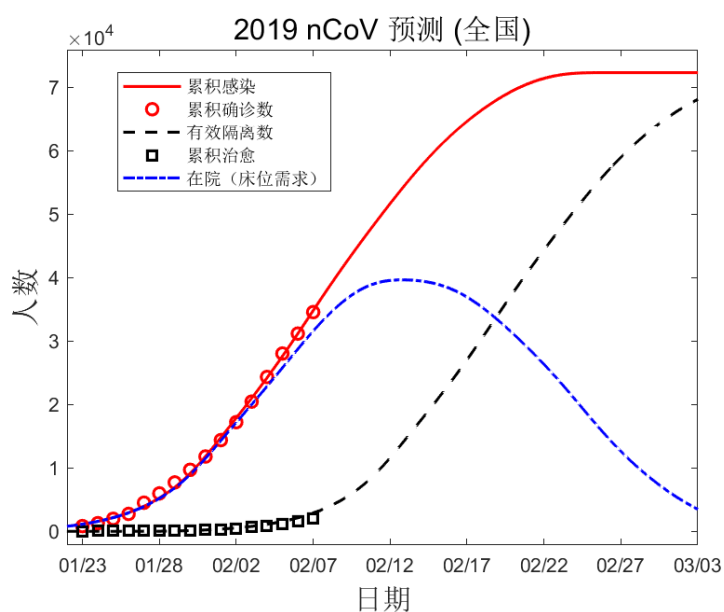




# 上海市现代应用数学重点实验室研究报告 Research Report Series of SKLCAM

(2020 年第一期)

## 基于时滞动力学系统新冠肺炎传播模型的 若干预测分析



# 基于时滞动力学系统新冠肺炎传播模型的若干预测分析

江渝<sup>1</sup>, 刘可伋<sup>1</sup>, 陈瑜<sup>1</sup>, 严阅<sup>1</sup>, 许伯熹<sup>1</sup>, 陈文斌<sup>2</sup>, 陆帅<sup>2</sup>, 徐翔<sup>3</sup>, 程晋<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>: 上海财经大学数学学院, 上海市, 200433.

<sup>2</sup>: 复旦数学科学学院, 上海市现代应用数学重点实验室, 上海市, 200433.

<sup>3</sup>: 浙江大学数学科学学院, 浙江省杭州市, 310027.

2019 年 12 月, 新型冠状病毒肺炎 (Novel Coronavirus Pneumonia, 简称: 新冠肺炎, NCP, 有称 2019-nCoV) 疫情从武汉开始爆发, 几天内迅速传播到全国乃至海外. 科学有效掌控疫情发展对疫情防控至关重要. 团队基于全国各级卫健委每日公布的累计确诊数和治愈数, 提出了一类时滞动力学系统的新冠肺炎传播模型 (A Time Delay Dynamic model for NCP, 简称 TDD-NCP 模型). 在模型中引入时滞过程, 用来描述病毒潜伏期与治疗周期. 通过公布的疫情数据, 能够准确反演模型的参数, 进一步能有效地模拟疫情的发展, 预测疫情未来的趋势 [3, 4, 5]. 随着新冠疫情的发展, 数据不断更新, 不少新信息的披露也显示新冠病毒具有一些新的特性, 通过更新数据和对模型的相应修正. 我们可以对若干疫情相关问题作出一些新的分析.

## 1 TDD-NCP 模型

在这一节中, 我们介绍下 [4] 中介绍的 TDD-NCP 模型. 研究对象是感染者, 确诊者, 隔离者, 康复者和死亡者, 我们使用如下记号来代表每个人群的人数:

- $I(t)$ :  $t$  时刻感染者的**累计**总数;
- $J(t)$ :  $t$  时刻确诊者的**累计**总数;
- $G(t)$ :  $t$  时刻已感染, 仍处于潜伏期, 但已隔离的人群的**实时**总数;
- $R(t)$ :  $t$  时刻康复者的**累计**总数;
- $D(t)$ :  $t$  时刻因病死亡者的**累计**总数.

考虑到潜伏期的影响, 我们假设:

---

\*通讯作者, Email: jcheng@fudan.edu.cn.

1. 感染者在出现明显症状前会经历  $\tau_1$  天的潜伏期, 一旦出现症状, 感染者将寻求治疗, 从而转为确诊病例;

2. 由于政府干预控制措施, 某些感染者在潜伏期内尚未出现症状已被隔离, 在被隔离了平均  $\tau_1'$  天后出现症状成为确诊病例.

基于上述假设, 无论确诊者就医前是否被隔离, 在  $t$  时刻的确诊者累计总数  $J(t)$  均由  $t - \tau_1$  时刻的感染者构成. 此外, 我们进一步假设确诊者都在  $\tau_2$  天后结束治疗, 他们中有  $\kappa$  的比例被治愈,  $1 - \kappa$  的比例病重不治.

以上发病至结束治疗的过程可总结为图1.

