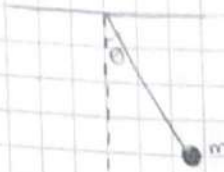
Oscar Isaac Balcarcel ~~2220~~ e^{x} e^{2x}

Paula Andrea Uribe

Primer taller

Punto 1



$\dot r = a$

a) $L = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + mgr\cos\theta$

b) $E(q_j, \dot q_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j - L$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot r}\dot r + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\dot\theta - \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - mgr\cos\theta$$

$$E = m\dot r^2 + mr^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}m\dot r^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 - mgr\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 - mgr\cos\theta$$

Punto 2

$$L = \frac{1}{2}(m\dot q^2 - kq^2)e^{\frac{\alpha t}{m}} \qquad \alpha,\ k \text{ ctes}$$

a) $m\ddot q \cancel{e^{\frac{\alpha t}{m}}} + \frac{\alpha}{m}\cancel{e^{\frac{\alpha t}{m}}} m\dot q = kq\cancel{e^{\frac{\alpha t}{m}}}$

$m\ddot q + \frac{\alpha}{m} = kq$ Movimiento amortiguado.

b) $Q = e^{\frac{\alpha}{2m}t} q$

$q = Qe^{-\frac{\alpha}{2m}t}$

$\dot q = \dot Q e^{-\frac{\alpha t}{2m}} - \frac{Q\alpha}{2m} e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$

$$L = \frac{1}{2}\left(m\left(\dot Q^2 \cancel{e^{-\frac{\alpha t}{m}}} - \frac{\dot Q Q\alpha}{m}\cancel{e^{-\frac{\alpha t}{m}}} + \frac{Q^2\alpha^2}{4m^2}\cancel{e^{-\frac{\alpha t}{m}}}\right.\right.$$
$$\left.\left. - kQ^2\cancel{e^{-\frac{\alpha t}{m}}}\right)\cancel{e^{\frac{\alpha t}{m}}}\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot Q^2 - \frac{\dot Q Q}{2} + \frac{Q^2\alpha^2}{8m} - \frac{Q^2 k}{2}$$

$$m\ddot Q = Q\left(\frac{\alpha^2}{4m} - k\right)$$

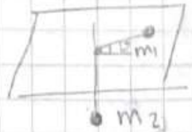
$$\ddot Q = \frac{Q}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2m^2} - \frac{2k}{m}\right) \qquad Q = C_1e^{Rt} + C_2e^{-Rt}$$

$$R = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{2k}{m}} \qquad q = \left(C_1e^{Rt} + C_2e^{-Rt}\right)e^{-\frac{\alpha t}{2m}}$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{Q}^2 - \frac{Q^2}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4m} - k\right) = cte$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Punto 5



$$\vec{r}_1 = \rho \operatorname{sen}\theta\, \hat{x} + \rho \cos\theta\, \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = -z\, \hat{k}$$

$$3n - k = 2$$

$$l = \rho + z \qquad l - \rho = z$$

$$0 = \dot{\rho} + \dot{z} = 0 \qquad \dot{\rho} = -\dot{z}$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 + m_2 g z$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2 - m_2 g (l - \rho)$$

$$m_1 \rho^2 \dot{\theta} = cte$$

$$m_2 \ddot{\rho} - m_1 \rho \dot{\theta}^2 - m_2 g = 0.$$

La energía total se conserva y P_θ.

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$$

$$E = m_1 \rho^2 \dot{\theta}^2 + m_2 \dot{\rho}^2 - \frac{1}{2} m_1 \rho^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2 + m_2 g (l - \rho)$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2 + m_2 g (l - \rho)$$

Posición de equilibrio

$$\dot{\theta}^2 = \frac{cte^2}{m_1^2 \rho^4}$$

$$\ddot{\rho} = 0 \Rightarrow m_1 \rho \dot{\theta}^2 = m_2 g$$

$$\rho = \frac{m_2 g}{m_1 \dot{\theta}^2} \qquad \rho = \frac{m_2 g m_1^2 \rho^4}{m_1 cte^2}$$

