

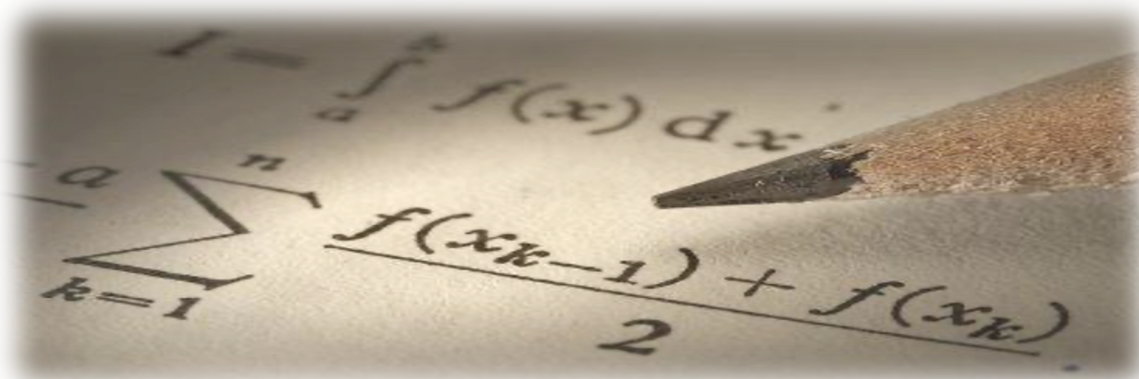
# PROYECTO INTEGRADOR

## ETAPA 1

### ACTIVIDAD 1

### MÉTODO NUMÉRICOS

Docente. Dr. EDSON MICHAEL  
JIMENEZ DAMIAN



#### ELABORADO POR:

- Cesar Augusto Mariz Placencia.
- Carlos Agustin Carrillo Flores.
- Justino Daniel Rodríguez Murray.
- Jose Emiliano Jauregui Guzman.
- Nayelli Bernal Cortes.
- Abigail ortiz lagos.

## Introducción

Esta actividad consiste en aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo del curso. Para llevar a cabo este Proyecto se toman como referente actividades elaboradas previamente, lo que garantiza la transversalidad de los contenidos revisados para fortalecer el desarrollo de competencias.

## Objetivo

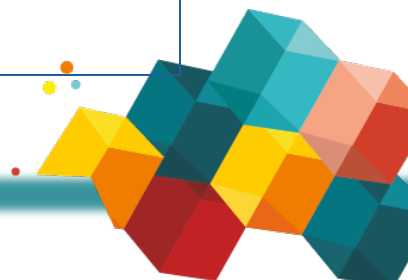
El objetivo del Proyecto integrador es programar los principales métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de una variable, así como de derivación e integración identificando las ventajas y desventajas de cada uno que permitan determinar soluciones viables mediante el planteamiento de modelos matemáticos exactos y precisos.

### *1. Programación de los métodos de bisección y Newton Raphson en una aplicación*

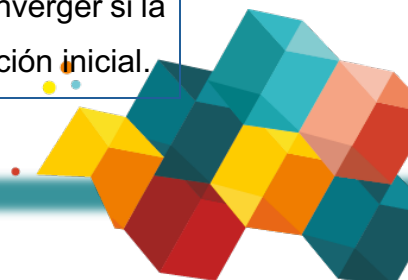
#### *1.1 Conceptualización*

Reproduce y completa el siguiente cuadro comparativo en el que describas los elementos sustantivos de cada método numérico.

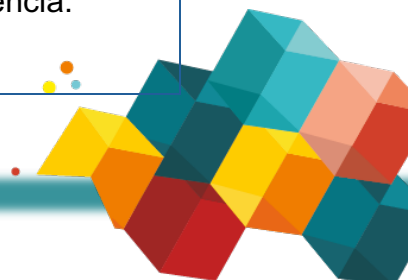
Método numérico	¿En qué consiste?	Ventajas	Desventajas
Bisección	Es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el subintervalo que tiene la raíz.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funciona para ecuaciones algebraicas y trascendentes, pero se recomienda utilizarlo después</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Converge muy lentamente.</li> <li>• Permite encontrar solo una raíz, aunque existan más en el intervalo.</li> </ul>



		<p>de un análisis gráfico.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Es siempre convergente.</li> <li>• Se puede establecer el límite de error</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No puede determinar raíces complejas.</li> </ul>
Regla falsa	<p>Método iterativo de resolución numérica de ecuaciones no lineales. El método combina el método de bisección y el método de la secante.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se aproxima más rápido a la raíz.</li> <li>• Tiene similitud con el método de secante.</li> <li>• Alternativa basada en una visualización gráfica.</li> <li>• Se estima mediante la semejanza de triángulos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convergencia muy lenta a la solución.</li> <li>• Proceso iterativo, que ocasiona que uno de sus extremos tiende a no modificarse.</li> <li>• No se puede prever el número de iteraciones necesarias.</li> </ul>
Sustitución sucesiva	<p>El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir en la otra ecuación el valor hallado.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilidad para programarlo</li> <li>• Para ciertos tipos de problemas que aparecen en Ingeniería Química este método es muy adecuado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No converge en muchos casos</li> <li>• En otros la convergencia es muy lenta.</li> </ul>
Newton Raphson	<p>– Se utiliza para calcular los ceros</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Puede converger a la raíz de una</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No converger si la estimación inicial.</li> </ul>



	<p>de una función real de variable real. Su simplicidad formal y su rapidez de convergencia hacen que, con frecuencia, sea el primer algoritmo a considerar para esta tarea.</p>	<p>función rápidamente.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Maneja funciones de cualquier complejidad.</li> <li>• Utiliza la derivada de la función para aproximar la raíz, lo que puede proporcionar una estimación más precisa de la raíz en comparación con otros métodos que no utilizan derivadas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Requiere el cálculo de derivadas, lo que puede resultar difícil para algunas funciones.</li> </ul>
Secante	<p>Es un algoritmo que busca la raíz de una función. Podría considerarse como una variante del método Newton-Raphson por todas las similitudes que tienen, ambos son métodos abiertos, funcionan a partir</p>	<p>Se puede obtener cuando la ecuación es demasiado compleja para obtener una derivada.</p>	<p>La velocidad de convergencia es mas lenta que la de Newton-Raphson. No se asegura que la primera aproximación es cercana a la raíz que pudiera ser índice de divergencia.</p>



	de una fórmula que proviene de la pendiente de una gráfica		
--	--	--	--

### 1.2 Métodos abiertos

- Describe brevemente en qué consisten los métodos numéricos abiertos y establece cuáles métodos de los que aparecen en el cuadro comparativo están representados por esta categoría.

Se basan en fórmulas que requieren de un sólo valor de  $X_0$  de un par de ellas, pero que no necesariamente encierran la raíz. En algunas ocasiones divergen o se alejan de la raíz a medida que crece el número de interacciones. Sin embargo, cuando los métodos convergen, lo hacen mucho más rápido que los métodos que usan intervalos, algunos métodos son:

- Método de Newton-Raphson.
- Método de la Secante.

- Investiga algunas aplicaciones o problemas que se utilizan aplicando este tipo de métodos.

Método de Newton-Raphson. El funcionamiento se basa en predecir un nuevo valor de  $x$  en función del valor anterior de  $x$ , de esta manera, dado un nuevo valor para  $x_i$  se tiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

La condición de paro se base en:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

### 1.3 Métodos cerrados



- **Describe brevemente en qué consisten los métodos numéricos cerrados y establece cuáles métodos de los que aparecen en el cuadro comparativo están representados por esta categoría**

Se necesita de dos valores iniciales para la raíz. Como su nombre lo indica, dichos valores iniciales deben “encerrar”, o estar a ambos lados de la raíz, algunos métodos son:

Método de Bisección.

