2013-2014 第一学期　　**工科数学分析期末试题（A 卷）解答（信二学习部整理）**

一．1.　x^3+2x^2+3x

2.　$\sqrt{2}+1$

3.　$-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{9}{2}$

4.　$\sqrt{1-x^2}+\dfrac{\pi}{4-\pi+2\ln 2}\arctan x$

5.　$m\dfrac{d^2y}{dt^2}=mg-k\dfrac{dy}{dt}$

二.　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$ ……………..(2 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{-1}{1-x}}{2x}$ ……………..(6 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1-x)}$ ……………..(7 分)

$=-\dfrac{1}{2}$ ……………..(8 分)

三.　$e^y\dfrac{dy}{dx}-y-x\dfrac{dy}{dx}=0$ ……………..(3 分)

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{e^y-x}$ ……………..(4 分)

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{dy}{dx}\cdot(e^y-x)-y(e^y\dfrac{dy}{dx}-1)}{(e^y-x)^2}$ ……………..(6 分)

$=\dfrac{\dfrac{y}{e^y-x}\cdot(e^y-x)-y(e^y\dfrac{y}{e^y-x}-1)}{(e^y-x)^2}$ ……………..(7 分)

$=\dfrac{-2xy+2ye^y-y^2e^y}{(e^y-x)^3}$ ……………..(8 分)

四. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}]^{\frac{3ax}{x-a}}$ ……………..(2 分)

$=e^{3a}$ ……………..(3 分)

$\int_0^{+\infty}\dfrac{8x}{e^x}dx=\int_0^{+\infty}8xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}8xde^{-x}$ ……………..(4 分)

$=-8xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}8e^{-x}dx$ ……………..(6 分)

$=-8e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=8$ ……………..(8 分)

$e^{3a}=8\qquad a=\ln 2$ ……………..(9 分)

五. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}x+y^3\qquad \dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y^3$ ……………..(2 分)

$x=e^{-\int -\frac{1}{y}dy}(C+\int y^3e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy)$ ……………..(4 分)

$=e^{\ln y}(C+\int y^3e^{-\ln y}dy)$ ……………..(6 分)

$=y(C+\int y^3\dfrac{1}{y}dy)$ ……………..(8 分)

$=Cy+\dfrac{1}{3}y^4$ ……………..(9 分)

六. $f'(x)=-a\sin x-\cos 3x$ ……………..(3 分)

由 $f'(\dfrac{\pi}{3})=-a\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=0$ 得 $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ……………..(5 分)

$f''(x)=-a\cos x+3\sin 3x$ ……………..(7 分)

因为 $f''(\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<0$ 故 $f(\dfrac{\pi}{3})$ 是极大值 ……………..(9 分)

七. 抛物线与直线的交点为 $(1,-1),(4,2)$ ……………..(1 分)

$A=\int_{-1}^{2}[(y+2)-y^2]dy$ ……………..(3 分)

$=(\dfrac{y^2}{2}+2y-\dfrac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{2}=\dfrac{9}{2}$ ……………..(5 分)

$V=\int_{-1}^{2}[\pi(y+2)^2-\pi y^4]dy$ ……………..(7 分)

$=\pi[\dfrac{1}{3}(y+2)^3-\dfrac{1}{5}y^5]\Big|_{-1}^{2}=\dfrac{72}{5}\pi$ ……………..(9 分)

八. 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 即 $x=\frac{1}{t^2-1}$ ……………..(2 分)

$$I=\int\frac{-2t^2}{t^2-1}dt$$ ……………..(3 分)

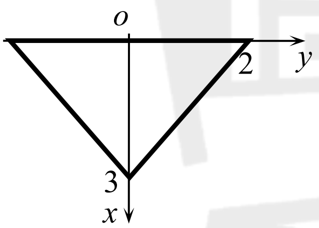
$$=-2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt$$ ……………..(4 分)

$$=-2\int(1+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}-\frac{\frac{1}{2}}{t+1})dt$$ ……………..(6 分)

$$=-2t+\ln|t+1|-\ln|t-1|+C$$ ……………..(8 分)

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right|+C$$ ……………..(9 分)

九. $dW=x\cdot\mu g\pi y^2dx=\pi\mu gx\cdot4(1-\frac{x}{3})^2dx=\frac{4}{9}\pi\mu gx(3-x)^2dx$ ……..(3 分)



$$w=\int_0^3\frac{4}{9}\pi\mu gx(3-x)^2dx$$ ……………..(5 分)

$$=\frac{4}{9}\pi\mu g\int_0^3(9x-6x^2+x^3)dx$$

$$=\frac{4}{9}\pi\mu g(\frac{9}{2}x^2-2x^3+\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^3$$ ……………..(8 分)

$$=3\pi\mu g=3000\pi g\,(\mathrm{J})$$ ……………..(9 分)

十. $f(x)=-e^{-x}+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ ……………..(1 分)

$f'(x)=e^{-x}+\int_0^x f(t)dt$ ……………..(2 分)

$f''(x)=-e^{-x}+f(x)$ $f''(x)-f(x)=-e^{-x}$ ……………..(3 分)

$f(0)=-1$ $f'(0)=1$ ……………..(5 分)

$r^2-1=0$ $r=\pm1$ ……………..(6 分)

$\bar{f}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$ ……………..(7 分)

设 $f^*(x)=Axe^{-x}$ ……………..(8 分)

代入微分方程得 $A=\frac{1}{2}$ $f^*(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}$ ……………..(9 分)

通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}$ ……………..(10 分)

由初值得 $C_1=-\frac{1}{4}$ $C_2=-\frac{3}{4}$

$$f(x)=-\frac{1}{4}e^x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}$$ ……………..(12 分)

十一. 令 $F(t)=(t-1)\int_0^t f(x)dx$ ……………..(2 分)

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，又

$$F(0)=F(1)=0$$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,1)$， 使 $F'(\xi)=0$ ……………..(6 分)

$$\int_0^\xi f(x)dx+(\xi-1)f(\xi)=0$$ ……………..(7 分)

即 $(1-\xi)f(\xi)=\int_0^\xi f(x)dx$ 得证 ……………..(8 分)