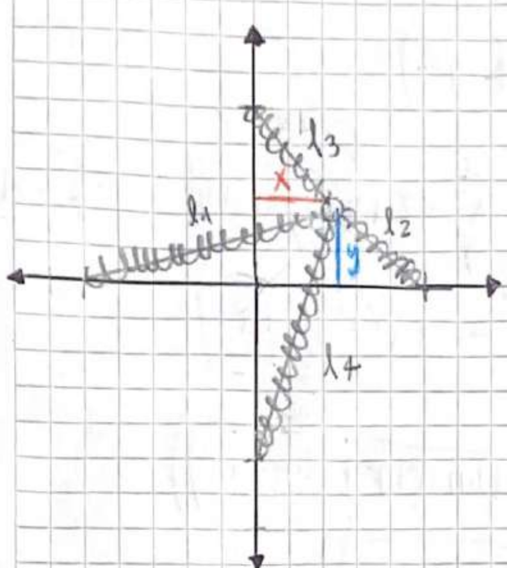
$$\rho^{-3} = \frac{g m_2 m_1}{cte^2} \qquad \rho^3 = \frac{cte^2}{g m_2 m_1} \qquad \rho = \sqrt[3]{\frac{cte^2}{g m_2 m_1}}$$

$K_{m_1 0} = 0 \qquad m_2 g a = \frac{1}{2} m_1 \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\rho}^2$

$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m_1 + m_2} \cdot m_2 g a}$

Sexto Punto

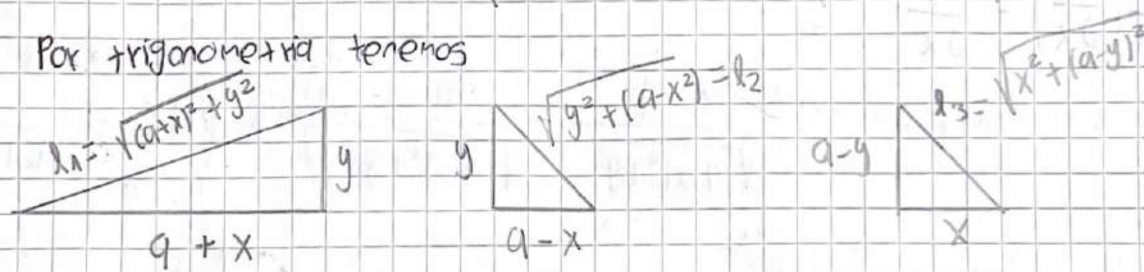
a)

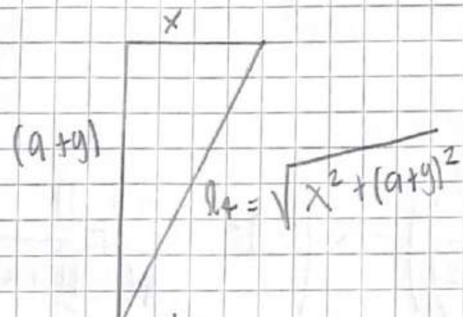


El lagrangiano del sistema esta dado por

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k_1\left((l_1-a)^2 + (l_2-a)^2\right) - \frac{1}{2}k_2\left((l_3-a)^2 + (l_4-a)^2\right)$$

Por trigonometria tenemos





Por ende

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k_1\left(\left(\sqrt{(a+x)^2+y^2} - a\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+(a-x)^2} - a\right)^2\right)$$
$$- \frac{1}{2}k_2\left(\left(\sqrt{x^2+(a-y)^2} - a\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+(a+y)^2} - a\right)^2\right)$$

$$\rightarrow L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k_1\Big((a+x)^2+y^2-2a\sqrt{(a+x)^2+y^2}+a^2+(a-x)^2+y^2$$

$$-2a\sqrt{(a-x)^2+y^2}+a^2\Big)-\frac{1}{2}k_2\Big((a-y)^2+x^2-2a\sqrt{(a-y)^2+x^2}+a^2$$

$$+(a+y)^2+x^2-2a\sqrt{(a+y)^2+x^2}+a^2\Big)$$

$$\rightarrow L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k_1\Big(2y^2+4a^2+2x^2-2a\sqrt{(a+x)^2+y^2}-2a\sqrt{(a-x)^2+y^2}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}k_2\Big(4a^2+2x^2+2y^2-2a\sqrt{(a-y)^2+x^2}-2a\sqrt{(a+y)^2+x^2}\Big)$$

$$\rightarrow L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-k_1\Big(y^2+x^2+2a^2-a\Big(\sqrt{(a+x)^2+y^2}+\sqrt{(a-x)^2+y^2}\Big)\Big)$$

