Задача 4

Т.к. распределение X при условии $Y=k$ имеет вид $N(a_k, \Sigma_k)$, то плотность выражается так: $p(X|y=k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma_k|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(X-a_k)^T \Sigma_k^{-1}(X-a_k)\right)$

Разделяющая пов-ть между двумя классами – это множество точек, для к-ых вероятность этих двух классов одинакова. То есть: $P(y=0)\cdot p(X|y=0) = P(y=1)\cdot p(X|y=1)$. Обозначим $\pi_i := P(y=i)$. Тогда $\pi_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma_0|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(X-a_0)^T \cdot \Sigma_0^{-1}(X-a_0)\right) =$

$= \pi_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma_1|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(X-a_1)^T\Sigma_1^{-1}(X-a_1)\right)$. Сократим на лишнее и логарифмируем:

$$\log\pi_0 - \frac{1}{2}\log|\Sigma_0| - \frac{1}{2}(X-a_0)^T\Sigma_0^{-1}(X-a_0) = \log\pi_1 - \frac{1}{2}\log|\Sigma_1| - \frac{1}{2}(X-a_1)\Sigma_1^{-1}(X-a_1).$$

Как мы видим, это уравнение второй степени, а оно задаёт поверхность второго порядка. Сл-но, разделяющая поверхность в модели QDA – поверхность второго порядка.

Теперь рассмотрим LDA. То есть $\Sigma_0 = \Sigma_1$. Перепишем уравнение разделяющей поверхности: (пусть $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma$)

$$\log\pi_0 - \frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}(X-a_0)^T\Sigma^{-1}(X-a_0) = \log\pi_1 - \frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}(X-a_1)^T\Sigma^{-1}(X-a_1)$$

Преобразуем:

$$2\log\left(\frac{\pi_0}{\pi_1}\right) = (X-a_0)^T\Sigma^{-1}(X-a_0) - (X-a_1)^T\Sigma^{-1}(X-a_1)$$

Воспользуемся следующим св-вом: $A^TBA - C^TBC =$
$= A^TBA - A^TBC + A^TBC - C^TBC = A^TB\cdot(A-C) + (A^T-C^T)BC.$

Тогда получим:

$$2\log\left(\frac{\pi_0}{\pi_1}\right) = (X-a_0)^T\Sigma^{-1}(a_1-a_0) + (a_1-a_0)^T\Sigma^{-1}(X-a_1).$$

Как мы видим, получилось уравнение первой степени. Аналогично предыдущему пункту, получаем, что разделяющая поверхность в модели LDA – линейна. Ч.и т.д.