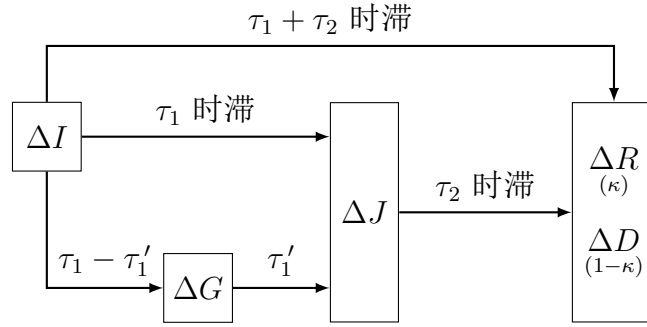


图 1: 模型示意图.

同时我们得到了如下时滞动力学模型:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \beta(I(t) - J(t) - G(t)), \\ \frac{dJ}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt', \\ \frac{dG}{dt} = \ell(I(t) - J(t) - G(t)) - \int_0^t h_2(t - \tau_1', t') \ell(I(t') - J(t') - G(t')) dt', \\ \frac{dR}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \beta(I(t') - J(t') - G(t')) dt'. \end{cases} \quad (1)$$

#### 模型解释:

1.  $\beta$  被定义为传染率, 它代表每个感染者在单位时间内的平均传染人数. 在就医和隔离期间, 我们认为确诊者与隔离者均无传染性. 因此, 在时刻  $t$  能引起进一步传染的人数是  $I(t) - G(t) - J(t)$ .

2. 系数  $\gamma$  是致病率参数. 累计确诊人数  $J(t)$  均来自于潜伏期  $\tau_1$  天内的感染人数.

3. 隔离者人数  $G(t)$  的变化由以下两个因素决定:

(a) 具有传染性的人群因政府防控措施而被隔离, 其中隔离率为  $\ell$ .

(b) 隔离者在隔离了  $\tau_1'$  天后被确诊入院. 时滞项表示隔离的人群受到的历史数据影响.

4. 一旦被感染, 需经历  $\tau_1$  天的潜伏期与  $\tau_2$  天的治疗期才能结束治疗.

这里需要指出的是, 在政府每日发布的疫情数据中, 可以获得累计确诊人数  $J(t)$  和累计治愈人数  $R(t)$  的信息, 而  $I(t)$  和  $G(t)$  通常无法获得. 因此实际计算时, 我们采用  $J(t)$  与  $R(t)$  进行模型参数的反演.

在以上模型中,  $h_i(\hat{t}, t') (i = 1, 2, 3)$  是延迟天数的概率分布, 满足归一化条件:

$$\int_0^t h_i(\hat{t}, t') dt' = 1, \quad \hat{t} \in (0, t), \quad i = 1, 2, 3.$$

一般地, 我们假设  $h_1(\hat{t}, t')$  是一个正态分布  $h_1(\hat{t}, t') = c_1 e^{-c_2(\hat{t}-t')^2}$ , 其中  $c_1$  与  $c_2$  是常数. 也可取  $h_1$  是一个  $\delta$ -函数, 即  $h_1(\hat{t}, t') := \delta(\hat{t}-t')$ , 这意味着每个感染者都经历了相同的潜伏期和治疗期的延迟天数分布. 同理,  $h_2(\hat{t}, t')$  与  $h_3(\hat{t}, t')$  可取为  $h_2(\hat{t}, t') = c_3 e^{-c_4(\hat{t}-t')^2}$ ,  $h_3(\hat{t}, t') = c_5 e^{-c_6(\hat{t}-t')^2}$ , 其中  $c_3$  至  $c_6$  都为常数.

## 2 全国及主要省市疫情的反演和预测

1 月 23 日开始截止到现在, 各地还都采取着严格的防控措施, 各地人员流动相对少. 基于 1 月 23 日至 2 月 7 日 24 时全国和各地卫健委公开的数据, 利用 TDD-NCP 模型(1)和 [4] 中的参数反演和疫情预测算法可以反演得到模型中传染率  $\beta$  和隔离率  $\ell$ , 见表1.

地区	传染率 $\beta$	隔离率 $\ell$
全国 (除港澳台)	0.2921	0.3424
武汉市	0.4103	0.3977
湖北省	0.4004	0.4510
北京市	0.2104	0.5372
上海市	0.2021	0.4547
江苏省	0.2733	0.5305
浙江省	0.1992	0.5325
安徽省	0.3014	0.4952
广东省	0.2698	0.5400
河南省	0.2615	0.5478

表 1: 反演得到的传染率和隔离率.

基于这些数据, 可以作出如下分析:

1. 传染率  $\beta$ . 由于 1 月 23 日至今, 全国隔离已经实施了很严格的防控措施. 因此传染率已经得到有效控制, 处于一个较低水平. 但是局部地区如武汉市, 湖北省还处于较高

水平. 安徽省需要注意. 浙江省从公开的信息来看防控措施较好, 从数值上来看也处于全国较好的.

