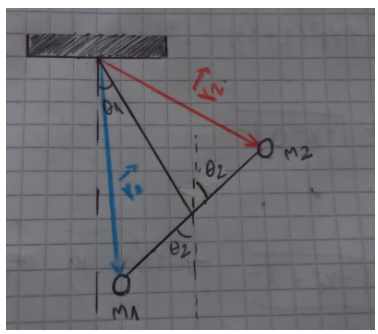
Problemas del primer viernes

Isaac Balcarcel 2220653 - Paula Uribe 2220670

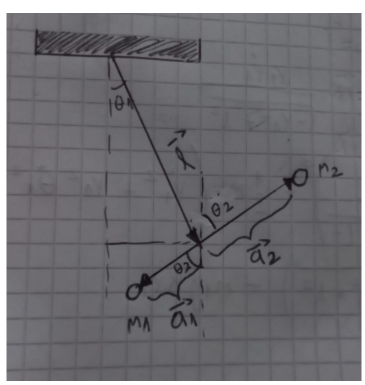
August 23, 2024

1 Primer punto

Empezaremos este punto estableciendo cuatro coordenadas generalizadas, las cuales se irán reduciendo más adelante con las ligaduras que encontremos en el sistema. En la siguiente imagen se puede encontrar un diagrama que muestra las cuatro coordenadas generalizadas: r_1, θ_1, r_2 y θ_2



Ahora bien, con el uso de la siguiente imagen, la cual muestra algunos vectores relevantes para el desarrollo del problema, estableceremos nuestras dos ligaduras, quedando así solamente dos grados de libertad en el sistema.



Fíjese que podemos armar las siguientes relaciónes vectoriales entre los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, asociados a las posiciones de las masas uno y dos respectivamente, con los vectores $\vec{l}$, $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$.

$$\vec{r}_1 = \vec{l} + \vec{a}_1$$
$$\vec{r}_2 = \vec{l} + \vec{a}_2$$

Con:

$$\vec{l} = lsen(\theta_1)\hat{\imath} - lcos(\theta_1)\hat{\jmath}$$
$$\vec{a}_1 = -\frac{a}{2}sen(\theta_2)\hat{\imath} - \frac{a}{2}cos(\theta_2)\hat{\jmath}$$
$$\vec{a}_2 = \frac{a}{2}sen(\theta_2)\hat{\imath} + \frac{a}{2}cos(\theta_2)\hat{\jmath}$$

Realizando la respectiva suma vectorial:

$$\vec{r}_1 = (lsen(\theta_1) - \frac{a}{2}sen(\theta_2))\hat{\imath} + (-lcos(\theta_1) - \frac{a}{2}cos(\theta_2))\hat{\jmath}$$
$$\vec{r}_2 = (lsen(\theta_1) + \frac{a}{2}sen(\theta_2))\hat{\imath} + (-lcos(\theta_1) + \frac{a}{2}cos(\theta_2))\hat{\jmath}$$

Note que, como tal, estas ecuaciones vectoriales no son realmente las ligaduras, ya que no nos brindan una relación entre las coordenadas generalizadas r_1, θ_1, r_2 y θ_2, Sin embargo, al calcular la magnitud en cada lado, podemos obtener nuestras ligaduras en el sentido usual de una función $f(q_1, q_2, ..q_n, t) = 0$. No obstante, estos cálculos no los realizaremos, ya que, por fines de practicidad, es posible trabajar con estas relaciones vectoriales sin ningún inconveniente.

