目录

一、实验目的

当下，数字电子产业正在迅速发展，其对科技进步有重大的作用。而作为数字电子产业的核心，集成电路的稳定性、可靠性备受关注。高性能的集成电路将大大加快数字电子产业的发展。这个时候，对数字电路的可靠性进行快速准确的评估就尤为重要。本次实验，我们将简述当下一些电路可靠性评估方法的优缺点，并围绕概率转移矩阵模型以及触发器可靠度评估的 F-PTM 方法 [1] 对其可靠性进行评估。

二、方法原理

为了计算时序逻辑电路的可靠性，我们采用概率转移矩阵（Probabilistic Transfer Matrices）的方法, 先用 F-PTM 求触发器的 PTM 值，再计算可靠性。

2.1 PTM 的定义及其计算

对电路 C 有 m 个输入标识为 $(x_1, x_2......x_n)$ 和 n 个输出 $(y_1, y_2......y_n)$, 则电路 C 的 PTM 定义为一个 $2^m \times 2^n$ 的矩阵 **PM**。PTM 即为一个电路的输入输出概率矩阵。

图 1 为基本逻辑门电路对于的 PTM[2]

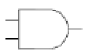
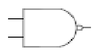
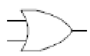
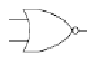
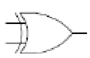
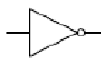
基本逻辑门	PTM	基本逻辑门	PTM
	$\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \\ p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \end{array}$		$\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \\ 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{array}$
	$\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \\ 1-p & p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \end{array}$		$\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \\ p & 1-p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{array}$
	$\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \\ 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{array}$		$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-P & P \\ P & 1-P \end{bmatrix} \end{array}$

图 1: 基本逻辑门电路对应的 PTM

在此我们假定在各个输入状态下错误输出概率都为 p。

对于组合逻辑电路的 PTM 计算则是根据逻辑门之间的关系将其划分为多个子电路，按以下运算规则进行运算：[3]

- 若两个子电路的 PTM 分布为 PM_1、PM_2, 则它们的串联电路的 PTM 为 $PM_1 \times PM_2$
- 若两个子电路的 PTM 分布为 PM_1、PM_2, 则它们的并联电路的 PTM 为 $PM_1 \bigotimes PM_2$

对于组合逻辑电路，基于电路整体的 PTM 就可以根据可靠性公式计算得到可靠度 R. 同时，基于编码的迭代 PTM 方法 [4][5] 可以计算大规模电路的可靠度。

对于组合逻辑电路可靠度的计算一般先建立门电路的 PTM，然后根据电路结构和矩阵运算规则计算整个组合电路的 PTM，再从电路的 PTM 中获得电路的可靠度信息. 但传统的 PTM 方法是根据电路的串联和并联结构来计算组合电路的 PTM，这对于时序逻辑电路并不适用。为了对时序逻辑电路的可靠性进行评估，众多学者提出来不同的方法。

2.2 时序逻辑电路的可靠性计算

对于电路的可靠性影响主要体现在门电路的噪声，供应电压的的线性收缩也导致软错误的发生更加频繁。物理失效机制也导致了诸如短路、延时、晶体管和互连等故障。

而为了对时序逻辑电路进行可靠性评估。有传统的蒙特卡洛方法，基于贝叶斯网络（Bayesian Network,BN）的时序电路可靠度分析方法 [6], 基于 PTM 的时序电路可靠性计算方法以及 $F-PTM$ 方法等。

蒙特卡洛方法基于随机数生成器来分析系统的随机活动，其具有良好的直接性以及较强的模拟能力，但是该方法的结果较为耗时且取得的结果难以预料。其计算可信度公式为

$$R = 1 - nErrors/nSamples \tag{1}$$

BN 方法则是基于条件概率分析以及图论对电路行为进行分析。通过构建贝叶斯网络，再根据贝叶斯网络，建立关联节点之间的条件概率分布，最后根据贝叶斯定理从根节点开始，逐个计算得到叶子节点即可得到电路的可靠度。但是 BN 方法假设时序电路中的触发器是理想电路，不会发生软错误. 因此，该方法会影响可靠性评估结果的精度。