Método de la Falsa Posición o Regla falsa.

- **Investiga algunas aplicaciones o problemas que se utilizan aplicando este tipo de métodos**

A partir de una función algebraica o trascendente y de un intervalo  $[a, b]$  que pertenece al dominio de la función y para el cual  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , lo que implica que en el intervalo  $[a, b]$  existe al menos una raíz. El método consiste en bisectar el intervalo  $[a, b]$ :

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

Se obtiene una aproximación a la raíz  $x_0$ ; la función se valúa en este nuevo valor y de acuerdo al signo de la función valuada en este punto, debería sustituirse uno de los extremos del intervalo de búsqueda, de tal forma que se conserve que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . De acuerdo a la geometría de la figura, la sustitución de los intervalos debería hacerse de la siguiente forma: Sea  $a$  tal que  $f(a) < 0$  y  $b$  tal que  $f(b) > 0$ :

Si  $f(x_0) < 0$ , entonces  $x_0$  sustituye a

Si  $f(x_0) > 0$ , entonces  $x_0$  sustituye a  $b$

En cada iteración deberá sustituirse alguno de los límites del intervalo que contiene a la raíz. Repitiendo este proceso, el intervalo se reduce paulatinamente hasta que



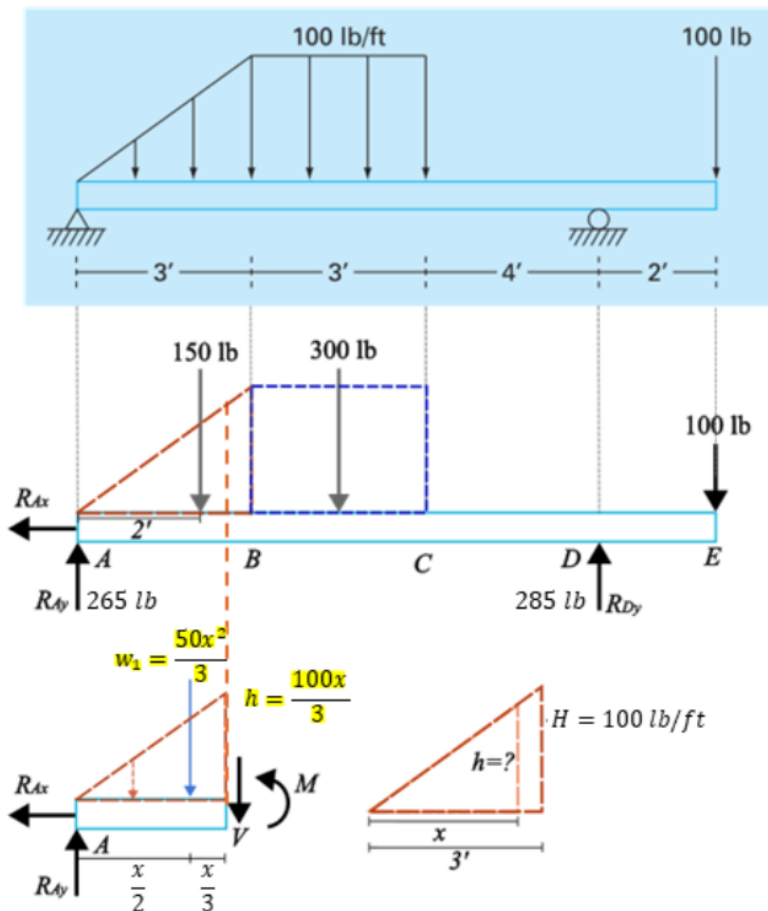
alguna de las aproximaciones coincide razonablemente con la raíz de la función. El proceso se detiene cuando entre la aproximación  $x_i$  y la aproximación anterior  $x_{i-1}$  se satisface un nivel de error (absoluto o relativo) preestablecido (tolerancia).

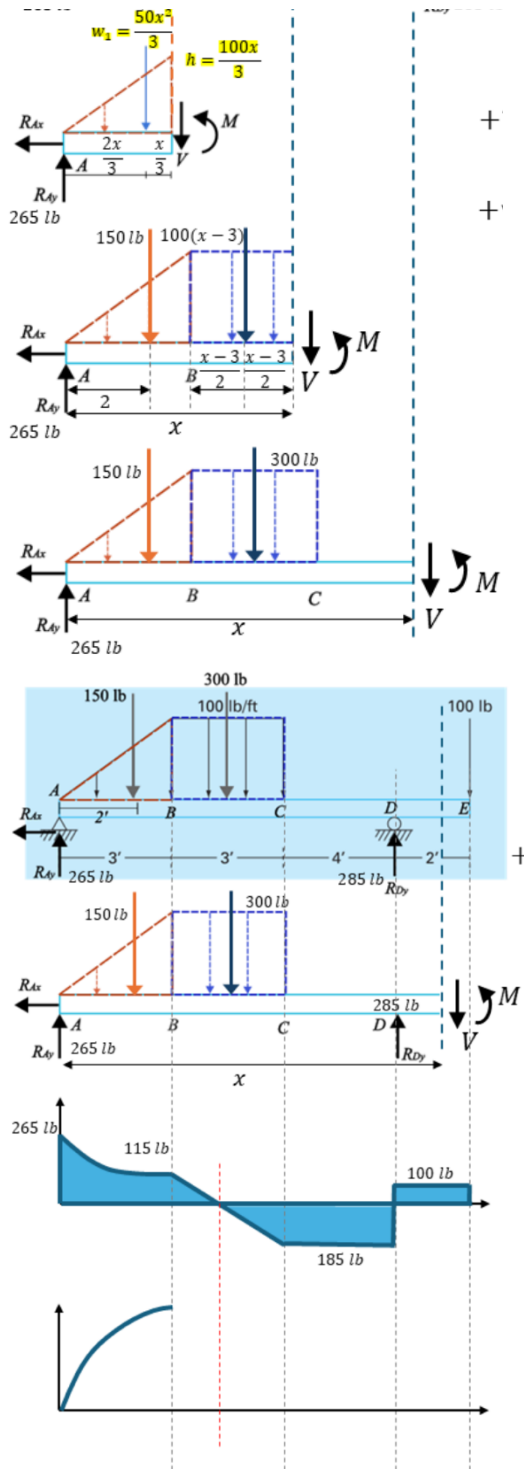
#### 1.4 Casos prácticos

- Método de Bisección (Páginas. 140 realiza los ejercicios 5.14 y 5.15)

#### Método de Bisección

Se carga una viga de la manera que se aprecia en la figura. Emplee el método de bisección para resolver la posición dentro de la viga donde no hay momento





Solución:

Se determinan las reacciones considerando la viga completa como un cuerpo libre

$$\Sigma M_A = 0:$$

$$(-100 \text{ lb})(12 \text{ ft}) + (R_{py})(10 \text{ ft}) - (300 \text{ lb})(4.5 \text{ ft}) - (150 \text{ lb})(2 \text{ ft}) = 0$$





$$RDY = \frac{2850 \text{ lb/ft}}{10 \text{ ft}}$$

$$RDY = 285 \text{ lb} \uparrow$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0: R_{AY} - 150 \text{ lb} - 300 \text{ lb} + 285 \text{ lb} - 100 \text{ lb}$$

$$R_{AY} = 265 \text{ lb} \uparrow$$

$$\frac{100}{3} = \frac{h}{x}, \rightarrow h = \frac{100x}{3} \quad A_t = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = w1$$

$$W1 = \frac{(x)(\frac{100x}{3})}{2}, \rightarrow w1 = \frac{50x^2}{3}$$

Fuerza cortante y momento flector. Desde A hasta B ( $0 < x < 3$ )

