

Φίλτρα συχνοτήτων και απομόνωση H/M θορύβου

Νικόλας Τοροσιάν Νίκος Παπαδάκης

21 Μαρτίου 2023

Περιεχόμενα

I	Εισαγωγή	2
II	Ιστορική αναδρομή	4
III	Σήματα	7
1	Εισαγωγή	8
2	Συνεχούς χρόνου	9
3	Διακριτού χρόνου	10
3.1	Μοναδιαίο διακριτό σήμα	10
3.2	Τυχαίο σήμα	10
3.3	Διακριτά σήματα και ακολουθίες	11
3.4	Διαχείριση και βασικές τεχνικές μετασχηματισμών	11
3.5	Συνδυάζοντας ακολουθίες	11
3.6	Συστήματα διακριτού χρόνου	12
3.7	Γραμμικότητα συστημάτων	12
IV	Καταγραφή σημάτων	14
4	Φαινόμενα καταγραφής	15
4.1	Εισαγωγή	15
4.2	Μέθοδος καταγραφής	15
4.3	Θεώρημα δειγματοληψίας	15
4.4	Αναπαράσταση στο πεδίο συχνοτήτων	16
4.5	Αλλοίωση	16
5	Μείωση αριθμού δειγμάτων	18
V	Επεξεργασία σημάτων	20
6	Ορισμός μετα-επεξεργασίας	21
7	Εγκατάσταση εργαστηρίου	22
VI	Σχεδιασμός Φίλτρων	23
8	Κατηγορίες	24
9	Φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης	25
9.1	Παραδείγματα με κώδικα	25

10 Φίλτρο μέσης τρέχουσας τιμής	27
10.1 Κατηγορίες παραθύρων φίλτρων πεπερασμένης χρονικής απόκρισης	27
VII Βιβλιογραφία	28

Μέρος Ι
Εισαγωγή

Σε πολλές περιπτώσεις η ανάγκη της επεξεργασίας σημάτων, όπως στις τηλεπικοινωνίες μετά ή/και πριν την μετάδοση από τον πομπό προς τον δέκτη, και η εκλογή πληροφοριών από αυτό έθεσαν από νωρίς το πρόβλημα των παρεμβολών του περιβάλλοντος στις ηλεκτρονικές συσκευές και την ανάγκη απομόνωσης του φάσματος των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται για κάθε λειτουργία.

Η απομόνωση αυτή μπορεί να επιτευχθεί είτε μέσω συμβατικών φίλτρων, δηλαδή αντιστάσεις και πυκνωτές κατάλληλα τοποθετημένους στο κύκλωμα που συλλέγει την τάση (**ρεύμα μέτρησης**), είτε με την χρήση μεθόδων ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων (*DSP*). Στις μέρες μας προτιμάται ο 2ος τρόπος λόγω της ραγδαίας εξέλιξης των Η/Υ με αποτέλεσμα να επιφέρει μεγαλύτερο κόστος η εγκατάσταση αναλογικών φίλτρων σε κάθε θέση που απαιτείται.

Οι μέθοδοι αλλά και η πληθώρα συστημάτων λήψης και ανάλυσης σημάτων τις τελευταίες δεκαετίες έχουν, αφενός εξελιχθεί ως προς την υπολογιστική ισχύ με γρηγορότερους επεξεργαστές και αλγόριθμους, αφετέρου δίνουν πλέον την δυνατότητα διαχείρισης των πληροφοριών απομακρυσμένα με αποτέλεσμα την ευρύτερη εγκαθίδρυση των ψηφιακών μέσων επεξεργασίας σημάτων. Στις μέρες μας η ανάγκη διαχείρισης ολοένα και μεγαλύτερα αρχεία δεδομένων με καλύτερη ακρίβεια οδήγησε την επιστημονική κοινότητα στην χρήση της μεθόδου **μετα-επεξεργασίας** (*post – processing*). Βασικό όφελος ήταν η δυνατότητα επαναληψιμότητας του πειράματος και σύγκρισης των αποτελεσμάτων σε όλο τον κόσμο, ουσιαστική αρχή της πειραματικής διαδικασίας. Έτσι με την χρήση προγραμματισμού δίνεται πλέον η δυνατότητα στον ερευνητή, να δημιουργεί ένα περιβάλλον προσομοίωσης και να δοκιμάζει διάφορες λύσεις χωρίς να επισκεφτεί την πειραματική διάταξη σε πολλές περιπτώσεις μετά την καταγραφή των μετρήσεων.

Στην παρούσα εργασία θα πραγματευτούμε την απομείωση συγκεκριμένων συχνοτήτων με την χρήση Ψηφιακής Ανάλυσης Σημάτων και φίλτρων, διαφόρων κατηγοριών. Στο πλαίσιο αυτό θα παρουσιαστεί, μια μελέτη που πραγματοποιήθηκε σε συνεργασία με το εργαστήριο Αιολικής Ενέργειας του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών στο Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο με θέμα την απόρριψη θορύβου από αισθητήριο όργανο για την μέτρηση της ταχύτητας ανέμου σε περιβάλλον με ενισχυμένες παρεμβολές. Η ιδιαιτερότητα που παρουσιάστηκε στην εγκατάσταση ήταν παρεμβολές από ηλεκτρικό μετασχηματιστή, που όμως ήταν αδύνατο να αφαιρεθεί, και ταυτόχρονα ο σχεδιασμός όπως και η τοποθέτηση ενός αναλογικού φίλτρου θα ενέτασαν μεγάλο κόστος και περιπλοκότητα. Θα αναλυθούν οι δομές σημάτων που επεξεργάστηκαν καθώς και οι τύποι των φίλτρων που χρησιμοποιήσαν στην απομόνωση των ζητούμενων σημάτων. Επίσης θα υπάρξει παράθεση των θετικών και αρνητικών που παρατηρήθηκαν κατά την διάρκεια εκτέλεσης της επεξεργασίας και καταγραφής των δεδομένων (τύποι αρχείων δεδομένων). Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Νίκο Παπαδόκη για την καθοδήγησή του και την υπομονή που έδειξε για τις λιγοστές γνώσεις μου στον προγραμματισμό.

Μέρος II

Ιστορική αναδρομή

Από την εποχή της ανακάλυψης του Απειροστικού λογισμού (*calculus*) τον 17ο αιώνα, οι επιστήμονες προσπαθούσαν να εξηγήσουν τα φυσικά φαινόμενα με μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιώντας εξισώσεις συνεχών μεταβλητών και διαφορικές εξισώσεις. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές αριθμητικής επίλυσης όταν οι αναλυτικές λύσεις δεν ήταν εφικτό να καθοριστούν. Αργότερα μαθηματικοί του 18ου αιώνα όπως οι Ευλερ, Μπερνούλι και Λαγκραντζ κατασκεύασαν μεθόδους για αριθμητική ολοκλήρωση και την εισαγωγή εξισώσεων συνεχών μεταβλητών. Μια ιστορική μελέτη από τους *Heideman, Johnson και Burrus* (1984) έδειξε ότι ο *Gauss* είχε ανακαλύψει την βασική αρχή του γρήγορου μετασχηματισμού *Fourier* ήδη από το 1805, πριν την δημοσίευση της διατριβής του πάνω στην απεικόνιση αρμονικών σειρών εξισώσεων. Στις αρχές του 1950, η ανάλυση σημάτων γινόταν κυρίως με αναλογικά συστήματα κατασκευασμένα από ηλεκτρονικά κυκλώματα ακόμα και με μηχανικές συσκευές. Ενώ οι Η/Υ είχαν κάνει την είσοδό τους ήδη σε επιχειρήσεις και επιστημονικά εργαστήρια ήταν ακόμα ακριβοί με περιορισμένες δυνατότητες. Περίπου εκείνη την εποχή ξεκίνησε η ανάγκη για πιο εξειδικευμένες μεθόδους στην ανάλυση σημάτων και στράφηκε η προσοχή στην ανάλυση διακριτού χρόνου σημάτων. Μια από τις πρώτες εφαρμογές των Η/Υ ήταν η καταγραφή σεισμικών δονήσεων σε πλατφόρμες εξόρυξης πετρελαίου, που καταγράφονταν σε μαγνητική ταινία για να επεξεργαστούν αργότερα. Η διαδικασία αυτή δεν μπορούσε να γίνει σε πραγματικό χρόνο, καθώς μπορεί να χρειάζοντουσαν κάποια λεπτά ακόμα και ώρες για την επεξεργασία μερικών δευτερολέπτων από τις μαγνητικές ταινίες. Την ίδια εποχή για όσους είχαν την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν ψηφιακούς υπολογιστές, ήταν εύκολο να δημιουργήσουν ένα περιβάλλον προσομοίωσης για να μελετήσουν νέους αλγόριθμους και μεθόδους ανάλυσης σημάτων πριν χρησιμοποιήσουν πόρους και μηχανικούς για την κατασκευή της αναλογικής συσκευής που τελικά θα εκτελούσε την επιθυμητή εργασία. Παραδείγματα τέτοιων προσομοιώσεων ήταν εκείνες που πραγματοποιήθηκαν στο Εργαστήριο Λίνκολν και στα Εργαστήρια Μπελλ όπου προσομοιώθηκε ένας κωδικοποιητής φωνής *vocoder*. Στην κατασκευή ενός αναλογικού καναλιού κωδικοποιητής φωνής, τα χαρακτηριστικά του φίλτρου επηρεάζουν την ποιότητα της φωνής σε βαθμό που ήταν δύσκολο να διακριθούν αντικειμενικά. Μέσω προγραμματισμένων προσομοιώσεων κατάφεραν την ρύθμιση των χαρακτηριστικών, ώστε να καθορίσουν το αποτέλεσμα της αναλογικής συσκευής πριν την κατασκευή της. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ η χρήση των Η/Υ βοήθησε στην πειραματική διαδικασία, μπορούσε μόνο να προσομοιώσει ή προσεγγίσει το αναλογικό σύστημα ανάλυσης σημάτων.

