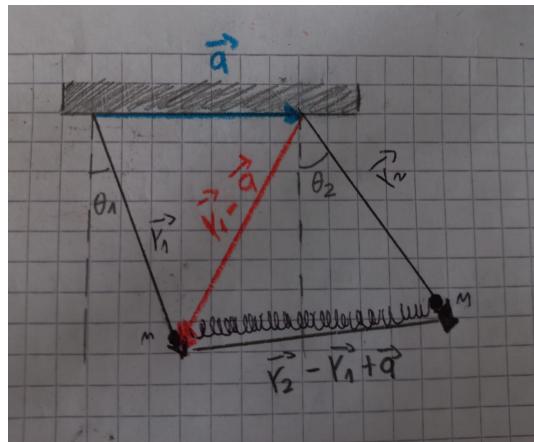


Primera Asignación  
Fecha de Entrega: 29 Agosto 2024  
Oscar Isaac Balcarcel - Paula Andrea Uribe

## 1. Primer punto

En este sistema asumimos en un primer momento cuatro coordenadas generalizadas que serían  $r_1$ ,  $\theta_1$ ,  $r_2$  y  $\theta_2$ . Estas son medidas desde cada uno de los pivotes de los dos péndulos. Ahora bien, fíjese que, como ambas varillas de los péndulos tienen longitud constante, existen dos ligaduras que nos dejarán con solamente dos grados de libertad. Estas ligaduras son  $r_1 = l$  y  $r_2 = l$ , de tal manera que los dos grados de libertad del sistema son  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Para hallar las ecuaciones de movimiento,

se busca encontrar el lagrangiano en un primer momento. Para ello, se debe revisar qué tipos de energías tiene el sistema. En este caso, se tiene energía cinética, energía potencial elástica y energía potencial gravitatoria. Para hallar la energía potencial elástica, es necesario saber cuánto se deforma el resorte en términos de las coordenadas generalizadas. Para esto, se utilizará el siguiente diagrama, que permite hallar esta cantidad en términos de cantidades vectoriales conocidas.



Se define un vector  $\vec{a} = a\hat{i}$ , donde  $a$  es la longitud inicial del resorte. Ahora bien, también se definen los vectores  $\vec{r}_1 = l \sin(\theta_1)\hat{i} - l \cos(\theta_1)\hat{j}$  y  $\vec{r}_2 = l \sin(\theta_2)\hat{i} - l \cos(\theta_2)\hat{j}$ .

Fíjese que, de la imagen, se puede ver que el vector que une las dos masas está dado por  $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{a}$ . Sobre este vector estará el resorte, de tal manera que la longitud de estiramiento del resorte estará dada por  $|\vec{d}| - a$ .

$$\vec{d} = (l(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + a)\hat{i} + (l(-\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1))\hat{j}$$

$$|d| - a = \sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))} - a$$

Con este análisis hecho, ya se puede obtener el lagrangiano del sistema.

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \left( \frac{1}{2}k(|d| - a)^2 - mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \right)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}k(2l^2 + a^2 - 2l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)))$$

$$-2a\sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))} + a^2)$$

El Lagrangiano simplemente se introduce en las ecuaciones de Euler-Lagrange de tal manera que arroja las siguientes ecuaciones de movimiento:

Para  $\theta_1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + alk\cos(\theta_1) - mglsen(\theta_1) + \frac{ka(l^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - al\cos(\theta_1))}{\sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))}}$$

Para  $\theta_2$

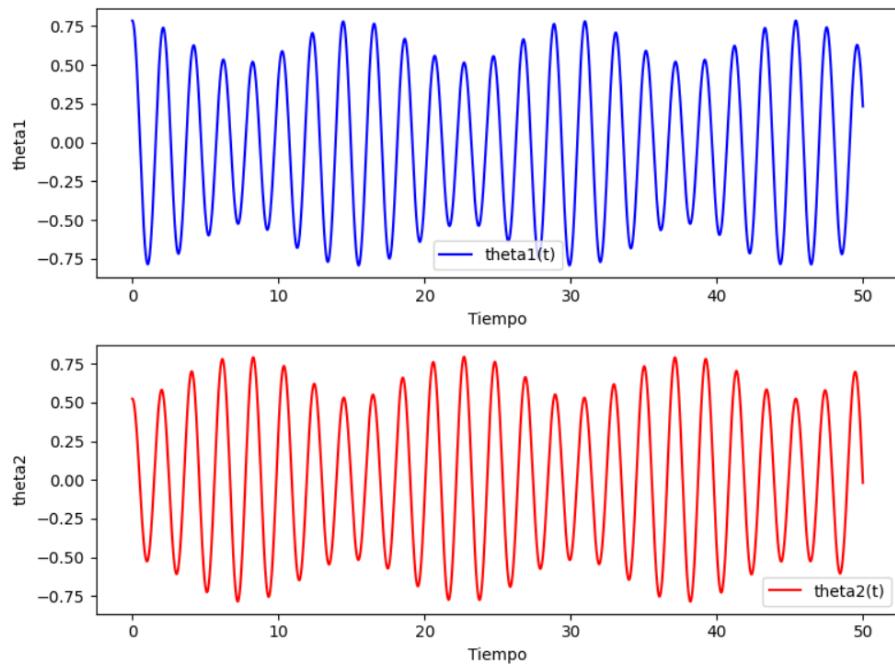
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 = kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - alk\cos(\theta_2) - mglsen(\theta_2) + \frac{ka(-l^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + al\cos(\theta_2))}{\sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))}}$$

## 2. Segundo punto

Antes de integrar numéricamente, se debe identificar que la solución de este sistema dependerá de diferentes parámetros, los cuales son: la masa  $m$ , la longitud de las barras a las cuales están conectados los péndulos  $l$ , la constante del resorte  $k$ , la longitud natural del resorte  $a$  y las condiciones iniciales  $\theta_1(0)$ ,  $\theta_2(0)$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ .

Una vez identificados estos parámetros, se utilizó un código en Python para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales. Para los parámetros  $a = 1, m, l = 1, m, k = 1\frac{N}{m}, m = 1kg$   $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}, \theta_2(0) = \frac{\pi}{6}, \dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$  se encontró la solución que se muestra a continuación



### 3. Tercer punto

#### 3.1. Resorte conectado a mitad de las barras

Para esta modificación del sistema, el Lagrangiano quedaría de la siguiente manera:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}l^2 + a^2 - \frac{1}{2}l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))\right)$$

$$-2a\sqrt{\frac{1}{2}l^2 + a^2 - \frac{1}{2}l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + a^2}$$

Y sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange:

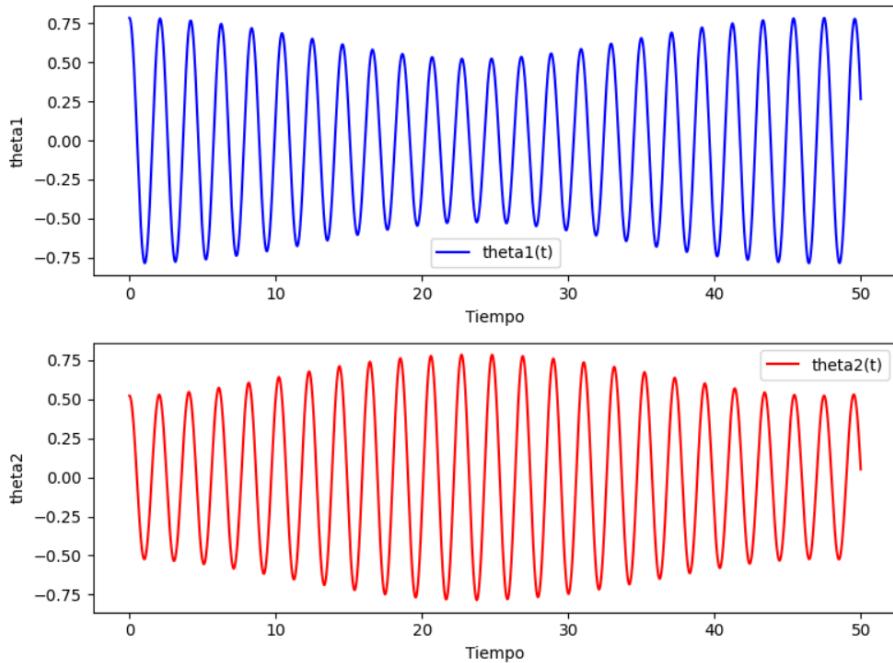
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -\frac{1}{4}kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}akl\cos(\theta_1) - mglsen(\theta_1) + \frac{ka(\frac{1}{2}l^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - al\cos(\theta_1))}{2\sqrt{\frac{1}{2}l^2 + a^2 - \frac{1}{2}l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + a^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{4}kl^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}akl\cos(\theta_2) - mgl\sin(\theta_2) + \frac{ka(-\frac{1}{2}l^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + al\cos(\theta_2))}{2\sqrt{\frac{1}{2}l^2 + a^2 - \frac{1}{2}l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))}}$$

A través del mismo código utilizado anteriormente, sin embargo, considerando el cambio en el lagrangiano y en las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene el siguiente resultado para las mismas condiciones iniciales anteriormente mencionadas ( $a = 1, m, l = 1, m, k = 1\frac{N}{m}, m = 1kg, \theta_1(0) = \frac{\pi}{4}, \theta_2(0) = \frac{\pi}{6}, \dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ ).



Como se puede apreciar, a pesar de no haber ningún cambio en la fase ni en la amplitud de la solución, sí se puede notar que existe un cambio considerable en la longitud de onda respecto a la versión del sistema en la que el resorte está atado a las masas y no al centro de las varillas.

### 3.2. Distintas masas

Para el caso de esta modificación del sistema, se tiene el siguiente lagrangiano y sus respectivas ecuaciones de movimiento:

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_2^2 + m_1gl\cos(\theta_1) + m_2gl\cos(\theta_2) - \frac{1}{2}k(2l^2 + a^2 - 2l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))) \\ - 2a\sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))} + a^2$$

Para  $\theta_1$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 = -kl^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + ak l \cos(\theta_1) - m_1 g l \sin(\theta_1) + \frac{ka(l^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - al \cos(\theta_1))}{\sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))}}$$

Para  $\theta_2$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 = kl^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - ak l \cos(\theta_2) - m_2 g l \sin(\theta_2) + \frac{ka(-l^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + al \cos(\theta_2))}{\sqrt{2l^2 + a^2 - 2l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))}}$$

Nuevamente, a través del uso de las herramientas computacionales, se puede solucionar numéricamente el sistema de ecuaciones. En este caso, se mostrarán soluciones para cuando se varía  $m_1$ , dejando  $m_2$  fija; para cuando se varía  $m_2$ , dejando  $m_1$  fija; y para cuando se varían ambas masas a la vez.

