Задача 4, пункт 2.

1) Пусть $\pi_1=\pi_0=0{,}5$; $a_1=a_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\Sigma_0=E_2$, $\Sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$. Тогда $|\Sigma_0|=1$; $|\Sigma_1|=5$, $\Sigma_0^{-1}=E_2$, $\Sigma_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1/5\end{pmatrix}$. Тогда уравнение разделяющей пов-ти имеет вид: $-2\log 0{,}5+\log 1+(x,y)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-2\log 0{,}5+\log 5+(x,y)\begin{pmatrix}1&0\\0&1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. То есть:

$$x^2+y^2=\log 5+x^2+\frac{y^2}{5} \iff 4y^2=\log 5 \iff y^2=\frac{\log 5}{4}$$

— пара параллельных прямых.

2) Пусть $a_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\pi_0=\pi_1=0{,}5$, $\Sigma_0=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\Sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$. Тогда: $|\Sigma_0|=|\Sigma_1|=3$, $\Sigma_0^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\Sigma_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1/3\end{pmatrix}$. Тогда уравнение примет вид:

$$(x,y)\cdot\begin{pmatrix}1/3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x-1,y-1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix} \iff \frac{x^2}{3}+y^2=(x-1)^2+\frac{(y-1)^2}{3}$$

То есть $x^2+3y^2=3x^2-6x+3+y^2-2y+1 \iff (y+\frac{1}{2})^2=(x-\frac{3}{2})^2$ — пара пересекающихся прямых.

3) Пусть $\pi_0=0{,}1$, $\pi_1=0{,}9$, а остальное — как в предыдущем пункте. Тогда в конечном уравнении просто слева добавится $-2(\log 0{,}1-\log 0{,}9)\cdot 3=6\log 9>0$. И само уравнение будет иметь вид $(x-\frac{3}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2=6\log 9$ — гипербола.

4) Осталось получить параболу. Пусть $\pi_0=\pi_1=0{,}5$; $a_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $a_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\Sigma_0=E_2$, $\Sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1/2\end{pmatrix}$. Тогда $|\Sigma_0|=1$, $|\Sigma_1|=\frac{1}{2}$, $\Sigma_0^{-1}=E_2$; $\Sigma_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$. Тогда уравнение имеет вид: $\boxed{\cancel{\log 1+(x,y}}$

$$\log 1+(x-1)^2+(y-2)^2=\log\frac{1}{2}+(x-2)^2+2(y-1)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-\cancel{4y}+\cancel{4}=\log\frac{1}{2}+\cancel{x^2}-4x+\cancel{4}+2y^2-\cancel{4y}+2$$

$$2x-1-y^2=\log\frac{1}{2} \iff y^2=2x-1+\log 2$$

— парабола.

Итак, все четыре требуемые „поверхности" получены. Хочется отметить, что мы учли необходимые требования, а именно, что $\pi_0+\pi_1=1$, а также, что Σ_0 и Σ_1 — симметричные положительно определенные матрицы.