2. 隔离率  $\ell$ . 全国来看, 因为人员流动还很频繁, 隔离率相对较低. 但因为平均人口密度较之表中所列省市来说要低, 传染率较低也较合理. 对于所列各个省市, 一般隔离率高的, 传染率会小. 如江苏省, 浙江省, 安徽省三个邻近省份之间比较, 江苏省, 广东省和河南省三个大省之间比较. 但广东省和浙江省因为人口差异和人口密度等因素, 隔离率低未必传染率就高. 北京市和上海市, 考虑由于春节假期中, 实际在京人口可能要大于实际在沪人口, 北京较大的隔离率并不能达到较低的传染率.

利用上述参数, 可以得到今后一个阶段各个省份的疫情发展曲线 (图2左侧), 基于下列公式计算并画出了基本再生率 (图2右侧):

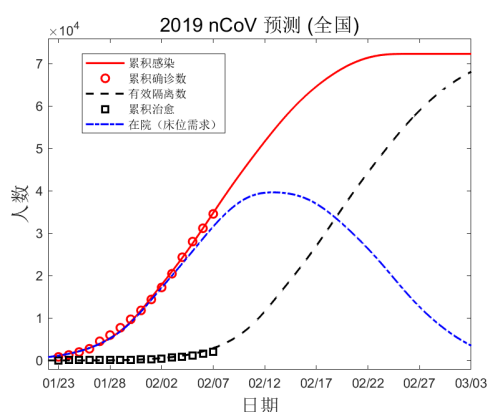
$$R = \frac{I(t+7)}{J(t)}.$$

基于这些曲线, 特别是  $R$  值曲线, 我们大致有如下分析:

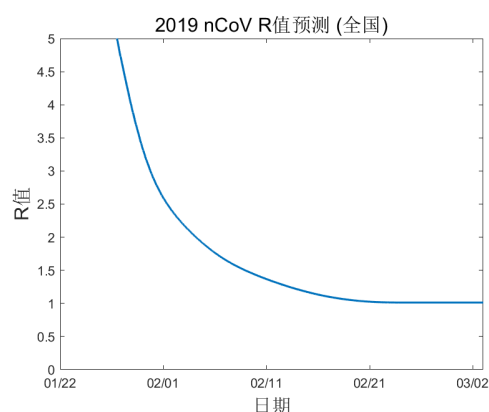
1. 疫情初期, 由于防控措施不到位, 病毒传播极为迅速. 但随着各地防控措施力度的加大, 都能有效控制疫情, 各地的  $R$  值都先后从开始的 5 以上降到了最近的 1.5 左右, 并还在持续降低.

2. 从疫情发展曲线来看, 如果能够现有防控力度, 并进一步提高治愈率, 2 月 12 日前后可能疫情将有所转变, 并在 3 月初进入平台期.

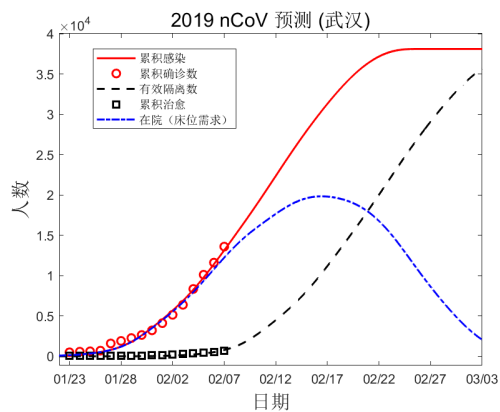
3. 当然此次病毒的特性造成可能最终的感染人数会较大, 可能会对今后的生产生活造成一定影响.



