Задача 1

а) $S^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$. Д-ть: $S'^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2$.

Δ $S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \overline{X}^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 =$

$= \overline{X^2} - 2\overline{X}^2 + \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = S^2$. $\square$

б) $\sigma^2 = DX_1 < \infty$. Является ли S^2 несмещенной оценкой σ^2?

Δ $ES^2 \overset{①}{=} E(\overline{X^2}) - E(\overline{X}^2) = E\left(\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}\right) - E\left(\frac{(X_1 + \ldots + X_n)^2}{n^2}\right) \overset{②}{=} E\left(\frac{X_1^2 \cdot n}{n}\right) -$

$- E\left(\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2 - \sum_{i\neq j} X_i X_j}{n^2}\right) \overset{③}{=} E(X_1^2) - \frac{1}{n}E(X_1^2) - \sum_{i\neq j}\frac{E(X_i X_j)}{n^2} \overset{④}{=} \frac{n-1}{n}E(X_1^2) -$

$- \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot E(X_i)\cdot E(X_j) = \frac{n-1}{n}\left(E(X_1^2) - (E(X_1))^2\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S^2$ – смещённая оценка σ^2.

Пояснения переходов: ① линейность матожидания, ② $X_1^2, \ldots, X_n^2$ – i.i.d., ③ снова линейность, ④ $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ при $i \neq j$

Ответ: нет.