

Asignacion 2

Oscar Isaac Balcarcel-Paula Uribe
Universidad industrial de Santander

26 de octubre de 2024

Índice

1. Ecuaciones	1
1.1. Ecuacion de movimiento para Coulomb	1
1.2. Ecuacion de movimiento para Yukawa	2
1.3. Angulo de dispersion	2
2. Alcance de los potenciales	3
3. Efectividad del apantallamiento	6
4. Seccion transversal diferencial	7

1. Ecuaciones

1.1. Ecuacion de movimiento para Coulomb

Partiendo del lagrangiano para el problema de los dos cuerpos:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r).$$

Y aplicando el potencial de Coulomb

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{k}{r}$$

Ahora bien por la ecuacion de euler lagrange respecto a la coordenada θ tenemos que

$$l = mr^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$

Por otro lado para la coordenada en r la ecuacion de euler lagrange nos da:

$$m\ddot{r} = \frac{k}{r^2} + mr\dot{\theta}^2$$

Remplazando la constante obtenida en la ecuacion de euler de la coordenada θ nos queda la siguiente ecuacion parametrica para r

$$m\ddot{r} = \frac{k}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3}$$

1.2. Ecuacion de movimiento para Yukawa

Realizando el mismo proceso que con el potencial de Coulomb pero cambiando el potencial por

$$V = \frac{ke^{-\alpha r}}{r}$$

se obtiene la siguiente ecuacion parametrica para r :

$$m\ddot{r} = \frac{ke^{-\alpha r}}{r^2}(1 + \alpha r) + \frac{l^2}{mr^3}$$

1.3. Angulo de dispersion

Para el calculo del angulo de dispersion debemos recurrir a la geometria del sistema que queremos simular:

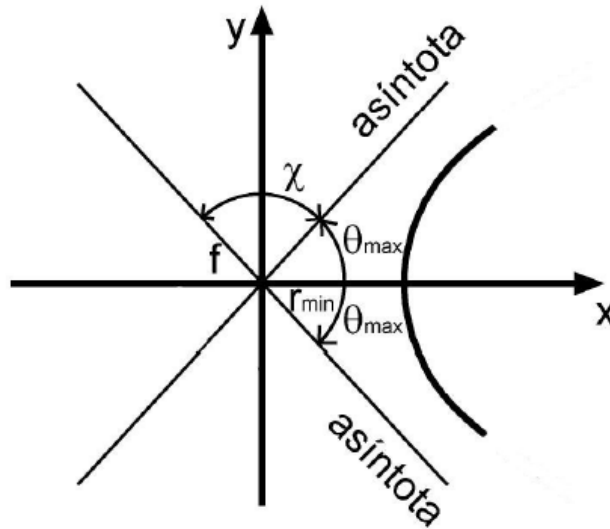


Figura 1: Trayectoria hiperbolica de una partícula desviada por un potencial central

Como se puede apreciar en el dibujo, el ángulo de dispersión, el cual es el ángulo entre la velocidad inicial con la que incide la partícula y la velocidad final con la que sale al otro lado después de ser afectada por el potencial, está dado por:

$$\chi = \pi - 2\theta_{max}$$

Donde θ_{max} esta dado por:

$$\theta_{max} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - b^2 u^2}}$$

y $u_m = \frac{1}{r_{min}}$

Para hallar este valor de r_{min} tomaremos la menor de las raíces de la siguiente ecuacion, la cual arroja los valores maximos y minimos de r entre los cuales ocurre el movimiento:

$$Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2m} = 0$$

Sin embargo esto es solo necesario para el potencial de Yukawa ya que para el caso de Coulomb repulsivo existe una formula ya especificada para calcular este valor de r_{min} dada por:

$$r_{min} = \frac{q}{e - 1}$$

Con $q = \frac{l^2}{mk}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$ y $l^2 = 2Emb^2$

2. Alcance de los potenciales

Existen varias maneras de discutir la diferencia entre los alcances de los potenciales. En este informe, trabajaremos con dos de ellas.

La primera, que no tiene nada que ver con el experimento de Rutherford en sí, es simplemente analizar las gráficas del potencial de Yukawa y del potencial de Coulomb. Para esta comparacion utilizaremos el potencial entre una partícula α y un átomo de oro, por lo cual la constante k de los potenciales esta dada por

