Problemas del primer viernes

Isaac Balcarcel 2220653 - Paula Uribe 2220670

13 de agosto 2024

1 Primer punto

1.1 Inciso (a)

Para este inciso, es importante comenzar haciendo algunas suposiciones para simplificar el problema. La primera de ellas es que aproximaremos la forma del ser humano a un cilindro, donde la cabeza corresponderá a la base circular del cilindro. Además, asumiremos que entra al agua de cabeza, es decir, el área transversal con la que entra al agua es un círculo. Tomaremos un valor encontrado en internet sobre el volumen promedio de una persona y el valor del coeficiente de arrastre para un humano de cabeza. Además, le asignaremos una masa y una altura y un radio para determinar su area transversal.

$$V = 0,069\, m^3$$

$$C_D = 1,12$$

$$m = 80\, kg$$

$$altura = 1,70\, m$$

$$r = 0,25\, m$$

A partir de la suposición de que la persona es un cilindro y con el uso de los datos anteriores, encontraremos y su área transversal al momento del impacto.

$$A = 0,196\, m^2$$

Una vez definidas todas las variables, es momento de calcular la velocidad con la que la persona llega al agua:

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$v = 14\, m/s$$

Una vez ocurre el impacto, consideraremos tres fuerzas sobre la persona en el agua: el peso, la fuerza de flotación y la fuerza de arrastre, con las cuales hallaremos la aceleración a través de la segunda ley de Newton.

$$-mg + \frac{1}{2}\rho v C_D A + \rho V g = ma$$

Reemplazando los valores y despejando la aceleración, obtenemos:

$$a \approx 18m^2/s$$

Por último, calculemos la distancia total recorrida con la siguiente fórmula cinemática:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2ad$$

Ponemos el valor de la velocidad final como 0, ya que, al igual que en un movimiento parabólico, es el punto de mayor altura o, en este caso, profundidad en la piscina.

$$0 = 14^2 - 2(18)d$$

$$d = 5,44\,m$$

De esta manera, queda demostrado que, con todas las suposiciones a consideración las cuales hacen el resultado menos preciso y realista, es seguro saltar desde una distancia de 10 metros.

1.2 Inciso (b)

hacemos sumatoria de fuerzas para el corcho quedando solo el empuje y el peso,la fuerza resistiva se desprecia ya que la velocidad inicial del objeto es 0.

Primero, calcularemos el volumen del corcho

$$V_{\text{corcho}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3}(0.025)^3 = 6.5 \times 10^{-5}\,\text{m}^3$$

Con esto podremos calcular la fuerza de empuje.

$$E = 1000V_{\text{corcho}}(9.8) = 1000\left(6.5 \times 10^{-5}\right)(9.8) = 6.41 \times 10^{-1}\,\text{N}$$

Calcularemos la otra fuerza en cuestión, que es el peso utilizando un valor encontrado en internet para la densidad del corcho.

$$W = mg = g\rho_{\text{corcho}}V_{corcho} = 256 \times \left(6.5 \times 10^{-5}\right) \times (9.8) = 1.6 \times 10^{-1}\,\text{N}$$

Luego, recurrimos a la segunda ley de Newton para hallar la aceleración:

$$E - W = ma$$

$$a = \frac{E - W}{m} = \frac{0.64\,\text{N} - 0.16\,\text{N}}{0.016\,\text{kg}} = 30\,\text{m/s}^2$$

Esta aceleración la volveremos a poner en la ecuación de cinemática utilizada en el primer punto:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2ad$$

$$V_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \times 30 \times 5} = 17.3\,\text{m/s}$$

1.3 Inciso (c)

Al igual que en el punto anterior, asumiendo que la burbuja parte del reposo, se considerarían dos fuerzas sobre ella: el peso y la fuerza de empuje, con las cuales armaremos, una vez más, la segunda ley de Newton:

$$-mg + (V_{burbuja})(\rho_{agua})g = ma$$
$$\frac{-mg + (V_{burbuja})(\rho_{agua})g}{m} = a$$

Note que, debido a que la burbuja es un gas ideal, esta cumple con la ley de los gases ideales, por lo cual su volumen dependerá de la presión aplicada a esta.

$$V_{burbuja} = \frac{nRT}{P}$$

Es importante aclarar que se considera que la temperatura y el número de moles se mantienen constantes.

Ahora bien, la presión aplicada sobre la burbuja dependerá de qué tan profundo esté en el agua.

$$P = P_0 + \rho_{agua}gh$$

Donde P_0 equivale a la presion atmosferica y h la profundidad medida desde la parte de arriba de la piscina. Por lo cual, nuestra segunda ley de Newton quedaría:

$$\frac{-mg + (\frac{nRT}{P_0+\rho_{agua}gh})(\rho_{agua})g}{m} = a$$

Dejando todo en términos de una variable, nos queda la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{-mg + (\frac{nRT}{P_0+\rho_{agua}gy})(\rho_{agua})g}{m} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta numéricamente para así obtener el resultado de la velocidad.