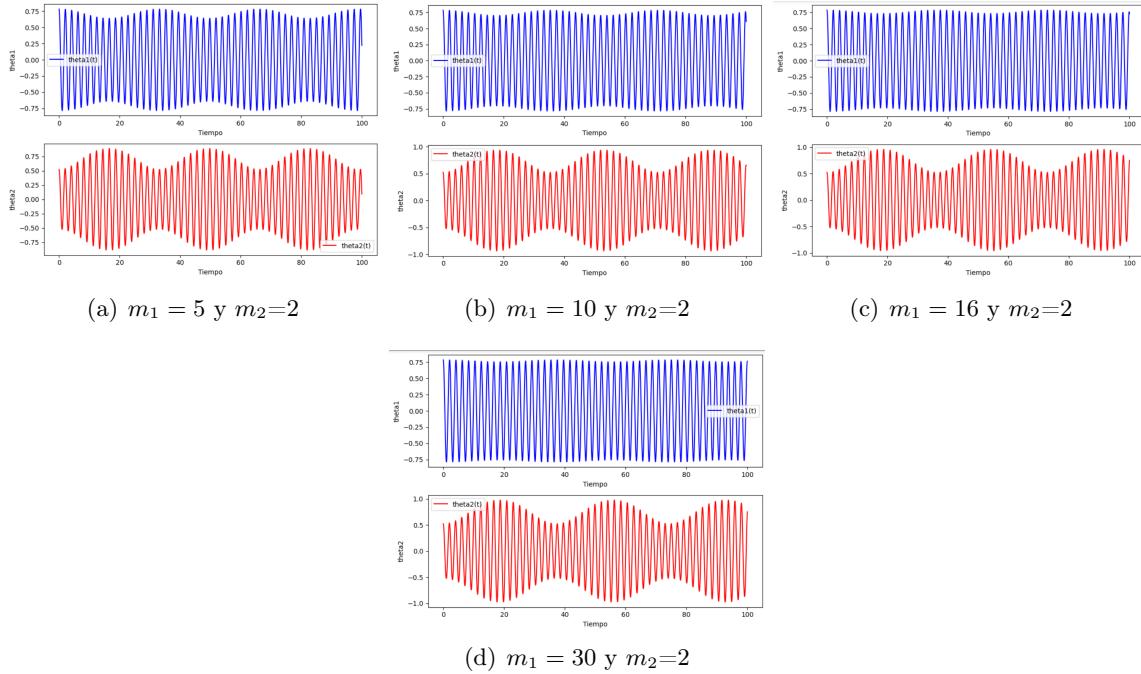


Figura 1: Soluciones para cambios de  $m_1$  con  $m_2$  constante

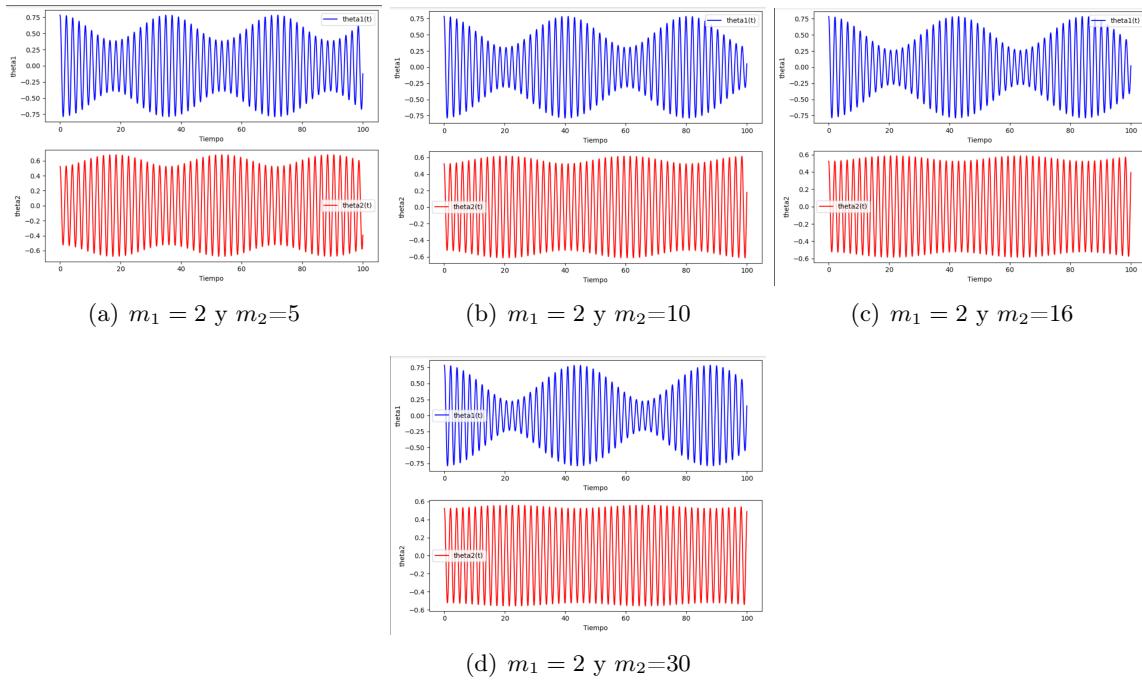
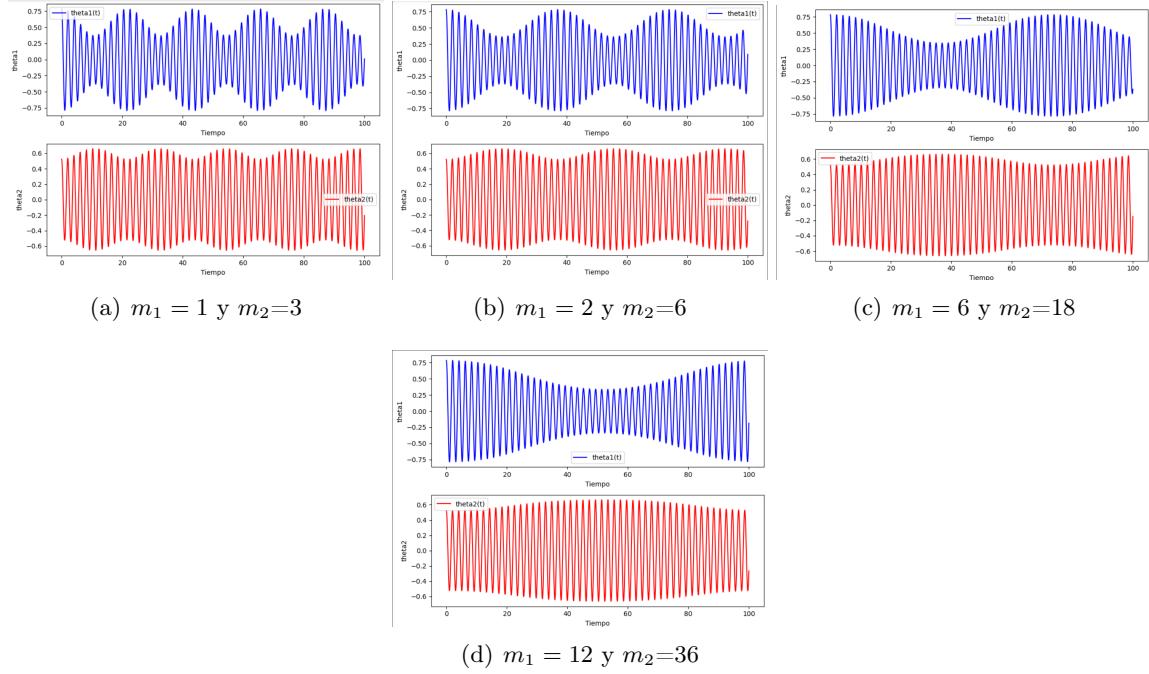


Figura 2: Soluciones para cambios de  $m_2$  con  $m_1$  constante

El fenómeno que se muestra en estas dos situaciones, aunque es más visible para los cambios en  $m_2$ , es que al aumentar alguna de las masas, esto conlleva un aumento en la longitud de onda y en el período de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Esto se puede observar claramente al ver cómo, al aumentar la masa, la onda se 'estira' en el eje horizontal.


 Figura 3: Soluciones para cambios de  $m_2$  Y  $m_1$ 

Una vez más, al igual que en las variaciones de masa anteriores, el efecto de aumentar las masas es aumentar el período y la longitud de onda de las curvas que describen a  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Se notan dos cosas: la primera es que el efecto de aumento en el período y la longitud de onda en el caso donde se cambian las dos masas es más pronunciado que en el caso donde solo se cambia una; lo segundo es que las fases en ambas situaciones parecen no cambiar.

