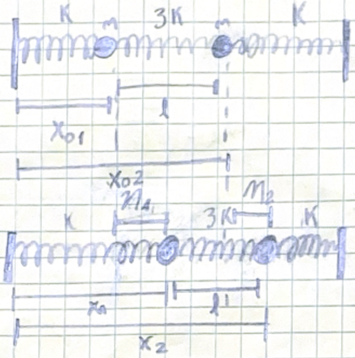
Paula Uribe 2220670
Isaac Balcarcel 2220653

Problemas del quinto viernes

1) Considere un sistema conformado por dos partículas de masa m unidas por tres resortes, dos de constante elástica K y otro 3K tal y como lo muestra la figura. Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones del sistema y compare los resultados con el ejemplo resuelto en clase.



La energía cinética en función de los pequeños desplazamientos

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

$T_{11} = m \quad T_{12} = T_{21} = 0 \quad T_{22} = m$

La energía potencial en términos de los pequeños desplazamientos

$$V = \frac{1}{2} K \eta_1^2 + \frac{1}{2} K \eta_2^2 + \frac{1}{2} 3K (\eta_2 - \eta_1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4K \eta_1^2 + 4K \eta_2^2 - 6K \eta_1 \eta_2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

$V_{11} = 4K \quad V_{22} = 4K \quad V_{12} = V_{21} = -3K$

y Por ende la ecuacion caracteristica del sistema

$$\begin{vmatrix} 4K - w^2 m & -3K \\ -3K & 4K - w^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$(4K - w^2 m)^2 - 9K^2 = 0$$

$$4K - w^2 m = \pm 3K$$

$$w^2 = \frac{4K \pm 3K}{m}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{7K}{m}}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Para w_1

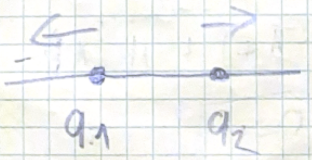
$$(4K - w_1^2 m) a_1 + (-3K) a_2 = 0 \quad ①$$

$$(-3K) a_1 + (4K - w_1^2 m) a_2 = 0 \quad ②$$

usando ①

$$a_2 = \frac{a_1}{3K}(4K - w_1^2 m)$$

$$\boxed{a_2 = -a_1}$$



Para ω_2

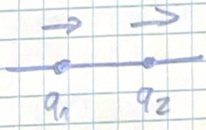
$$(4k - \omega_2^2 m) a_1 + (-3k) a_2 = 0$$

$$(-3k) a_1 + (4k - \omega_1^2 m) = 0$$

usando 1

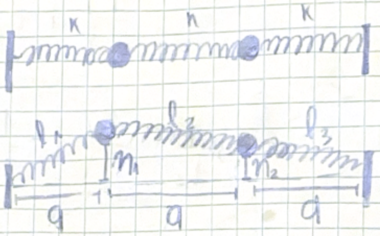
$$a_2 = \frac{a_1}{3k}(4k - \omega_1^2 m)$$

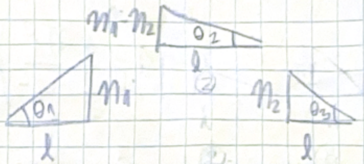
$$a_2 = a_1$$



2) Para un sistema como se muestra en la figura (dos masas iguales y todos los resortes iguales), calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones transversales

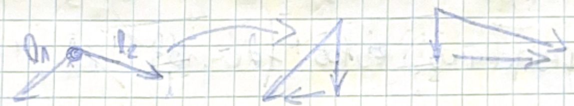
$a_0 \rightarrow$ longitud inicial del resorte





Planteaeremos el sistema por newton haciendo ciertas aproximaciones.

→ Para la masa 1 se tiene que



Para que el sistema tenga sentido las componentes de las fuerzas horizontales deben cancelarse, así que solo considero la sumatoria en el eje vertical.

$$m\ddot{\eta}_1 = -k\,sen\,\theta_1(l_1-a_0) - k\,sen\,\theta_2(l_2-a_0)$$

$$= -k\frac{\eta_1}{l_1}(l_1-a_0) - k\frac{(\eta_1-\eta_2)}{l_2}(l_2-a_0)$$

$$= -k\eta_1\left(1-\frac{a_0}{l_1}\right) - k(\eta_1-\eta_2)\left(1-\frac{a_0}{l_2}\right)$$

Norma

Ahora bien note que por lo que los desplazamientos son pequeños puedo hacer la siguiente aproximación.

$$l_1 = \sqrt{a^2 + \eta_1^2} \qquad\qquad l_2 = \sqrt{a^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$$

$$\frac{1}{l_1} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\eta_1^2}{a^2}\right)^{-1/2} \qquad\qquad \frac{1}{l_2} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2}{a^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{l_1} \approx \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\eta_1^2}{a^2}\right) \qquad\qquad \frac{1}{l_2} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(\eta_1 - \eta_2)^2}{a^2}\right)$$

Remplazando esto en la fuerza

$$= -k\eta_1\left(1 - \frac{a_0}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\eta_1^2}{a^2}\right)\right) - k(\eta_1 - \eta_2)\left(1 - \frac{a_0}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(\eta_1 - \eta_2)^2}{a^2}\right)\right)$$

$$= -k\eta_1\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \underbrace{- \frac{1}{2}k a_0 \frac{\eta_1^3}{a^3}}_{\text{Despreciamos estos terminos}} - k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)(\eta_1 - \eta_2) - \frac{1}{2}k a_0 \frac{(\eta_2 - \eta_1)^3}{a^3}$$