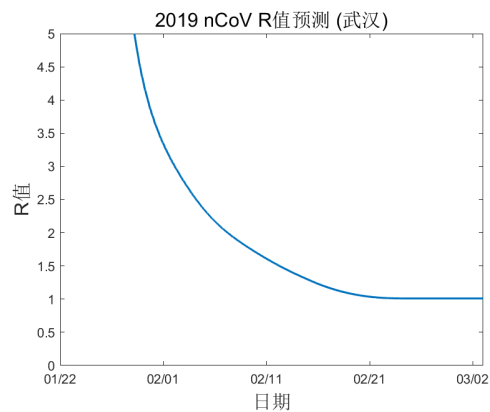
(a) 全国



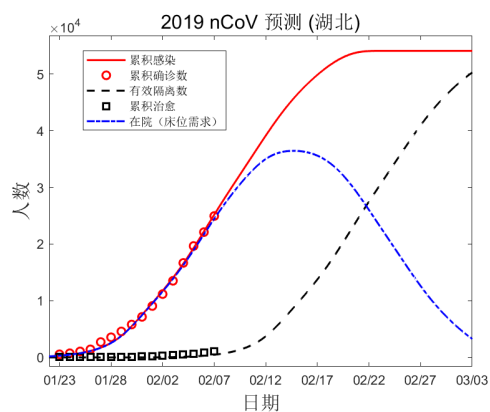
(b) 全国



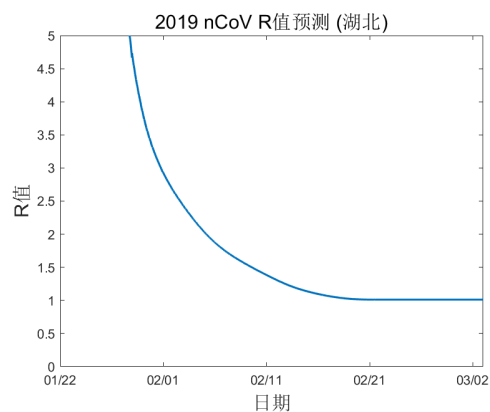
(c) 武汉



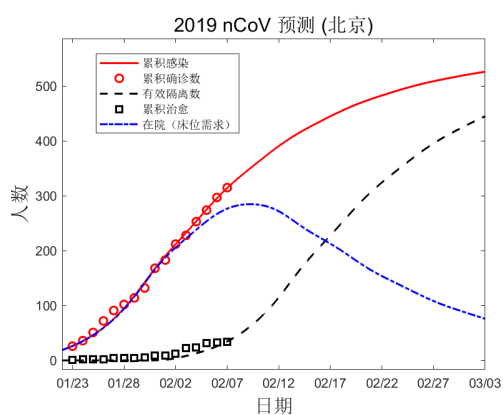
(d) 武汉



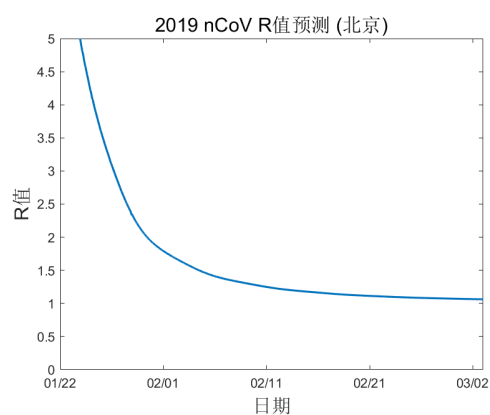
(e) 湖北



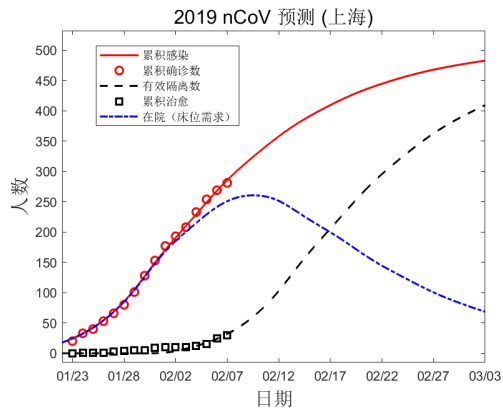
(f) 湖北



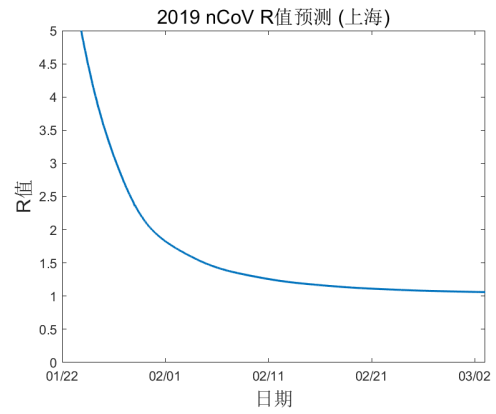
(g) 北京



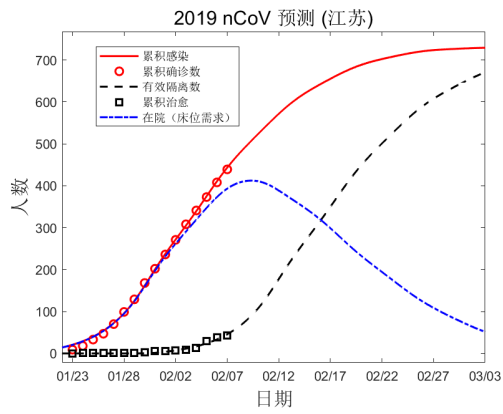
(h) 北京



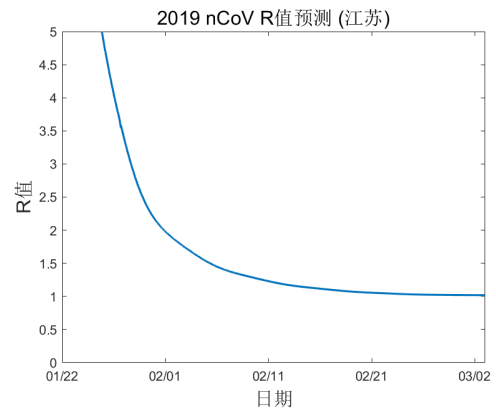
(i) 上海



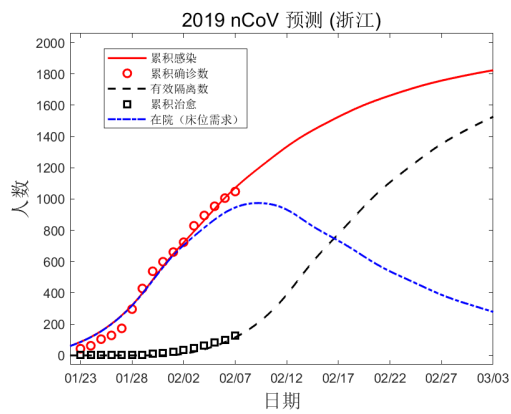
(j) 上海



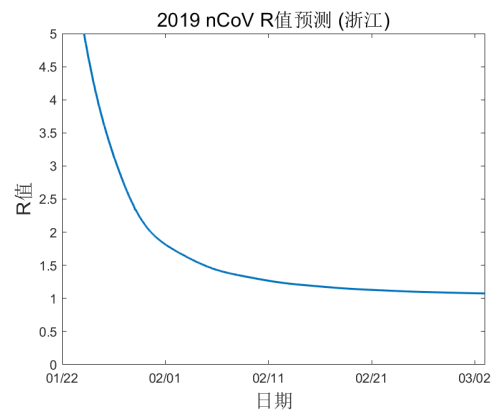
(k) 江苏



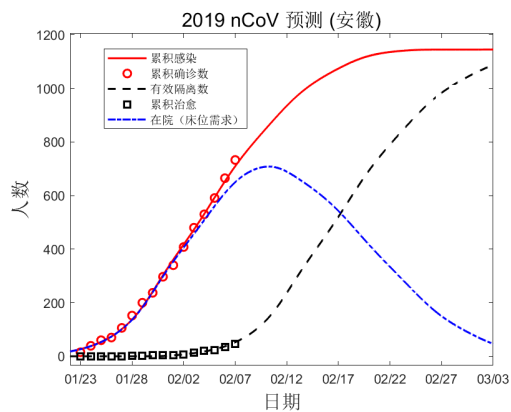
(l) 江苏



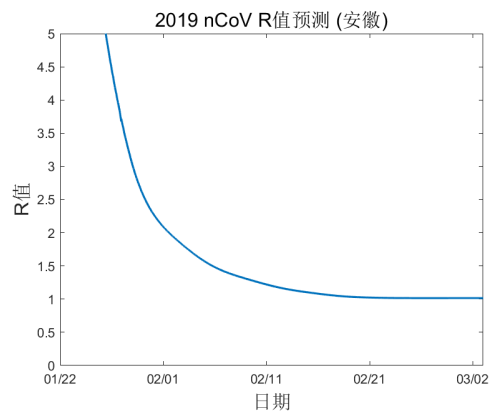
(m) 浙江



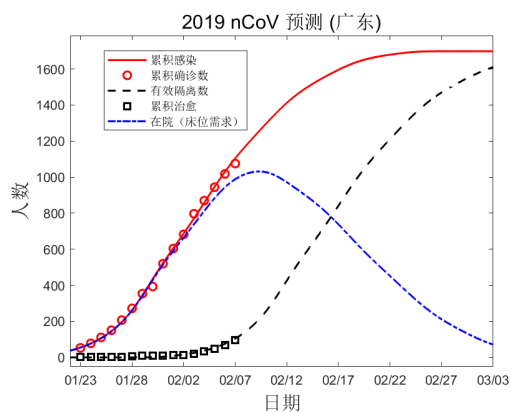
(n) 浙江



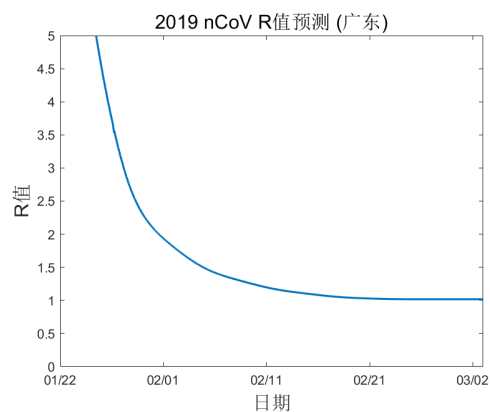
(o) 安徽



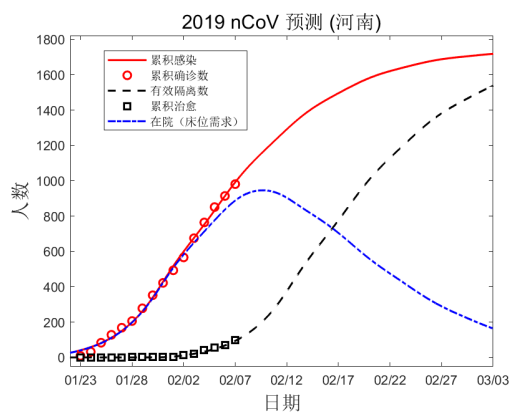
(p) 安徽



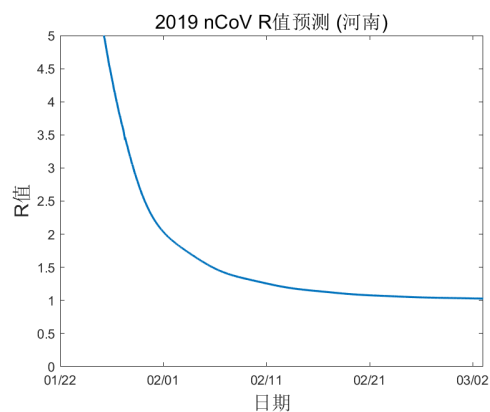