Calcularemos también las derivadas de los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ y sus magnitudes al cuadrado, ya que serán necesarias para el planteamiento del Lagrangiano.

$$\dot{\vec{r}}_1 = (lcos(\theta_1)\dot{\theta}_1 - \frac{a}{2}cos(\theta_2)\dot{\theta}_2)\hat{\imath} + (lsen(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \frac{a}{2}sen(\theta_2)\dot{\theta}_2)\hat{\jmath}$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = (lcos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \frac{a}{2}cos(\theta_2)\dot{\theta}_2)\hat{\imath} + (lsen(\theta_1)\dot{\theta}_1 - \frac{a}{2}sen(\theta_2)\dot{\theta}_2)\hat{\jmath}$$

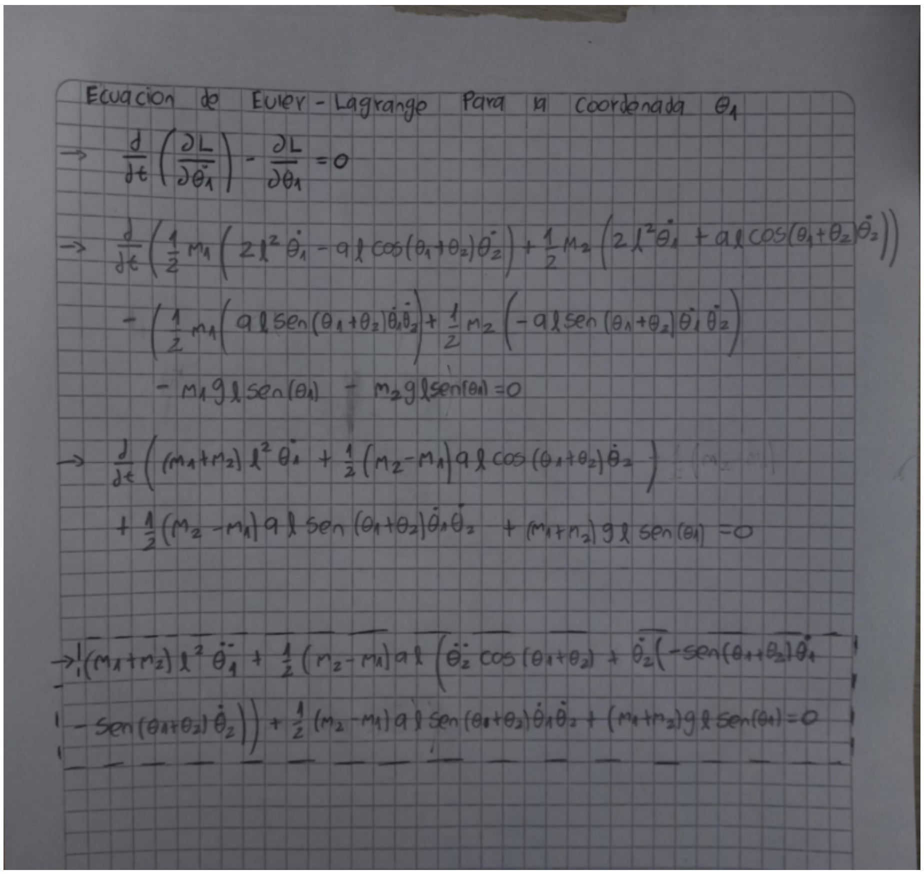
$$r_1^2 = \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 = l^2\dot{\theta}_1^2 - al\cos(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{a^2}{4}\dot{\theta}_2^2$$
$$r_2^2 = \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 = l^2\dot{\theta}_1^2 + al\cos(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{a^2}{4}\dot{\theta}_2^2$$

Ya con todo esto en cuenta, simplemente debemos armar el Lagrangiano. Es importante notar que la altura usada para las energías potenciales de las masas no es más que la componente en $\hat{\jmath}$ de sus respectivos vectores de posición.

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2) - m_1gh - m_2gh$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(l^2\dot\theta_1^2 - al\cos(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot\theta_1^2 + al\cos(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2\right)$$
$$- m_1 g\left(-l\cos(\theta_1) - \frac{a}{2}\cos(\theta_2)\right) - m_2 g\left(-l\cos(\theta_1) + \frac{a}{2}\cos(\theta_2)\right)$$

Por último, simplemente metemos el Lagrangiano en las ecuaciones de Euler-Lagrange y se obtiene lo siguiente:



Ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada θ_1

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1\left(2l^2\dot\theta_1 - al\cos(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(2l^2\dot\theta_1 + al\cos(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_2\right)\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2}m_1\left(al\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(-al\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2\right)\right)$$
$$- m_1 g l\,\mathrm{sen}(\theta_1) - m_2 g l\,\mathrm{sen}(\theta_1) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)l^2\dot\theta_1 + \frac{1}{2}(m_2-m_1)al\cos(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_2\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(m_2-m_1)al\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2 + (m_1+m_2)gl\,\mathrm{sen}(\theta_1) = 0$$

$$\rightarrow (m_1+m_2)l^2\ddot\theta_1 + \frac{1}{2}(m_2-m_1)al\left(\ddot\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2) + \dot\theta_2\left(-\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1 - \mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_2\right)\right) + \frac{1}{2}(m_2-m_1)al\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2 + (m_1+m_2)gl\,\mathrm{sen}(\theta_1) = 0$$

Ecuacion de Euler lagrange para la coordenada θ_2

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1\left(-a\ell\cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1 + \frac{a^2}{2}\dot{\theta}_2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(a\ell\cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1 + \frac{a^2}{2}\dot{\theta}_2\right)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}m_1\left(a\ell\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(-a\ell\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\right.$$

$$\left.-m_1 g\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + m_2 g\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{a^2}{2}\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}(m_2-m_1)a\ell\cos(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1\right)$$

$$+\frac{1}{2}(m_2-m_1)a\ell\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (m_1-m_2)g\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = 0$$

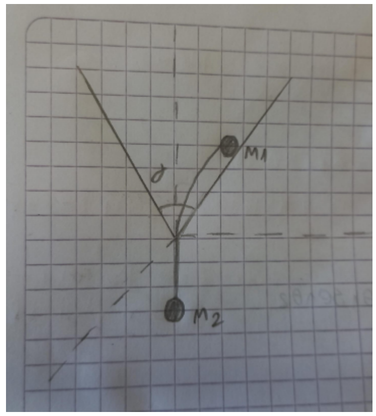
$$\frac{1}{4}(m_1+m_2)\frac{a^2}{2}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}(m_2-m_1)a\ell\left(\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1+\theta_2) + \dot{\theta}_1\left(-\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_2\right)\right) + \frac{1}{2}(m_2-m_1)a\ell\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (m_1-m_2)g\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = 0$$

2 Segundo punto

2.1 Inciso (a)

Para este punto, utilizaremos el siguiente diagrama, que nos permitirá ver mejor las coordenadas generalizadas y las ligaduras del sistema.



Partiendo de las coordenadas cilíndricas, tendríamos de momento 6 coordenadas, las cuales iremos reduciendo con las ligaduras. Tenemos z_1, θ_1 y ρ_1 para m_1 y z_2, θ_2 y ρ_2 para m_2.

Para la m_2, como solo se puede mover verticalmente, $\theta_2 = 0$ y $\rho_2 = 0$. Ahora bien, como la m_1 se mueve sobre la superficie del cono, existe una relación dada por la ecuación de un cono en coordenadas cilíndricas: $z_1 = k\rho_1$ donde $k = cot(\frac{\alpha}{2})$

La última ligadura que nos falta está dada por la longitud de la cuerda por medio de la cual están unidas las dos masas. Fíjese que, debido a que ambas masas están unidas por una cuerda, podemos decir que sus respectivos vectores de posición van en dirección a esa cuerda, de tal manera que la suma de las magnitudes de ambos vectores de posición nos debería dar la longitud total de la cuerda.

