北京理工大学 2022-2023 学年第一学期《工科数学分析》（I）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准

2022年12月29日

一、填空（每小题4分，共20分）

1. -1

2. $\frac{1}{2}f'(2)$

3. $(b-a)f'(b)>f(b)-f(a)>(b-a)f'(a)$

4. $\frac{1}{10}\arcsin\frac{x^{10}}{2}+x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+C$

5. $y=\frac{x}{3}\ln x-\frac{x}{9}$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 解： $\int_{-1}^{1}(x^2\ln\frac{2-x}{2+x}+\frac{x}{\sqrt{5-4x}})dx$

$$=\int_{-1}^{1}x^2\ln\frac{2-x}{2+x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$$ **………… 2 分**

$$\underline{\underline{\sqrt{5-4x}=t}}\int_{3}^{1}\frac{5-t^2}{4t}\cdot(-\frac{t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{8}(5t-\frac{t^3}{3})\Big|_3^1$$

$$=\frac{1}{6}$$ **………… 5 分**

2. 解： $1-\frac{dy}{dx}-\sin y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\sin y}$$ **…………2 分**

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\cos y\cdot\frac{dy}{dx}}{(1+\sin y)^2}$$

$$=\frac{-\cos y\cdot\frac{1}{1+\sin y}}{(1+\sin y)^2}=\frac{-\cos y}{(1+\sin y)^3}$$ **………… 5 分**

3. 解： 令 $t=\sqrt{1-x^2}$， 即 $x^2=1-t^2$， …………. 1 分

$$\int_0^1\frac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dt}{4-t^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2})dt$$ …………. 3 分

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3$$ …………. 5 分

4. 解：特征方程：$r^2-2r-3=0$

特征根：$r_1=-1, r_2=3$

对应齐次方程通解为：$Y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. …………. 2 分

设非齐次方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ (1) 的特解为：$y_1^*=Axe^{-x}$

代入方程(1)，得 $A=-\dfrac{1}{4}$， $y_1^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$

设非齐次方程 $y''-2y'-3y=x$ (2) 的特解为：$y_2^*=ax+b$

代入方程(2)，得 $a=-\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{2}{9}$ $y_2^*=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}$

由解的叠加原理知原非齐次方程的通解为：

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}xe^{-x}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}.$$ …………. 5 分

三 、（6 分）证明：记 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt$， 则

$$F'(x)=\sqrt{1+x^4}+e^{-\cos^2 x}\sin x.$$ ………….2 分

$\because \sqrt{1+x^4}\ge 1$且仅当$x=0$时等号成立. 又

$0\le e^{-\cos^2 x}\le 1,\quad -1\le\sin x\le 1,\quad \therefore -1\le e^{-\cos^2 x}\sin x\le 1$，

则 $F'(x)>0$, 即$F(x)$严格单增，又 ………….4 分

$$F(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0,\quad F(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}dt>0$$

由零点定理知$F(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内至少有一实根，又$F\left(x\right)$严格

单增，从而$F(x)$有且仅有一个实根. ………….6 分

四、（8 分）解：间断点 $x=-1$， $x=0$ ………….2 分

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}e^{\frac{1}{1+x}}=0\qquad \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}e^{\frac{1}{1+x}}=+\infty$$ ………….4 分

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{1+x}}=e\qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1+\sin x}-1}=2$$ ………….6 分

$x=-1$是第二类间断点，$x=0$是第一类间断点. ………….8 分

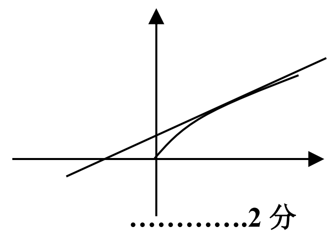
五、（6分）解：由题设，$f(0)=0 \qquad f'(0)=0 \qquad f''(0)=-5$ …………2分

$$R=\frac{(1+(f'(0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|}=\frac{1}{5}$$ …………4 分

$$\because \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{2}{f''(0)}=-\frac{2}{5}$$ …………6 分