(q) 广东



(r) 广东



(s) 河南



(t) 河南

图 2:

### 3 返程输入感染者的影响

前面考虑的 TDD-NCP 模型(1)主要考虑 1 月 23 日后各地加大防控措施后, 各地人员流动相对少的情况. 但是 2 月 10 日前后的返工潮, 2 月 23 日前后的返校潮不可避免.



这里加入输入源项来描述这个现象, 新的源项参与到各个方程的计算中.

这里, 感染者的出发地 A 有模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dI_a}{dt} = \tilde{I}_a(t), \\ \frac{dJ_a}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \tilde{I}_a(t') dt', \\ \frac{dG_a}{dt} = \tilde{G}_a(t) - \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t') \tilde{G}_a(t') dt', \\ \frac{dR_a}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \tilde{I}_a(t') dt'. \end{cases} \quad (2)$$

其中有:

$$\tilde{I}_a(t) = (\beta_a - \nu(t)\theta) \left( I_a(t) - G_a(t) - J_a(t) \right). \quad (3)$$

和

$$\tilde{G}_a(t) = \ell_a \left( I_a(t) - G_a(t) - J_a(t) \right) \quad (4)$$

感染者的到达地 B 有模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dI_b}{dt} = \tilde{I}_b(t), \\ \frac{dJ_b}{dt} = \gamma \int_0^t h_1(t - \tau_1, t') \tilde{I}_b(t') dt', \\ \frac{dG_b}{dt} = \tilde{G}_b(t) - \int_0^t h_2(t - \tau'_1, t') \tilde{G}_b(t') dt', \\ \frac{dR_b}{dt} = \kappa \int_0^t h_3(t - \tau_1 - \tau_2, t') \tilde{I}_b(t') dt'. \end{cases} \quad (5)$$

这里有:

$$\tilde{I}_b(t) := \beta_b \left( I_b(t) - G_b(t) - J_b(t) \right) + \tilde{I}_{In}(t), \quad (6)$$

$$\tilde{I}_{In} = \nu(t)\theta \left( I_a(t) - G_a(t) - J_a(t) \right). \quad (7)$$

和

$$\tilde{G}_b(t) = \ell_b \left( I_b(t) - G_b(t) - J_b(t) \right), \quad (8)$$

我们假设地区 A 出发的感染者中最多有  $\theta$  的比例进入地区 B,  $\nu(t)$  是输入的时间分布 (由若干个正态分布组成).

利用全国除去上海的疫情预测数据, 我们预计感染者进入上海的分布如图3, 这里叠加了返工和返校开学两个高峰.

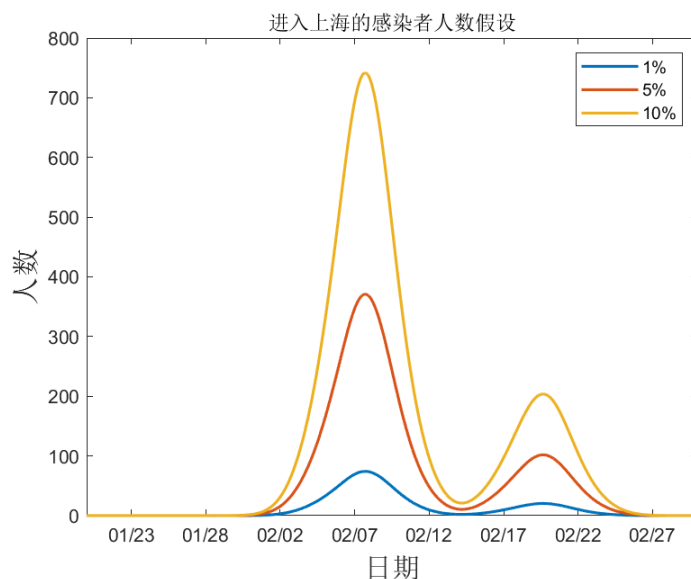
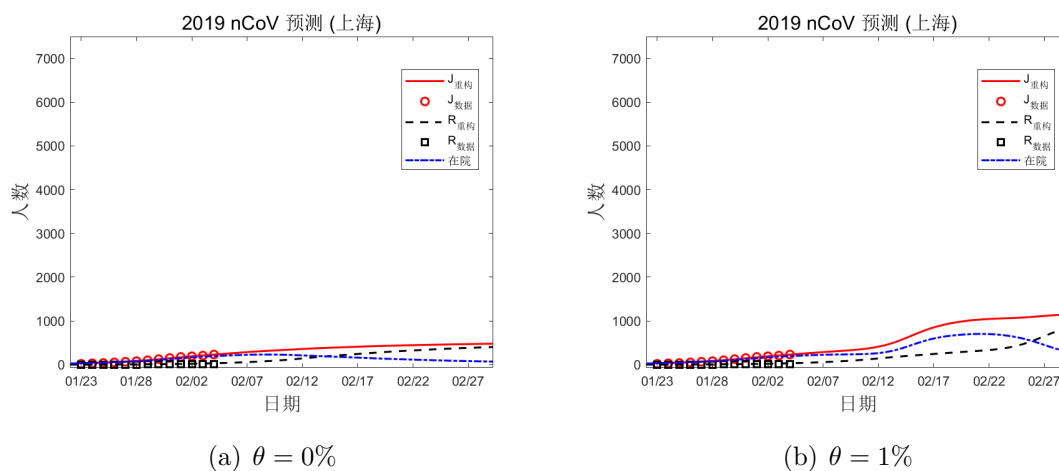