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 265 \text{ lb} - \frac{50x^2}{3} - V = 0, \quad V = 265 - \frac{50x^2}{3}$$

$$\Sigma M1 = 0: -265x + \frac{50x^2}{3} \left(\frac{x}{3}\right) + M = 0, \quad M = 265x - \frac{50x^2}{9}$$

Fuerza cortante y momento flector. Desde B hasta C ( $3 < x < 6$ )

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 265 \text{ lb} - 150 \text{ lb} - 100(x-3) - V = 0, \quad V = 115 - 100(x-3)$$

$$M2 = 0: -265x + 150(x-2) + 100(x-3) \left(\frac{x-3}{2}\right) + M = 0$$

$$M = -50x^2 + 415x - 150$$

Fuerza cortante y momento flector. Desde C hasta D ( $6 < x < 10$ )

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 265 \text{ lb} - 150 \text{ lb} - 300 - V = 0, \quad V = -185 \text{ lb}$$

$$\Sigma M3 = 0: -265x + 150(x-2) + 300(x-4.5) + M = 0,$$

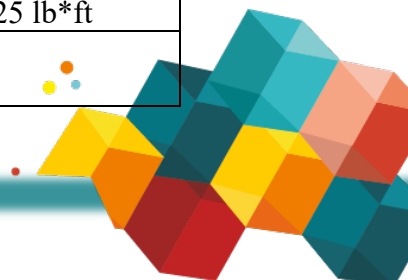
$$M = -185x + 1650$$

Fuerza cortante y momento flector. Desde D hasta E ( $10 < x < 12$ )

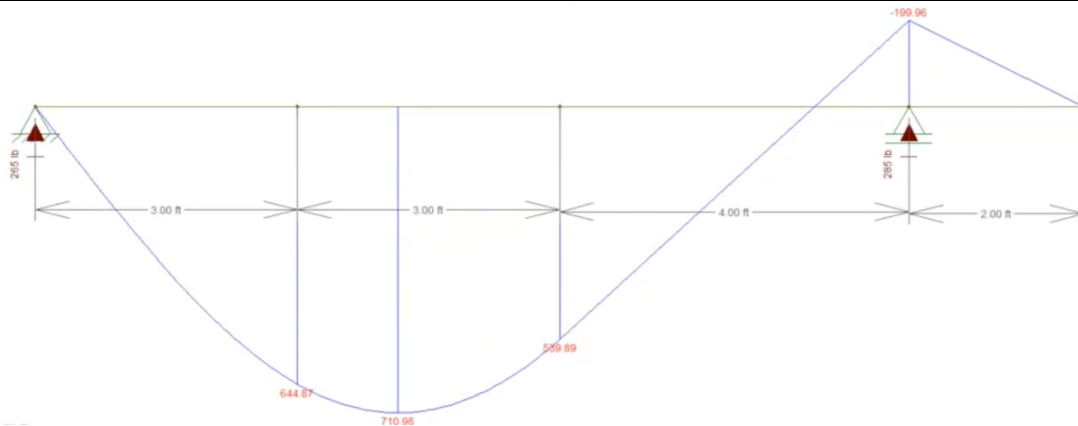
$$+\uparrow \Sigma F = 0: 265 \text{ lb} - 150 \text{ lb} - 300 \text{ lb} + 285 - V = 0, \quad V = -100 \text{ lb}$$

$$\Sigma M3 = 0: -265x + 150(x-2) + 300(x-4.5) - 285(x-10) + M = 0, \quad M = 100x - 1200$$

Dominio	Ecuación	
A-B	$V = 265 - \frac{50x^2}{3}$ $M = 265x - \frac{50x^2}{9}$	$V = 115 \text{ lb}$  $M = 645 \text{ lb*ft}$
B-C	$V = 115 - 100(x-3)$ $M = -50x^2 + 415x - 150$	$V = -185 \text{ lb}$  $M = 540 \text{ lb*ft},$ $M_{\text{max}} = 711.125 \text{ lb*ft}$
C-D	$V = -185 \text{ lb}$	$V = -185 \text{ lb}$



	$M = -185x + 1650$	$M = -200lb \cdot ft$
D-E	$V = -100 \text{ lb}$	$V = -100 \text{ lb}$
	$M = 100X - 1200$	$M = 0$



Paso 1: elija valores iniciales inferior,  $x_l$  y superior,  $x_u$ , que encierre la raíz, de forma tal que la función cambie de signo en el intervalo. Esto se verifica comprobando que  $f(x_l)f(x_u) < 0$ .

Paso 2:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8$$

El error relativo porcentual verdadero  $\varepsilon_t$  es:

$$\varepsilon_t = \frac{\text{Valor real} - x_r}{\text{Valor real}} = \frac{8.918 - 8}{8.918} = 0.1029\%$$

Paso 3:

Calculando el producto de los valores en la función en un límite inferior y en el punto medio:

$$f(6)f(8) = (-460)(170) = -78200$$

Entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Por lo tanto la raíz debe de estar localizada entre 8 y 9.

Por lo tanto, haga  $x_u = x_r$ , volviendo al paso 2 para así crear nuestra tabla de iteraciones para dar con la aproximación de la raíz.

Iteración | a | b |  $x_r$  | f(c)

-----|-----|-----|-----|-----

1 | 0.00 | 10.00 | 5.00 | 725.00



2	5.00	10.00	7.50	262.50
3	7.50	10.00	8.75	31.25
4	8.75	10.00	9.38	-84.38
5	8.75	9.38	9.06	-26.56
6	8.75	9.06	8.91	2.34
7	8.91	9.06	8.98	-12.11
8	8.91	8.98	8.95	-4.88
9	8.91	8.95	8.93	-1.27
10	8.91	8.93	8.92	0.54
11	8.92	8.93	8.92	-0.37
12	8.92	8.92	8.92	0.09
13	8.92	8.92	8.92	-0.14
14	8.92	8.92	8.92	-0.03
15	8.92	8.92	8.92	0.03
16	8.92	8.92	8.92	0.00
17	8.92	8.92	8.92	-0.01
18	8.92	8.92	8.92	-0.01
19	8.92	8.92	8.92	-0.00
20	8.92	8.92	8.92	-0.00

La raíz aproximada es: 8.918920

La raíz aproximada es: 8.916015625

Iter	a	b	$x_r$	$f(x_l)f(x_u)$	Error
-----					
1	5	10	7.5	262.5	262.5
2	7.5	10	8.75	31.25	31.25
3	8.75	10	9.375	-84.375	84.375
4	8.75	9.375	9.0625	-26.5625	26.5625
5	8.75	9.0625	8.90625	2.34375	2.34375
6	8.90625	9.0625	8.984375	-12.109375	12.109375



7	8.90625	8.984375	8.9453125	-4.8828125	4.8828125
8	8.90625	8.9453125	8.92578125	-1.26953125	1.26953125
9	8.90625	8.92578125	8.916015625	0.537109375	0.537109375

```
import math
```

```
# Definir la funcion del problema del momento de flector
```

```
def f(x):
```

```
    return -185*x + 1650
```

```
# Parámetros del método
```

```
a = 6 # Límite inferior del intervalo
```

```
b = 10 # Límite superior del intervalo
```

```
tolerancia = 0.001
```

```
# Este es el método de bisección
```

```
def biseccion(a, b, tolerancia):
```

```
    # Comprobar que el intervalo es válido
```

```
    if f(a) * f(b) >= 0:
```

```
        print("El intervalo no es válido. f(a) y f(b) deben tener signos opuestos.")
```

```
        return None
```

```
# Variables iniciales
```

```
error = b - a
```

```
iteracion = 0
```

```
# Aplicar el método de bisección
```

```
while error > tolerancia:
```

```
    c = (a + b) / 2 # Punto medio
```

```
    fc = f(c)
```



```

print(f"Iteración {iteracion}: c = {c}, f(c) = {fc}")

# Verificar si hemos encontrado la raíz con la tolerancia deseada
if abs(fc) < tolerancia:
    return c

# Determinar en qué subintervalo está la raíz
if f(a) * fc < 0:
    b = c
else:
    a = c

# Actualizar el error y el contador de iteraciones
error = b - a
iteracion += 1

# Devolver la raíz aproximada
return (a + b) / 2

# Ejecutar el método de bisección
raiz = biseccion(a, b, tolerancia)
if raiz is not None:
    print(f"La raíz aproximada es: {raiz}")