Καθώς τα σήματα ξεκίνησαν να επεξεργάζονται σε ψηφιακούς υπολογιστές, οι ερευνητές αναγκάστηκαν πολύ γρήγορα να χρησιμοποιούν ολοένα και πιο περίπλοκους αλγόριθμους επεξεργασίας σημάτων. Πολλοί από τους αλγόριθμους εξελίχθηκαν λόγω της ευελιξίας που παρείχε το προγραμματιστικό περιβάλλον σε αντίθεση με την μόνιμη αναλογική κατασκευή, όπου περιορίζεται η δυνατότητα πειραματισμού. Έτσι η συνεχής εξέλιξη και ευελιξία της ψηφιακής επεξεργασίας σημάτων έδωσε το έναυσμα για την ολική ψηφιοποίηση των συσκευών και μεθόδων της επεξεργασίας και διάδοσης σημάτων στην πλειοψηφία των εγκαταστάσεων. Εκείνη την περίοδο ξεκίνησε ενεργά η δημιουργία ψηφιακών κωδικοποιητών φωνής, ψηφιακών αναλυτών φάσματος κ.α. συσκευών αμιγώς ψηφιακής επεξεργασίας σήματος, με την ελπίδα ότι τελικά τέτοια συστήματα θα αποκτούσαν πρακτικές εφαρμογές.

Μία νέα σκοπιά προς την επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου επιταχύνθηκε με την δημοσίευση από τους *Cooley and Tukey* (1965) ενός αποδοτικού αλγόριθμου για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού *Fourier*. Η κλάση αυτή θα γίνει αργότερα γνωστή ως Ταχύς Μετασχηματισμός *Fourier* (*F.F.T. Fast Fourier Transform*). Ο *F.F.T.* ήταν αρκετά σημαντικός για πολλούς λόγους. Βασικό πρόβλημα των αλγόριθμων της εποχής ήταν ότι απαιτούσαν χρόνους επεξεργασίας πολύ μεγαλύτερους από τον πραγματικό χρόνο του καταγεγραμμένου σήματος. Αυτό συνέβαινε γιατί στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτείται η χρήση ανάλυσης φάσματος του σήματος και μέχρι τότε δεν υπήρχε κάποιος αποδοτικός αλγόριθμος. Ο ταχύς μετασχηματισμός προσέφερε την δυνατότητα στους ερευνητές να πειραματίζονται σε πραγματικούς χρόνους με την εγκατάσταση, καθώς μείωσε δραστικά τον χρόνο επεξεργασίας κατά πολλές τάξεις μεγέθους. Επιπρόσθετα πολλοί αλγόριθμοι που δεν είχαν καμία πρακτική εφαρμογή, λόγω του χρόνου επεξεργασίας, ξεκίνησαν να έχουν πρακτικές εφαρμογές στην βιομηχανία και αργότερα στα προϊόντα για τον γενικό πληθυσμό.

Άλλη μια σημαντική ιδιότητα του *F.F.T.* που βοήθησε στον σχεδιασμό καλύτερων συσκευών ήταν ότι προγραμματίστηκε με βάση τα σήματα διακριτού χρόνου. Δηλαδή εμπεριείχε τις απαιτούμενες ιδιότητες και μαθηματικά ώστε να διαχειρίζεται ψηφιοποιημένα σήματα -διακριτού χρόνου- και να μην προσομοιώνει μια αναλογική συμπεριφορά ενός σήματος ή συστήματος. Έτσι η δυνατότητα σχεδιασμού συστημάτων που προβλεπόταν η ακριβής συμπεριφορά του βοήθησε στην εξέλιξη της επεξεργασίας σημάτων διακριτού χρόνου χωρίς την ανάγκη συσχέτισης των αποτελεσμάτων με ένα σύστημα συνεχούς χρόνου (αναλογικού συστήματος). Έτσι η ένταξη των διακριτών σημάτων ως ξεχωριστή μέθοδος επεξεργασίας προσέφερε στην ανάπτυξη τεχνολογίας μειώνοντας, εκτός από τους απαιτούμενους χρόνους, το κόστος και τον όγκο των εγκαταστάσεων για την επίτευξη του στόχου.

Παράλληλα η επινόηση και εφεύρεση των μικρο-ελεγκτών στον τομέα της μικροηλεκτρονικής επέφερε περαιτέρω μείωση του κόστους. Ενώ οι πρώτες συσκευές μικρο-ελεγκτών δεν παρείχαν τις απαιτούμενες δυνατότητες για την ολοκλήρωση των συστημάτων επεξεργασίας διακριτών σημάτων, από τις αρχές της δεκαετίας του '80 η ταχύτητα τους αυξάνεται εκθετικά. Επιπρόσθετα η αρχιτεκτονική και τεχνολογία των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (*I.C. Integrated Circuit*) αναπτύχθηκε προς την κατεύθυνση για την κατασκευή ολοένα και ταχύτερων υπολογι-

στών για την διαχείριση ακεραίων και δεκαδικών αριθμών. Έτσι σήμερα η ανάλυση σημάτων, η καταγραφή όπως και η μετάδοσή τους γίνεται πολλές φορές εξ' ολοκλήρου από ψηφιακά συστήματα.

Μέρος III

Σήματα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο όρος *σήμα* (*signal*) δίνεται σε κάτι που εμπεριέχει πληροφορία. Γενικά τα σήματα χρησιμοποιούνται στην κωδικοποίηση και εξαγωγή πληροφοριών για την κατάσταση ή/και την συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος. Συχνά συνδυάζοντας διαφορετικά σήματα υπάρχει η δυνατότητα επικοινωνίας μεταξύ ανθρώπων αλλά και με μηχανήματα. Αν και αναπαριστούμε τα σήματα με διάφορες μορφές η πληροφορία που μεταδίδουν, εμπεριέχεται με την μορφή μοτίβων. Η μαθηματική αναπαράσταση παρέχεται μέσω συνάρτησης μίας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών. Ένα παράδειγμα είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της εξίσωσης που περιγράφει μία ψηφιακή εικόνα, όπου θα αποτελείται από δύο χωρικές μεταβλητές σε συνάρτηση της φωτεινότητας. Αντίθετα ένα αρχείο ήχου θα ορίζεται σε συνάρτηση με τον χρόνο. Εδώ καταχρηστικά όταν θα αναφερόμαστε σε κάποιο σήμα θα χρησιμοποιούμε την 2η περίπτωση, δηλαδή ως προς τον χρόνο.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου σε ένα σήμα μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτή ως προς το διάστημα που ορίζεται. Τα σήματα συνεχούς χρόνου ορίζονται για κάθε τιμή τους στο διάστημα και επομένως αναπαριστώνται με μία ανεξάρτητη συνεχή μεταβλητή. Στην παραπάνω περίπτωση αναφερόμαστε σε αυτά ως **αναλογικά σήματα**. Ως **σήματα διακριτού χρόνου** ονομάζουμε όσα η ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου μας παρέχει πληροφορία για συγκεκριμένα διαστήματα ή αλλιώς χρονικές στιγμές. Εδώ η αναπαράσταση του χρόνου γίνεται με την χρήση ακολουθίας αριθμών, συνήθως ανά συγκεκριμένο διάστημα π.χ. κάθε 0,1 δευτερόλεπτα. Εκτός του χρόνου την ίδια κατηγοριοποίηση συναντούμε και στην αναπαράσταση της ισχύος ενός σήματος (*amplitude*). **Ψηφιακά σήματα** ονομάζονται όσα έχουν διακριτές τιμές ισχύος και χρόνου.

Τα συστήματα ανάλυσης σημάτων κατηγοριοποιούνται ανάλογα. Συστήματα συνεχούς χρόνου ονομάζονται εκείνα που τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αναλογικά. Αντίστοιχα συστήματα διακριτού χρόνου ονομάζονται όσα διαχειρίζονται σήματα διακριτού χρόνου. Ψηφιακά συστήματα ονομάζονται όσα λαμβάνουν σε είσοδο και εξόδο ψηφιακά σήματα. Επομένως στην ψηφιακή ανάλυση σημάτων (*Digital signal processing*) επεξεργάζονται σήματα που εκφράζονται με ακολουθίες για τον χρόνο και την ισχύ τους.

Σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν καταγράφοντας ένα συνεχές σήμα ή από διεργασίες που εκτελούνται σε διακριτές τιμές του χρόνου. Ανεξαρτήτου προέλευσης του σήματος, τα συστήματα επεξεργασίας σημάτων διακριτού χρόνου παρέχουν πολλές δυνατότητες ελκύοντας το ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες. Έχουν δυνατότητες προσομοίωσης αναλογικών συστημάτων με περισσότερη ευελιξία και παρέχουν την δυνατότητα ανακάλυψης τυχών μεταβολών στα σήματα που δεν είναι δυνατόν να γίνουν αντιληπτά από ένα αναλογικό σύστημα επεξεργασίας. Επιπρόσθετα η συνεχής ανάπτυξη ψηφιακών συσκευών όπως είναι οι υπολογιστές γενικής χρήσης και οι μικρο-ελεγκτές προτιμάται η αναπαράσταση των σημάτων σε διακριτά πεδία χρόνου αν όχι σε ψηφιακή μορφή.