$$-k_2\Big(x^2+y^2+2a^2-a\Big(\sqrt{(a-y)^2+x^2}+\sqrt{(a+y)^2+x^2}\Big)\Big)$$

con estre Lagrangiano hallaremos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\ddot{x}=-k_1\left(2x-a\left(\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}-\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)\right)-k_2\left(2x-a\left(\frac{x}{\sqrt{(a-y)^2+x^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x}{\sqrt{(a+y)^2+x^2}}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial L}{\partial y}$$

$$m\ddot{y}=-k_1\left(2y-a\left(\frac{y}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)\right)-k_2\left(2y-a\left(\frac{-(a-y)}{\sqrt{(a-y)^2+x^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(a+y)}{\sqrt{(a+y)^2+x^2}}\right)\right)$$

b) Para hallar las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones, debemos hallar el Lagrangiano para pequeñas oscilaciones este esta dado por:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j\right) \quad i,j=1,2$$

donde T_{ij} son las masas del sistema y los $V_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$

donde q_{0i} es el grupo de puntos $\{q_{01}, q_{02}\}$ en donde $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0$, por ende debemos hallar los q_{0i} y luego los V_{ij} para obtener nuestro Lagrangiano para pequeñas oscilaciones

Note que $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{(x=0,\,y=0)} = 0$ ya que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -k_1\left(2x - a\left(\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} - \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)\right) + k_2\left(2x - a\left(\frac{x}{\sqrt{(a-y)^2+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{(a+y)^2+x^2}}\right)\right)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x=0,\,y=0)} = -k_1\left(-a\left(1-1\right)\right) - k_2\left(0\right) = 0$$

y para la otra coordenada

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -k_1\left(2y - a\left(\frac{y}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)\right) + k_2\left(2y - a\left(\frac{-(a-y)}{\sqrt{(a-y)^2+x^2}} + \frac{(a+y)}{\sqrt{(a+y)^2+x^2}}\right)\right)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x=0,y=0)} = k_1\left(0\right) + k_2\left(-1+1\right) = 0$$

Por ende los $q_{0i} = \{x=0, y=0\}$ lo cual tiene sentido ya que es el punto donde ningun resorte esta elongado

Ahora con esta pocision de equilibrio hallaremos los valores para los coeficientes V_{ij}

$$V_{11} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = 2k_1 \qquad V_{12} = V_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 0 \qquad V_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2k_2$$

Entonces nuestro lagrangiano para pequeñas oscilaciones quedaria

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{\eta}_1^2 + m\dot{\eta}_2^2 - 2k_1\eta_1^2 - 2k_2\eta_2^2\right)$$

obteniendo las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \eta_2}$$

$$m\ddot{\eta}_1 = -2k_1\eta_1 \qquad m\ddot{\eta}_2 = -2k_2\eta_2$$

c) fijese que para el caso donde k_1 es diferente de k_2 los movimientos para pequeñas oscilaciones tienen frecuencias angulares distintas

Si $k_1 \neq k_2$ → movimientos distintos en cada coordenada

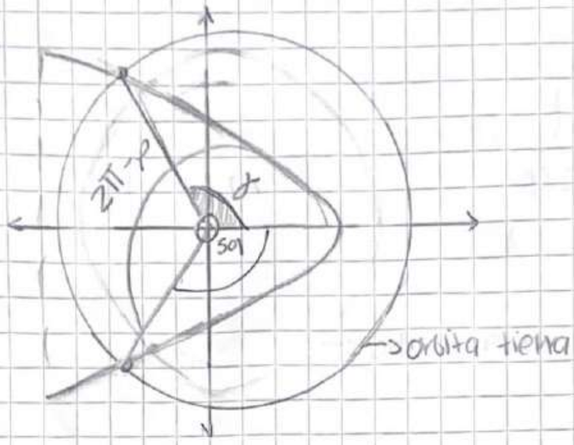
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}$$

Si $k_1 = k_2$ → movimientos iguales en cada coordenada

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Segundo Taller

Primer Punto



La ecuacion de la orbita del cometa por ser una parabola esta dada por

$$r = \frac{q}{1+\cos\theta}$$

donde

$$q = \frac{l^2}{\mu K} \quad \begin{cases} K = GMM_S \\ l = \mu r^2\dot{\theta} = cte \\ \mu = \dfrac{MM_S}{M+M_S} \end{cases}$$