基于 PTM 时序电路的可靠度估计（S-PTM）方法 [7]，则是将时序电路划分为输出逻辑模块和次态逻辑模块，通过计算第一个时间帧的电路 PTM 迭代计算第 k 格时间帧的 PTM，最后根据输入信号的概率分布估计电路的可靠性。

由于传统的 PTM 方法并不适用于时序逻辑电路可靠性的分析，而基于概率转移矩阵的触发器可靠度计算方法 (F-PTM) 则解决了这个问题。F-PTM 方法首先构建触发器电路的特征方程，再用电路 PTM 的判定定理计算触发器电路的 PTM，最后根据输入信号的概率分布函数计算得到电路的可靠性。

时序逻辑电路在第 k 时间帧的可靠度为

$$R = \|V_s * (PM_{s,k} \circ IM_s)\| \tag{2}$$

其中 V_s 为输入概率分布向量,$PM_{s,k}$ 为时序电路在第 k 帧时的 PTM 值，当电路无故障时，它的 ITM 为 IM_sY

接下来，我们将采用 F-PTM 的方法计算各个触发器的 PTM 值，并通过 Moore 机的 PTM 计算公式计算得到电路 PTM 的值，并以此计算电路的可靠度。

2.3 基于 RS 触发器的 Moore 机的 PTM 值计算

基本 RS 触发器由两个与非门构成，分别为 a 和 b, 其 PTM 值分别为 P_{nanda}, P_{nandb}, 为了简化实验流程，不考虑各种情况的不一致性，我们设定在给定输入的情况，对于与非门输出错误

结果概率为 p，同时我们不考虑存在导线的错误，则有

$$P_{nanda} = P_{nandb} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \\ p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

根据 RS 触发器额度输入输出方程，可以计算得到以 Q 为输出端的基本 R-S 锁存器的 PTM 为 P_{rs_latch}

$$P_{rs\_latch} = \begin{bmatrix} p^2+(1-p)p & (1-p)^2+(1-p)p \\ p^2+(1-p)^2 & 2p(1-p) \\ p^2+(1-p)p & (1-p)^2+(1-p)p \\ p^2+(1-p)^2 & 2p(1-p) \\ p^2+(1-p)p & (1-p)^2+(1-p)p \\ p^2+(1-p)^2 & p^2+p(1-p) \\ p^2+(1-p)p & (1-p)^2+p(1-p) \\ 2p(1-p) & p^2+(1-p)^2 \end{bmatrix}$$

同时基于参考文献，我们又可以得到正边沿 R-S 触发器的 PTM 计算公式

$$P_{rs\_FF\_e} = (I_{not} \bigotimes I_2 \bigotimes I_{not}) * P_{rs\_latch} \tag{3}$$

由于本次实验我们采用的基于 RS 触发器的 Moore 型时序电路, 基于一下 Moore 机的相关定理，我们可以得到在第 k 帧时的 PTM 的计算公式

$$PM_Y = F_{2k,k} \ltimes (PM_{h_k} \bigotimes PM_{h_{k-1}} \bigotimes \cdots \bigotimes PM_{h_1}) \ltimes PM_G \tag{4}$$

其中 PM_G 为输出逻辑 G 的 PTM，PM_{h_k} 是触发器 k 的 PTM,PM_Y 为输出逻辑模块的 PTM

$$PM_Z = (F_{2k,k} \bigotimes I_{2^m}) \ltimes (PM_{h_k} \bigotimes PM_{h_{k-1}} \bigotimes \cdots \bigotimes PM_{h_1} \bigotimes I_{2^m}) \ltimes PM_F \tag{5}$$