```



```

1 import math
2
3 # Definir la funcion del problema del momento de flector
4 def f(x):
5     return -185*x + 1650
6
7 # Parámetros del método
8 a = 6 # Límite inferior del intervalo
9 b = 10 # Límite superior del intervalo
10 tolerancia = 0.001
11
12 # Este es el método de bisección
13 def biseccion(a, b, tolerancia):
14     # Comprobar que el intervalo es válido
15     if f(a) * f(b) >= 0:
16         print("El intervalo no es válido. f(a) y f(b) deben tener signos opuestos")
17         return None
18
19     # Variables iniciales
20     error = b - a
21     iteracion = 0
22
23     # Aplicar el método de bisección
24     while error > tolerancia:
25         c = (a + b) / 2 # Punto medio
26         fc = f(c)
27
28         print(f"Iteración {iteracion}: c = {c}, f(c) = {fc}")
29
30         # Verificar si hemos encontrado la raíz con la tolerancia deseada
31         if abs(fc) < tolerancia:
32             return c
33
34         # Determinar en qué subintervalo está la raíz
35         if f(a) * fc < 0:
36             b = c

```

```

Iteración 0: c = 8.0, f(c) = 170.0
Iteración 1: c = 9.0, f(c) = -15.0
Iteración 2: c = 8.5, f(c) = 77.5
Iteración 3: c = 8.75, f(c) = 31.25
Iteración 4: c = 8.875, f(c) = 8.125
Iteración 5: c = 8.9375, f(c) = -3.4375
Iteración 6: c = 8.90625, f(c) = 2.34375
Iteración 7: c = 8.921875, f(c) = -0.546875
Iteración 8: c = 8.9140625, f(c) = 0.8984375
Iteración 9: c = 8.91796875, f(c) = 0.17578125
Iteración 10: c = 8.919921875, f(c) = -0.185546875
Iteración 11: c = 8.9189453125, f(c) = -0.0048828125
La raíz aproximada es: 8.91845703125

...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.

```

**Ejercicio 5.15** Por un canal trapezoidal fluye agua a una tasa de  $Q=20\text{m}^3/\text{s}$ . La profundidad crítica y para dicho canal satisface la ecuación

$$0 = 1 - \frac{Q^2}{gA_c^3} B$$

Donde  $g=9.81\text{m/s}^2$ ,  $A_c$  = área de la sección transversal ( $\text{m}^2$ ) y  $B$  = ancho del canal de la superficie (m) para este caso, el ancho y el área de la sección transversal se relaciona con la profundidad y po medio de:

$$B = 3 + y \quad \text{y} \quad A_c = 3y + \frac{y^2}{2}$$

Resuelva para la profundidad crítica con el uso de los métodos a) gráfico, b) bisección, y c) falsa posición. En los incisos b) y c), haga elecciones iniciales de  $x_l = 0.5$  y  $x_u = 2.5$ , y ejecute iteraciones hasta que el error aproximado caiga por debajo del 1% o el número de interacciones supere a 10. Analice sus resultados.

#### A) Método gráfico

Para comenzar con la interpretación de esta función y encontrar la raíz por el método gráfico, basta con sustituir los valores de "y" que nos señala el ejercicio.



Por lo tanto, realizamos la sustitución de  $y = .5$  y  $2.5$  así como todos los valores que ya nos otorgó el ejercicio en la función:

$$0 = 1 - \frac{Q^2}{gA_c^3} B$$

Quedando de la siguiente manera:

$$Q=20$$

$$g=9.81$$

$$A_c = 3y + \frac{y^2}{2}$$

$$B = 3 + y$$

$$1 - \frac{20^2}{9.81 * (3y + \frac{y^2}{2})^3} * 3 + y$$

Sustituimos el valor de  $y$  empezando con  $.5$  como lo pide el ejercicio:

$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * .5 + \frac{.5^2}{2})^3} * 3 + .5 = -32.25$$

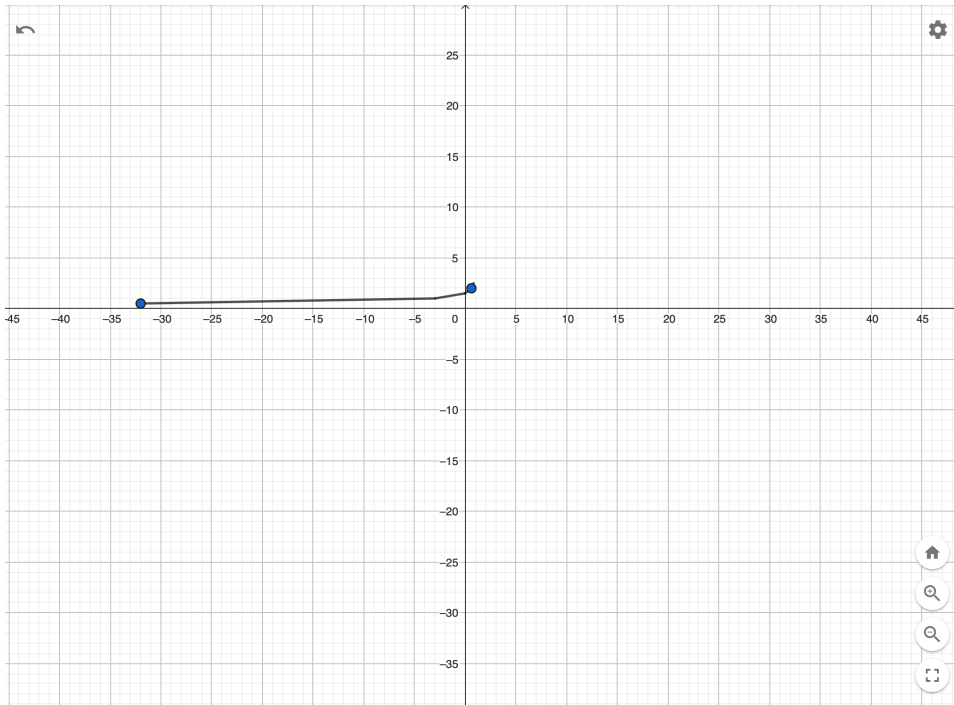
Esto representa el valor de  $x$  cuando  $y$  tiende a  $.5$

Ahora realizamos la evaluación de  $y$  cuando vale  $2.5$

$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2.5 + \frac{2.5^2}{2})^3} * 3 + 2.5 = 0.8134$$

Con estos cálculos ya sabemos que, si hay una raíz entre estos dos números ya que hubo un cambio de signo, pero a simple vista es difícil ver donde se encuentra la raíz





Para tener un dato más exacto usando el método gráfico, realizamos la evaluación de  $y=.5$  a  $2.5$  con un rango de  $.5$  para cada evaluación, dándonos un valor más cercano a la raíz, donde usaremos un programa para la facilitar el cálculo.