Παρακάτω στο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε βασικές έννοιες που διέπουν τα σήματα διακριτού χρόνου και συστήματα ανάλυσης αυτών για μονοδιάστατα σήματα. Πρακτικά υπάρχει η δυνατότητα να διαχειριστούμε τα σήματα αυτά ως αναλογικά και με σωστή χρήση συγκεκριμένων κριτηρίων μπορούμε να εξάγουμε τα σωστά αποτελέσματα. Τέτοιου τύπου συστήματα καθόρισαν τις βασικές αρχές των καταγραφικών συσκευών δεδομένων. Όμως πολλά συστήματα διακριτού χρόνου δεν ορίζονται ως προσομοιώσεις αναλογικών συστημάτων καθώς και πολλές ακολουθίες δεν προκύπτουν καταγράφοντας ένα αναλογικό σήμα. Για τους παραπάνω λόγους αντί να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα από την θεωρία που αναφέρεται στα συνεχή σήματα-συστήματα, θα εκβάλλονται παράλληλα συμπεράσματα ξεκινώντας από τα χαρακτηριστικά που διέπουν το σήμα και θέτοντας το ανάλογο πλαίσιο επεξεργασίας. Εδώ ασχοληθήκαμε μόνο με ψηφιακά σήματα καθώς η καταγραφή των σημάτων έγινε με Η/Υ μέσω προγράμματος (*Lab – View*).

Κεφάλαιο 2

Συνεχούς χρόνου

Στην εισαγωγή αναφερθήκαμε στον γενικό ορισμό των σημάτων και τις διαφορές που τα κατηγοριοποιούν σε αρχικό βαθμό. Επειδή ο στόχος της παρούσας εργασίας ήταν η απόρριψη θορύβου δεν θα γίνει η πρόποσα ανάλυση στην θεωρία των σημάτων, αντιθέτως θα παρατεθούν οι βασικές αρχές και έννοιες ώστε να υπάρχει το υπόβαθρο για τα επόμενα κεφάλαια. Σήμα συνεχούς χρόνου ορίζουμε ως την εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη μιας περιοδικής κυματομορφής στο χρόνο. Πιο συγκεκριμένα αν υποθέσουμε πως ο χρόνος διάρκειας του σήματος είναι t τότε η κυματομορφή στο πεδίο του χρόνου θα εκφράζεται ως συνάρτηση αυτού $s(t)$.

Μπορεί λοιπόν να παρασταθεί από μία ανεξάρτητη μεταβλητή και ορίζεται για κάθε τιμή της. Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται και τα διακριτά σήματα συνεχούς χρόνου. Η διαφορά είναι πως αντί να μπορούμε να ταυτίσουμε κάθε χρονική στιγμή με το αντίστοιχο $s(t)$. Σήμα συνεχούς χρόνου ονομάζεται ένα σήμα $y(t)$, το οποίο ορίζεται για κάθε τιμή του t σε κάποιο διάστημα χρόνου $[a, \beta]$. Συνήθως τα συναντούμε στην μορφή συνεχούς ρεύματος σε μετρητικές και άλλες συσκευές σε εξόδους για την ένδειξη κάποιας τιμής ή απεικόνιση σε παλμογράφο. Τα σήματα συνεχούς χρόνου χωρίζονται σε αναλογικά και διακριτά σήματα συνεχούς χρόνου.

Αναλογικά σήματα ονομάζονται εκείνα που η ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t και η μεταβλητή του πλάτους (εξαρτημένη μεταβλητή ως προς τον χρόνο) λαμβάνουν συνεχές και πραγματικές τιμές, π.χ. $s(t) = 12 * t$. Διακριτά σήματα συνεχούς χρόνου ονομάζονται όσα ή εξαρτημένη τιμή (πλάτος) παίρνει διακριτές τιμές, π.χ.

$$\begin{aligned} s(t) &= A * t \\ A &= [0, \dots, n], t \in [a, b] n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Στην πληθώρα των συσκευών επεξεργασίας και καταγραφής σημάτων η χρήση των αναλογικών σημάτων έχει σχεδόν εκλείψει. Σημαντικό μειονέκτημα ανάμεσα σε άλλα είναι και ο υπέρογκος χώρος αποθήκευσης που απαιτείται για την αποθήκευση του. Παρακάτω θα αναφερθούμε στα **ψηφιακά** σήματα που έλυσαν πολλά από τα προβλήματα των αναλογικών σημάτων, προσθέτοντας μια σειρά από "πονοκεφάλους" αρχικά στην επιστημονική κοινότητα. Τα πλεονεκτήματα ήταν πολλά και τελικά επικράτησαν. Παρακάτω θα παρατεθούν κάποιες βασικές έννοιες και αρχές που τα διέπουν.

Κεφάλαιο 3

Διακριτού χρόνου

Σήμα διακριτού χρόνου ονομάζεται μια ακολουθία αριθμών καταγεγραμμένες ανά συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, π.χ. κάθε 0,01 δευτερόλεπτο. Το διάστημα αυτό ορίζει την ταχύτητα καταγραφής του σήματος από την εκάστοτε συσκευή, όμως εμείς αναφερόμαστε σε αυτό το χρόνο μέσω της συχνότητας καταγραφής ή αλλιώς *sampling frequency*. Η συχνότητα αυτή ορίζεται ως το πηλίκο ενός δευτερολέπτου ως προς το χρονικό διάστημα καταγραφής, δηλαδή από το παραπάνω παράδειγμα θα είχαμε μια συχνότητα καταγραφής $1/0.01 [Hz]$.

$$fs = \frac{1}{0,01} [Hz] \quad (3.1)$$

Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι υπάρχει ένα όριο το οποίο πρέπει να τηρείται ώστε η επαναδημιουργία του σήματος να απεικονίζει όσο το δυνατόν πιο πολύ στο συνεχές σήμα που καταγράφηκε στην αρχή. Θα αναφερθούμε αργότερα στο εν λόγω θεώρημα του φυσικού *Niquist*.

3.1 Μοναδιαίο διακριτό σήμα

Μοναδιαίο ονομάζεται το σήμα που αποτελείται από έναν κρουστικού χαρακτήρα παλμού και έχει μηδενική ισχύ πριν και μετά την εμφάνισή του. Αν υποθέσουμε μια συνάρτηση $y(t)$,

$$y(t) = [..., 0, 1, 0, ...] \quad (3.2)$$

θα είναι η έξοδος του σήματος αυτού.

Μια άλλη βασική υποκατηγορία αποτελεί η μοναδιαία ακολουθία βήματος. Εδώ σε αντίθεση με παραπάνω, η τιμή της εξόδου αλλάζει από μηδέν σε ένα μόλις η εξαρτημένη μεταβλητή t λάβει κάποια οριακή τιμή. Χρησιμοποιώντας το ανωτέρω παράδειγμα θα έχουμε ότι:

$$y(t) = [..., 0, 1, 1, 1, ...] \quad (3.3)$$

3.2 Τυχαίο σήμα

Τα τυχαία σήματα αποτελούν μία ειδική υποκατηγορία που χρησιμοποιείται ευρέως στην ανάλυση ψηφιακών σημάτων. Αναπτύχθηκαν για να καλύψουν την ανάγκη επιβεβαίωσης των συσκευών επεξεργασίας κυματομορφών. Με την πάροδο του χρόνου τις συναντάμε σε διάφορες συσκευές τηλεπικοινωνίας και σχεδόν σε όλες τις συσκευές παραγωγής ήχου (*synthesizers*). Αξίζει να σημειωθεί για λόγους πληρότητας ότι τα εν λόγω σήματα βασίζονται σε στατιστικά μοντέλα που απορρέουν από στατιστικές κατανομές. Ο 'λευκός' γκαουσιανός θόρυβος (*white gaussian noise*) ακολουθεί την λεγόμενη κανονική κατανομή πιθανοτήτων του Gauss. Στην παρούσα εργασία ένα αντίστοιχο σήμα χρησιμοποιήθηκε για την επιβεβαίωση των φίλτρων πριν την εφαρμογή στο σετ δεδομένων. Δεν θα γίνει περαιτέρω ανάλυση γιατί κρίθηκε πως οι παρεμβολές στον αισθητήρα της εγκατάστασης προερχόταν από εξωτερικά H/M πεδία.

3.3 Διακριτά σήματα και ακολουθίες

Για τον ορισμό του διακριτού σήματος αρκεί να υποθέσουμε μία μαθηματική ακολουθία αριθμών x , όπου το νιοστό στοιχείο της θα γραφόταν ως $x[n]$. Ορθότερα μπορούμε να γράψουμε την εξής έκφραση:

$$\begin{aligned} n &\in \mathbb{Z} \\ x &= x[n], \quad -\infty < n < \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου \mathbb{Z} είναι σαφώς το σύνολο των ακέραιων αριθμών και $x[n]$ το κάθε στοιχείο της ακολουθίας. Ο συγκεκριμένος τύπος σήματος παράγεται συνήθως από την καταγραφή αναλογικού σήματος και επομένως η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται για αναλογικό σήμα της μορφής $x_a(t)$ για χρονική στιγμή ίση με nT το νιοστό στοιχείο της ακολουθίας εξόδου από την καταγραφή θα είναι της μορφής:

$$x[n] = x_a nT, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.5)$$

Η ποσότητα T ορίζει την περίοδο καταγραφής που παρέχει την συχνότητα καταγραφής διαιρώντας με την μονάδα. Αν και τα διακριτά σήματα δεν προέρχονται πάντα από καταγραφή αναλογικών σημάτων ο ορισμός του αριθμού των στοιχείων της ακολουθίας n μπορεί να λάβει μόνο ακέραιες τιμές. Επίσης γράφοντας μόνο το 'τελευταίο' ψηφίο μέσα στην αγκύλη αναφερόμαστε σε όλα τα στοιχεία της ακολουθίας για συντομία και όχι στο τελευταίο στοιχείο αυτής.

