标准答案及评分标准

2022年1月9日

一、填空（每小题4分，共20分）

1． e

2． $\mathrm{d}\,x$

3. $y=x$, 2

4． $F(\ln ax)+C$

5. $\boldsymbol{x}=\frac{1}{1+\boldsymbol{y}^2}(\frac{1}{3}\boldsymbol{y}^3+\boldsymbol{C})$

二、计算题（每小题5分，共20分）

1． 解： $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2\ln(1+\frac{i}{n})$ **…………2 分**

$=2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\,x$ **…………3分**

$=2x\ln(1+x)\big|_0^1-2\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}\,x$ **…………4分**

$=2(2\ln 2-1)$ **………....5分**

2． 解： 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}=0$

可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}(a+\mathrm{e}^{bx})=\infty$, 则 $b<0$ **…………2分**

而 $f(x)=\frac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在（$-\infty,+\infty$）内连续，

则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$a+\mathrm{e}^{bx}\neq 0$ **………… 4分**

因此 $a\geq 0$. **…………...5分**

3. 解： 原式 $=\int\frac{1}{x(x^2+2x+2)}\mathrm{d}x$

$=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x$ **…………...1分**

整理得 $\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + C = 0, \\ A + B = 0, \end{cases}$ ………… **2分**

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2}, B = -\dfrac{1}{2}, C = -1,$ …………**3分**

$$原式 = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x - 1}{x^2 + 2x + 2} \right) \mathrm{d}x$$

$= \dfrac{1}{2}\ln|x| - \dfrac{1}{4}\ln(x^2 + 2x + 2) - \dfrac{1}{2}\arctan(x+1) + C$ …………**5分**

4. 解: 令 $t = \dfrac{\pi}{2} - x,$ …………**1分**

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\mathrm{d}t$ …………**3 分**

而 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ …………**4 分**

则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ …………**5 分**

三、解: 由 $g(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & x > 0 \\ \mathrm{e}^x - x - 1 & x \le 0 \end{cases}$ （$\alpha \ne 0$）得

当$\alpha < 0$时, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin\frac{1}{x}$不存在, 所以$g(x)$在$x = 0$处不连续. ………. **2 分**

当$\alpha > 0$时, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin\frac{1}{x} = 0,$ …………**3 分**

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-}(\mathrm{e}^x - x - 1) = 0,$ $g(x)$在0处连续 …………**4 分.**

$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 1}\sin\frac{1}{x},$ …………**5 分**

当$\alpha > 1$时, $g'_+(0) = 0$ ………… **6 分**

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-x-1}{x-0}=0,$$ ……7 分

所以当$\alpha<0$时，$g(x)$在0处不连续也不可导

当$0<\alpha\le 1$时，$g(x)$在0处连续但不可导

当$\alpha>1$时，$g(x)$在0处连续也可导. ……8分

四、解：因为 $f(x)$在区间$[a,+\infty)$内连续，在（$a,+\infty$）内可导且 $f'(x)>l>0$,

所以函数在区间$\left[a,a+\frac{|f(a)|}{l}\right]$上单调递增且满足拉氏中值定理条件 ……1分

则存在$\xi\in\left(a,a+\frac{|f(a)|}{l}\right)$,使得 $f(a+\frac{|f(a)|}{l})-f(a)=f'(\xi)\frac{|f(a)|}{l}$ ……2分

根据条件则 $f(a+\frac{|f(a)|}{l})-f(a)=f'(\xi)\frac{|f(a)|}{l}>|f(a)|$

则 $f(a+\frac{|f(a)|}{l})>f(a)+|f(a)|=0$ ……5 分

所以函数 $f(x)$在区间$\left(a,a+\frac{|f(a)|}{l}\right)$内有一个实根. ……6 分

五、解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{u'(t)\sin t-u(t)\cos t}{\sin^2 t}}{-\csc^2 t}$$

$$=-u'(t)\sin t+u(t)\cos t$$

……2分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(-u'(t)\sin t+u(t)\cos t)}{dt}\frac{d(t)}{dx}$$

$$=\frac{-u''(t)\sin t-u'(t)\cos t+u'(t)\cos t-u(t)\sin t}{-\csc^2 t}$$

$$=(u''(t)+u(t))\sin^3 t$$

……5分

则由（$1+x^2)^2y''=y$， 可得$\csc^4 t\,(u''(t)+u(t))\sin^3 t=\frac{u(t)}{\sin t}$ ……7分

则 $u''(t)=0.$

……8分

六、证明：要证的不等式可以简化为$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ **……1 分**

因为$\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{\sin(\xi+2\pi)}{24}x^4,\xi\in(0,x),$