El cual quedará de la siguiente manera:

$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * .5 + \frac{.5^2}{2})^3} * (3 + .5) = -32.81$$

$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1 + \frac{1^2}{2})^3} * (3 + 1) = -2.8041$$

$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.5 + \frac{1.5^2}{2})^3} * (3 + 1.5) = -.0309$$

$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2 + \frac{2^2}{2})^3} * (3 + 2) = 6018$$





$$1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2.5 + \frac{2.5^2}{2})^3} * 3 + 2.5 = .8130$$

Dando las siguientes coordenadas:

x	y
-32.81	.5
-2.8041	1
-.0309	1.5
.6018	2
.8130	2.5



```
main.py
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Definimos la función
5 def f(y):
6     return 1 - (400 / (9.81 * (3 * y + (y**2) / 2)**3)) * (3 + y)
7
8 # Generamos valores de y de 0.1 en 0.1
9 y_values = np.arange(0.5, 2.6, 0.5)
10 x_values = f(y_values)
11
12 # Mostramos cada iteración
13 for y, x in zip(y_values, x_values):
14     print(f'y: {y:.2f}, x: {x:.4f}')
15
16 # Graficamos con x en el eje horizontal y y en el eje vertical
17 plt.plot(x_values, y_values, marker='o')
18 plt.title('Comportamiento de la función')
19 plt.xlabel('x')
20 plt.ylabel('y')
21 plt.grid()
22 plt.show()
23
```

input

```
y: 0.50, x: -32.2582
y: 1.00, x: -2.8041
y: 1.50, x: -0.0309
y: 2.00, x: 0.6018
y: 2.50, x: 0.8130
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Definimos la función
```

```
def f(y):
```

```
    return 1 - (400 / (9.81 * (3 * y + (y**2) / 2)**3)) * (3 + y)
```

```
# Generamos valores de y de 0.1 en 0.1
```

```
y_values = np.arange(0.5, 2.6, 0.5)
```

```
x_values = f(y_values)
```

```
# Mostramos cada iteración
```

```
for y, x in zip(y_values, x_values):
```

```
    print(f'y: {y:.2f}, x: {x:.4f}')
```

```
# Graficamos con x en el eje horizontal y y en el eje vertical
```



```
plt.plot(x_values, y_values, marker='o')
plt.title('Comportamiento de la función')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid()
plt.show()
```

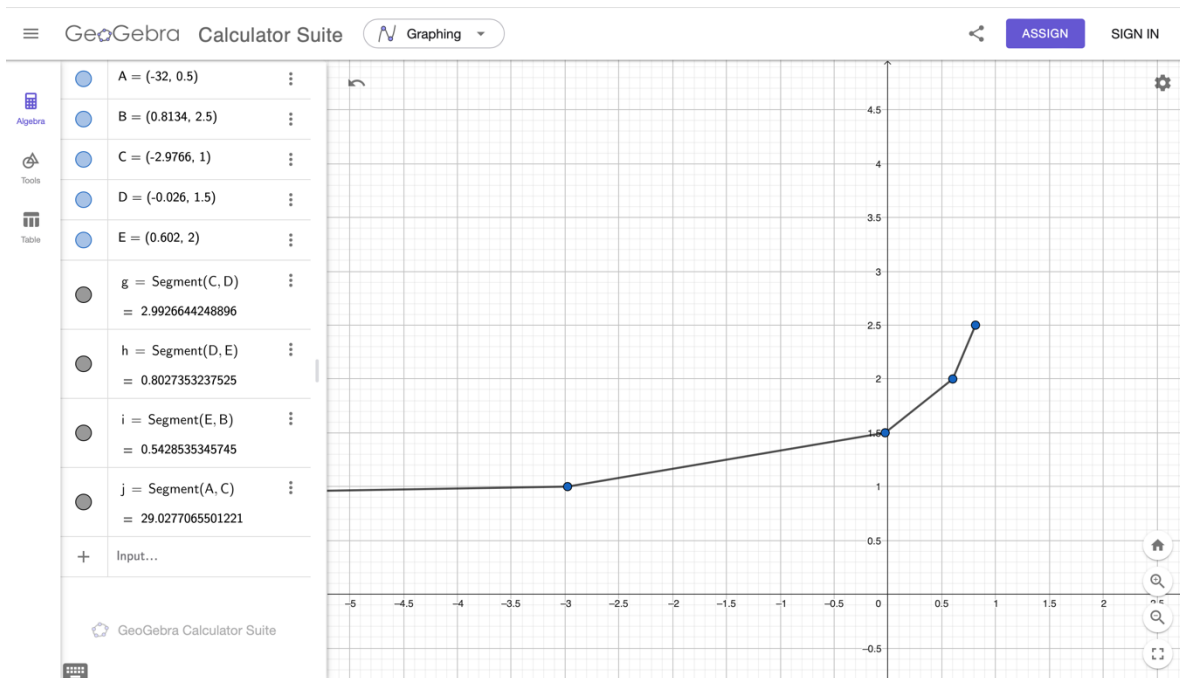
Podemos notar que en valor de 1.5 a 2 hay un cambio de signo, por lo que ahí estará la raíz.

Proseguimos a graficar las coordenadas obtenidas que ya fueron graficadas en Python pero que también se realizarán en GeoGebra para una comprensión más profunda.

Dando las siguientes coordenadas:

x	y
-32.81	.5
-2.8041	1
-.0309	1.5
.6018	2
.8130	2.5





Podemos observar que la raíz se encuentra en 1.5 como lo pudimos comprobar con la evaluación la que demostró que hubo un cambio de signo en 1.5 y 2, confirmando que ahí se encuentra la raíz

## B) Método de Bisección

Para resolverlo por el método de bisección, anotaremos primeramente los pasos que se realizan.

Paso 1. Sacar el punto medio que es igual a  $m = \frac{a+b}{2}$

Paso 2: Evaluar  $f(a)$ ,  $f(b)$  y  $f(m)$

Paso 3: Determinar el nuevo intervalo

Paso 4: Calcular el error  $e = \frac{b-a}{2}$

En este caso desglosamos los valores que tenemos:

$a = .05$

$b = 2.5$

$i = .01$

Primeramente, proseguimos a calcular el punto medio:



$$m = \frac{.5 + 2.5}{2} = 1.5$$

Evaluamos en la función con el valor de a,b y el ultimo valor que acabamos de obtener que es m.

$$f(a) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * .5 + \frac{.5^2}{2})^3} * (3 + .5) = -32.81$$

$$f(b) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2.5 + \frac{2.5^2}{2})^3} * 3 + 2.5 = .8130$$

$$f(m) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.5 + \frac{1.5^2}{2})^3} * (3 + 1.5) = -.0309$$

Para determinar el nuevo intervalo tendremos que echar un vistazo a los signos, si “a” y “m” tienen los mismos signos, entonces “a” se descarta y “m” se toma como nuevo “a”.

Si “b” y “m” tienen el mismo signo, entonces “b” se descarta y “m” se toma como nuevo “b”.

En este caso tenemos que “a” y “m” tienen el mismo signo, por lo tanto “m” se toma como el nuevo “a” quedando de la siguiente manera: 1.5 que es “m” toma el lugar de “a” que era .5 y “b” queda igual 2.5, por lo tanto quedaría (1.5,-2.5) o  $a = 1.5$  y  $b = 2.5$

Ahora tendremos que calcular el error con el nuevo “a”

$$e = \frac{b - a}{2}$$

$$e = \frac{2.5 - 1.5}{2} = .5$$



Nos da un margen de error de 50 por ciento, por lo tanto, tendremos que seguir iterando hasta obtener el .01 o 1% o alcanzar las 10 iteraciones como lo pide el ejercicio.