2 Segundo punto

2.1 Inciso (a)

En este punto se nos solicita que hallemos la geodésica sobre un cono, es decir, la curva más corta entre dos puntos. Para ello, partiremos de considerar la longitud de arco en coordenadas cilíndricas, la cual buscaremos minimizar.

$$L = \int ds$$

Donde $ds^2 = dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2$, ahora bien considerando el hecho de que la curva debe encontrarse en la superficie del cono y por ende tenemos la ligadura

$r = kz$ donde $k = tan(\alpha)$, ahora bien tomando ϕ como parametro y por tanto $z = z(\phi)$ y por ende $dz = z'd\phi$ y por lo tanto $ds = \sqrt{((1+k^2)z'^2 + k^2z^2)}d\phi$

$$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{((1+k^2)z'^2 + k^2z^2)}d\phi$$

Fijese que por facilidad podemos multiplicar por el escalar $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ lo cual claramente nos llevaria a la misma ecuacion de Euler-Lagrange y por ende a la misma solucion

Consideremos entonces la siguiente sustitucion para facilitar los calculos y agrupar a los diferentes escalares:

$$b^2 = \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)} = \frac{tan^2(\alpha)}{sec^2(\alpha)} = sen^2(\alpha)$$

$$b = sen(\alpha)$$

Quedando entonces la funcion dentro del funcional de la siguiente manera:

$$f = \sqrt{z'^2 + b^2z^2}$$

Al igual que en el ejercicio tres utilizaremos una version modificada de las ecuaciones de Euler-Lagrange para mas facilidad:

$$f - \frac{\partial f}{\partial z'}z' = C_1$$

Al meter la funcion f en las ecuaciones resultan en lo siguiente:

$$\frac{b^2z^2}{\sqrt{z'^2 + b^2z^2}} = C_1$$

Lo que nos lleva a la siguiente ecuacion diferencial separable:

$$\int \frac{dx}{z\sqrt{a^2z^2/C_1^2 - 1}} = \int bd\phi$$

Integrando a cada lado y despejando para obtener la curva parametrizada $z(\phi)$ se obtiene:

$$z(\phi) = \frac{C_1}{b\,cos(b\phi + C_2)}$$

Resultando en la curva paramétrica que une dos puntos sobre la superficie de un cono minimizando la distancia. Las constantes en la ecuación son determinadas a través de las coordenadas de estos puntos iniciales y finales.

2.2 Inciso (b)

No lo hicimos :(

3 Tercer punto

Como primer paso se considera la siguiente ligadura, Siendo L la longitud del cable

$$L = \int_a^b dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{1}$$

La cual expresada de otra manera para poderla usar mas adelante corresponderia a:

$$0 = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \tag{2}$$

Como lo que se quiere es minimizar la energía potencial, planteamos

$$U = \int_a^b gy\lambda ds \tag{3}$$

Donde vemos la energía potencial de una porción e integramos para hallar esta misma en la longitud total del cable. Reemplazamos el ds en coordenadas cartesianas siendo x el parámetro

$$U = \int_a^b g\lambda y\sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \tag{4}$$

Teniendo esto se plantea la funcion F que va adentro del funcional, añadiendo el termino correspondiente a los multiplicadores de lagrange siendo h la constante a determinar. En este caso solo se tiene una y es la de la longitud del cable enunciada en un incio.

$$F(y, \dot{y}, x) = \lambda gy\sqrt{1 - \dot{y}^2} + h\sqrt{1 + \dot{y}^2} \tag{5}$$

A partir de ahí, se usan las ecuaciones de Euler-Lagrange. Si se aplican las ecuaciones en el sentido usual, los cálculos puedes complicarse por lo cual se considera una forma equivalente de escribirlas en términos del parámetro.

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(F - \frac{dF}{\partial \dot{y}}\dot{y}\right) = 0 \tag{6}$$

Y como F no depende de x entonces:

$$F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y} = C_1 \tag{7}$$

Reemplazando

$$\dot{y}\left(\frac{\lambda g\dot{y}y_1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} + \frac{h\dot{y}}{\sqrt{1 + y^2}}\right) - \lambda gy\sqrt{1 + \dot{y}^2} - h\sqrt{1 + \dot{y}^2} = C \tag{8}$$

$$(\lambda gy + h)\left(\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - \sqrt{1 + \dot{y}^2}\right) = c_1 \tag{9}$$

Haciendo la suma de fracciones y despejando $\dot{y}$

$$\left(\frac{(\lambda g y + h)^2}{{c_1}^2}\right) - 1 = \dot{y}^2 \tag{10}$$

Se resuelve la integral haciendo un primer cambio de variable conveniente para simplificar la forma de la integral

$$z = \frac{\lambda g y + k}{C_1}$$

$$dz = \frac{\lambda g \, dy}{C_1}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\lambda g}{C_1} \int dx + C_2$$

Con esto, es claro ver que si se hace un segundo cambio de variable

$$z = \cosh u$$

$$dz = \sinh u \cdot du$$

Es una inegral que sale directa

$$\int du = \frac{\lambda g}{C_1} x + C_2$$

$$\cosh^{-1} z = \frac{\lambda g}{C_1} x + C_2$$

Cambiando las variables se obtiene una ecuacion para la forma en la que se dispone el cable para minimizar su energia potencial.

$$y = -\frac{k}{\lambda g} + \frac{C_1}{\lambda g} \cosh\left(\frac{\lambda g}{C_1} x + C_2\right)$$

References

[1] Autor Desconocido, *Título del Documento*, 2024. https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html%3Fid%3D4f226b3380e5827f6e000000%26assetKey%3DAS%253A271742314975233%25401441799824578&ved=2ahUKEwilp8f7m_qHAxUTSzABHTDGPSwQFnoECBkQAQ&usg=AOvVaw2zU_4HP9G3QtXjHtyKOYzc Accedido: 2024-08-16.

[2] Universidad del País Vasco, *Catenaria*, 2024. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/solido/catenaria/catenaria.html Accedido: 2024-08-16.