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = l$$

Donde

$$\vec{r}_1 = \rho_1\hat{\rho} + k\rho_1\hat{k}$$
$$\vec{r}_2 = z_2\hat{k}$$

Quedando la ultima ligadura de la siguiente manera:

$$|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = \rho_1\sqrt{1+k^2} + z_2 = l$$
$$z_2 = l - \rho_1\sqrt{1+k^2}$$

Entonces tendríamos simplemente 2 grados de libertad, ρ_1 y θ_1 con los cuales plantearemos el siguiente Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2\dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{z}_2^2) - (m_1gz_1 - m_2gz_2)$$

Remplazando en el lagrangiano las ligaduras obtenidas anteriormente:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}_1^2+\rho_1^2\dot{\theta}_1^2+k^2\dot{\rho}_1^2)+\frac{1}{2}m_2((1-k^2)\dot{\rho}_1^2)-((m_1gk\rho_1-m_2g(l-\rho_1\sqrt{1+k^2}))$$

Se obtienen por ultimo las siguientes ecuaciones de movimiento:

Ecuacion de Euler-Lagrange para ρ_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1\left(2\dot{\rho}_1 + 2k^2\dot{\rho}_1\right) + \frac{1}{2}m_2(1-k^2)\dot{\rho}_1\right) - \left(m_1\rho_1\dot{\theta}_1^2 - m_1 g k - m_2 g\sqrt{1-k^2}\right) = 0$$

$$\boxed{m_1\ddot{\rho}_1 + m_1k^2\ddot{\rho}_1 + m_2(1-k^2)\ddot{\rho}_1 - m_1\rho_1\dot{\theta}_1^2 + m_1gk + m_2g\sqrt{1-k^2} = 0}$$

Ecuacion de Euler-Lagrange para θ_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\rho_1^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\boxed{m_1\rho_1^2\dot{\theta} = C}$$

2.2 Inciso (b)

Para hallar el radio de equilibrio de la masa 1 debemos tener en cuenta que la condicion para que esta masa este en ese rango es que $\ddot{\rho}_1 = 0$.

Remplazando esto en la ecuacion de movimiento de ρ_1 obtenemos

$$-m_1 \rho_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g k + m_2 g \sqrt{1-k^2} = 0$$

Note que de la segunda ecuacion de movimiento tenemos que

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{c^2}{m_1^2 \rho_1}$$

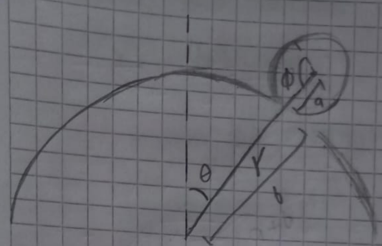
Remplazando esto en la ecuacion anterior

$$-\frac{c^2}{m_1 \rho_1^3} + m_1 g k + m_2 g \sqrt{1-k^2} = 0$$

$$\frac{c^2}{m_1 \rho_1^3} = \left(m_1 g k + m_2 g \sqrt{1-k^2}\right)$$

$$\boxed{\rho_1 = \sqrt[3]{\frac{c^2}{m_1\left(m_1 g k + m_2 g \sqrt{1-k^2}\right)}}} \to \text{Radio de equilibrio de } m_1$$

3 Tercer punto



Utilizaremos en este caso 3 coordenas generalizadas:
θ y r para determinar la Pocisión del centro de masa y φ para la Pocisión angular del resto de particulas del cilindro respecto al centro de masa

fijese que tenemos dos ligaduras en este movimiento

$\underbrace{r - a - b = 0}_{f_1}$ → Ligadura relacionada con la condicion de contacto entre cilindros

$\underbrace{(a+b)\theta - \phi a = 0}_{f_2}$ → Ligadura relacionada con la condicion de rodadura sin deslizarse

En este caso no remplazaremos las ligaduras en nuestro lagrangiano ya que queremos usar el metodo de multiplicadores de lagrange por ende

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \right) + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\phi}^2 - mg\cos\theta\, r$$

y utilizaremos la version modificada de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_j f_j \lambda_j$$

Quedando las siguientes tres ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \sum_j f_j \lambda_j$$