其中 PM_F 是次态逻辑 F 的 PTM，PM_{h_k} 是触发器 k 的 PTM，PM_Z 为次态逻辑模块的 PTM

$$PM_{s,k} = F_{k,2} \ltimes (I_{2^k} \bigotimes PM_{Z,k-1}) \ltimes PM_{Y,K} \tag{6}$$

其中，$PM_{Y,k}$ 是输出逻辑模块在 k 时间帧的 PTM，$PM_{Z,k-1}$ 是次态逻辑模块在第 k-1 时间帧的 PTM，$PM_{s,k}$ 为在第 k 时间帧的 PTM

三、实验内容

本次实验采用由正边沿 RS-触发器构成的二进制计数器，如图 2 所示。

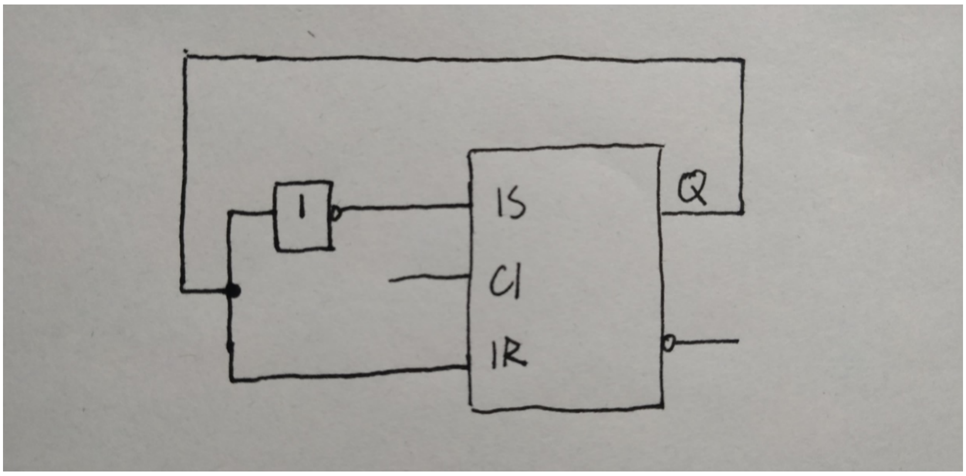


图 2: 实验电路

将 $S=\overline{Q^n}$、$R=Q^n$ 带入 RS 触发器的特性方程，得到 $Q^{n+1}=\overline{Q^n}$, 即一个二进制触发器。

其中，输出逻辑 G 为一输入一输出（一根导线），所以 $PM_G=I_2$

次态逻辑 F 由两部分组成，运用组合逻辑电路 PTM 的计算方法，得到 $PM_F=I_2\bigotimes NOT$. 其中，I_2 是大小为 2*2 的单位矩阵，NOT 是非门的概率转移矩阵。

通过《基于概率转移矩阵的时序电路可靠度估计方法》中定理 6 计算输出逻辑模块

$$PM_Y=F_{2,1}\ltimes(PM_{rs_FF})\ltimes PM_G \tag{7}$$

由定理 7 计算次态逻辑模块

$$PM_Z=(F_{2,1}\bigotimes I_2)\ltimes(PM_{rs_FF}\bigotimes I_2)\ltimes PM_F \tag{8}$$

由定理 8 可知

$$PM_{s,k}=F_{k,2}\ltimes(I_{2^k}\bigotimes PM_{Z,k-1})\ltimes PM_{Y,K} \tag{9}$$

把时序电路展开为 k 个时间帧后，采用时序电路 PYM 的计算模型，使用 matlab 编程计算出电路在 k 个时间帧的 PTM。在本实验中，第一个时序帧时，次态逻辑还未能对输出逻辑产生影响，所以，在第一个时序帧，时序电路的 PTM 为 $PM_{s,1}=PM_{Y,1}$ 从第二个时序帧开始，前一个输入形成的状态会影响电路输出逻辑的 PTM。