六、（8 分）解： 设切点为$(x_0,\sqrt{x_0})$，则切线方程为：



$$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$$

将点(-1,0)代入切线方程，得 $x_0=1$

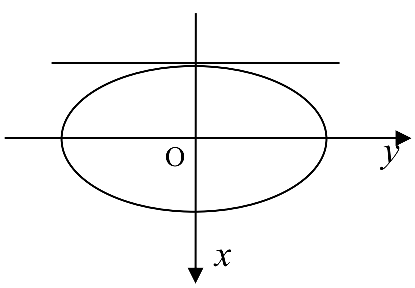
所以切点为(1,1)，切线方程为：$y=\dfrac{x+1}{2}$. …………2 分

(1) $S_D=\int_0^1[y^2-(2y-1)]dy=\dfrac{1}{3}$ …………5 分

(2) $V_x=\pi\int_{-1}^{1}(\dfrac{x+1}{2})^2dx-\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx=\dfrac{\pi}{6}$. …………8 分

七、（8 分）

解：



$dP=\mu g(1+x)2ydx$ …………2 分

$=4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$

$P=\int_{-1}^{1}4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ …………5 分

$=8\mu g\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

$=2\mu g\pi=2000\pi g\,(N)$ …………8 分

八、（8 分）解： 函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 由于

$$\boldsymbol{f'(x)}=\frac{2\boldsymbol{e}^{\frac{2}{x}}}{\boldsymbol{x}^2}(\boldsymbol{x}-3)(\boldsymbol{x}+1),$$

因此 单调增区间为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$,

单调减区间为 $(-1,0)\cup(0,3)$.

函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 的极大值为 $\boldsymbol{f(-1)=e^{-2}}$,

函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 的极小值为 $\boldsymbol{f(3)=9e^{\frac{2}{3}}}$. …………4 分

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}(2\boldsymbol{x}+3)\boldsymbol{e}^{\frac{2}{x}}=+\infty$, 可知 $\boldsymbol{x}=0$ 为曲线 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f(x)}$ 的铅直渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)e^{\frac{2}{x}}=\infty$, 可知曲线 $y=f(x)$ 无水平渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)e^{\frac{2}{x}}}{x}=2$, 且

$\lim\limits_{x\to\infty}((2x+3)e^{\frac{2}{x}}-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x(e^{\frac{2}{x}}-1)+3e^{\frac{2}{x}})=4+3=7$,

故 曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线为 $y=2x+7$.

因此，所求曲线的渐近线方程为： $x=0$ 以及 $y=2x+7$. …………8 分

九、（8 分）解： 设报警后 $t\,\mathrm{min}$ 时，室内煤气量为 $Q(t)$，浓度为 $\dfrac{Q(t)}{24}$,

因为每分钟排出 $24m^3$ 气体，故在 $[t,t+dt]$ 内，

$dQ(t)=-\dfrac{Q(t)}{24}\cdot 24dt=-Q(t)dt.$ …………3 分

得微分方程 $\begin{cases}\dfrac{dQ(t)}{dt}=-Q(t)\\ Q(t)|_{t=0}=24\times 0.5\%=0.12\end{cases}$,

分离变量法，求解得 $Q(t)=0.12e^{-t}$. …………6 分

再由 $\dfrac{0.12e^{-t}}{24}=\dfrac{5}{10000}$,

得到报警一次需要的时间为 $t=\ln 10\approx 2.3\,\mathrm{min}$. …………8 分

十、（8 分）证明：(1) 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则在该区间上必有最大值，设其最大值在 ξ 点取到，由 $\int_0^1 f(x)dx=1$, 可知 $f(\xi)>1$,

否则对一切 $x\in[0,1]$, 有 $f(x)\le 1$, 又 $f(0)=0$, 由此可知， $\int_0^1 f(x)dx<1$.

这与题设矛盾，所以 $f(\xi)>1$. …………2 分

又 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 则存在 $\xi\in(0,1)$,

从而 $f'(\xi)=0$. …………3 分

(2) 由泰勒公式可知

$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\dfrac{f''(\eta)}{2!}(x-\xi)^2$, …………5 分

令 $x=0$, 得 $0=f(\xi)+\dfrac{f''(\eta)}{2!}\xi^2$,

则 $f''(\eta)=(-2)\dfrac{f(\xi)}{\xi^2}$.

由于 $f(\xi)>1$, 故 $f''(\eta)<-2$. …………8 分