图 3: 进入上海的感染者人数

先假设零输入, 对上海的疫情做了预测. 利用 1 月 23 日至 2 月 4 日 24 时的历史数据得到现阶段传染率  $\beta = 0.2413$ , 隔离率  $\ell = 0.5384$  (前面基于到 2 月 7 日 24 时, 可见 7 日前的返程输入已经降低了隔离度, 但由于上海已经采取了一定措施, 感染率并没有增加). 保持上述传染率  $\beta = 0.2413$ , 隔离率  $\ell = 0.5384$  不变, 对输入率  $\theta$  分别取 0%, 1%, 5%, 10% 时上海的疫情预测如图4.



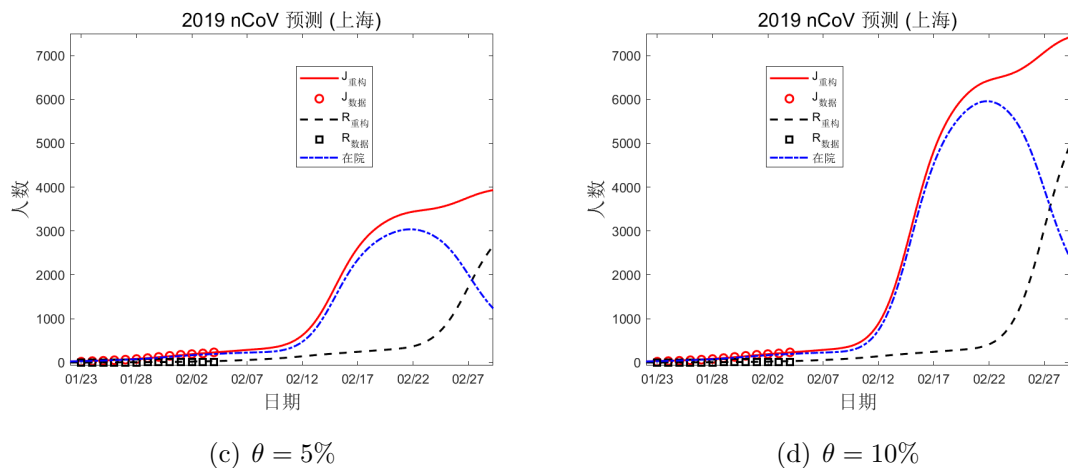


图 4: 返程潮对上海市的影响

我们可以看到, 随着输入率  $\theta$  的增加, 疫情将也随之发生改变. 不同输入率下疫情分析数据见下表:

输入率 $\theta$	预测疫情拐点时间	预测 2 月底的累计感染人数
0%	2 月 12 日附近	500 人左右
1%	2 月 21 日附近	1000 人左右
5%	2 月 21 日附近	4000 人左右
10%	2 月 21 日附近	7500 人左右

表 2: 不同输入率下的疫情分析

显然可以确定:

1. 外部输入将使得累计确诊人数增加.
2. 外部输入将使得疫情“拐点”延后.