3.4 Διαχείριση και βασικές τεχνικές μετασχηματισμών

Κατά την διαδικασία της ανάλυσης σημάτων είναι συχνά απαραίτητη η επέμβαση στο σήμα εισόδου ή εξόδου. Οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης δυο σημάτων μεταξύ τους λαμβάνει χώρα στοιχείο προς στοιχείο, όπως πράξεις μεταξύ αριθμού και ακολουθίας. Επίσης όταν αφαιρείται από μια ακολουθία ακέραιος αριθμός το παράγωγο σήμα ονομάζεται καθυστέρηση του αρχικού (*delayed*). Μια τέτοια ακολουθία μπορεί να βρεθεί γραμμένη ως εξής:

$$\begin{aligned} a_0 &\in \mathbb{Z} \\ out[z] &= in[z - a_0] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Τέτοιου είδους μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε συνδυασμούς και παρέχουν μία πληθώρα διεργασιών ανάμεσα σε σήματα αλλά και σε σχέση με κάποια σταθερά. Μια ειδική περίπτωση που αναφέρθηκε νωρίτερα, ως βηματική μοναδιαία ακολουθία, εκφράζεται σαν άθροισμα καθυστερημένων ακολουθιών:

$$out[n] = \sum_{k=0}^{\infty} in[n - k] \quad (3.7)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει γιατί όλα τα μη μηδενικά στοιχεία της ακολουθίας $in[n]$ ισούνται με την μονάδα. Σημαντική θέση στην ανάλυση διακριτών συστημάτων έχει και η εκθετική ακολουθία. Συχνά απλοποιεί τις πράξεις ειδικά για συστήματα πέραν του ενός βαθμού ελευθερίας. Η γενική μορφή της εκθετικής ακολουθίας φαίνεται παρακάτω:

$$s[n] = Cb^n \quad (3.8)$$

όπου C και b σταθερές που λαμβάνοντας πραγματικές τιμές (\mathbb{R}) μετατρέπουν την έκφραση σε ακολουθία που λαμβάνει τιμές στο \mathbb{R} . Συνοπτικά οι εκθετικές μορφές σε συνδυασμό με ανάλογες τριγωνομετρικές μορφές μπορούν να παρέχουν πληροφορία για την ταχύτητα διάδοσης ενός σήματος, την μορφολογία της κυματομορφής αλλά και την ισχύ των συχνοτήτων που μας ενδιαφέρουν. Η ισχύ στο παράδειγμά μας θα ήταν C .

3.5 Συνδυάζοντας ακολουθίες

Ίσος από τις πιο συχνά αναλυμένες μορφές σημάτων αφορούν ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς. Η γενική μορφή ορίζεται όπως θα δειχθεί παρακάτω και θα αναφερθούμε στον συνδυασμό της εκθετικής μορφής με την ημιτονοειδή.

$$y[n] = C \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (3.9)$$

Η οποία ορίζεται για κάθε n , με τις τιμές των C και ϕ να λαμβάνουν πραγματικές τιμές. Η εκθετική μορφή μιας ακολουθίας μπορεί να γραφεί και ως Ce^{jn} με την μεταβλητή n να έχει φανταστικές τιμές θα μπορούσαμε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση στην μορφή:

$$y[n] = |C||e|^{jn} \cdot (\cos(\omega_0 n + \phi) + j \sin(\omega_0 n + \phi)) \quad (3.10)$$

Η παραπάνω σχέση ταλαντεύεται με εκθετικά αυξανόμενη κλήση αν η απόλυτη τιμή της μεταβλητής c είναι μεγαλύτερη της μονάδας και με εκθετικά μειούμενη στην αντίθετη περίπτωση όπου $|c| < 1$.

Στην περίπτωση που η μεταβλητή λάβει την τιμή 1, η σχέση χαρακτηρίζεται ως φανταστική εκθετική ακολουθία και ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη.

$$\begin{aligned} y[n] &= |C|e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |C| \cdot (\cos(\omega_0 n + \phi) + j \sin(\omega_0 n + \phi)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Εδώ όπως και σε συνεχή συστήματα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την μεταβλητή ϕ ως την φάση του σήματος και αντίστοιχα ω_0 ονομάζεται κυκλική συχνότητα. Παρατηρούμε πως η μεταβλητή n είναι αδιάστατο μέγεθος και επομένως η κυκλική συχνότητα θα πρέπει να ορίζεται σε ακτίνια (*rad*). Αν απαιτείται περαιτέρω ορισμός από τις ανάγκες της επεξεργασίας, υπάρχει δυνατότητα να ορίσουμε την κυκλική συχνότητα σε ακτίνια ανά δείγμα $\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$ και ως n ο αριθμός των δειγμάτων από την καταγραφή του σήματος. Όπως επισημαίνεται στη βιβλιογραφία εδώ φαίνεται και η πρώτη διαφορά μεταξύ των συνεχών και διακριτών συστημάτων.

Αν υποθέσουμε ότι η φάση του σήματος ισούται με 2π τότε η εκθετική μορφή αποκτά ψευδώνυμα συχνοτήτων που είναι μη διακριτά μεταξύ τους. Ένα απλό παράδειγμα για την ημιτονοειδή μορφή φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} y[n] &= C \cos[(\omega_0 + 2\pi r)n + \phi] \\ &= C \cos(\omega_0 n + \phi) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Οι εφαρμογές της ιδιότητας των διακριτών σημάτων να δημιουργούν αυτά τα ψευδώνυμα ποικίλουν και θα αναφερθούν σε ένα πρώτο βαθμό στο κεφάλαιο της καταγραφής των σημάτων. Εδώ γίνεται η παραδοχή πως η τιμή της συχνότητας θα πρέπει βρίσκεται σε μια περιοχή που δεν θα επιτρέπει τέτοιες συμπεριφορές για απλοποίηση.

3.6 Συστήματα διακριτού χρόνου

Διακριτό σύστημα ορίζεται ως η μετατροπή που απαιτείται για την ταύτιση του σήματος εξόδου με εκείνο της εισόδου. Σχηματικά αναπαρίσταται συνήθως με ένα κουτί που αντιπροσωπεύει τις διεργασίες που επιδέχεται το σήμα εισόδου για να έχουμε το επιθυμητό στην έξοδο. Θα δειχθεί αργότερα πως οι τιμές του σήματος εξόδου για κάθε τιμή της μεταβλητής n μπορεί να είναι εξαρτημένες από το σήμα εισόδου. Στην συνέχεια φαίνεται η μαθηματική απεικόνιση ενός συστήματος που δρα σε μια ακολουθία (σήμα εισόδου), για την εξαγωγή ενός δεύτερου σήματος.

$$out[n] = G\{in[n]\} \quad (3.13)$$

Εδώ αξίζει να αναφερθεί μια έννοια που θα μας απασχολήσει ξανά στην ενότητα κατασκευής φίλτρων. Πρόκειται για το σύστημα μεταβαλλόμενης μέσης τιμής ή αλλιώς μέσης τρέχουσας τιμής. Η εμφάνισή της στην βιβλιογραφία αναφορικά με την επεξεργασία σημάτων είναι εκτενής. Η διεργασία που εφαρμόστηκε στην παρούσα περίπτωση περιορίστηκαν στο φίλτρο μέσης τρέχουσας τιμής ή *F.I.R.* με τα αρχικά να σημαίνουν *Finite Impulse Response*. Η παρακάτω γενική μορφή του προαναφερόμενου συστήματος με κάποιες απλοποιήσεις που θα αναφερθούν σε επόμενο κεφάλαιο είναι η δομή του φίλτρου μέσης τιμής.

$$out[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} in[n - k] \quad (3.14)$$

3.7 Γραμμικότητα συστημάτων

Τα συστήματα που εμφανίζουν γραμμική συμπεριφορά είναι εξ' ορισμού παραγόμενα από την αρχή της υπέρθεσης. Πιο συγκεκριμένα αν δύο διαδοχικές τιμές του σήματος εισόδου παράγουν δυο αντίστοιχες τιμές εξόδου, το σύστημα θα μπορεί να λέγεται γραμμικό αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} G\{s_1[n] + s_2[n]\} &= \\ G\{x_2[n]\} + G\{x_2[n]\} &= out_1[n] + out_2[n] \end{aligned} \quad (3.15)$$

και ταυτόχρονα να ικανοποιείται και η εξής ιδιότητα:

$$\begin{aligned} G\{g \cdot s[n]\} &= \\ gG\{s[n]\} &= g \cdot out[n] \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου g μια αυθαίρετη σταθερά. Οι ανωτέρω ιδιότητες μπορούν να συνδυαστούν, ώστε να ικανοποιείται η αρχή της υπέρθεσης. Επιπρόσθετα υπάρχει δυνατότητα εφαρμογής σε πολλαπλά σήματα εισόδου. Αν για παράδειγμα γνωρίζουμε πως ένα σύστημα είναι γραμμικό $F\{\cdot\}$ τότε μπορούμε να υποθέσουμε πως για κάθε έξοδο του συστήματος θα ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} in[n] &= \sum_z b_z in_z[n] \\ F\{in[n]\} &= out[n] = \sum_z b_z out_z[n] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω συμπεριφορά ας υποθέσουμε ένα λογαριθμικό σύστημα,

$$r[u] = \log_{10}(|x[u]|) \quad (3.18)$$

και ας πάρουμε δύο τιμές για την ακολουθία $x_1[\cdot]$ και $x_2[\cdot]$ να ισούνται με 1 και 10 αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι τα σήματα εξόδου θα πρέπει, ικανοποιώντας την ιδιότητα της ομογένειας, να απέχουν δέκα μονάδες μεταξύ τους όσο δηλαδή και τα σήματα εισόδου ($x_2 = 10x_1$). Όπως είναι προφανές κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην συγκεκριμένη περίπτωση, αφού $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$.