$$k = \frac{2 * 79 * e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

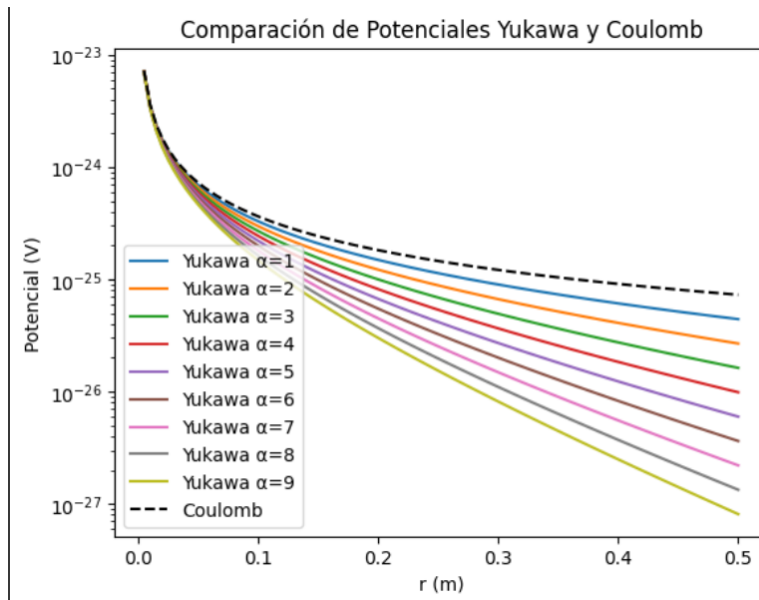


Figura 2: Comparacion de los diferentes potenciales

Como se puede apreciar, a medida que aumenta el valor de r , los potenciales de Yukawa pierden intensidad. Además, cuanto mayor sea el valor de α , mayor será esta pérdida. Por lo tanto, el rango efectivo de interacción del potencial de Yukawa es muy pequeño, lo que lo convierte en un potencial de corto alcance. Se puede observar que a mayor parámetro de apantallamiento α , menor es el rango de interacción.

Una segunda forma de observar el corto alcance del potencial de Yukawa, y que sí está relacionada con el experimento de Rutherford, es comparar el ángulo de dispersión a medida que se varía el parámetro de impacto b .

A través del uso de Python y de la ecuación antes mencionada, podemos calcular el ángulo de dispersión para un rango de valores del parámetro de impacto, manteniendo una energía constante. Para la gráfica a continuación, se considera el valor de $k = 1$, $m = 1$, $E = 1$.

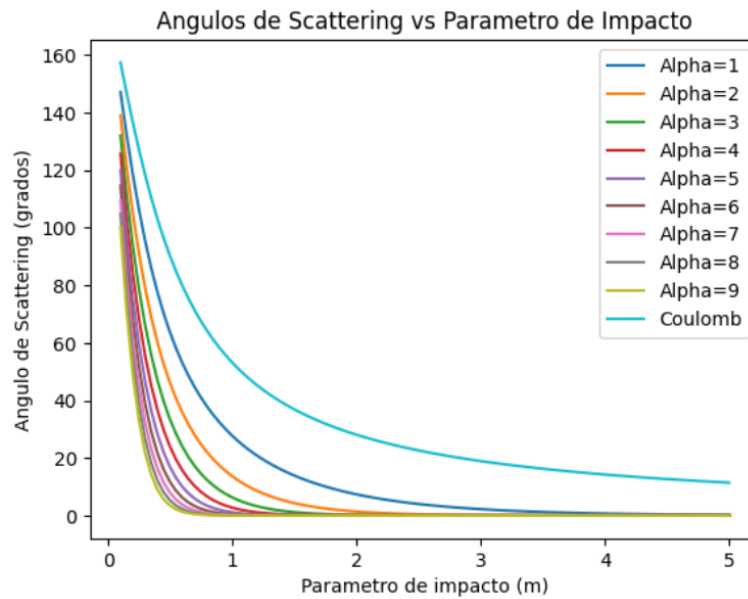


Figura 3: Ángulo de scattering para diferentes valores del parametro de impacto, con la energía constante

Siguiendo con la idea de que el potencial de Yukawa tiene un alcance más corto, la gráfica muestra claramente que al aumentar el parámetro de impacto, el ángulo de dispersión del potencial de Yukawa disminuye mucho más rápidamente que el del potencial de Coulomb. Esto es coherente con la naturaleza de corto alcance del potencial de Yukawa: al aumentar la distancia de la partícula incidente al núcleo (parámetro de impacto), la influencia del potencial de Yukawa se reduce significativamente, lo que resulta en un ángulo de dispersión menor.

Por el contrario, el potencial de Coulomb, al ser de largo alcance, sigue ejerciendo una influencia notable sobre la trayectoria de la partícula incluso a distancias relativamente grandes. Esto se evidencia en la gráfica, donde el ángulo de dispersión para el potencial de Coulomb se mantiene significativo, incluso para valores elevados del parámetro de impacto.

Finalmente, como era de esperar, al aumentar el valor de α (parámetro de apantallamiento) en el potencial de Yukawa, la disminución del ángulo de dispersión se vuelve aún más pronunciada. Esto reafirma la relación inversa entre el valor de α y el alcance efectivo de la interacción, es decir, a mayor α , menor alcance.