### 3.3. Distintas longitudes de la barra

Para esta modificación del sistema, se obtiene el siguiente lagrangiano y las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}k(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2al_2\sin(\theta_2) - 2al_1\sin(\theta_1) + a^2 \\
 & - 2(\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}) + 2al_2\sin(\theta_2) - 2al_1\sin(\theta_1) + a^2)(\sqrt{a^2 + (l_1 - l_2)^2}) \\
 & + a^2 + (l_1 - l_2)^2 + mg(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2))
 \end{aligned}$$

Para  $\theta_1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$ml_1^2 \ddot{\theta}_1 = -kl_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + akl_1 \cos(\theta_1) - mgl_1 \sin(\theta_1)$$

$$+(k\sqrt{a^2 + (l_1 - l_2)^2})(\frac{l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - al_1 \cos(\theta_1)}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} + 2al_2 \sin(\theta_2) - 2al_1 \sin(\theta_1) + a^2})$$

Para  $\theta_2$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$ml_2^2 \ddot{\theta}_2 = kl_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - akl_2 \cos(\theta_2) - mgl_2 \sin(\theta_2)$$

$$+(k\sqrt{a^2 + (l_1 - l_2)^2})(\frac{-l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + al_2 \cos(\theta_2)}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} + 2al_2 \sin(\theta_2) - 2al_1 \sin(\theta_1) + a^2})$$

Una vez más, utilizando herramientas computacionales, es posible resolver numéricamente el sistema de ecuaciones. Se presentarán soluciones para los siguientes escenarios: cuando se varía  $l_1$  manteniendo  $l_2$  constante; cuando se varía  $l_2$  manteniendo  $l_1$  constante; y cuando ambas longitudes se modifican simultáneamente.