Η ενότητα αυτή θα μπορούσε να γεμίσει το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας και άλλες τόσες μαζί. Έχουν γραφεί πολλά βιβλία που αναλύουν το ζήτημα, ένα από τα αναλυτικότερα φέρει τίτλο *Discrete – Time Signal Processing* των *Alan Oppenheim* και *Ronald Schaffer* παρέχοντας στον αναγνώστη εκτεταμένες βάσεις για την επεξεργασία και μαθηματική αναπαράσταση σημάτων και συστημάτων. Εδώ αναφέρθηκαν οι βασικές έννοιες και αρχές, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της καταγραφής και της απομείωσης θορύβου σε σήματα. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την καταγραφή ψηφιακών σημάτων και μερικά από τα σημαντικά προβλήματα κατά την διαδικασία.

Μέρος IV

Καταγραφή σημάτων

Κεφάλαιο 4

Φαινόμενα καταγραφής

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα περιγραφούν οι βασικές θεωρίες που χρησιμοποιούνται για την ψηφιακή καταγραφή και επεξεργασία σημάτων καθώς και κάποια προβλήματα που μπορεί να εμφανιστούν κατά τις διαδικασίες αυτές. Μια από τις σημαντικότερες θεωρίες είναι του Φυσικού και Ηλεκτρολόγου Μηχανικού *Harry Nyquist*, όπου θα αναφερθεί στη συνέχεια. Επίσης θα αναφερθούμε σε διαστρεβλώσεις και καταστρεπτικές συμπεριφορές των συστημάτων κατά την μετατροπή τους από συνεχή σε διακριτά σήματα και σε τρόπους αναγνώρισης και αντιμετώπισης των προβλημάτων. Θα παρατεθεί ο συνήθης τρόπος απόκτησης ενός διακριτού σήματος από την καταγραφή σημάτων συνεχούς χρόνου, όπως επίσης και ο τρόπος που αυτό γίνεται εφικτό από συστήματα καταγραφής σε Η/Υ.

4.2 Μέθοδος καταγραφής

Ο πιο συνήθης τρόπος εξαγωγής ενός διακριτού σήματος είναι μέσω της περιοδικής καταγραφής κάποιου συνεχούς σήματος. Στην πράξη αυτό σημαίνει πως καταγράφεται μία τιμή του σήματος εισόδου σε ένα σύστημα ανά προκαθορισμένο χρονικό διάστημα, το οποίο ονομάζεται περίοδος καταγραφής του σήματος σε μονάδες δευτερολέπτου. Διαιρώντας την μονάδα με την περίοδο αποκτούμε την συχνότητα καταγραφής ορισμένη σε δείγμα ανά δευτερόλεπτο $\frac{\text{sample}}{\text{sec}}$. Το σύστημα που εκτελεί την συγκεκριμένη επεξεργασία ονομάζεται μετατροπέας αναλογικού σε διακριτό σήμα και σε σημεινές συσκευές καθίσταται σχεδόν υποχρεωτική η χρήση του για πολλούς λόγους. Ένα παράδειγμα αποτελεί η ανάγκη για ανάγνωση αισθητήριων οργάνων και εκτέλεση προδιαγεγραμμένων εντολών σύμφωνα με την τιμή εισόδου. Σε αυτή την περίπτωση ένας μικροελεγκτής δεν διαθέτει την δυνατότητα ανάγνωσης και επεξεργασίας αναλογικών σημάτων και επομένως η μετατροπή του σε διακριτό σήμα υπό κάποια συχνότητα καταγραφής αποτελεί μονόδρομο.

Μετά την περιοδική καταγραφή, είναι αδύνατο να ανακτηθεί επακριβώς το αρχικό αναλογικό σήμα. Αίτιο αποτελεί το γεγονός πως πολλά αναλογικά σήματα μπορούν να έχουν όμοια αναπαράσταση διακριτών **παράγωγων;!;!;**. Το συγκεκριμένο φαινόμενο αποτελεί θεμελιώδες πρόβλημα στον τομέα της ανάλυσης ψηφιακών σημάτων, όμως αργότερα θα δειχθεί πως είναι δυνατός ο περιορισμός της εν' λόγω συμπεριφοράς καθορίζοντας το πλήθος των δειγμάτων. Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην βασική **αρχή;!;!;** που μας επιτρέπει να καταγράψουμε τα αναλογικά σήματα με τρόπο που αποτυπώνει όλη την πληροφορία που εμπεριέχουν. Σημασία δίνεται στην έννοια της πληροφορίας καθώς ο σκοπός χρήσης των σημάτων είναι η κωδικοποίηση αυτής, όπως ήδη έχει αναφερθεί στην εισαγωγή.

4.3 Θεώρημα δειγματοληψίας

Στο θεώρημα καταγραφής σημάτων ορίζεται η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας με σκοπό την δυνατότητα ανακατασκευής του αρχικού αναλογικού σήματος. Ο ορισμός αναφέρει πως, αν ένα συνεχές σήμα δεν περιέχει πληροφορία πάνω από κάποια συχνότητα A σε Hz , τότε για να είναι δυνατή η ανάκτηση της αρχικής κυματομορφής θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$f_s \geq 2A \quad (4.1)$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει πως απαιτούνται ταυτόχρονα δύο ζητήματα. Το πρώτο καθορίζει κάποιο ελάχιστο όριο για την συχνότητα καταγραφής, που προκύπτει από την μέγιστη συχνότητα του αναλογικού σήματος. Το δεύτερο αναφέρεται σε ανακατασκευή του αρχικού, χωρίς να προσδιορίζει την μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί.

Τα σήματα που παρουσιάζουν απουσία πληροφορίας σε ορισμένες συχνότητες ονομάζονται **περιορισμένου φάσματος**. Τέτοια συμπεριφορά έχουν σήματα χαμηλών συχνοτήτων που δεν εμφανίζουν ισχύ σε συχνότητες άνω των 200 Hz. Αντίστοιχα υπάρχουν σήματα που εμπεριέχουν πληροφορία σε ένα ορισμένο εύρος, από 7 έως 10 kHz. Και τα δύο αυτά σήματα κατηγοριοποιούνται ως **σήματα περιορισμένου φάσματος**.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως το συγκεκριμένο θεώρημα αναφέρεται στην βιβλιογραφία με το προσωνύμιο Θεώρημα Δειγματοληψίας *Shannon*, η πρώτη αναφορά γίνεται από τους Βρετανούς μαθηματικούς *E.T.* και *J.M. Whittaker* και *Ferrar*. Στην Ρωσία το θεώρημα κατεγράφη από τον *Kotel'nikov* και πήρε το όνομά του από εκείνον. Ο *Shannon* το χρησιμοποίησε για την έρευνα που σήμερα μας είναι γνωστή η θεωρία της πληροφορίας, και γι' αυτό πολλές φορές στην μαθηματική βιβλιογραφία αναφέρεται και θεώρημα δειγματοληψίας *WKS* από τα αρχικά των παραπάνω.

4.4 Αναπαράσταση στο πεδίο συχνοτήτων

Το θεώρημα της δειγματοληψίας μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά. Όμως οι ιδιότητες και οι αιτίες που το προκαλούν φαίνονται πιο ξεκάθαρα εξετάζοντας την διαδικασία της μετατροπής αναλογικού σε διακριτό σήμα μεταφρασμένο στο πεδίο των συχνοτήτων. Αν αυθόρμητα υποθέσουμε πως ένα καταγεγραμμένο ψηφιακό σήμα είναι αναλογικό, οι απότομες διακυμάνσεις στην ισχύ του σήματος προσθέτουν στοιχεία στην ακολουθία υψηλών συχνοτήτων που προσθέτονται τελικά στο σήμα. Η καταγραφή λοιπόν ενός αναλογικού σήματος μπορεί να παρομοιαστεί με δραστικό τεμαχισμό του αρχικού.