Con todo esto dicho, podríamos establecer un valor para el rango efectivo de interacción, según la gráfica, entre 0 y 0.5 del parámetro de impacto, ya que es en estos intervalos donde la partícula alcanza a ser desviada un ángulo significativo y, por ende, siente la presencia del potencial.

3. Efectividad del apantallamiento

En esta sección se busca analizar qué partículas, en función de su energía, se ven más o menos afectadas por el apantallamiento. Para ello, utilizaremos nuevamente la herramienta Python que nos permitirá calcular el ángulo de dispersión para diferentes valores de energía. Para este caso también se utilizaron los valores de $k = 1$, $m = 1$, sin embargo, como lo que se busca es variar la energía se dejó un parámetro de impacto fijo de $b = 0,5m$

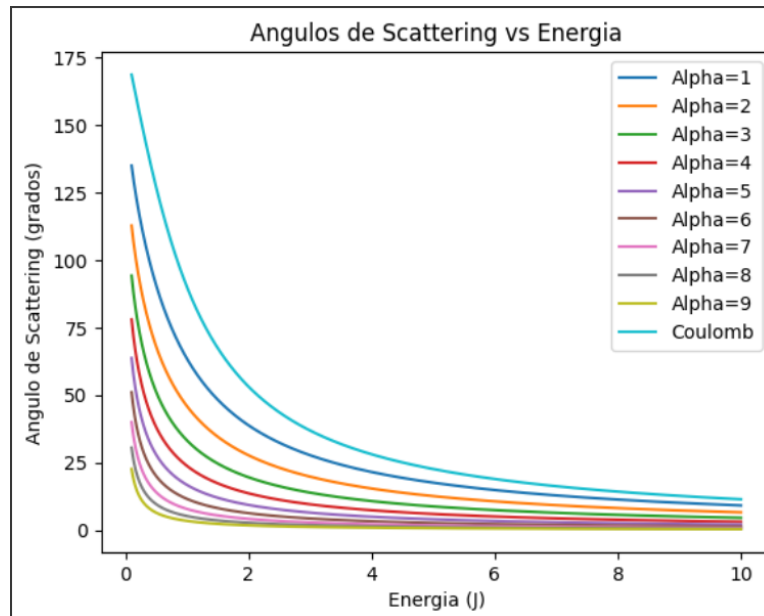


Figura 4: Angulo de scattering para diferentes valores de la energía con un parámetro de impacto constante

Al analizar los resultados de la gráfica, podemos extraer dos conclusiones sobre la efectividad del apantallamiento sobre la partícula proyectil:

- A medida que aumenta la energía de la partícula, el efecto del potencial apantallado disminuye. Esto se debe a que una partícula con mayor energía posee una mayor velocidad, lo que le permite atravesar la región donde actúa el potencial en un tiempo más corto. Al pasar más rápidamente, la partícula experimenta una fuerza durante menos tiempo, por lo que la desviación de su trayectoria es menor. En otras palabras, la partícula es menos susceptible a ser "frenada" o "desviada" por el potencial apantallado debido a su alta velocidad. A medida que aumenta la energía de la partícula, el efecto del potencial apantallado disminuye. Esto se debe a que una partícula con mayor energía posee una mayor velocidad, lo que le permite atravesar la región donde actúa el potencial en un tiempo más corto. Al pasar más rápidamente, la partícula experimenta una fuerza durante menos tiempo, por lo que la desviación de su trayectoria es

menor. En otras palabras, la partícula es menos susceptible a ser "frenada."o "desviada"por el potencial apantallado debido a su alta velocidad.

- Al aumentar el valor de α , el potencial de Yukawa decae más rápidamente con la distancia. Esto significa que el alcance efectivo del potencial se reduce. En consecuencia, incluso para partículas con baja energía, el potencial apantallado tiene una influencia muy limitada en su trayectoria, ya que la región donde el potencial es significativo es muy pequeña. Por lo tanto, el ángulo de dispersión de la partícula será muy bajo.

4. Seccion transversal diferencial

En esta sección del informe, buscamos comparar las diferentes secciones transversales para distintos valores de los parámetros de apantallamiento y energía, con el fin de analizar la probabilidad de que las partículas se desvíen en determinados ángulos al interactuar con los diferentes potenciales. Para ello, utilizamos Python para calcular numéricamente la sección transversal, ya que en el caso del potencial de Yukawa no existe una solución analítica.

