(数学分析 B 期末试题(A 卷)) 参考答案 (2006.1)

一. 1. $f(0)=2$，得 $d=2$， --------------------------(1 分)

$f'(0)=(3ax^2+2bx+c)\big|_{x=0}=0$，得 $c=0$， --------------------------(2 分)

$f''(-1)=(6ax+2b)\big|_{x=-1}=-6a+2b=0$ --------------------------(3 分)

$f(-1)=-a+b-c+d=-a+b+2=4$， --------------------------(4 分)

解得 $a=1,\quad b=3$， --------------------------(5 分)

因为 $f''(0)=2b=6>0$， 故 $f(0)$ 是极小值. --------------------------(6 分)

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\cos x^4\cdot 2x}{(e^{x^5}-1)5x^4}$$ ----------------------(2 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x^4)}{x^5\cdot 5x^3}$$ --(4 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\frac{1}{5}.$$ --(6 分)

3. 令 $u=\tan x$， $u\big|_{x=0}=0$，

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}=e^{u^2-2u+2}\frac{1}{\cos^2 x},$$ --------------------------------(5 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=e^2.$$ --(6 分)

4. 令 $t=\sqrt{1-x^2}$， 即 $x^2=1-t^2$， ----------------------------------(1 分)

$$\int_0^1\frac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dt}{4-t^2}$$ ------------------------------------(3 分)

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$ --(4 分)

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3$$ --(6 分)

二. 1. $x=\theta\cos\theta$，$y=\theta\sin\theta$， --------------------------------(1 分)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$ --------------------------------(3 分)

$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi}=\pi$， $x\big|_{\theta=\pi}=-\pi$， $y\big|_{\theta=\pi}=0$ -----------------------------(5 分)

法线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x+\pi)=-\frac{1}{\pi}x-1$. -------------------------------(7 分)

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ ------------------(1 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$ ------------------------------(2 分)

$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$

$=\frac{\pi}{2}+4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\ln 4$. ---------------------------------(7 分)

3. $f(x)+\cos x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ -------- --(2 分)

由题设，得 $f(0)+1=0$， $f'(0)=0$， $\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{2}=1$，------------------------(5 分)

解得 $f(0)=-1$， $f'(0)=0$， $f''(0)=3$. ------------------------(7 分)

4. 方程变成 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$， ---------------------------(1 分)

令 $\frac{y}{x}=u$， 即 $y=xu$， $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$， ---------------------------(3 分)

方程变成 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^3}$， $\frac{1+u^3}{u^4}du=-\frac{dx}{x}$，---------------------------(4 分)

积分得 $-\frac{1}{3u^3}+\ln|u|=-\ln|x|+C_1$， ---------------------------(6 分)

即 $\ln|y|=\frac{x^3}{3y^3}+C_1$， $y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$. ---------------------------(7 分)

三. $\int_0^{\pi}[f''(x)+f(x)]\sin xdx=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx-\int_0^{\pi}f(x)d\cos x$ -------(2 分)

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx$ ----------------------(4 分)

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx+f(\pi)+f(0)+\int_0^{\pi}f'(x)d\sin x$

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx+2+f(0)+f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx$

$=2+f(0)=5$ ---------------------------------(7 分)

$\therefore f(0)=3.$ ---------------------------------(8 分)

四. (图 1)过 $M(x,y)$ 的切线 $Y-y=y'(X-x)$,

令 $X=0$, 得 $Y=y-xy'$, -------------------------------------(2 分)

梯形面积 $A=\dfrac{1}{2}(y+y-xy')x=\dfrac{1}{2}x(2y-xy')=3$,

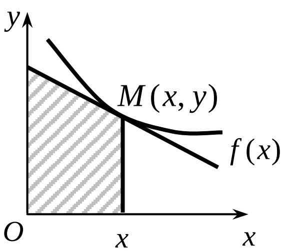
即 $y'-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{6}{x^2}$, $y(1)=1$, ----------------------------------(5 分)

解得 $y=e^{\int\frac{2}{x}dx}(C+\int-\dfrac{6}{x^2}e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx)=Cx^2+\dfrac{2}{x}$, ---------------------------(7 分)

由初始条件, 得 $C+2=1$, $C=-1$,

所求曲线为 $y=-x^2+\dfrac{2}{x}.$ ------------------------------------(8 分)

图1



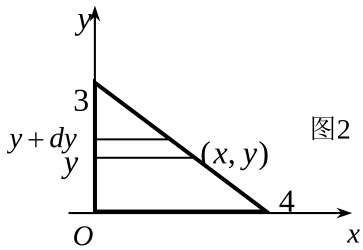


图2

五. (如图 2) $x=4-\dfrac{4}{3}y$, ------------------------------(1 分)

$\rho=\dfrac{500}{\frac{1}{2}\times3\times4}=\dfrac{250}{3}(kg/m^2)$, ------------------------------(2 分)

$dW=\rho g\cdot y\cdot xdy=\rho g\cdot y(4-\dfrac{4}{3}y)dy$, -----------------------------(5 分)

$W=\int_0^3\rho g(4y-\dfrac{4}{3}y^2)dy$ ---------------------------------------(7 分)

$=6\rho g=500g(J).$ ---------------------------------------(8 分)

六. 方程两边对 x 求导，得

$$y''+3y'+2y=2\sin x,$$

$$y(0)=-1,\quad y'(0)=1,$$ ------------------------------------(2 分)

$$r^2+3r+2=0,\quad r_1=-1,\quad r_2=-2,$$ -----------------------------(4 分)

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x},$$ ------------------------------(5 分)

设 $$y^*=A\cos x+B\sin x,$$ ------------------------------(6 分)

代入方程解得 $$A=-\frac{3}{5},\quad B=\frac{1}{5},$$

$$y^*=-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$ ----------------------------(7 分)

通解为 $$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$ ----------------------------(8 分)

由初始条件得 $$C_1=0,\quad C_2=-\frac{2}{5},$$

$$y=-\frac{2}{5}e^{-2x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$ -------------------------------(10 分)

七. 证 1 由题设，得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, ----------------------------(1 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,$$ ----------------------------(2 分)

当 $x\neq 0$, $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2>x$. ---------------(7 分)

证 2 令 $$F(x)=f(x)-x,$$ ------------------------------------(1 分)

$$F'(x)=f'(x)-1,$$

由题设，得 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$ -------------------------------------(3 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad F'(0)=0,$$ -------------------------------(4 分)

$$F''(x)=f''(x)>0,$$

$F(0)=0$ 是极小值也是最小值，故当 $x\neq 0$，有 $F(x)>0$，即

$$f(x)>x.$$ --------------------------------------(7 分)

八. (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(\frac{1}{x})]=1$，得 $\lim\limits_{x\to0^+}[f(\frac{1}{x})-f(x)]=1$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}[\lim_{x\to0^+}[f(x)+f(\frac{1}{x})+f(x)-f(\frac{1}{x})]=-\frac{1}{2}<0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\lim_{x\to0^+}f(\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}>0,$$

故 $\exists\xi\in(0,+\infty)$， 使 $f(\xi)=0$； -------------------------------(4 分)

(2) 令 $F(x)=f(x)e^x$,

若 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,+\infty)$，$\xi_1<\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$,

则 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$,

因而 $\exists c\in(\xi_1,\xi_2)$， 使 $F'(c)=0$,

但由题设, $F'(x)=[f'(x)+f(x)]e^x>0$,

矛盾, 故 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点. -----------------------------(7 分)