Sacamos “m”

$$m = \frac{a + b}{2}$$

$$m = \frac{1.5 + 2.5}{2} = 2$$

Evaluamos las ecuaciones:

$$f(a) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.5 + \frac{1.5^2}{2})^3} * (3 + 1.5) = -.0309$$

$$f(b) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2.5 + \frac{2.5^2}{2})^3} * 3 + 2.5 = .8130$$

$$f(m) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2 + \frac{2^2}{2})^3} * (3 + 2) = .6018$$

Evaluamos:

Nos damos cuenta de que “b” y “m” tienen los mismos signos, por lo tanto, desplazamos “b” y ahora “m” será el nuevo “b”

$$a = 1.5 \quad b = 2$$

Evaluamos el error con el nuevo “b”.

$$e = \frac{b - a}{2}$$

$$e = \frac{2 - 1.5}{2} = .25$$



Indicativo que tendremos que seguir hasta alcanzar .01 de tolerancia en el error, alcanzar 10 iteraciones o el valor de  $f(m)$  este muy cerca de 0 y arroja resultados repetidos o varían por muy pocas milésimas, esto significa que hemos encontrado la raíz.

Para no realizar todo el procedimiento tan repetitivamente, usaremos Python para encontrar la raíz, tomando los valores de  $x_l = 0.5$  y  $x_u = 2.5$  y una tolerancia de 1% porque así lo dicta el ejercicio.

```

6     print("No se puede aplicar el método de bisección.")
7     return None
8
9     iter_count = 0
10    print(f"Iteración:{<10}{ 'x_l':<10}{ 'x_u':<10}{ 'c':<10}{ 'f(c)':<10}")
11
12    while iter_count < max_iter:
13        c = (x_l + x_u) / 2
14        error = abs((x_u - x_l) / 2)
15
16        # Imprimir la información de la iteración
17        print(f"iter_count + 1:{<10}{x_l:<10.5f}{x_u:<10.5f}{c:<10.5f}{f(c):<10.5f}")
18
19        if f(c) == 0 or error < tol * abs(c):
20            return c # Encontramos la raíz o cumplimos la tolerancia
21
22        if f(x_l) * f(c) < 0:
23            x_u = c
24        else:
25            x_l = c
26
27        iter_count += 1
28
29    return (x_l + x_u) / 2
30
31 # Intervalo inicial
32 x_l = 0.5
33 x_u = 2.5
34 tolerance = 0.01
35
36 raiz = bisection_method(x_l, x_u, tolerance)
37 print(f"La raíz es aproximadamente: {raiz:.5f}")
38

```

Entrada del programa

Salida del programa

Iteración	x <sub>l</sub>	x <sub>u</sub>	c	f(c)
1	0.50000	2.50000	1.50000	-0.03095
2	1.50000	2.50000	2.00000	0.60181
3	1.50000	2.00000	1.75000	0.37891
4	1.50000	1.75000	1.62500	0.20693
5	1.50000	1.62500	1.56250	0.09796
6	1.50000	1.56250	1.53125	0.03626
7	1.50000	1.53125	1.51562	0.00338
8	1.50000	1.51562	1.50781	-0.01360

La raíz es aproximadamente: 1.50781

[Execution complete with exit code 0]



```

main.py
2 return 1 - (400 / (9.81 * (3 * y + (y**2 / 2)**3)) * (3 + y)
3
4 def bisection_method(xl, xu, tol=0.01, max_iter=10):
5     if f(xl) * f(xu) >= 0:
6         print("No se puede aplicar el método de bisección.")
7         return None
8
9     iter_count = 0
10    print(f"Iteración:{<10}{xl}:{<10}{xu}:{<10}{c}:{<10}{f(c)}:{<10}")
11
12    while iter_count < max_iter:
13        c = (xl + xu) / 2
14        error = abs((xu - xl) / 2)
15
16        # Imprimir la información de la iteración
17        print(f"iter_count + 1:{<10}{xl}:{<10.5f}{xu}:{<10.5f}{c}:{<10.5f}{f(c)}:{<10.5f}")
18
19        if f(c) == 0 or error < tol * abs(c):
20            return c # Encontramos la raíz o cumplimos la tolerancia
21
22        if f(xl) * f(c) < 0:
23            xu = c
24        else:
25            xl = c
26
27        iter_count += 1
28
29    return (xl + xu) / 2
30
31 # Intervalo inicial
32 xl = 0.5
33 xu = 2.5
34 tolerance = 0.01
35
36 raiz = bisection_method(xl, xu, tolerance)
37 print(f"La raíz es aproximadamente: {raiz:.5f}")

```

Iteración	xl	xu	c	f(c)
1	0.50000	2.50000	1.50000	-0.03095
2	1.50000	2.50000	2.00000	0.60181
3	1.50000	2.00000	1.75000	0.37891
4	1.50000	1.75000	1.62500	0.20693
5	1.50000	1.62500	1.56250	0.09796
6	1.50000	1.56250	1.53125	0.03626
7	1.50000	1.53125	1.51562	0.00338
8	1.50000	1.51562	1.50781	-0.01360

La raíz es aproximadamente: 1.50781

...Program finished with exit code 0  
Press ENTER to exit console.

def f(y):

return 1 - (400 / (9.81 \* (3 \* y + (y\*\*2 / 2)\*\*3)) \* (3 + y)

def bisection\_method(xl, xu, tol=0.01, max\_iter=10):

if f(xl) \* f(xu) >= 0:

print("No se puede aplicar el método de bisección.")

return None

iter\_count = 0

print(f"Iteración:{<10}{xl}:{<10}{xu}:{<10}{c}:{<10}{f(c)}:{<10}")

while iter\_count < max\_iter:

c = (xl + xu) / 2

error = abs((xu - xl) / 2)

# Imprimir la información de la iteración

print(f"iter\_count + 1:{<10}{xl}:{<10.5f}{xu}:{<10.5f}{c}:{<10.5f}{f(c)}:{<10.5f}")





```
if f(c) == 0 or error < tol * abs(c):
    return c # Encontramos la raíz o cumplimos la tolerancia
```

```
if f(xl) * f(c) < 0:
    xu = c
else:
    xl = c
```

```
iter_count += 1
```

```
return (xl + xu) / 2
```

```
# Intervalo inicial
```

```
xl = 0.5
```

```
xu = 2.5
```

```
tolerance = 0.01
```

```
raiz = bisection_method(xl, xu, tolerance)
```

```
print(f"La raíz es aproximadamente: {raiz:.5f}")
```

la raíz nos dio el valor de **1.50781**, resultado que ya habíamos calculado con las evaluaciones y usando el metodo gráfico, pero ahora con el metodo de bisección calculamos con una tolerancia de .01

C) Ahora haremos el método de la falsa posición.

Pasos para realizar el método:

1-Evaluamos  $f(a)$  y  $f(b)$

2-Obtener  $x_i$  con la siguiente formula:



$$xi = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

3- Determinar nuevo intervalo

4- Calcular el error

Por lo que proseguimos a realizar la actividad.

Los puntos a y b los escogeremos de 1.5 a 2.0 porque ya sabemos que hay una raíz entre estos dos puntos.

$$a=1.5$$

$$b=2.0$$

Proseguimos a evaluar f(a) y f(b)

$$0 = 1 - \frac{Q^2}{gA_c^3} B$$

$$1 - \frac{20^2}{9.81 * (3y + \frac{y^2}{2})^3} * 3 + y$$

$$f(a) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.5 + \frac{1.5^2}{2})^3} * 3 + 1.5 = -.0215$$

$$f(b) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 2 + \frac{2^2}{2})^3} * (3 + 2) = .6018$$

Con los valores que nos dieron en f(a y b) obtenemos xi

$$xi = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$xi = \frac{1.5 * 6018 - 2 * -.0215}{.6018 - -.0215} = 1.517$$



Ahora tendremos que determinar el nuevo intervalo fijándonos en el signo de las funciones a,b y xi

$$f(xi) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.517 + \frac{1.517^2}{2})^3} * (3 + 1.517) = 0.012$$

Si “a” y “xi” sus signos son iguales, entonces tendremos que sustituir el valor de a por “xi”, el cual tomará el nuevo valor de “a”

Pero si “b” y “xi” tienen el mismo signo, entonces tendremos que sustituir el valor de “b” por “xi”, el cual será el nuevo “b”

Por lo tanto, nos damos cuenta de que el valor que se sustituirá será el de “b”, quedando en su lugar el valor de “xi”.

