МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования «БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет: Информационных технологий

Кафедра: Программной инженерии

Выполнила: студентка 2 курса 5 группы

специальности ПОИТ Городилина А. С.

**Отчёт**

По дисциплине “Математическое программирование”

На тему “Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения”

Минск

2024

**Лабораторная работа 3. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения.**

**Цель работы:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

**Ход Работы**

1. **Сформулировать условие задачи коммивояжера.**

Дано множество городов и расстояния между ними. Требуется найти гамильтонов цикл (замкнутый маршрут, проходящий через каждый город ровно один раз) минимальной длины, начинающийся и заканчивающийся в одном и том же городе. Матрица расстояний между городами приведена ниже в виде таблицы.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 2 \* n | 21 + n |  | n |
| **2** | n |  | 15 + n | 68 - n | 84 - n |
| **3** | 2 + n | 3 \* n |  | 86 | 49 + n |
| **4** | 17 + n | 58 - n | 4 \* n |  | 3 \* n |
| **5** | 93 - n | 66 + n | 52 | 13 + n |  |

Согласно условию n=6, поэтому преобразованная матрица выглядит подобным образом:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 12 | 27 |  | 6 |
| **2** | 6 |  | 21 | 62 | 78 |
| **3** | 8 | 18 |  | 86 | 55 |
| **4** | 23 | 52 | 24 |  | 18 |
| **5** | 87 | 72 | 52 | 19 |  |

Где inf означает, что достичь вершину с помощью указанной дуги нельзя.

1. **Решить сформулированную задачу методом ветвей и границ.**

Произвольный маршрут: X0 = 123451.

Тогда F(X0) = 8+ 19 + 86 + 12 + 89 = 214

Требуется произвести редукцию строк и столбцов или же привести матрицу по строкам и столбцам. Для этого нужно найти минимально значение расстояния в каждой строке и каждом столбце матрицы di и dj соответственно. А затем вычесть эти значения из элементов рассматриваемых строки или столбца согласно первому и второму утверждениям, которые гласят, что изменение всех элементов строки или столбца матрицы расстояний на одно и то же число не влияет на выбор оптимального маршрута коммивояжера.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **di** |
| **1** |  | 6 | 21 |  | 0 | 6 |
| **2** | 0 |  | 15 | 56 | 72 | 6 |
| **3** | 0 | 10 |  | 78 | 47 | 8 |
| **4** | 5 | 34 | 6 |  | 0 | 18 |
| **5** | 68 | 53 | 33 | 0 |  | 19 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **di** |
| **1** |  | 12 | 27 |  | 6 | 6 |
| **2** | 6 |  | 21 | 62 | 78 | 6 |
| **3** | 8 | 18 |  | 86 | 55 | 8 |
| **4** | 23 | 52 | 24 |  | 18 | 18 |
| **5** | 87 | 72 | 52 | 19 |  | 19 |

Редукция строк:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 0 | 15 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 9 | 56 | 72 |
| **3** | 0 | 4 |  | 78 | 47 |
| **4** | 5 | 28 | 0 |  | 0 |
| **5** | 68 | 47 | 27 | 0 |  |
| **dj** | 0 | 6 | 6 | 0 | 0 |

Редукция столбцов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 6 | 21 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 15 | 56 | 72 |
| **3** | 0 | 10 |  | 78 | 47 |
| **4** | 5 | 34 | 6 |  | 0 |
| **5** | 68 | 53 | 33 | 0 |  |
| **dj** | 0 | 6 | 6 | 0 | 0 |

Такая матрица называется полностью редуцированной, а значения di и dj — константами приведения. Далее находим сумму всех констант приведения:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **di** |
| **1** |  | 0 | 15 |  | 0 | 6 |
| **2** | 0 |  | 9 | 56 | 72 | 6 |
| **3** | 0 | 4 |  | 78 | 47 | 8 |
| **4** | 5 | 28 | 0 |  | 0 | 18 |
| **5** | 68 | 47 | 27 | 0 |  | 19 |
| **dj** | 0 | 6 | 6 | 0 | 0 | 69 |

Сумма констант приведения является нижней границей длины маршрута и будет являться значением корня дерева маршрутов. Далее определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*). С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на INF(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 0(18) | 15 |  | 0(0) |
| **2** | 0(9) |  | 9 | 56 | 72 |
| **3** | 0(4) | 4 |  | 78 | 47 |
| **4** | 5 | 28 | 0(9) |  | 0(0) |
| **5** | 68 | 47 | 27 | 0(83) |  |

Наибольшая сумма констант приведения равна 56+27 = 83 для ребра (5,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества (5,4) и (5\*,4\*).