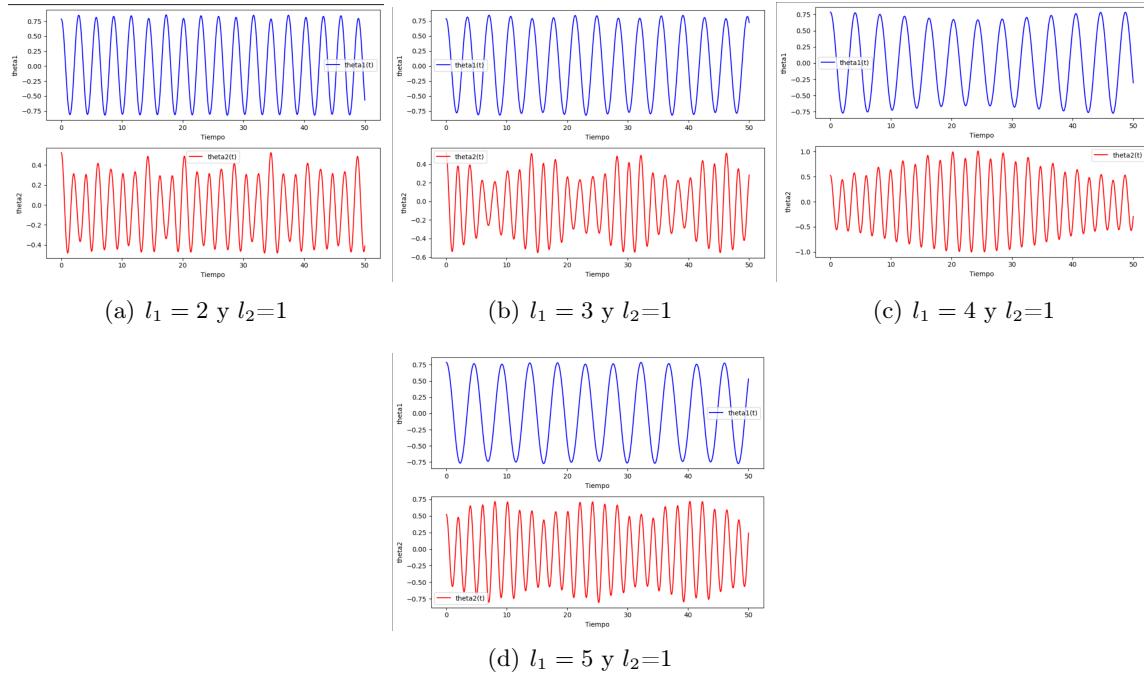


Figura 4: Soluciones para cambios de  $l_1$  con  $l_2$  constante

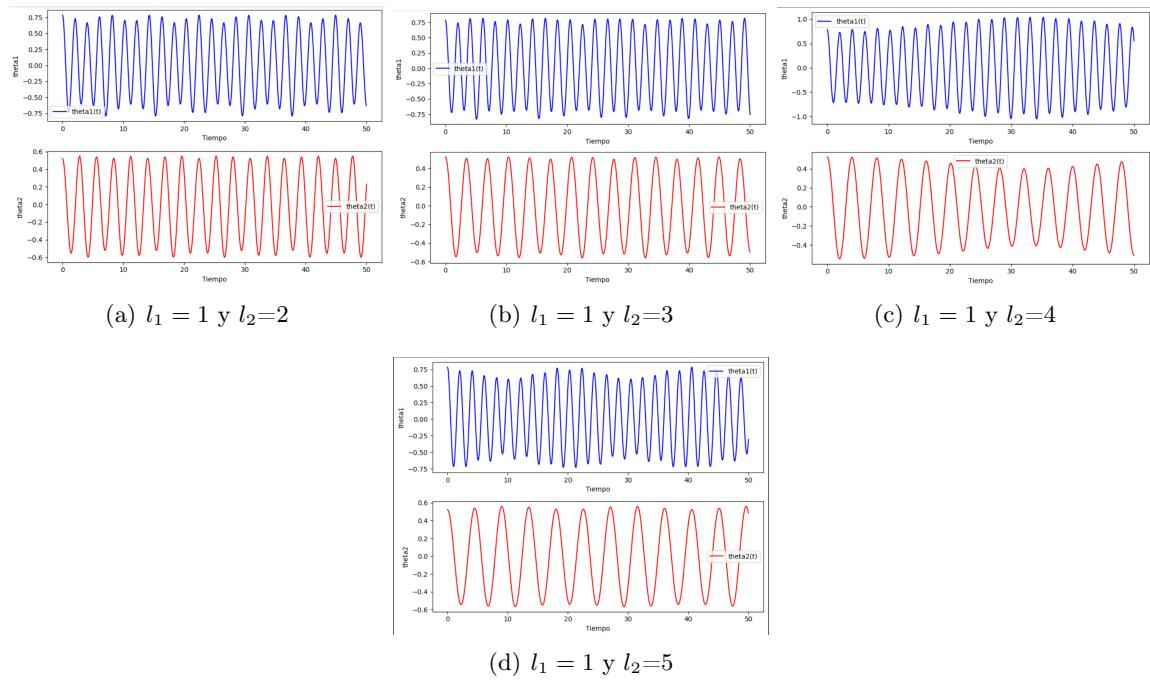
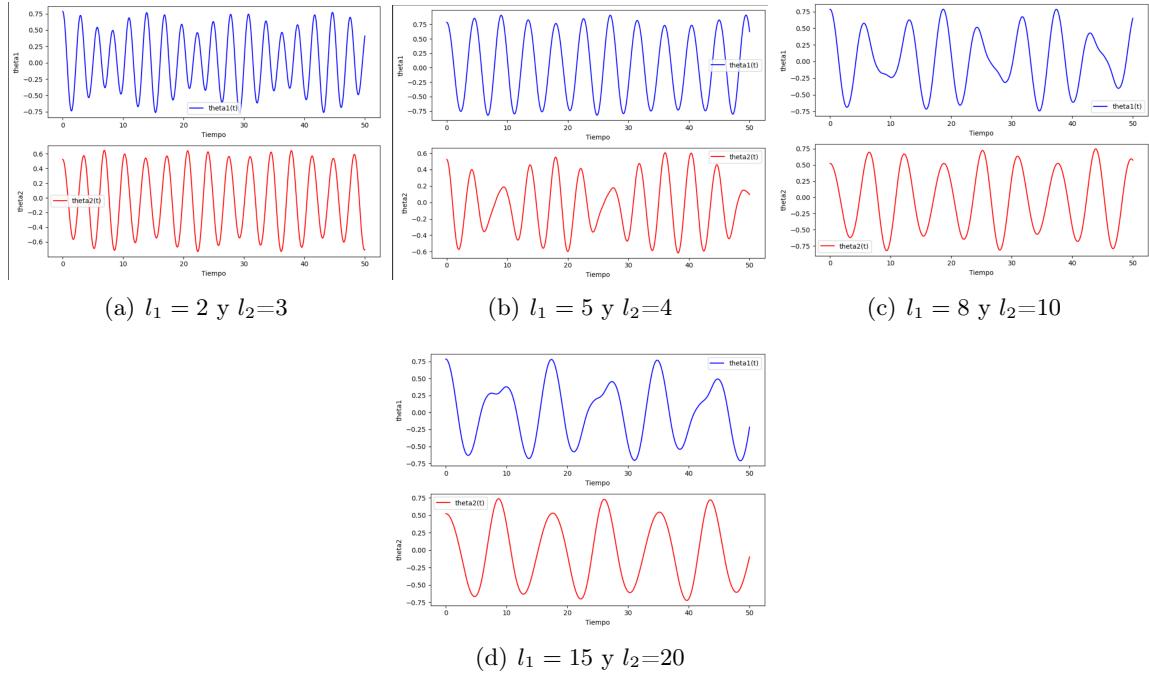
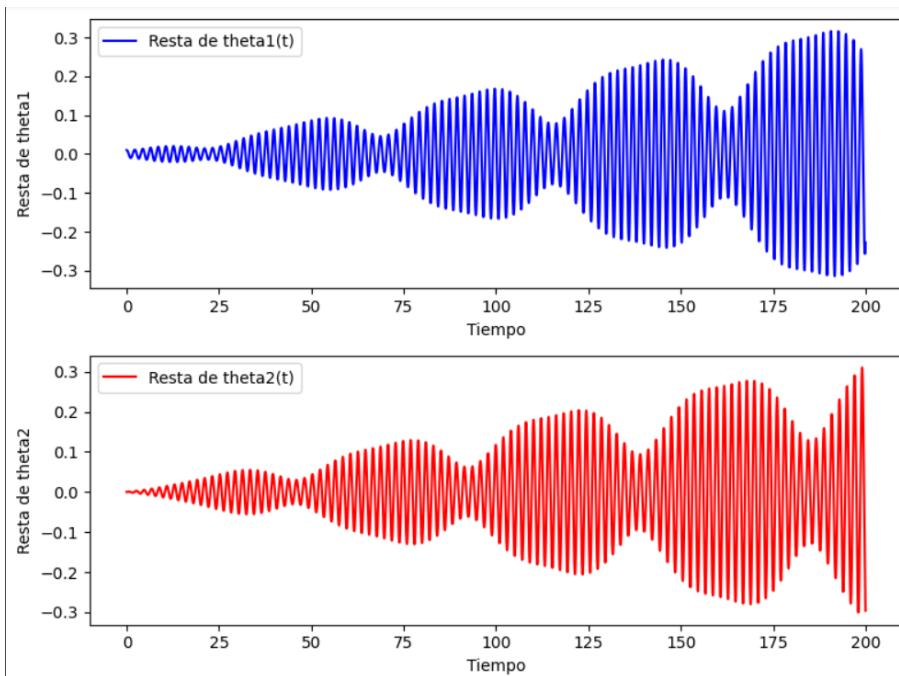


Figura 5: Soluciones para cambios de  $l_2$  con  $l_1$  constante


 Figura 6: Soluciones para cambios de  $l_1$  y  $l_2$ 

#### 4. Cuarto punto

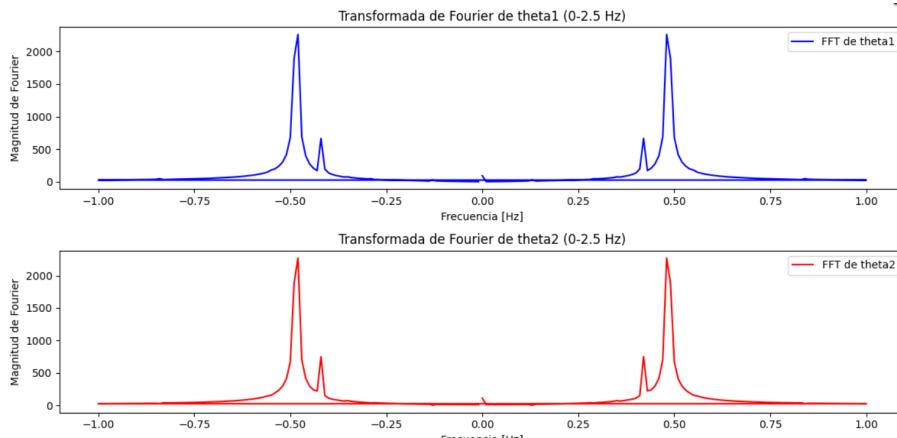
Para determinar si el sistema base presenta caos, es decir, el que se analiza en el segundo punto de este documento, se utilizarán dos parámetros. Lo primero, y lo que se observa a simple vista, es que las ecuaciones de movimiento del sistema están gobernadas por funciones no lineales. Esto, por sí mismo, ya da una pista sobre el comportamiento caótico del sistema. Sin embargo, para mostrar el caos de manera directa, se solucionarán numéricamente dos sistemas con las siguientes condiciones iniciales: el primero con  $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4} + 0,01$ ,  $\theta_2(0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ ; y el segundo con  $\theta_1(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta_2(0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ . Luego, se graficará la diferencia o resta entre sus respectivas soluciones (Se tomaron para ambos sistemas  $a = 1, m$ ,  $l = 1, m$ ,  $k = 1\frac{N}{m}$ ,  $m = 1kg$ ).



Observe que, aunque el cambio en las condiciones iniciales es extremadamente pequeño, representa una diferencia enorme entre las soluciones. Esto demuestra que cambios extremadamente pequeños en las condiciones iniciales pueden llevar a diferencias muy considerables en las soluciones, lo cual es un indicio claro de que el sistema es caótico e impredecible.