所以$,\sin x>x-\dfrac{x^3}{6},\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}).$ **……3 分**

$\forall x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\dfrac{\sin(\xi+3\pi)}{720}x^6,\xi\in(0,x),$

因为$\dfrac{\sin(\xi+3\pi)}{720}x^6<0,\xi\in(0,x)\subset(0,\dfrac{\pi}{2}),$

所以$\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120},x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ **………6 分**

七、解：（1）$S_D=\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-2x)\mathrm{d}x$ **………1 分**

$=(x^2-\dfrac{x^3}{3})\Big|_1^2+(\dfrac{x^3}{3}-x^2)\Big|_2^3$ **………2 分**

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}$

$=2$ **………3 分**

（2）$V=2\pi\int_1^2x(2x-x^2)\mathrm{d}x+2\pi\int_2^3x(x^2-2x)\mathrm{d}x$ **………5 分**

$=2\pi(\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4})\Big|_1^2+2\pi(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3})\Big|_2^3$ **………7 分**

$=\dfrac{11\pi}{3}+\dfrac{16\pi}{3}$

$=9\pi$ **………8 分**

八、解：(1) 水面高为h时，注入的水的体积为$V=\int_0^h\pi y\,\mathrm{d}y$ **………**2 分

两边关于t求导，得为$\dfrac{dV}{dt}=\pi h\dfrac{dh}{dt}$

当$h=1$时，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{2}{\pi}.$ **………4 分**

(2) $W=\rho g\int_0^4\pi y(4-y)\,\mathrm{d}y$ **………**6 分

$$=\rho g\pi(32-\frac{64}{3})$$

$$=\frac{32}{3}\rho g\pi$$ **……….8 分**

九、解： (1) $f(x)$满足方程： $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ ………**2** 分

$f(x)$还满足方程： $f''(x)+f(x)=2e^x$

得： $f(x)=e^x$ ………3 分

(2) 由 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$

则 $\frac{dy}{dx}=2xf'(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt+f(x^2)f(-x^2)$

$=2xe^{x^2}\int_0^x f(-t^2)dt+1$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2e^{x^2}\int_0^x f(-t^2)dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x f(-t^2)dt+2x$ ……….5 分

则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=0$ ………..6 分

当$x>0$时，$\frac{d^2y}{dx^2}=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x>0$

当$x<0$时，$\frac{d^2y}{dx^2}=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x<0$

所以有拐点(0,0) ………..8 分

十、证明： ⑴ 因为$f(x)$在区间$[-2,0]$上满足拉氏中值定理条件,

所以在区间$(-2,0)$内至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}$，

……….1 分

则$|f'(\xi)|=\left|\frac{f(0)-f(-2)}{2}\right|\le\frac{|f(0)|+|f(-2)|}{2}\le 1$ **..……….2 分**

(2)构造辅助函数，$F(x)=f^2(x)+(f'(x))^2$ **……….3 分**

$F(x)$在区间$[-2,2]$上连续可导，

由条件得 $F(0)=3,$ …………4 分

由（1）以及$|f(x)|\le 1, \forall x\in[-2,2]$, 可得$F(\xi)\le 2,$ ...………5 分

同⑴内至少存在一点$\xi_1\in(0,2)$，使$|f'(\xi_1)|\le 1$,

则$F(\xi_1)\le 2,$ …………6 分

则$F(x)$在区间$[\xi, \xi_1]$上的最大值点不在端点取，

所以至少存在一点 $\eta\in(\xi, \xi_1)\subset(-2, 2)$，

使得$F(\eta)=f^2(\eta)+(f'(\eta))^2$是区间$[\xi,\xi_1]$上的最大值， ………7 分

则$F'(\eta)=2f'(\eta)(f(\eta)+f''(\eta))=0,$

而$f'(\eta)\ne 0$，

则$f(\eta)+f''(\eta)=0,$ ………..8 分