Исключение ребра (5,4) проводим путем замены элемента d54 = 0 на INF, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **di** |
| **1** |  | 0 | 15 |  | 0 | 0 |
| **2** | 0 |  | 9 | 56 | 72 | 0 |
| **3** | 0 | 4 |  | 78 | 47 | 0 |
| **4** | 5 | 28 | 0 |  | 0 | 0 |
| **5** | 68 | 47 | 27 | INF |  | 27 |
| **dj** | 0 | 0 | 0 | 56 | 0 | 83 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества: H(5\*,4\*)=69+83=152

Включение ребра (5,4) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d45 заменяем на INF, для исключения образования негамильтонова цикла. В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения. После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 0 | 15 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 9 | 56 | 72 |
| **3** | 0 | 4 |  | 78 | 47 |
| **4** | 5 | 28 | 0 |  | 0 |
| **5** | 68 | 47 | 27 | 0(83) |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **5** | **di** |
| **1** |  | 0 | 15 | 0 | 0 |
| **2** | 0 |  | 9 | 72 | 0 |
| **3** | 0 | 4 |  | 47 | 0 |
| **4** | 5 | 28 | 0 | INF | 0 |
| **dj** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

А граф маршрутов примет вид:

69

152

Поскольку нижняя граница этого подмножества (5,4) меньше, чем подмножества (5\*,4\*), то ребро (5,4) включаем в маршрут с новой границей H = 69.  
Определяем ребро ветвления.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0(4) | 15 | 0(47) |
| **2** | 0(9) |  | 9 | 72 |
| **3** | 0(4) | 4 |  | 47 |
| **4** | 5 | 28 | 0(14) | INF |

Наибольшая сумма констант приведения равна 0+47 = 47 для ребра (1,5), следовательно, множество разбивается на два подмножества (1,5) и (1\*,5\*).

Исключение ребра (1,5):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **5** | **di** |
| **1** |  | 0 | 15 | INF | 0 |
| **2** | 0 |  | 9 | 72 | 0 |
| **3** | 0 | 4 |  | 47 | 0 |
| **4** | 5 | 28 | 0 | INF | 0 |
| **dj** | 0 | 0 | 0 | 47 | 47 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(1\*,5\*) = 69 + 0 + 47 = 116

Включение ребра (1,5):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0 | 15 | INF |
| **2** | 0 |  | 9 | 72 |
| **3** | 0 | 4 |  | 47 |
| **4** | 5 | 28 | 0 | INF |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **di** |
| **2** | 0 |  | 9 | 0 |
| **3** | 0 | 0 |  | 0 |
| **4** | 5 | 24 | 0 | 0 |
| **dj** | 0 | 4 | 0 | 4 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(1,5) = 69 + 0 + 4 = 73

Граф маршрутов примет вид:

73

69

116

142

Нижняя граница подмножества (1,5) равна: H(1,5) = 73 ≤ 116

Поскольку нижняя граница этого подмножества (1,5) меньше, чем подмножества (1\*,5\*), то ребро (1,5) включаем в маршрут с новой границей H = 73.

Определяем ребро ветвления.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0(5) |  | 9 |
| **3** | 0(0) | 0(24) |  |
| **4** | 5 | 24 | 0(14) |

Наибольшая сумма констант приведения равна 0+24 = 24 для ребра (3,2), следовательно, множество разбивается на два подмножества (3,2) и (3\*,2\*).

Исключение ребра (3,2):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** | **di** |
| **2** | 0 |  | 9 | 0 |
| **3** | 0 | INF |  | 0 |
| **4** | 5 | 24 | 0 | 0 |
| **dj** | 0 | 24 | 0 | 24 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(3\*,2\*) = 73 + 0 + 24 = 97

Включение ребра (3,2):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0(5) |  | 9 |
| **3** | 0(0) | INF |  |
| **4** | 5 | 24 | 0(5) |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **3** | **di** |
| **2** | 0 | INF | 0 |
| **4** | 5 | 0 | 0 |
| **dj** | 0 | 0 | 0 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(3,2) = 73 + 0 + 0 = 73

Граф маршрутов примет вид:

73

73

69

97

116

152

Нижняя граница подмножества (3,2) равна: H(3,2) = 73 ≤ 97

Поскольку нижняя граница этого подмножества (3,2) меньше, чем подмножества (3\*,2\*), то ребро (3,2) включаем в маршрут с новой границей H = 73.

Определяем ребро ветвления.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **3** |
| **2** | 0(inf) | INF |
| **4** | 5 | 0(inf) |

Наибольшая сумма констант приведения равна 5+inf = inf для ребра (2,1), следовательно, множество разбивается на два подмножества (2,1) и (2\*,1\*).

Исключение ребра (2,1):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **3** | **di** |
| **2** | INF | INF | INF |
| **4** | 5 | 0 | 0 |
| **dj** | 5 | 0 | INF |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(2\*,1\*) = 73 + 5 + INF = INF

Включение ребра (2,1):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **i, j** | **1** | **3** |
| **2** | INF | INF |
| **4** | 5 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **i, j** | **3** | **di** |
| **4** | 0 | 0 |
| **dj** | 0 | 0 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

H(2,1) = 73 + 0 + 0 = 73

Дерево маршрутов примет вид:

73

73

69

73

inf

97

116

152

Нижняя граница подмножества (2,1) равна: H(2,1) = 73 ≤ INF

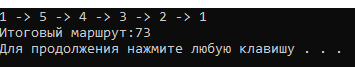
Поскольку нижняя граница этого подмножества (2,1) меньше, чем подмножества (2\*,1\*), то ребро (2,1) включаем в маршрут с новой границей H = 73.

В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:

(1,5), (5,4), (4,3), (3,2), (2, 1)

Длина маршрута равна 6 + 19 + 24 + 18 + 6= 73

1. **Проверка решения с помощью генератора перестановок**

****

Результат решения через генератор перестановок совпадает с ответом, полученным с использованием метода ветвей и границ.

**Вывод:** Мы освоили общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решили задачу о коммивояжере данным методом, сравнили полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.