## 5. Quinto punto

Para realizar un análisis de Fourier sobre las soluciones del sistema, es necesario aplicar la Transformada de Fourier a estas señales. A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar esta transformada al sistema planteado en el segundo punto con las mismas condiciones iniciales.



La Transformada de Fourier descompone una señal en sus componentes de frecuencia. En este caso, se puede observar que las frecuencias presentes en la señal son todas bajas. Esto tiene sentido, ya que, como se vio en el segundo punto, el movimiento tiene un período largo.

## 6. Sexto punto

### 6.1.

En el caso en el que los ángulos son pequeños, el Lagrangiano del sistema, con dichas aproximaciones tomadas en cuenta( $\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1, \sin(\theta) \sim \theta, \cos(\theta) \sim 1, \theta_1\theta_2 \sim 0$ ), estaría dado por lo siguiente:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}k(a^2 + 2al(\theta_2 - \theta_1) - 2a\sqrt{a^2 + 2al(\theta_2 - \theta_1)} + a^2) + 2mgl$$

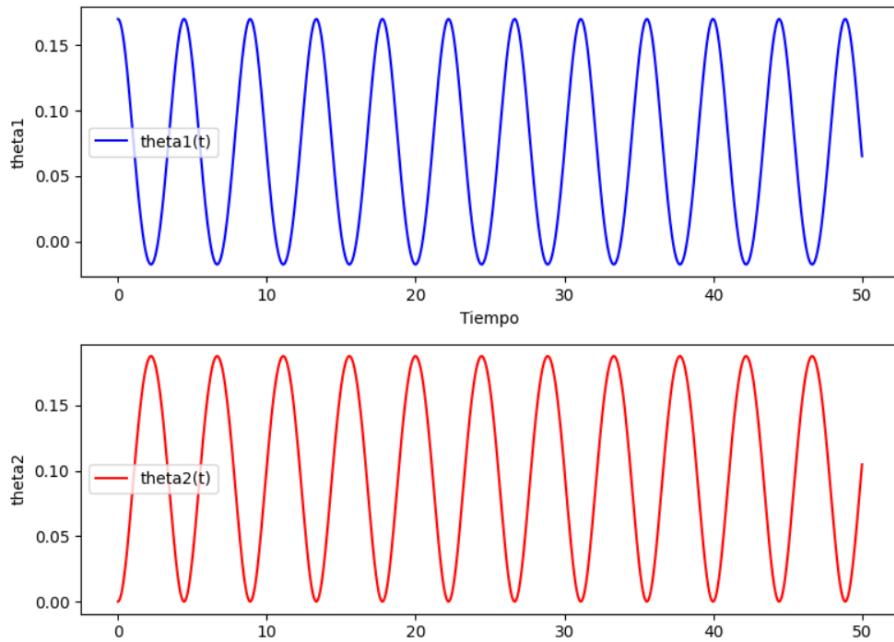
Y con las respectivas ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{alk - \frac{ka^2l}{\sqrt{a^2+2al(\theta_2-\theta_1)}}}{ml^2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-alk + \frac{ka^2l}{\sqrt{a^2+2al(\theta_2-\theta_1)}}}{ml^2}$$

### 6.2.

Una vez más, utilizando un código en Python, se resuelve numéricamente el sistema para las siguientes condiciones iniciales:  $a = 1, m, l = 1, m, k = 1\frac{N}{m}, m = 1kg, \theta_1(0) = 0,17rad, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ . Se obtiene el siguiente resultado:



### 6.3.

#### 6.3.1. Resorte conectado a la mitad de las barras

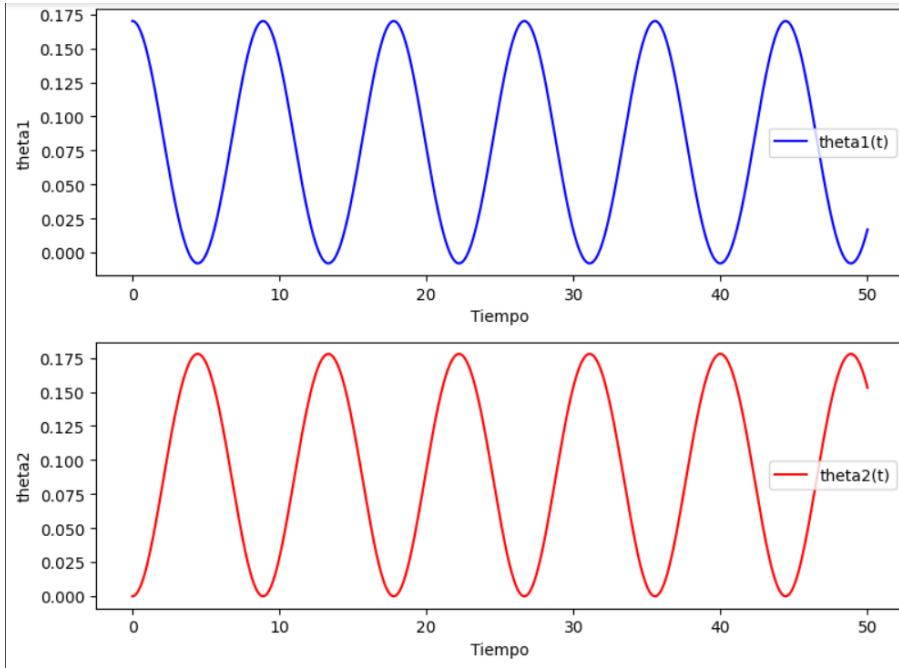
El Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para estas modificaciones, teniendo en cuenta que se sigue trabajando con ángulos pequeños, son los siguientes:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}k(a^2 + al(\theta_2 - \theta_1) - 2a\sqrt{a^2 + al(\theta_2 - \theta_1)} + a^2) + 2mgl$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\frac{alk}{2} - \frac{ka^2l}{2\sqrt{a^2+al(\theta_2-\theta_1)}}}{ml^2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-\frac{alk}{2} + \frac{ka^2l}{2\sqrt{a^2+al(\theta_2-\theta_1)}}}{ml^2}$$

Y se obtuvo el siguiente resultado mediante el proceso de integración numérica con las mismas condiciones iniciales del índice anterior( $a = 1m$ ,  $l = 1m$ ,  $k = 1\frac{N}{m}$   $m = 1kg$   $\theta_1(0) = 0,17rad$ ,  $\theta_2(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ ):



Al igual que en el análisis realizado cuando los ángulos eran grandes, el cambio de conectar el resorte en el medio en lugar de conectarlo a las masas es que la longitud de onda aumenta.