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\sum_j f_j \lambda_j$$

$$m r^2 \ddot\theta - mg\,\text{sen}\theta\, r = (a+b)\lambda_2 \quad ②$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\sum_j f_j \lambda_j$$

$$\frac{1}{2} m a^2 \ddot\phi = -a\lambda_2 \quad ③$$

Para hallar las fuerzas de ligadura del sistema debemos remplazar nuestras funciones de ligadura f_1 y f_2 y despejar los multiplicadores de lagrange λ_1 y λ_2, para ello usaremos las ecuaciones ① y ②

$$m\ddot r - m r\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_1 \quad \rightarrow \text{con } r = a+b$$

$$\boxed{-m(a+b)\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_1} \rightarrow$$ fuerza de ligadura asociada al contacto

$$m r^2\ddot\theta - mg\,\text{sen}\theta\, r = (a+b)\lambda_2 \quad \rightarrow \text{con } r = a+b$$

$$\boxed{m(a+b)\ddot\theta - mg\,\text{sen}\theta = \lambda_2} \rightarrow$$ fuerza de ligadura asociada a la rodadura sin deslizar

Por ultimo para hallar el angulo θ en el cual los cilindros se separan debemos hacer $\lambda_1 = 0$ ya que al perder el contacto esta fuerza de ligadura se anula y por ende

$$-m(a+b)\dot\theta^2 + mg\cos\theta = 0 \quad ④$$

Note que de remplazar en la ecuacion ③ la funcion f_2 tenemos

$$\frac{1}{2} m a^2 \frac{(a+b)}{a}\ddot\theta = -a\lambda_2$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} m (a+b)\ddot\theta$$

Remplazando este resultado en la ecuacion para λ_2

$$\lambda_2 = m(a+b)\ddot{\theta} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$-\frac{1}{2} m(a+b)\ddot{\theta} = m(a+b)\ddot{\theta} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\cancel{m} g\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{3}{2}\cancel{m}(a+b)\ddot{\theta}$$

$$\frac{2}{3}\frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{a+b} = \ddot{\theta}$$

$$\frac{2}{3}\frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{(a+b)}\dot{\theta} = \ddot{\theta}\dot{\theta}$$

$$\frac{2}{3}\frac{g}{(a+b)}\frac{d}{dt}\left(-\cos\theta\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)$$

$$\frac{2}{3}\frac{g}{(a+b)}\int\frac{d}{dt}\left(-\cos\theta\right) = \int\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)$$

$$\frac{2}{3}\frac{g}{(a+b)}\left(-\cos\theta\right) + C = \frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

con la condicicion inicial de que $\theta(0)=0$ $\dot{\theta}(0)=0$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{2}{3}\frac{g}{(a+b)}$$

De tal manera que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{(a+b)}\left(1-\cos\theta\right)$$

Remplazando esto en ④

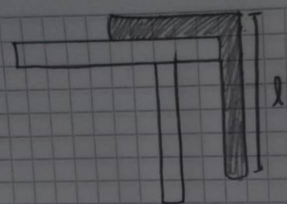
$$-\cancel{m}\frac{4}{3}\cancel{g}(1-\cos\theta) + \cancel{mg}\cos\theta = 0$$

$$-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\cos\theta + \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{4}{3\left(\frac{4}{3}+1\right)} \longrightarrow \boxed{\theta = 55{,}15^\circ}$$

Angulo donde se pierde el contacto

4 Cuarto punto



Utilizaremos ℓ como una coordenada generalizada, y definiremos $\lambda = \frac{M}{L}$ como la densidad lineal de la cuerda.

Arora bien debemos hallar T y U para armar nuestro lagrangiano

$T = \frac{1}{2} M \dot{\ell}^2$ → ya que todo el cuerpo se mueve a una misma velocidad

$$U = \int du = \int g\, dm\, \ell = g \int_0^{\ell} d\ell\, \lambda \ell = \frac{g \lambda \ell^2}{2}$$

Por endo obtenemos

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2} g \lambda \ell^2$$

Lo cual nos da la siguiente ecuacion de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 0$$

$M\ddot{\ell} - g\lambda \ell = 0$ → Ecuacion diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

Planteamos el polinomio caracteristico

$$Mx^2 - g\lambda = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{g\lambda}{M}} \qquad x = -\sqrt{\frac{g\lambda}{M}}$$

Planteamos nuestra solucion general

$$\ell(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{g\lambda}{M}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g\lambda}{M}} t}$$