Note que podemos hallar los puntos donde las orbitas se cruzan simplemente igualando a r al radio de la tierra

$$R_T = \frac{q}{1+\cos\phi}$$

$$\cos\phi = \frac{q}{R_T} - 1$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{q}{R_T} - 1\right)$$

Por lo que el inicio y el final del trayecto adentro de la orbita de la tierra en en

$$\theta_0 = 2\pi - \phi \quad y \quad \theta_f = \phi$$

Ahora bien de la segunda ley de Kepler tenemos que

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

y tambien que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2M} \longrightarrow dA = \frac{l}{2M} dt$$

Por ende igualando los dA

$$\frac{1}{\cancel{2}} r^2 \, d\theta = \frac{l}{\cancel{2}M} dt$$

$$\frac{M}{l} r^2 \, d\theta = dt$$

$$\frac{M}{l} \frac{q^2}{(1+\cos\theta)^2} \, d\theta = dt$$

$$\frac{M}{l} q^2 \int_{2\pi-\delta}^{\delta} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} \, d\theta = t$$

Utilizando la calculadora de integrales

$$\underbrace{\frac{Mq^2}{l}\left(\frac{\tan^3\left(\frac{\delta}{2}\right)+3\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)}{6}-\left(\frac{\tan^3\left(\frac{2\pi-\delta}{2}\right)+3\tan\left(\frac{2\pi-\delta}{2}\right)}{6}\right)\right)}_{c} = t$$

$$t_{\text{en dias}} = \frac{c}{86400s}$$

Segundo Punto

a) Dado el potencial $V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ haciendo la sustitución

$u = \frac{1}{r}$ $\qquad V(u) = au + bu^2$

Integrando la órbita directamente

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2ME}{l^2} - \frac{2M}{l^2}(au + bu^2) - u^2}}$$

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2ME}{l^2} - \frac{2M}{l^2}au + u^2\left(-\frac{2M}{l^2}b - 1\right)}}$$

Esta integral tiene la forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{xu^2 + yu + z}} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \cos^{-1}\left[-\frac{(y + 2xu)}{\sqrt{y^2 - 4xc}}\right]$$

$x = \frac{-2M}{l^2}b - 1 \qquad y = \frac{-2M}{l^2}a \qquad z = \frac{2ME}{l^2}$

$$y + 2xu = \frac{-2M}{l^2}a + u\left(\frac{-4M}{l^2}b - 2\right)$$

$$y^2 - 4xc = \frac{4M^2}{l^4}a^2 + 4\left(\frac{2M}{l^2}b + 1\right)\left(\frac{2ME}{l^2}\right)$$

$$\theta = \theta_0 - \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}b+1}}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\frac{2\mu}{l^2}a + 4\left(\frac{4\mu}{l^2}b+2\right)}{\sqrt{\frac{4\mu^2}{l^4}a^2 + 4\left(\frac{2\mu}{l^2}b+1\right)\left(\frac{2\mu E}{l^2}\right)}}\right)$$

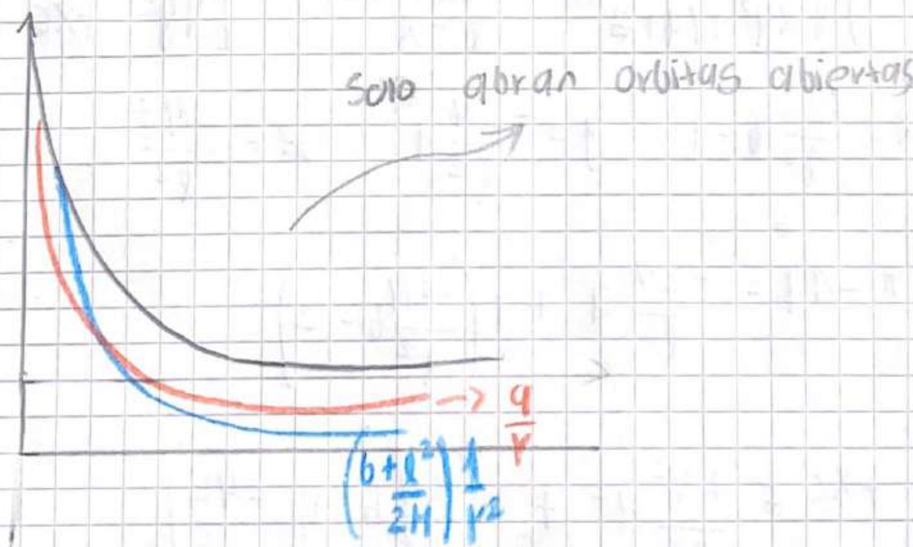
$$\cos\left(\left(\theta_0-\theta\right)\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}b+1}\right)\left(\sqrt{\frac{4\mu^2}{l^4}a^2 + 4\left(\frac{2\mu}{l^2}b+1\right)\left(\frac{2\mu E}{l^2}\right)}\right) = \frac{2\mu}{l^2}a + 4\left(\frac{4\mu}{l^2}b+2\right)$$