### 6.3.2. Masas diferentes

Para el caso en el que las masas son diferentes y teniendo en cuenta, una vez más, la aproximación de ángulos pequeños, el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para el sistema son las siguientes:

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}k(a^2 + 2al(\theta_2 - \theta_1) - 2a\sqrt{a^2 + 2al(\theta_2 - \theta_1)} + a^2) + gl(m_1 + m_2)$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{alk - \frac{ka^2l}{\sqrt{a^2+2al(\theta_2-\theta_1)}}}{m_1l^2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-alk + \frac{ka^2l}{\sqrt{a^2+2al(\theta_2-\theta_1)}}}{m_2l^2}$$

Al igual que en el análisis anterior para masas diferentes se entrara resultado de cuando se varía  $m_1$ , dejando  $m_2$  fija; para cuando se varía  $m_2$ , dejando  $m_1$  fija; y para cuando se varían ambas masas a la vez(Con las condiciones iniciales  $a = 1m$ ,  $l = 1m$ ,  $k = 1\frac{N}{m}$   $\theta_1(0) = 0,17rad$ ,  $\theta_2(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ ).

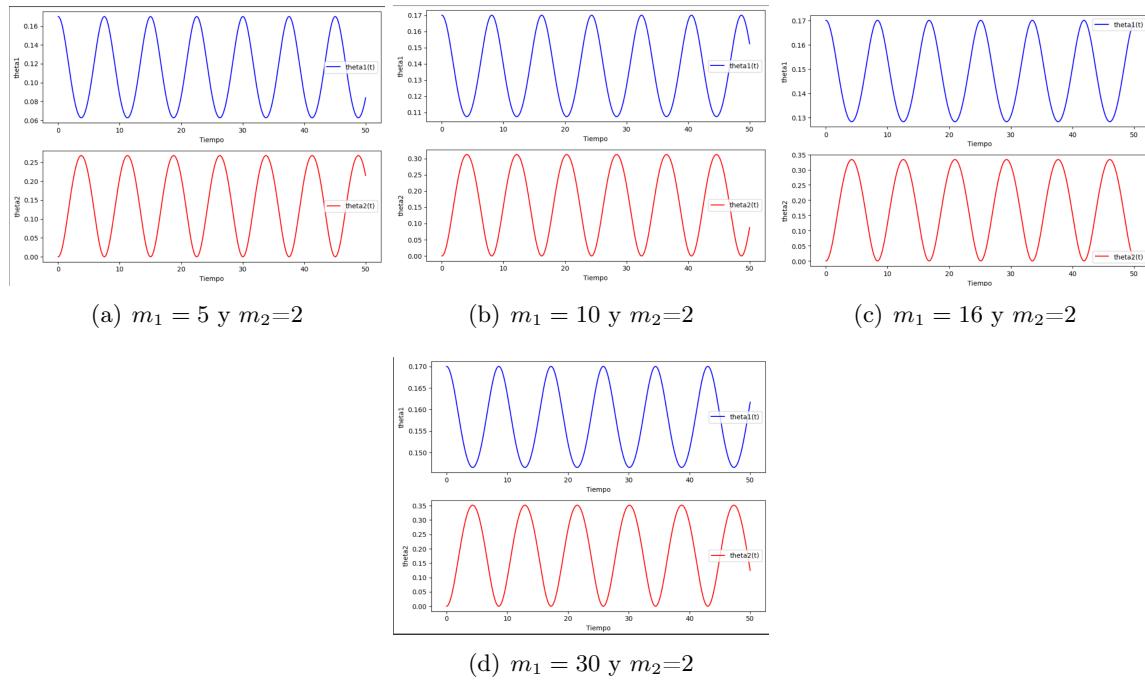


Figura 7: Soluciones para cambios de  $m_1$  con  $m_2$  constante

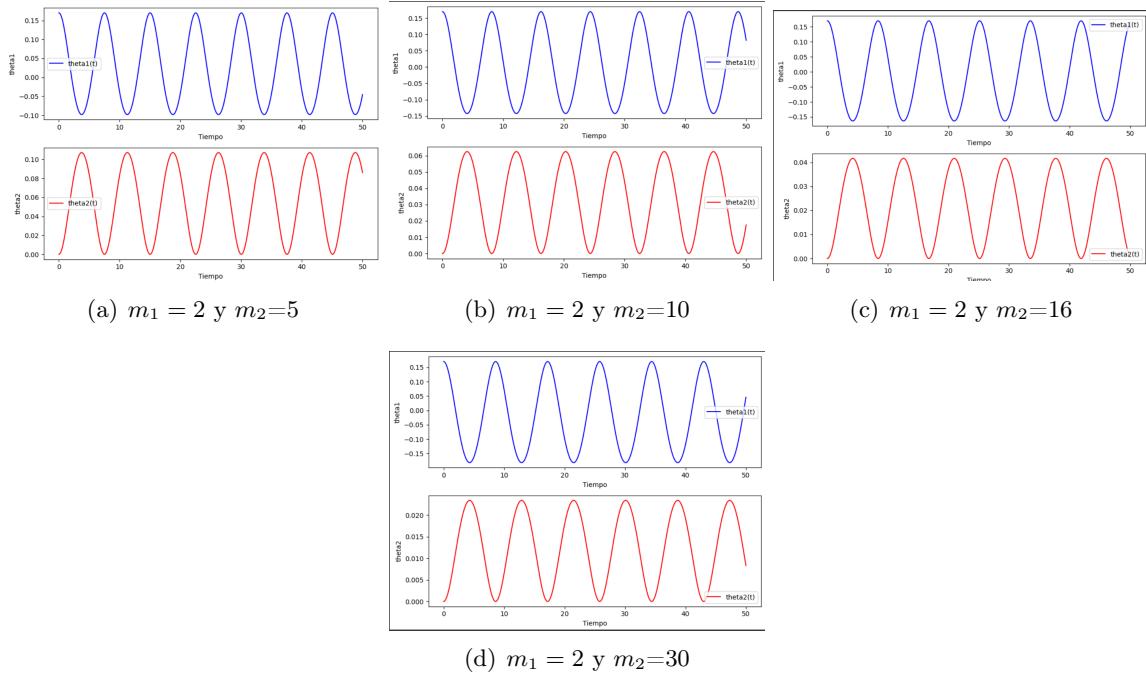
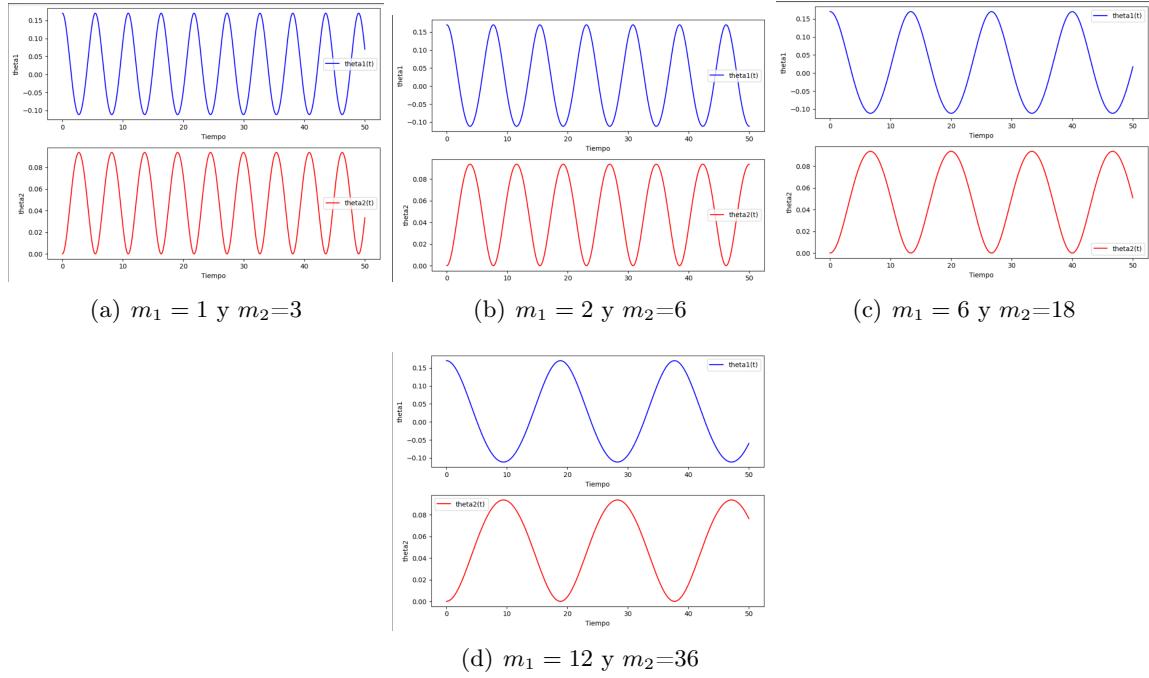