**隔离率的影响** 保持上述传染率  $\beta = 0.2413$  不变, 取输入率  $\theta$  为 5% 时, 不同隔离率对上海的疫情预测如图5

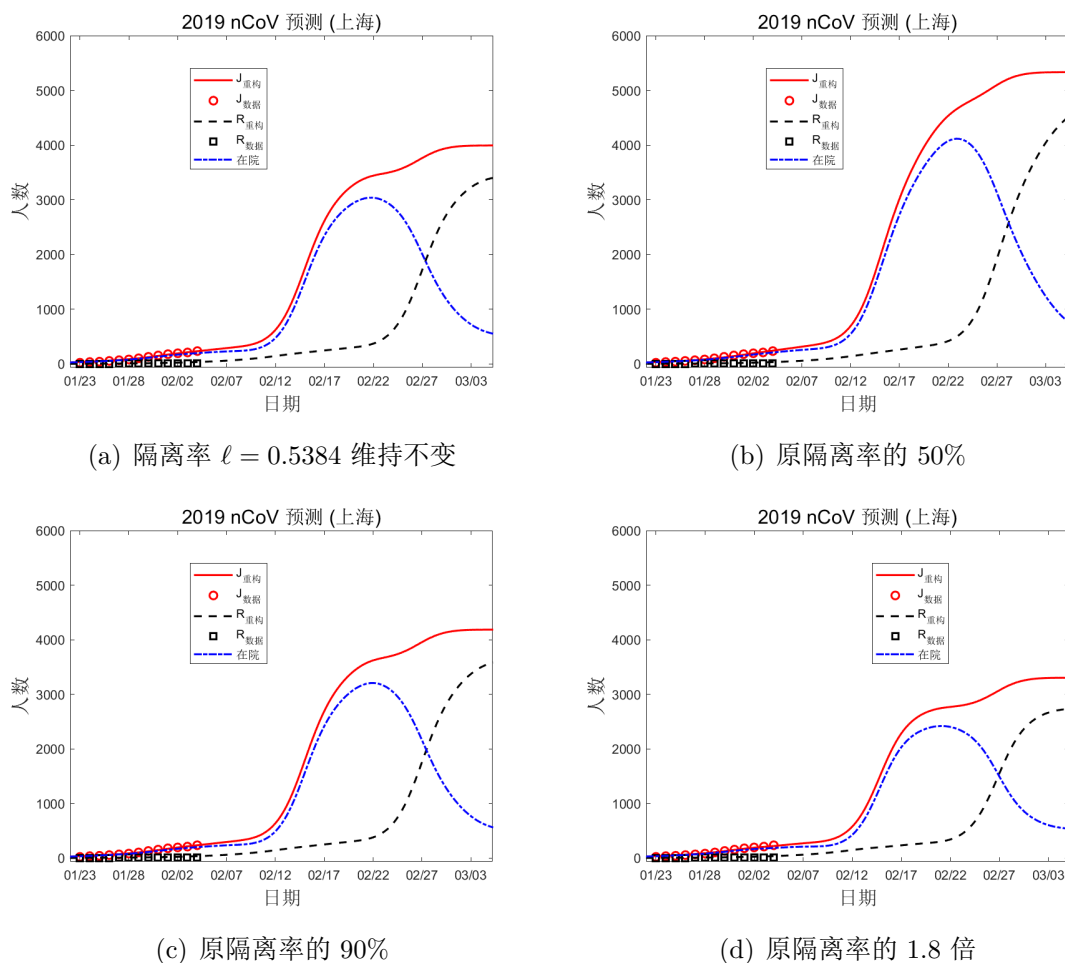


图 5: 隔离率的影响

如果在有新的外来输入感染者的情况下:

1. 从图5(a)-图5(c)可见, 降低隔离率将使得最终累计感染人数增加, 同时疫情缓解的日期将有所后移.

2. 从图5(a)和图5(d)可见, 增加隔离率将使得最终累计感染人数减少, 但疫情缓解的日期并没有显著前移. 同时, 在有外来输入的情况下, 增加隔离率并不能有效降低最终累计感染人数, 这个与前面图4(a)进行对比就可以看出来.

综上, 隔离率对与最终累计感染人数有很大决定作用, 但对“拐点”影响不显著, 考虑“拐点”主要还是受潜伏期等时滞效应影响较大.

## 4 结论与建议

基于上述分析, 可以得到如下结论和建议:

1. 各项防控措施不可松懈. 先前的各种防控措施是有效的, 但各项措施必须继续严格执行, 不能松懈!

2. 对流入的人口要实时掌控, 避免大量特别是避免短时间内人口的大量流入. 要将复工流和返校流错峰, 避免在短时间内叠加.

## 参考文献

- [1] 刘畅, 丁光宏, 龚剑秋等, SARS 爆发预测和预警的数学模型研究 [J], 科学通报, **49**(21): 2245-2251, 2004.
- [2] 马知恩, 周义仓, 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang and K. Liu, A Time Delay Dynamical Model for Outbreak of 2019-nCoV and the Parameter Identification[EB/OL], arXiv:2002.00418, 2020.
- [4] 严阅, 陈瑜, 刘可伋, 罗心悦, 许伯熹, 江渝, 程晋, 基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测 [J/OL], DOI: 10.1360/SSM-2020-0026, 2020.
- [5] Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang and K. Liu, A Time Delay Dynamic System with External Source for the Local Outbreak of 2019-nCoV[EB/OL], arXiv, 2020.