Ahora tendríamos que calcular el error, pero al ser la primera iteración, no será posible.

Continuamos con la segunda iteración:

Tomamos los nuevos valores:

$$a = 1.5$$

$$b = 1.517$$

1- Evaluamos las funciones de a y b:

$$f(a) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.5 + \frac{1.5^2}{2})^3} * 3 + 1.5 = -.0215$$

$$f(b) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * 1.517 + \frac{1.517^2}{2})^3} * 3 + 1.517 = 0.012$$

2- calculamos xi



$$x_i = \frac{1.5 * .012 - 1.517 * -.0215}{0.012 - -.0215} = 1.5110$$

3- determinamos el nuevo valor evaluando  $f(x_i)$

$$f(x_i) = 1 - \frac{400}{9.81 * (3 * -1.5110 + \frac{1.5110^2}{2})^3} * 3 + 1.5110 = 5.634.$$

3- Determinamos el nuevo intervalo:

Notamos que el valor de  $a$  y  $x_i$  son iguales por lo tanto nos quedamos con el valor de  $-1.5110$

Por lo tanto, los nuevos valores quedan:

$a=1.5110$  y  $b= 1.517$

4-Calculamos el error

El error se calcula restando el valor actual de la iteración menos el valor anterior

$$|x_{i2} - x_{i1}|$$

$$|1.5110 - 1.517| = -.006$$

Esto quiere decir que tenemos una raíz aproximada de **1.5110** con un margen de error de .6% es decir, el valor nos salió ligeramente diferente por unas milésimas al que obtuvimos por el método de bisección de 1.50781, debido a que por este método lo hicimos con más exactitud que por bisección con un margen de error aún menor, ya que si hubiéramos continuado con un margen de error menor en bisección nos hubiera dado un valor muy similar, lo que si pudimos notar es que se obtiene la raíz mas rápidamente que por el de bisección.

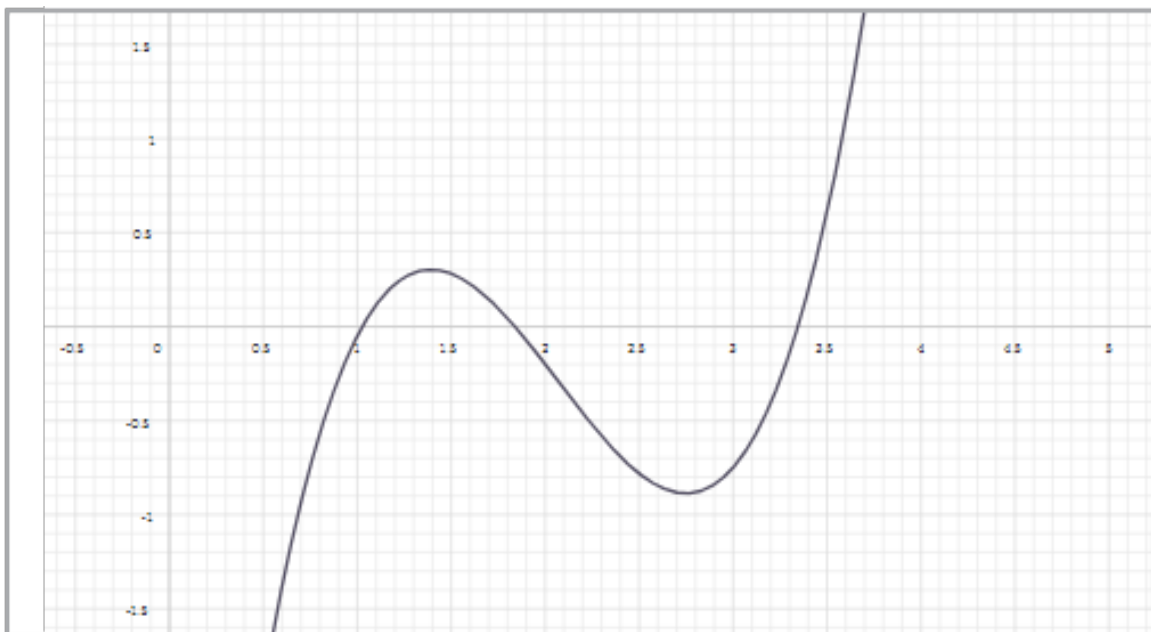
### Método newton- Raphson (pág. 169 realiza el ejercicio 6.26)

6.9 Dertermine la raíz real más grande de  $f(x) = 0.95x^3 - 5.9x^2 + 10.9x - 6$ :



- a) En forma gráfica.
- b) Con el uso del método de Newton-Raphson (tres iteraciones,  $x_{i-1} = 3.5$ )
- c) Con el método de la secante (tres iteraciones,  $x_{i-1} = 2.5$  y  $x_{i-1} = 3.5$ )
- d) Por medio del método de la secante modificado (tres iteraciones,  $x_{i-1} = 3.5, \delta = 0.01$ ).

### Grafica:



### Método newton- Raphson

$$f(x)=0.95x^3-5.9x^2+10.9x-6$$

$$f'(x)=2.85x^2-11.8x+10.9$$

$$f(3,5)=0.95(3,5)^3-5.9(3,5)^2+10.9(3,5)-6$$

$$\mathbf{0.60325}$$

$$f'(3,5)=2.85(3,5)^2-11.8(3,5)+10.9$$

$$\mathbf{4.5125}$$



$$\left( \frac{0.60325}{4.5125} \right) \longrightarrow X_1 = 3.5 - X_1 = 3.3656$$

$$f(3.3656) = 0.95(3.3656)^3 - 5.9(3.3656)^2 + 10.9(3.3656) - 6$$

$$= 0.071071$$

$$f(3.3656) = 2.85(3.3656)^2 - 11.8(3.3656) + 10.9$$

$$= 3.4687$$

$$\left( \frac{0.071071}{3.4687} \right) \longrightarrow X_2 = 3.3656 - X_2 = 3.3451$$

$$f(3.3451) = 0.95(3.3451)^3 - 5.9(3.3451)^2 + 10.9(3.3451) - 6$$

$$= 0.0015$$

$$f(3.3451) = 2.85(3.3451)^2 - 11.8(3.3451) + 10.9$$

$$= 3.3184$$

$$\left( \frac{0.0015}{3.3184} \right) \longrightarrow X_3 = 3.3451 - X_3 = 3.3446$$

### Método de la secante

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_1)}{f(x_i) - f(x_1)}$$

$$X_1 = 2.5 \quad f(x_1) = -0.7812$$

$$X_0 = 3.5 \quad f(x_0) = 0.6062$$

$$X_1 = 3.5 - \frac{(3.5 - 2.5)(0.6062)}{0.6062 - (-0.7812)} = 3.0630$$

$$X_2 = 3.0630 - \left( \frac{-0.6667(2.5 - 3.0630)}{-0.7812 + 0.6667} \right) = 6.3407$$



$$X_3 = 6.3407 - \left( \frac{-68.0855(2.5 - 6.3407)}{-0.7812 + 0.6667} \right) = 6.2849$$

$$E_A = \frac{6.2849 - 6.3407}{6.2899} = 0.88\%$$

$f(x)$  en el cuarto cuadrante, asegúrese de tomar el valor negativo de la raíz cuadrada. ¿Por qué diverge la solución?