Figura 8: Soluciones para cambios de  $m_2$  con  $m_1$  constante


 Figura 9: Soluciones para cambios de  $m_1$  y  $m_2$ 

Se puede concluir, al analizar los resultados, que aumentar las masas en cada escenario, ya sea que se deje alguna masa constante o no, causa un aumento en la longitud de onda y el período de la solución.

### 6.3.3. Largos de la barra distintos

En este sistema, considerando una vez más la aproximación de ángulos pequeños, se obtienen los siguientes resultados para el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento.

$$L = \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml_2^2\dot{\theta}_2^2 + mg(l_1 + l_2)$$

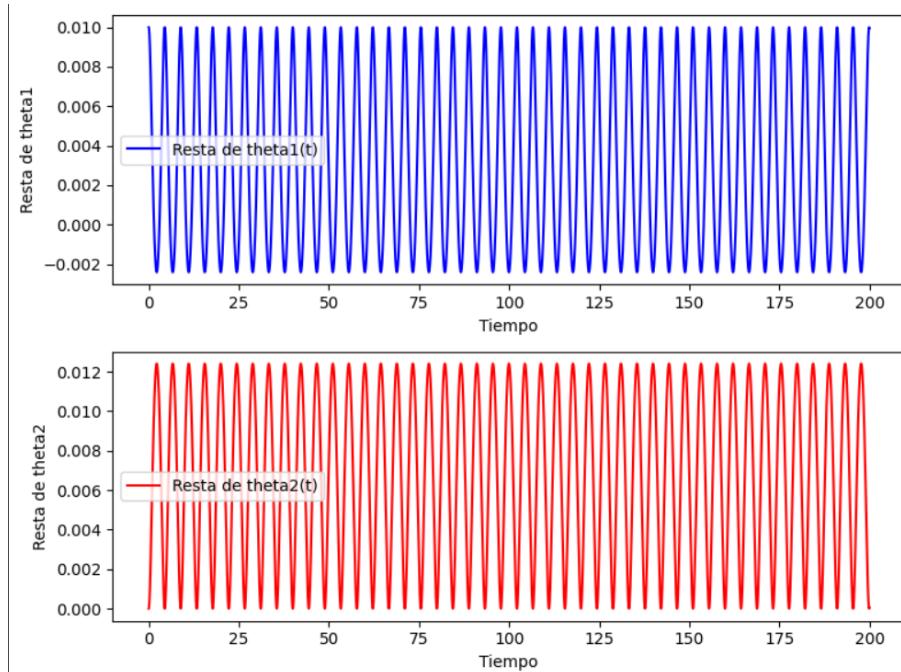
$$-\frac{1}{2}k((l_1 - l_2)^2 + 2al_2\theta_2 - 2al_1\theta_1 + a^2 - 2(\sqrt{a^2 + (l_1 - l_2)^2})(\sqrt{(l_1 - l_2)^2 + 2al_2\theta_2 - 2al_1\theta_1 + a^2}) + a^2 + (l_1 - l_2)^2)$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{al_1k - \frac{(\sqrt{a^2 + (l_1 - l_2)^2})kal_1}{\sqrt{(l_1 - l_2)^2 + 2al_2\theta_2 - 2al_1\theta_1 + a^2}}}{ml_1^2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-al_2k + \frac{(\sqrt{a^2 + (l_1 - l_2)^2})kal_2}{\sqrt{(l_1 - l_2)^2 + 2al_2\theta_2 - 2al_1\theta_1 + a^2}}}{ml_2^2}$$

#### 6.4.

El proceso para analizar el caos del sistema es el mismo que con el que se analizó el caos en el sistema sin aproximación. Se hallaran dos soluciones numéricas para dos grupos de condiciones iniciales: el primero  $a = 1m$ ,  $l = 1m$ ,  $k = 1\frac{N}{m}$   $m = 1kg$   $\theta_1(0) = 0,17rad$ ,  $\theta_2(0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$  y el segundo  $a = 1m$ ,  $l = 1m$ ,  $k = 1\frac{N}{m}$   $m = 1kg$   $\theta_1(0) = 0,17 + 0,01rad$ ,  $\theta_2(0) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\dot{\theta}_1(0)$  y  $\dot{\theta}_2(0)$ ; luego se graficara la resta entre estas soluciones para así determinar que tanto cambio genera en la solución un cambio muy pequeño en las condiciones iniciales. Se obtuvo el siguiente resultado para la gráfica de la resta de soluciones.



Debido al pequeño cambio que hubo en las soluciones al realizar el cambio en las condiciones iniciales, se puede ver que el sistema tiene un comportamiento predecible y no caótico.

#### 6.5.

Nuevamente, se aplica la transformada de Fourier a la solución y, al realizar la descomposición en frecuencias, se puede identificar que el movimiento está compuesto principalmente por frecuencias bajas.

