WS23/24: Numerische Mathematik
Übungszettel 1

Kreuzerlliste. KreuzerIn Sie bis zwei Stunden vor dem Übungstermin auf der Moodle Seite all jene Beispiele an, die Sie gelöst haben. Bei Nichterscheinen zur Übung verfallen Ihre Kreuzerl.

Gemeinsames Arbeiten. Gemeinsames Arbeiten an den Beispielen ist erlaubt und erwünscht. Voraussetzung zum KreuzerIn ist, dass Sie alle Schritte verstanden haben und erklären können. Für Programmierbeispiele müssen Sie eine eigene Codeversion erstellt haben, ausführen und erklären können.

Programmieren. Schreiben Sie Ihre Programme selbst. Erstellen Sie "sauberen" Code, i.e. wählen Sie sinnvolle Variablennamen, verwenden Sie erklärende Kommentare und beschriften Sie ihre Plots (Titel, Achsen, Legenden, etc.).

1. Finden Sie je ein Beispiel (Gleichung und Skizze) für reelle, stetige Funktionen definiert auf $[0, 1]$ mit (i) keiner, (ii) genau einer, (iii) genau zwei und (iv) genau drei Nullstellen in $[0, 1]$. Diskutieren Sie, welche der Funktionen die Voraussetzungen vom Thm 1.1. erfüllen und was man daraus lernt.

2. Es sei $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ definiert auf $I = [\frac{1}{2}, 2]$.
   (i) Beweisen Sie, dass f eine Nullstelle in I besitzt.
   (ii) Basierend auf f, finden Sie zwei Funktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ definiert auf I, deren jeweiliger Fixpunkt den Nullstellen von f entspricht. Wählen Sie g_1 und g_2 so, dass nur eine die Voraussetzungen des Brouwer'schen Fixpunktsatzes erfüllt.
   (iii) Skizzieren Sie alle drei Funktionen.

3. We attempt to find all solutions to $f(x) = 0$, where $f(x) = e^x - 3x - 1$.
   (i) Sketch $y = f(x)$ for $-1 \le x \le 3$. How many solutions does $f(x) = 0$ have?
   (ii) We now look at the fixed point problem $x = g(x)$ with $g(x) = \ln(3x + 1)$. Show that this is equivalent to finding the roots of f.
   (iii) Plot or sketch $y = g(x)$ and $y = x$ in one plot and find (graphically) two starting values that give a different series behaviour.

4. The two fixed point problems (1) $x = \frac{1}{2}\tan(x)$ and (2) $x = \arctan(2x)$ are equivalent in the sense that they share the same fixed points on $(-\pi/2, \pi/2)$ (you don't have to prove this).
   (i) Draw a picture for both fixed point problems and identify fixed points (you don't have to compute them)
   (ii) Discuss the FPs' stability, and how the iteration sequence (x_k) behaves differently for the two problems as $k \to \infty$ (using a picture is sufficient).

5. Let g be defined on $[5\pi/8, 11\pi/8]$.

$$g(x) = x + \sin x.$$

Show that you can apply the contraction mapping theorem and determine the (smallest possible) Lipschitz constant L (i.e. the constant in the definition of a contraction).

6. Let $\alpha \geq 0$ and consider the function

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x\alpha.$$

   (a) What are the fixed points of g depending on α (calculate them analytically)? Make a plot with α as x-axis and the solution(s) as y-axis.

   (b) Consider the fixed point iteration $x_{k+1} = g(x_k)$ for this g. What can you say about the stability of the fixed points in dependence of α? You may assume that the initial guess is sufficiently close to the fixed point.

   (c) Discuss the case $\alpha = 1$ graphically.

7. (P) Implementieren Sie eine Fixpunkt Iteration (zB in Python). Sie soll folgende Features haben:

   (i) Man soll die Funktion g, die maximale Anzahl der Iterierten N und den Startpunkt x_0 angeben können.

   (ii) Ausgabe der ersten N Iterierten (numerisch)[1].

   (iii) Plotten der Funktion $y = g(x)$ und $y = x$ in einer Figure (Axen beschriften, Legende!).

   Testen Sie Ihren Code mit verschiedenen g, N und x_0, so dass Sie ihn in der Übung vorführen können.

[1] Übersichtlich ist zB eine Ausgabe der Form "k-te Iterierte: xk", wobei k und xk die entsprechenden Variablen sind, sowie Kontrolle über die angezeigten Stellen von xk. In Python können Sie das zB via f-strings bzw den format-Befehl machen.