2012-2013 第一学期　　**工科数学分析期末试题（A 卷）解答（信二学习部整理）**



**一. 1.** $-\frac{\pi}{2}-1$

**2.** $y=x-2$

**3.** $-\frac{3}{2}$，$-\frac{11}{24}$

**4.** $Ce^{-\tan x}+1$

**5.** $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

二. 设 $y=(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$ …………………(1 分)

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+x\sin x)}{x^2}$$ …………………(3 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\cos x}{\cos x+x\sin x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2(\cos x+x\sin x)}$$ ………………(6 分)

$$=\frac{1}{2}$$ ………………(8 分)

$$\lim_{x\to0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$$ …………………(9 分)

三. 原式$=\int x\arctan x dx+\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ ……………………(1 分)

$$=\frac{1}{2}\int\arctan x dx^2-\int e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}$$ ……………………(3 分)

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx-e^{\frac{1}{x}}$$ …………………..(6 分)

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx-e^{\frac{1}{x}}$$ ………………(7 分)

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x-e^{\frac{1}{x}}+C$$ ………………..(9 分)

四. $$f'(x)=\frac{2(2x-2)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}$$ ……………………….(2 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 当 $x=2$ $f'(x)$ 不存在 …………….(4 分)

$f(1)=1$ $f(0)=0$ $f(-1)=\sqrt[3]{9}$ $f(3)=\sqrt[3]{9}$ …………….(8 分)

$M=\sqrt[3]{9}$ $m=0$ ……………………..(9 分)

五. $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$ ………….(5 分)

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$ ………………….(6 分)

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(x^2-1)}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=-\frac{1}{1+x^2}\neq 0$$ ………………….(7 分)

故 $f(x)$ 不恒为常数 …………………….(8 分)

六. $$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$$ ………………..(3 分)

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$ ………………….(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+\frac{dy}{dx})(x-y)-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2}$$ ………………(7 分)

$$=\frac{-2y+2x\frac{dy}{dx}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y+2x\frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \qquad \text{…………………………(9 分)}$$

七. (1) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int_{-\infty}^{-1}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})dx$ …………………………(2 分)

$$=(-\frac{1}{x}-\arctan x)\Big|_{-\infty}^{-1} \qquad \text{………………………(4 分)}$$

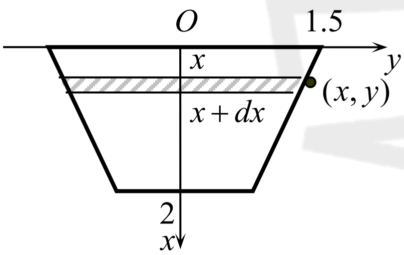
$$=1-\frac{\pi}{4} \qquad \text{………………………(5 分)}$$

(2) 令 $\sqrt{1-x}=t$ 即 $x=1-t^2$ ……………………(6 分)

$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}. \qquad \text{……………………(8 分)}$$

$$=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2} \qquad \text{……………………(10 分)}$$

八. $dP=\mu g x\cdot 2y\,dx$ ………………………(2 分)




$$=2\mu g x(\frac{3}{2}-\frac{x}{4})dx=\frac{1}{2}\mu g(6x-x^2)dx \qquad \text{…………..(4 分)}$$

$$P=\int_0^2\frac{1}{2}\mu g(6x-x^2)dx. \qquad \text{………………………(6 分)}$$

$$=\frac{1}{2}\mu g(3x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2$$

$$=\frac{14}{3}\mu g=\frac{14000}{3}g\ \ (\text{N}) \qquad \text{……………………(8 分)}$$



九. $r^2-6r+9=0$ ………………………(1 分)

$$r_1=r_2=3 \qquad \text{……………………(3 分)}$$

$$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x} \qquad \text{……………………(5 分)}$$

设特解 $y^*=x^2(Ax+B)e^{3x}$ ………………………(6 分)

代入方程得 $6Ax+2B=x+1$

$$6A=1 \qquad 2B=1$$

$$A=\frac{1}{6} \qquad B=\frac{1}{2}$$

$$y^* = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$$ ……………………..(9 分)

所求通解 $$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$$ ………………..(10 分)

十. 方程两端对 $x$ 求导得

$$f'(x^2+x) + f(x)(2x+1) = f(x)$$

$$(x+1)f'(x) = -2f(x)$$ ……………………….(2 分)

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x+1}dx$$ ……………………….(3 分)

$$\ln|f(x)| = -2\ln|x+1| + C_1$$ ………………………..(4 分)

通解 $$f(x) = \frac{C}{(x+1)^2}$$ ..……………………..(5 分)

在已知方程中令 $x=a$， 得 $f(a) = \frac{1}{a+1}$ ……………………..(6 分)

代入通解得 $C = a+1$

故 $$f(x) = \frac{a+1}{(x+1)^2}$$ ……………………..(7 分)

$$V = \int_0^1 \pi f^2(x)dx = \int_0^1 \pi\frac{(a+1)^2}{(x+1)^4}dx$$ …………………….(8 分)

$$= -\frac{1}{3}\pi\frac{(a+1)^2}{(x+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{7}{24}\pi(a+1)^2$$ …………………(9 分)

由 $\frac{7}{24}\pi(a+1)^2 = \frac{7}{6}\pi$ 得 $a=1$ …………………..(10 分)

十一. 令 $F(x) = f(x) - x$ ……………………..(1 分)

由积分中值定理，存在 $c \in [\frac{1}{2},1]$， 使

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\sin x dx = f(c)\sin c \cdot \frac{1}{2} = 1 \qquad f(c) = \frac{2}{\sin c}$$ ………………….(3 分)

$$F(c) = f(c) - c > 0 \qquad F(2) = f(2) - 2 = -2 < 0$$

根据零值定理，存在 $\xi_1 \in (c,2)$， 使 $F(\xi_1) = 0$ …………………(6 分)

又 $$F(0) = f(0) = 0$$

故由罗尔定理，$\exists \xi \in (0,\xi_1) \subset (0,2)$，使

$F(\xi)=0$，即 $f'(\xi)-1=0$ $f'(\xi)=1$ ……………………(8 分)