**6.26** Suponga el lector que está diseñando un tanque esférico (véase la figura P6.26) de almacenamiento de agua para un poblado pequeño de un país en desarrollo. El volumen del líquido que puede contener se calcula con

$$V = \pi h^2 \frac{[3R - h]}{3}$$

donde  $V$  = volumen [ $\text{pie}^3$ ],  $h$  = profundidad del agua en el tanque [pies], y  $R$  = radio del tanque [pies].

Si  $R = 3$  m, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga  $30 \text{ m}^3$ ? Haga tres iteraciones del método de Newton-Raphson para determinar la respuesta. Encuentre el error relativo aproximado después de cada iteración. Observe que el valor inicial de  $R$  convergerá siempre.

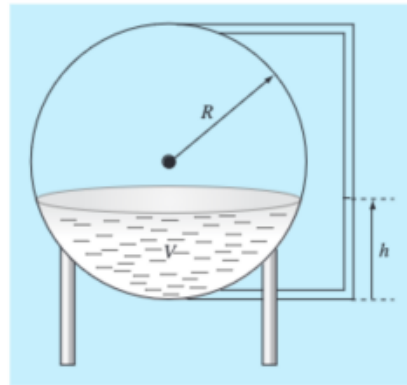


Figura P6.26

Para resolver este problema utilizando el método de Newton-Raphson, primero necesitamos definir la función ( $f(h)$ ) que queremos igualar a cero. Dado que el volumen ( $V$ ) es  $30 \text{ m}^3$ , podemos escribir:

$$\left[ f(h) = \pi h^2 \left( \frac{3R - h}{3} \right) - 30 \right]$$

Con ( $R = 3$ ) m, la función se convierte en:

$$\left[ f(h) = \pi h^2 \left( \frac{9-h}{3} \right) - 30 \right] \left[ f(h) = \pi h^2 \left( 3 - \frac{h}{3} \right) - 30 \right] \quad \left[ f(h) = \pi h^2 \left( 3 - \frac{h}{3} \right) - 30 \right]$$

$$\left[ f(h) = \pi h^2 \left( 3 - \frac{h}{3} \right) - 30 \right]$$

La derivada de ( $f(h)$ ) es:

$$\left[ f'(h) = \frac{d}{dh} \left( \pi h^2 \left( 3 - \frac{h}{3} \right) - 30 \right) \right] \left[ f'(h) = \pi(6h - h^2) \right]$$



Ahora, aplicamos el método de Newton-Raphson:

$$\left[ h_{n+1} = h_n - \frac{f(h_n)}{f'(h_n)} \right]$$

Iteración 1:

Supongamos un valor inicial (  $h_0 = 1.5$  ) m.

$$\begin{aligned} \left[ f(h_0) = \pi(1.5)^2 \left( 3 - \frac{1.5}{3} \right) - 30 \right] & \left[ f(h_0) = \pi(2.25)(2.5) - 30 \right] \left[ f(h_0) \right. \\ & \left. = \pi(5.625) - 30 \right] \left[ f(h_0) \approx 17.67 - 30 = -12.33 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f'(h_0) = \pi(6(1.5) - (1.5)^2)] & [f'(h_0) = \pi(9 - 2.25)] & [f'(h_0) = \pi(6.75) \approx 21.21] \\ \left[ h_1 = 1.5 - \frac{-12.33}{21.21} \approx 2.08 \right] \end{aligned}$$

Error relativo aproximado:

$$\left[ \text{Error} = \left| \frac{2.08 - 1.5}{2.08} \right| \times 100 \approx 27.88\% \right]$$

Iteración 2:

$$\begin{aligned} \left[ f(h_1) = \pi(2.08)^2 \left( 3 - \frac{2.08}{3} \right) - 30 \right] & \left[ f(h_1) \approx \pi(4.33)(2.31) - 30 \right] \left[ f(h_1) \right. \\ & \approx 31.42 - 30 = 1.42] & [f'(h_1) = \pi(6(2.08) - (2.08)^2)] & [f'(h_1) \\ & \approx \pi(12.48 - 4.33)] & [f'(h_1) \approx \pi(8.15) \approx 25.61] \\ \left[ h_2 = 2.08 - \frac{1.42}{25.61} \approx 2.02 \right] \end{aligned}$$

Error relativo aproximado:

$$\left[ \text{Error} = \left| \frac{2.02 - 2.08}{2.02} \right| \times 100 \approx 2.97\% \right]$$

Iteración 3:

$$\begin{aligned} \left[ f(h_2) = \pi(2.02)^2 \left( 3 - \frac{2.02}{3} \right) - 30 \right] & \left[ f(h_2) \approx \pi(4.08)(2.32) - 30 \right] \left[ f(h_2) \right. \\ & \approx 29.82 - 30 = -0.18] & [f'(h_2) = \pi(6(2.02) - (2.02)^2)] & [f'(h_2) \\ & \approx \pi(12.12 - 4.08)] & [f'(h_2) \approx \pi(8.04) \approx 25.26] \end{aligned}$$





$$\left[ h_3 = 2.02 - \frac{-0.18}{25.26} \approx 2.03 \right]$$

Error relativo aproximado:

$$\left[ \text{Error} = \left| \frac{2.03 - 2.02}{2.03} \right| \times 100 \approx 0.49\% \right]$$

Después de tres iteraciones, la profundidad del agua en el tanque es aproximadamente 2.03 m.

**Establece una breve descripción en la que hagas un contraste entre los métodos que programaste, destacando los problemas a los que te enfrentaste y cómo lo solucionaste.**

En esta tarea pudimos percibir con claridad la relevancia de los errores como una guía para evaluar qué tan próximas están las iteraciones generadas de la solución al aplicar cada método. Además, adquirimos conocimientos sobre la implementación de diversos enfoques para resolver ecuaciones no lineales, así como cuándo es apropiado emplear métodos abiertos o cerrados, tomando en cuenta las ventajas y desventajas de cada uno.

El método de bisección es seguro y garantiza la convergencia al dividir intervalos donde la función cambia de signo, aunque puede ser más lento.

Ambos métodos son ampliamente aplicables en diversas disciplinas para resolver ecuaciones no lineales.

De igual manera, comprendimos la importancia del uso de lenguajes de programación para la resolución de problemas matemáticos extensos, tediosos o complejos, y las ventajas que estos ofrecen en comparación con software menos especializado. Durante el desarrollo de los casos prácticos en este proyecto integrador, también pudimos observar cómo aplicar los métodos abiertos y cerrados en la resolución de problemas de ingeniería, obteniendo las ecuaciones necesarias para la aplicación de dichos métodos. Además, notamos que algunos métodos



resultan más eficientes o breves que otros, dependiendo del contexto, lo cual se refleja en el número de iteraciones generadas según el método empleado.

### **Referencias.**

- Estadística, s/f, Métodos Numéricos 3: Raíces de ecuaciones: Métodos de Newton-Raphson y de la secante, página web, <https://estadistica-dma.ulpgc.es/FCC/05-3-Raices-de-Ecuaciones-2.html#metodo-de-newton-raphson>
- Chapra, S. & Canale, R. (2007). Métodos numéricos para ingenieros [Versión electrónica]. Recuperado de <http://artemisa.unicauca.edu.co/~cardila/Chapra.pdf>
- Chapra, S. y Canale, R. (2007). Métodos numéricos para ingenieros. Recuperado el 21 de septiembre del 2024, de <http://artemisa.unicauca.edu.co/~cardila/Chapra.pdf>
- Serrano, J. (s.f.). Métodos Numéricos: Bisección. Recuperado el 21 de septiembre del 2024, de <https://www.geogebra.org/m/mNY3NPuU>