Ως παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ημιτονοειδής συνάρτηση σχετικά απλή ώστε να γίνει κατανοητή η παραπάνω συμπεριφορά. Έστω πως για ένα συνεχές σήμα εφαρμόζουμε την μέθοδο της δειγματοληψίας ως εξής:

$$x(t) = \cos(2\pi f_z t), \quad t = cT, \quad c \in [0, +\infty), \quad c \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(cT) = \cos(2\pi f_z cT) \quad (4.2)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει σε περίπτωση που υπολογίσουμε την τιμή του καταγεγραμμένου σήματος σε συχνότητα ίση με $f_{tot} = f_z + f_s$:

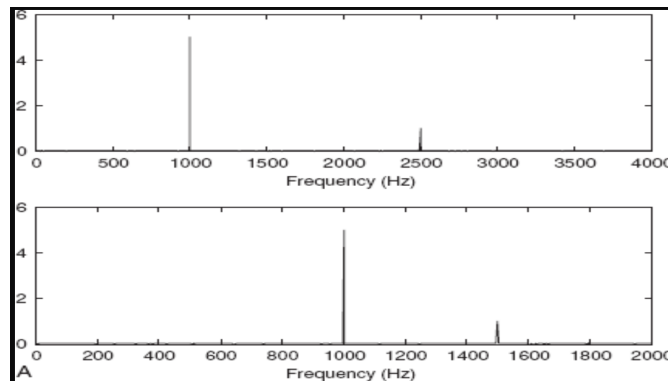
$$\begin{aligned} x_a(cT) &= \cos(2\pi cT \cdot (f_z + f_s)) \Rightarrow \\ &= \cos(2\pi c f_z T + 2\pi c) \Rightarrow \\ &= \cos(2\pi c f_z T) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Όπως φαίνεται για κάθε δείγμα εγγραμμένο με κάποια συχνότητα πολλαπλάσια από εκείνη της καταγραφής f_s , το σήμα εμπεριέχει στοιχεία στο συγκεκριμένο φάσμα. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται το θεώρημα της δειγματοληψίας προκύπτει η λεγόμενη αλλοίωση προσθέτοντας αναληθή δείγματα στο σήμα. Η καταστρεπτική αυτή συμπεριφορά θα αναλυθεί στην παρακάτω ενότητα ενώ αξίζει να σημειωθεί πως υπάρχει πιθανότητα να υποφέρουν και οι πειραματικές μετρήσεις του εργαστηρίου από το φαινόμενο αυτό καθώς η μέγιστη συχνότητα καταγραφής που επιτεύχθηκε ήταν στα 500 kHz.

4.5 Αλλοίωση

Ως αλλοίωση αναφερόμαστε εδώ στο αποτέλεσμα καταγραφής ενός σήματος, όπου η έξοδος αποτελείται από διαφορετικά σήματα και δεν είναι δυνατό να επαναδημιουργηθεί το αρχικό. Συνήθως η έξοδος είναι μετατοπισμένη ως προς το φάσμα των συχνοτήτων, όμως πολλές φορές επηρεάζεται και η ισχύ. Είναι λοιπόν σημαντικό να αποφευχθεί, όσο το δυνατόν περισσότερο, η αλλοίωση των σημάτων κατά την διαδικασία καταγραφής τους. Για τον λόγο αυτό συνήθως εφαρμόζεται ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων ή φίλτρο κατά της αλλοίωσης *AAF*.

Στην ελληνική βιβλιογραφία το φαινόμενο αυτό αναφέρεται ως **ψευδώνυμα συχνοτήτων** και ερευνήθηκε από τους *Harry Niquist* και *Claude Shannon* ερευνητές στα *Bell Labs*, οι οποίοι συνέβαλαν σημαντικά στον τομέα των τηλεπικοινωνιών και την καταγραφή σημάτων. Άλλωστε το θεωρητικό υπόβαθρο για την καταγραφή **ψηφιακών σημάτων** απαλλαγμένων από ψευδώνυμα αναπτύχθηκε από τους δύο κατά τις δεκαετίες 1920-1950. Στην εργαστηριακή εγκατάσταση που εξετάστηκε ήταν αδύνατο να αποφευχθεί η εμφάνισή τους, όμως χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της επεξεργασίας σημάτων πολλαπλών συχνοτήτων καταγραφής. Στην συγκεκριμένη μέθοδο θα αναφερθούμε επιγραμματικά στην συνέχεια, όμως αξίζει να αναφερθεί ότι δίνει την δυνατότητα εντοπισμού των αλλοιώσεων αποδεκατίζοντας το σήμα σύμφωνα με μία σταθερά και εξετάζοντας την γραφική του παράσταση σε σχέση με την αρχική καταγραφή. Όσο μειώνεται ο αριθμός των δειγμάτων το σήμα καταστρέφεται ηθελμένα, παράγοντας ψευδώνυμα συχνοτήτων τα οποία θα πρέπει να είναι όλα διαφορετικά. Όμως στην περίπτωση που εξετάστηκε φάνηκε να επαναδημιουργείται το αρχικό σήμα σε κάθε πέμπτη (5) τάξης αποδεκατισμού σήματος.



Σχήμα 4.1: Φαινόμενο αλλοίωσης σήματος μετά την καταγραφή του.

Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε χρησιμοποιώντας μια μέθοδο που εντάσσεται στην κατηγορία της επεξεργασίας σημάτων πολλαπλών συχνοτήτων, μεταβάλλοντας την συχνότητα καταγραφής αφαιρώντας πλήθος δειγμάτων, και συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις στα πεδία συχνοτήτων και χρόνου. Την απόρριψη του συγκεκριμένου τύπου “θορύβου” στις σύγχρονες συσκευές αναλαμβάνουν ειδικά φίλτρα που ονομάζονται φίλτρα που ονομάζονται *F.I.R.*. Περισσότερα θα αναφερθούν αργότερα.

https://en.wikipedia.org/wiki/Anti-aliasing_filter

Κεφάλαιο 5

Μείωση αριθμού δειγμάτων

Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται σε ψηφιακά σήματα με πολλά δείγματα ανά χρονικό διάστημα που όμως η τυπική απόκλιση προδίδει μια περιοδική κίνηση που σχετίζεται με ταλάντωση. Τότε είναι εύλογο να χωριστεί το σήμα σε μικρότερα “κομμάτια”. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την ταχύτερη ανάλυση των δεδομένων και την ευελιξία της επιλογής ομάδων σε συνάρτηση με τον χρόνο ή κάποιο άλλο κριτήριο. Εφαρμόζεται συχνά στην καθημερινότητά μας, καθώς η συμπίεση αρχείων και τα πρότυπα αρχεία ήχου και εικόνas συμπεριλαμβάνουν μία ή και περισσότερες διαδικασίες μείωσης του αριθμού των δειγμάτων.

Στην επεξεργασία ψηφιακών σημάτων οι όροι μείωση αριθμού δειγμάτων, αποδεδκατισμός και συμπίεση μπορεί να έχουν ταυτόσημα νοήματα ή μπορεί να περιγράφουν την απομείωση συχνοτήτων και απορρίψη αριθμού δειγμάτων σε ένα σύστημα ψηφιακής καταγραφής σημάτων πολλαπλών συχνοτήτων. Αργότερα θα αναλυθεί η σημασία τέτοιων συστημάτων.

Αποδεδκατισμός ενός ψηφιακού σήματος σημαίνει η αποθήκευση τελικώς του κάθε 10ου δείγματος από το αρχικό καταγεγραμμένο σήμα με συγκεκριμένη συχνότητα καταγραφής. Αυτό έχει επεκταθεί ορίζοντας τον αποδεδκατισμό κατά έναν παράγοντα που συνήθως είναι σταθερός αριθμός και μπορεί να λάβει ακέραιες και δεκαδικές τιμές. Έδω αξίζει να σημειωθεί η ανάγκη να λαμβάνει ο παράγοντας αυτός μια λογική τιμή, για παράδειγμα ένα ψηφιακό σήμα που έχει διάρκεια πέντε (5) δευτερόλεπτα και καταγράφηκε από συσκευή που είχε συχνότητα καταγραφής 20 *Hertz* ένας παράγοντας 101 προφανώς δεν θα άφηνε κανένα δείγμα στο νέο ψηφιακό σήμα. Επιπρόσθετα το όριο για να αποφύγουμε την αλλοίωση απαιτεί το τελικό αποτέλεσμα των διαδικασιών είναι τα 10 δείγματα ανά δευτερόλεπτο (10 *Hz*). Επομένως θέτοντας τον παράγοντα αποδεδκατισμού 51 θα παρείχε ένα σήμα που θα ήταν αλλοιωμένο. Όταν η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται σωστά σε μια αλληλουχία δειγμάτων ενός σήματος ή μιας συνεχής συνάρτησης, παράγεται μια προσομοίωσή του καταγεγραμμένο με μικρότερη συχνότητα. Όταν το φίλτρο κατά της αλλοίωσης είναι σχεδιασμένο με πρότυπο *IIR*, τα οποία θα αναλυθούν παρακάτω, η διαδικασία βασίζεται στην ανάδραση της εξόδου στην είσοδο του φίλτρου πριν την έναρξη του δεύτερου στάδιου. Για το πρότυπο σχεδιασμού *FIR* είναι εύκολο να υπολογιστεί για κάθε *M* εξόδου. Ο υπολογισμός που γίνεται από ένα τέτοιο φίλτρο αποδεδκατισμού για κάθε νιοστή έξοδο δείγματος φαίνεται παρακάτω.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x[nM - k] \cdot h[k], \quad (5.1)$$