Despreciamos estos terminos

$$= -k\eta_1\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) - k\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)(\eta_1 - \eta_2)$$

$$= -k\eta_1\underbrace{\left(\frac{a - a_0}{a}\right)}_{\delta} - k\underbrace{\left(\frac{a - a_0}{a}\right)}_{\delta}(\eta_1 - \eta_2)$$

$$= k\eta_2\delta - 2k\delta\eta_1 = m\ddot{\eta}_1 = -\frac{\partial V}{\partial \eta_1}$$

Realizando el mismo proceso para la segunda masa obtenemos

$$= -2k\delta\eta_2 + k\delta\eta_1 = m\ddot{\eta}_2 = -\frac{\partial V}{\partial \eta_2}$$

Por ende es facil proponer la siguiente energia potencial para el sistema

$$V = \frac{1}{2} k\delta \left(2\eta_1^2 - 2\eta_1\eta_2 + 2\eta_2^2\right)$$

y la energia cinetica del sistema seria

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right)$$

y por lo tanto la ecuacion caracteristica del sistema

$$\begin{vmatrix} 2k\delta - \omega^2 m & -k\delta \\ -k\delta & 2k\delta - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$(2k\delta - \omega^2 m)^2 - k^2\delta^2 = 0$$

$$2k\delta - \omega^2 m = \pm k\delta$$

$$-\omega^2 m = -2k\delta \pm k\delta$$

$$\omega^2 = \frac{2k\delta \pm k\delta}{m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k\delta}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k\delta}{m}}$$

$$(2k\delta - \omega^2 m) a_1 - k\delta a_2 = 0$$

$$-k\delta a_1 + (2k\delta - \omega^2 m) a_2 = 0$$

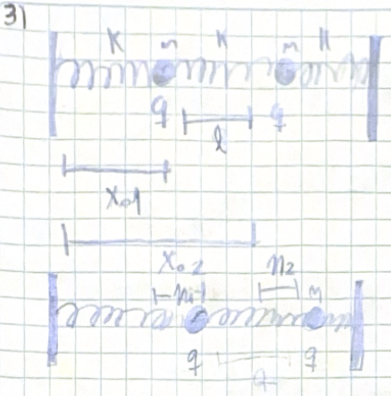
De ①

$$a_1 = \frac{a_2 (k\delta)}{2k\delta - \omega^2 m}$$

con $\omega_1 \rightarrow a_1 = a_2$

con $\omega_2 \Rightarrow a_1 = -a_2$

3)



Nuevamente analizando el sistema por newton se tiene que

$$m\ddot{\eta}_1 = -k\eta_1 + k(\eta_2-\eta_1) - \frac{\epsilon q^2}{(l-(\eta_2-\eta_1))^2}$$

$$m\ddot{\eta}_2 = -k\eta_2 - k(\eta_2-\eta_1) + \frac{\epsilon q^2}{(l-(\eta_2-\eta_1))^2}$$

Note podemos expandir por series de taylor el potencial respecto a $\eta_2-\eta_1=0$

$$\frac{\epsilon q^2}{(l-(\eta_2-\eta_1))^2} = \underbrace{\frac{\epsilon q^2}{l^2}} + 2\frac{\epsilon q^2}{l^3}(\eta_2-\eta_1)$$

Este termino lo tomo ya que no puede venir de un potencial en la forma en la que busco $V=\frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

Por ende las fuerzas quedan

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 - \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}(x_2 - x_1) = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$m\ddot{x}_2 = -2kx_2 + kx_1 + \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}(x_2 - x_1) = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

Por ende note que puedo proponer el siguiente potencial

$$V = \frac{1}{2}k\left(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2kx_2^2\right) - \frac{\varepsilon q^2}{l^3}(x_2 - x_1)^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\left(2kx_1^2 - 2kx_1x_2 + 2kx_2^2\right) - \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}\left(x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2\right)\right)$$

y la energia cinetica seria

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2\right)$$

quedando la ecuacion caracteristica del sistema

$$\begin{vmatrix} 2k - \frac{2\varepsilon q^2}{l^3} - \omega^2 m & -k + \frac{2\varepsilon q^2}{l^3} \\ -k + \frac{2\varepsilon q^2}{l^3} & 2k - \frac{2\varepsilon q^2}{l^3} - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

$$= \left(2k - \frac{2\varepsilon q^2}{l^3} - \omega^2 m\right)^2 - \left(-k + \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}\right)^2 = 0$$

$$2K - \frac{2\varepsilon q^2}{l^3} - \omega^2 m = \pm\left(-K + \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}\right)$$

$$\omega^2 m = -\frac{2\varepsilon q^2}{l^3} + 2K \pm \left(-K + \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}\right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega_2^2 = \left(3K - \frac{4\varepsilon q^2}{l^3}\right) \frac{1}{m}$$

Sea $M = \frac{2\varepsilon q^2}{l^3}$ $\quad V_{11} = 2K - M \quad V_{22} = 2K - M \quad V_{12} = V_{21} = -K + M$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega^2 = \frac{(3K - 2M)}{m}$$

Para los modos normales

$$(2K - M - m\omega^2)\, a_1 + (-K + M)\, a_2 = 0 \quad (1)$$

$$(-K + M)\, a_1 + (2K - M - m\omega^2)\, a_2 = 0$$

De (1)

$$a_1 = \frac{-(M + K)}{2K - M - m\omega^2}$$

con $\omega_1 \rightarrow a_1 = a_2$

con $\omega_2 \rightarrow a_1 = -a_2$