con $\theta_0 = 0$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{4\mu^2}{l^4}a^2 + 4\left(\frac{2\mu}{l^2}b+1\right)\left(\frac{2\mu E}{l^2}\right)}\right)\cos\left(\theta\sqrt{\frac{2\mu}{l^2}b+1}\right) - \frac{2\mu}{l^2}a}{\frac{4\mu}{l^2}b+2} = \frac{1}{r}$$

b) $$V_{ef} = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

con a y $b > 0$



Tercer Punto

a) con $V(r) = -\frac{k}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, donde $k>0$ y $a>0$ Podemos hallar el potencial efectivo

$$V_{ef} = -\frac{k}{r} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

La condicion para que la orbita circular sea estable con un radio r_0 esta dada por

$$\left.\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0$$

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} = \frac{k}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{k}{r} e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{l^2}{\mu r^3}$$

$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2} = \frac{-2k}{r^3} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} \frac{k}{r^2} - \frac{k}{r^2} e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a^2} \frac{k}{r} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{3l^2}{\mu r^4}$$

$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial r^2} = e^{-\frac{r}{a}}\left(\frac{-2k}{r^3} - \frac{k}{ar^2} - \frac{k}{ar^2} - \frac{k}{a^2 r}\right) + \frac{3l^2}{\mu r^4}$$

Por ende la condicion de estabilidad

$$e^{-\frac{r_0}{a}}\left(\frac{-2k}{r_0^3} - \frac{2k}{ar_0^2} - \frac{k}{a^2 r_0}\right) + \frac{3l^2}{\mu r_0^4} > 0$$

b) La frecuencia osciacion radial esta dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(e^{\frac{-r_0}{a}}\left(\frac{-2K}{r_0^3} - \frac{2Ka}{r_0^2} - \frac{K}{a^2 r_0}\right) + \frac{3l^2}{\mu r_0^4}\right)}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Cuarto Punto

a) Para encontrar la fuerza central que produce la orbita podemos usar la Ecuacion diferencial de la orbita

$$\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial u}}$$ fuerza central

donde $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$

Por lo cual

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{a(1+\cos\theta)^2} = a\operatorname{sen}\theta\, u^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = a\cos\theta\, u^2 + a\operatorname{sen}\theta\, 2u\frac{du}{d\theta}$$

$$= a\cos\theta\, u^2 + a\operatorname{sen}\theta\, 2u\, a\operatorname{sen}\theta\, u^2$$

$$= a\cos\theta\, u^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta\, 2u^3$$

Por lo que

$$\frac{L^2}{\mu}\left(a\cos\theta u^2 + a^2 sen^2\theta 2u^3 + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}$$

y volviendo a hacer la sustitución $u = \frac{1}{r}$

$$\underbrace{\frac{L^2}{\mu}\left(a\cos\theta\frac{1}{r^2} + a^2 sen^2\theta 2\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r}\right) = \frac{-\partial V}{\partial r}}_{\text{fuerza central}}$$

b) utilizando la segunda ley de Kepler

$$\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{L}{2\mu}dt$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mu}{L}\left(a^2(1+\cos\theta)^2\right)d\theta = T$$

utilizando la calculadora de integrales

$$\frac{\mu}{L}a^2\left(\left.\frac{(\cos(x)+4)sen(x)+3x}{2}\right|_0^{2\pi}\right) = T$$

$$\boxed{\frac{\mu}{L}a^2 3\pi = T}$$