Όπου η ακολουθία $h[\bullet]$ είναι η απόκριση του χρουστικού παλμού (*impulse response*), και *K* είναι το μήκος. Η $x[\bullet]$ αντιπροσωπεύει το σήμα εισόδου εξαγόμενο από το φίλτρο με λιγότερα δείγματα. Σε επεξεργαστές γενικής χρήσης μετά τον υπολογισμό της παραπάνω εξίσωσης για κάποιον αριθμό *n*, ο ευκολότερος τρόπος να υπολογιστεί το $y[n+1]$ είναι η καθυστέρηση της αρχής της ακολουθίας $x[\bullet]$ κατά *M*, και να λυθεί το παραπάνω άθροισμα ξανά. Αν ο παράγοντας *M*=2, η συνάρτηση $h[\bullet]$ μπορεί να αντιπροσωπεύει ένα φίλτρο μισών συχνοτήτων, όπου σχεδόν το μισό πλήθος των δειγμάτων του αρχικού σήματος θα είναι μηδενικής ισχύος (*amplitude*) και δεν θα συμπεριληφθούν στο προϊόν πολλαπλασιασμού. Οι τιμές της απόκρισης του παλμού κατά διαστήματα *M* δημιουργούν υποαλληλουχίες, πλήθους *M* περιπλεγμένες μεταξύ τους. Το παράγωγο του πολλαπλασιασμού είναι η πρόσθεση των προϊόντων από τον πολλαπλασιασμό κάθε υποαλληλουχίας με το καταγεγραμμένο σήμα $x[\bullet]$. Επιπρόσθετα λόγω της μείωσης του πλήθους των δειγμάτων στο σήμα κατά *M*, κάθε σήμα που χρησιμοποιήθηκε στον προηγούμενο υπολογισμό κάποιου *M* προϊόντος δεν θα επαναληφθεί σε επόμενο υπολογισμό. Αυτός είναι και ο λόγος που τα φίλτρα μικρής τάξης *M FIR* φιλτράρουν μια από τις αλληλουχίες της εισόδου κάθε φορά και τα *M* προϊόντα προσθέτονται για να κατασκευαστεί το σήμα εξόδου. Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται σε συστήματα πολλαπλών επεξεργασιών, όπου ένα σήμα χωρίζεται σε φάσεις και φιλτράρεται ξεχωριστά από *M* αριθμό φίλτρων και τελικά προσθέτονται για την δημιουργία του σήματος εξόδου. Τα παραπάνω φίλτρα ονομάζονται

και πολυφασικά. Για εγκυκλοπαιδικούς λόγους αξίζει να σημειωθεί πως είναι πιθανό σε κάθε φάση του υπολογισμού να αντικαθιστούμε τις τιμές της προηγούμενης φάσης με μηδενικές τιμές, σε ένα αντίγραφο της αλληλουχίας $h[\bullet]$, επεξεργάζοντας το αρχικό σήμα στην συχνότητα εισόδου (πολλαπλασιάζοντας με 0) και αποδεκατίζοντας την έξοδο κατά έναν παράγοντα M . Η παραπάνω διαδικασία ονομάστηκε στα αγγλικά *the first Noble identity* και εφαρμόζεται σε διαφοροποιημένες πολυφασικές μεθόδους.

- [wikipedia](#)
-

Μέρος V

Επεξεργασία σημάτων

Κεφάλαιο 6

Ορισμός μετα-επεξεργασίας

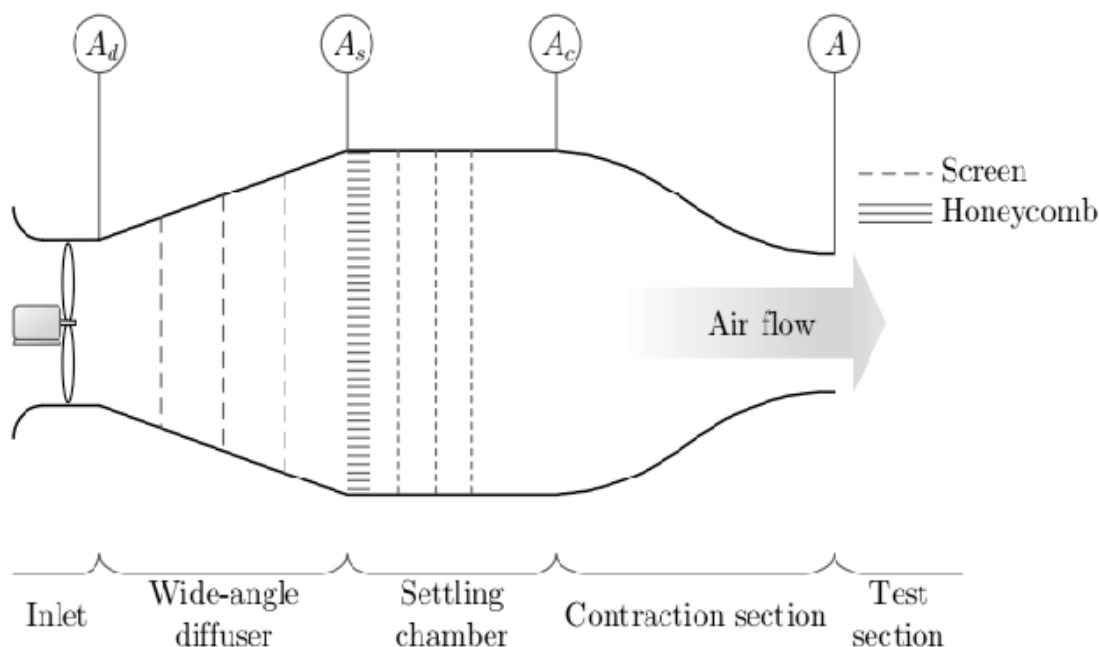
Η επεξεργασία ενός σήματος θα πρέπει να γίνεται με προσοχή καθώς είναι εύκολο να καταστραφεί μέρος της πληροφορίας που περιέχεται ή ακόμα και να εκδοθούν λανθασμένα συμπεράσματα για την συμπεριφορά του συστήματος. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η **μετα-επεξεργασία**, δηλαδή τα δεδομένα καταγράφηκαν με σταθερή συχνότητα δειγματοληψίας σε μορφή αρχείου δεδομένων (*datasets*) *.tdms* μέσω του προγράμματος *LabView*.

Η μέθοδος αυτή δίνει την δυνατότητα στον αναλυτή να επεξεργαστεί τα δεδομένα στον προσωπικό του υπολογιστή ακόμα και να συνδεθεί σε κάποιον ισχυρότερο υπολογιστή και να τα διαχειριστεί εξ' αποστάσεως. Μπορεί όμως να γίνεται και στην εγκατάσταση αυτοματοποιώντας την διαδικασία καταγραφής των δεδομένων. Τα συστήματα τηλεπικοινωνιών βασίζονται στην σωστή κωδικοποίηση από τον πομπό και αποκωδικοποίηση στον δέκτη, οι διαδικασίες αυτές λαμβάνουν χώρα στις συσκευές που καταγράφουν και μεταδίδουν το σήμα, όμως επειδή η επεξεργασία της κωδικοποίησης-αποκωδικοποίησης γίνεται αφού καταγραφεί το σήμα σε κάποια προσωρινή ή μόνιμη μνήμη και έτσι εντάσσεται στην **μετα-επεξεργασία**.

Κεφάλαιο 7

Εγκατάσταση εργαστηρίου

Η εγκατάσταση που χρησιμοποιήθηκε για την συλλογή των δεδομένων αποτελείται από μία αεροσύραγγα την οποία τροφοδοτεί με σταθερή ταχύτητα αέρα ένας ηλεκτροκινητήρας προσδεδεμένος σε έναν έλικα. Στην μέση της σύραγγας υπάρχει ένα πλέγμα διάχυσης ώστε η ροή του αέρα να γίνεται όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα στην έξοδο όπου βρίσκεται και το αισθητήριο όργανο για την καταγραφή της ταχύτητας του ανέμου. Παρακάτω φαίνεται μια εικόνα της εγκατάστασης σε σχηματικό διάγραμμα.



Σχήμα 7.1: Θάλαμος ομοιόμορφης παροχής ανέμου στο αισθητήριο όργανο όπου τοποθετείται στο σημείο A . Στο σημείο A_s , βρίσκεται ένα πλέγμα διάσπασης της ροής που μας επιτρέπει την ομαλή ταχύτητα στο σημείο εξόδου A .

