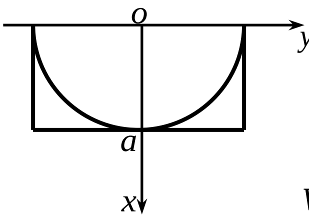
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{\frac{1}{2}}$$

$$=2(a^2+2)$$ ……………..(7 分)

由题设得　$-6a=2(a^2+2)\neq6$　　$a=-2$　……………..(9 分)

信息与电子二学部学生会 学习部

九.



$$dW = x\cdot 100\mu g\times 2(a-y)dx$$

$$=200\mu g x(a-\sqrt{a^2-x^2})dx \qquad \text{………(3 分)}$$

$$W=\int_0^a 200\mu g x(a-\sqrt{a^2-x^2})dx \qquad \text{………(4 分)}$$

$$=200\mu g(\int_0^a ax dx-\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx) \qquad \text{………(5 分)}$$

$$=200\mu g(\frac{a^3}{2}-\frac{1}{3}a^3) \qquad \text{…(1+2)……(8 分)}$$

$$=\frac{100}{3}\mu g a^3(\mathrm{J}) \qquad \text{……………..(9 分)}$$

十.

$$r^2+r-2=0 \qquad \text{……………..(1 分)}$$

$$r=1 \qquad r=-2 \qquad \text{……………..(3 分)}$$

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x} \qquad \text{……………..(4 分)}$$

设 $y^*=x(Ax+B)e^x$ ……………..(5 分)

代入方程得 $6Ax+2A+3B=3x$ ……………..(7 分)

解得 $A=\frac{1}{2}$ $B=-\frac{1}{3}$ ……………..(9 分)

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x)e^x$ ……………..(10 分)

十一.

$$V_1=\int_a^{\xi}\pi[f^2(x)-f^2(\xi)]dx \qquad \text{……………..(2 分)}$$

$$V_2=\int_{\xi}^{b}2\pi x[f(\xi)-f(x)]dx \qquad \text{……………..(4分)}$$

令 $F(t)=\int_a^t\pi[f^2(x)-f^2(t)]dx-\int_t^b 2\pi x[f(t)-f(x)]dx$ …………..(6分)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$$F(a)=-\int_a^b 2\pi x[f(a)-f(x)]dx<0 \qquad \text{……………..(7 分)}$$

$$F(b)=\int_a^b\pi[f^2(x)-f^2(b)]dx>0 \qquad \text{……………..(8 分)}$$

根据介值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即

$$\int_a^{\xi}\pi[f^2(x)-f^2(\xi)]dx-\int_{\xi}^{b}2\pi x[f(\xi)-f(x)]dx=0$$

$$V_1=V_2 \qquad \text{……………..(9 分)}$$

信息与电子二学部学生会
学习部