- Secciones transversales diferenciales para una energia de $E = 1$, $m = 1$, $k = 1$ y para distintos parametros de apantallamiento

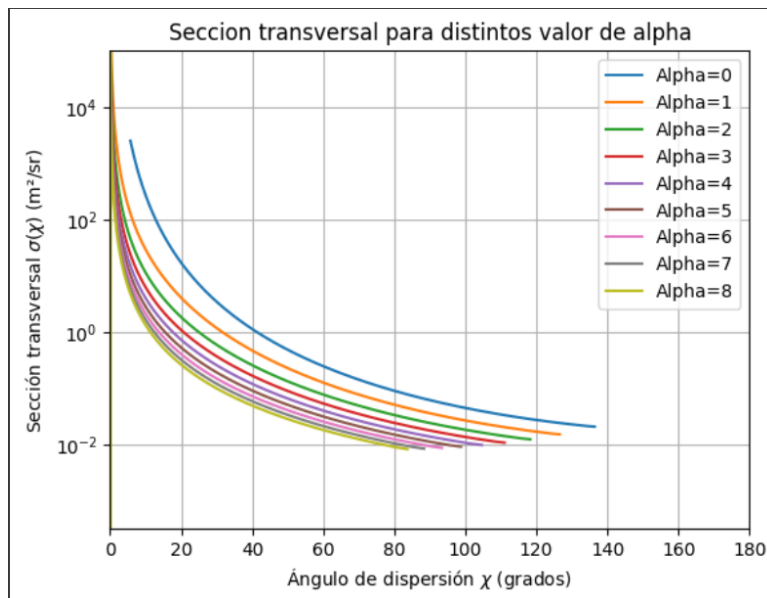


Figura 5: Secciones transversales para distintos parametros de α y una energia fija

En la gráfica, observamos dos comportamientos principales al aumentar el valor de α : la sección transversal disminuye en magnitud y se acorta. Estos fenómenos pueden explicarse de la siguiente manera:

Menores valores de la sección transversal: A medida que α aumenta, la intensidad de la interacción disminuye debido a que el potencial de Yukawa decae más rápidamente con la distancia. Esto implica que la probabilidad de que una partícula sea desviada a un ángulo grande es menor debido a la reducción en la magnitud de la interacción y por ende esto hace que el efecto del potencial en el desvío de la trayectoria no sea tan alto. En consecuencia, la sección transversal a medida que el α aumenta toma valores más bajos para ángulos más grandes.

Acortamiento de la sección transversal: La disminución de la sección transversal también se manifiesta en su forma: se vuelve más estrecha. Esto ocurre porque, al disminuir la probabilidad de desviaciones a grandes ángulos, la sección transversal se concentra en ángulos más pequeños. En otras palabras, la mayoría de las interacciones resultan en desviaciones pequeñas, y las desviaciones a grandes ángulos se vuelven cada vez menos probables y numericamente la probabilidad de estas son tan bajas que python directamente hace como si en estos puntos no existiera sección transversal.

- Secciones transversales diferenciales para $\alpha = 1$, $k = 1$, $m = 1$ y para distintos valores de la energía

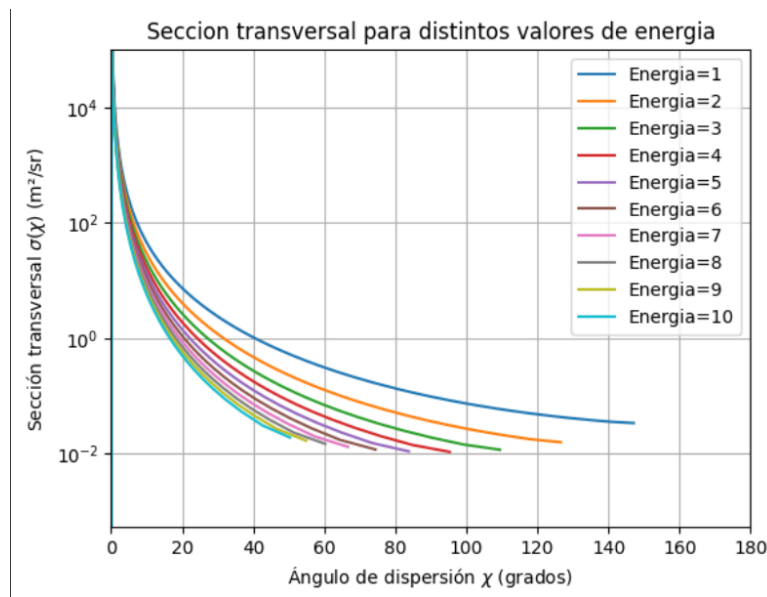


Figura 6: Secciones transversales para distintas energías y α fijo

Una vez más, al aumentar la energía, la gráfica de la sección transversal muestra valores más pequeños y se acorta. Esto se debe a que, al igual que al variar el parámetro α , al aumentar la energía disminuye la probabilidad de que ocurran grandes ángulos de desviación. Esto evidencia que las partículas de alta energía se ven menos afectadas por el potencial

apantallado, lo que hace que los ángulos de desviación más probables sean los más pequeños, ya que sus trayectorias se alteran en menor medida.