Ένας λόγος που δεν χρησιμοποιήθηκε επεξεργασία σε πραγματικό χρόνο είναι ότι η εγκατάσταση που χρησιμοποιήθηκε για την συλλογή των δεδομένων κατασκευάστηκε με σκοπό την σύνδεσή του σε κεντρική μονάδα επικοινωνίας και από εκεί πραγματοποιείται σύνδεση μέσω σειριακής θύρας *USB* με Η/Υ, όπου και καταγράφεται το σήμα του αισθητήριου οργάνου (*pitot – tube*). Ένας δεύτερος λόγος ήταν η ανάγκη να δοκιμαστούν διαφορετικές μέθοδοι αφαίρεσης του θορύβου και προφανώς αυτό θα ήταν πιο δύσκολο εάν έπρεπε να γίνει σε πραγματικό χρόνο αλλάζοντας τις απαραίτητες παραμέτρους για την ρύθμιση του φίλτρου. Θα έπρεπε λοιπόν να εγκατασταθεί ανάλογη συσκευή, όπως ένας μικροεπεξεργαστής, που θα είχε την δυνατότητα για υψηλές ταχύτητες δειγματοληψίας καθώς η καταγραφή έγινε στα 100 kHz . Αυτό θα αύξανε πολύ το κόστος της κατασκευής και θα απαιτούσε βαθμονόμηση του φίλτρου για να μην προστεθεί περαιτέρω σφάλμα στην μέτρηση

Μέρος VI

Σχεδιασμός Φίλτρων

Κεφάλαιο 8

Κατηγορίες

Λόγω των πολλών εφαρμογών που έχουν και την εκθετική αύξηση της χρήσης ηλεκτρονικών συσκευών στην καθημερινότητα, οι δυνατότητες επεξεργασίας ψηφιακών σημάτων αποτελεί πρακτικά απαραίτητη προϋπόθεση. Έτσι η ανάγκη για την ανάπτυξη διαφόρων τύπων φίλτρων π.χ. το φίλτρο μέσης τρέχουσας τιμής (*F.I.R.*), το φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης (*I.I.R.*) και το μεσιανό φίλτρο (*median filters*). Στην συνέχεια θα αναφερθούμε και στις τρεις αυτές κατηγορίες αναφέροντας παραδείγματα από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση των δεδομένων από την **εργαστηριακή εγκατάσταση** ; ... Η γενική διαφοροποίηση που γίνεται αρχικά είναι ως προς το εύρος συχνοτήτων που επηρεάζουν. Έτσι αν απορρίπτονται οι ύψηλες συχνότητες, το φίλτρο ονομάζεται διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (*low – pass filter*) ενώ το αντίστροφο ονομάζεται φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (*high – pass filter*). Αν το φίλτρο επηρεάζει μία περιοχή ή **φάσμα** συχνοτήτων και απορρίπτει όσες βρίσκονται πριν και μετά, ονομάζεται φίλτρο απόρριψης εύρους συχνοτήτων (*band – stop filter*).

Κεφάλαιο 9

Φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης

Τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου '216'.... Γραμμικότητα και χρονική αμεταβλητότητα
.... '219'..... κλπ

9.1 Παραδείγματα με κώδικα

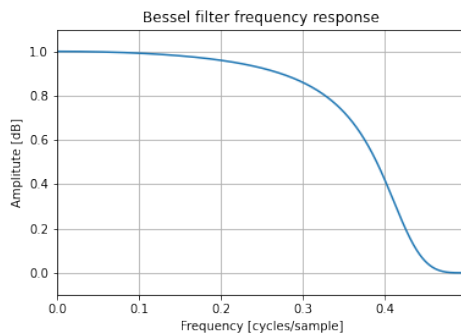
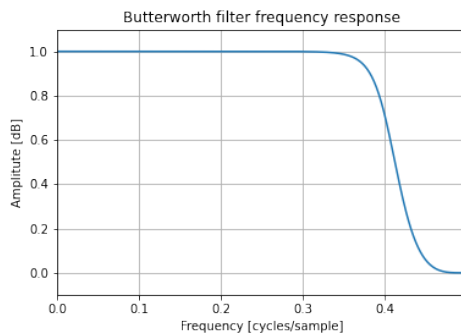
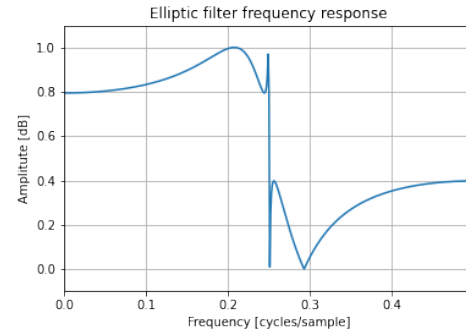
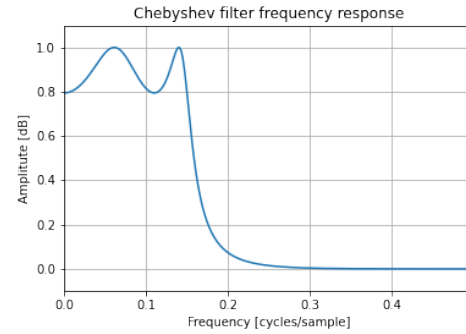
Εδω να μπει μια επεξηγήση για την κατασκευη και εξαγωγή των παρακατω διαγραμμάτων.

1. Βασικά φίλτρα

Εδώ φαίνονται μερικά από τα βασικότερα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης, που από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε σε αυτά ως *IIR*. Οι τύποι των παρακάτω φίλτρων αποτελούν τα πιο διαδεδομένα και εύχρηστα, για την προσομοίωση φυσικών εφαρμογών σε προγραμματιστικό περιβάλλον. Δεν είναι άλλωστε τυχαίο πως οι περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού παρέχουν μια ή και περισσότερες βιβλιοθήκες για τον σχεδιασμό και τη χρήση τους.

Το φίλτρο *butterworth* αποτελεί την καλύτερη δυνατή λύση για έξοδο με την μικρότερη ενίσχυση καθώς όπως φαίνεται και στο γράφημα δεν παρουσιάζει ταλαντωτικές συμπεριφορές στις συχνότητες διέλευσης και απόρριψης. Αυτό επιτυγχάνεται μειώνοντας την ταχύτητα μεταβολής της ισχύος του σήματος, αποκτώντας έτσι μια περιοχή μετάβασης όπου οι συχνότητες δεν απορρίπτονται όμως απομειώνονται σε σημαντικό βαθμό ώστε να μην αλλοιώνεται η έξοδος του.

Το *chebyshev* ενώ εκ πρώτης όψης φαίνεται να επηρεάζει το σήμα σε μη αποδεκτό βαθμό, προνόμιό του αποτελεί η ταχύτητα που προσφέρει αποτελέσματα. Αυτό οφείλεται στην μέθοδο της αναδρομής που χρησιμοποιείται κατά την επεξεργασία με το συγκεκριμένο φίλτρο. Τα περισσότερα χρησιμοποιούν την μέθοδο της συνέλιξης.



Κεφάλαιο 10

Φίλτρο μέσης τρέχουσας τιμής

Η κατηγορία αυτή εξειδικεύεται περαιτέρω, εφαρμόζοντας μια μέθοδο παραθύρων τα οποία προσφέρουν συγκεκριμένες αποκρίσεις στο πεδίο των συχνοτήτων. Μερικά παραδείγματα θα παρουσιαστούν παρακάτω, καθώς ήταν μια από τις μεθόδους που εξετάστηκαν κατά την διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων. Παρείχε αποτελέσματα που ενέτασαν στην έξοδό του ενίσχυση του σήματος σε χαμηλές συχνότητες. Αυτό ήταν αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο ορίζεται ο συγκεκριμένος τύπος, καθώς φαίνεται να μην συνιστάται όταν ο όγκος δεδομένων έχουν μεγάλο πλήθος. Ο λόγος είναι ότι πρέπει να οριστεί ένα πολυώνυμο με το οποίο κάθε συντελεστής ταυτίζεται με κάθε ένα από τα σημεία του δείγματος. Έτσι σε μεγάλα σετ δεδομένων απαιτείται πρακτικά μεγάλος όγκος αριθμητικών υπολογισμών που καθυστερεί την έκβαση των αποτελεσμάτων σε μη αποδεκτό βαθμό.

10.1 Κατηγορίες παραθύρων φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

1. Συχνοί τύποι παραθύρων

- Βασικές κατηγορίες φίλτρων:

- *Rectangle*
- *Barlett*
- *Hanning*
- *Hamming*

2. Μέθοδος *Kaiser*

3. Βέλτιστες προσομοιώσεις φίλτρων

- Here is a deep analysis for the appropriate implementation of the FIR filters in respect to *M value*???

Μέρος VII

Βιβλιογραφία

-
- Edmund Lai (2003). *2 - Converting analog to digital signals and vice versa*, Newnes.
- Edmund Lai (2003a). *3 - Time-domain representation of discrete-time signals and systems*, Newnes.
- Edmund Lai (2003a). *4 - Frequency-domain representation of discrete-time signals*, Newnes.
- Edmund Lai (2003a). *6 - Finite impulse response filter design*, Newnes.
- Ibrahim Abdulhadi Sulaiman and Hussain Mohammad Hassan and Mohammad Danish and Munendra Singh and P.K. Singh and Manisha Rajoriya (2022). *Design, comparison and analysis of low pass FIR filter using window techniques method*, Materials Today: Proceedings.
- Koichi Ichige and Naohisa Otsuka and Rokuya Ishii (1997). *An automatic design procedure of IIR digital filters from an analog low-pass filter*, Signal Processing.
- McClellan, J.H. and Schafer, R.W. and Yoder, M.A. (2003). *Signal Processing First*, Pearson/Prentice Hall.
- N. Agrawal and A. Kumar and Varun Bajaj and G.K. Singh (2021). *Design of digital IIR filter: A research survey*, Applied Acoustics.
- Oppenheim, Alan V. and Schafer, Ronald W. and Buck, John R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-hall Englewood Cliffs.
- Ryan B. Spelay and Kofi Freeman Adane and R. Sean Sanders and Robert J. Sumner and Randall G. Gillies (2015). *The effect of low Reynolds number flows on pitot tube measurements*, Flow Measurement and Instrumentation.
- Steven W. Smith (2003). *CHAPTER 20 - Chebyshev Filters*, Newnes.
- Yong Moon Choi and Yoshiya Terao and Noboru Kurihara and Aya Iwai and Tatsuya Funaki and Woong Kang and Doan Trang Nguyen (2021). *Revisit the Pitot static tubes in the standards*, Flow Measurement and Instrumentation.