计算出 $PM_{s,k}$ 后，根据电路的输入概率分布，根据公式（2）估计整个时序电路的可靠度。

四、实验结论与总结

4.1 实验结论

基于 Matlab 在矩阵处理方面的优越性能，我们采用 Matlab 进行编程计算。在本次实验中，我们取差错概率 p=0.01，编程计算了 5 个时间帧的概率转移矩阵 PTM 和可靠度 R，并绘制了曲线图如图 3。

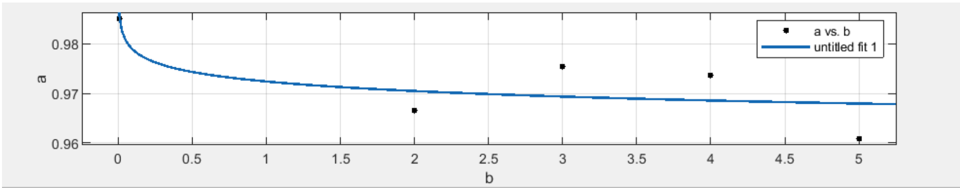


图 3: 实验结果曲线图

从图中可以看到，电路可靠度总体上随着迭代计算次数的增加而减小，并且减小的趋势逐渐减弱。可以推测，当迭代次数较多时，电路的可靠度会收敛于某个值。

4.2 实验总结

关于本次实验，我们对 PTM 有了清晰的理解，对其在时序电路可靠度估计方法的运用有了一定认识。不断阅读参考文献，我们也简单了解到了在电路可靠度估计上存在很多方法，而基于 PTM 的一些评估方法包括有 F-PTM,S-PTM, 编码迭代 PTM 模型等。对于单一文献，所能提供的信息较少，通过追踪作者的其它文献以及按时间线获取 PTM 评估时序电路可靠性相关的其它文献，我们将从文献中获取到的资料进行相互印证，从而确定自己的猜测。从本次实验，我们确实收获了很多

除此之外，对于老师所给参考文献（基于概率转移矩阵的时序电路可靠度估计方法），我们发现存在以下编辑错误：

- 定理 8 中“Mealy 机在第 k 时间帧的 PTM 为：”, 该公式对应的应当是 Moore 机的 PTM

参考文献

[1] 欧阳城添, 江建慧, 王曦. 触发器可靠度计算的 F-PTM 方法 [J]. 电子学报,2016,44(09):2219-2226.

[2] 陈莉莉. 基于 PTM 的集成电路可靠性评估方法研究 [D]. 江西理工大学,2018.

[3] S. Krishnaswamy, G. F. Viamontes, I. L. Markov and J. P. Hayes, "Accurate reliability evaluation and enhancement via probabilistic transfer matrices," Design, Automation and Test in Europe, 2005, pp. 282-287 Vol. 1, doi: 10.1109/DATE.2005.47.

[4] 肖杰, 江建慧, 朱旭光. 一种基于迭代 PTM 模型的电路可靠性评估方法 [J]. 计算机学报,2014,37(07):1508-1520.

[5] Jie Xiao, William Lee, Jianhui Jiang, Xuhua Yang, Circuit reliability estimation based on an iterative PTM model with hybrid coding,Microelectronics Journal,Volume 52,2016,Pages 117-123,ISSN 0026-2692.

[6] Lingasubramanian K , Bhanja S . Probabilistic Error Modeling for Sequential Logic[C]// Nanotechnology, 2007. IEEE-NANO 2007. 7th IEEE Conference on. IEEE, 2007.

[7] 欧阳城添, 江建慧. 基于概率转移矩阵的时序电路可靠度估计方法 [J]. 电子学报,2013,41(01):171-177.

Appendices

A 程序源代码

```
%%%%%%%%
%代码运行环境：Matlab R2019a
%代码运行结果：当前实验电路在不同迭代次数下的可靠度
%%%%%%%%

%% 清空环境变量
close all; clear; clc;

%% 设定参数初值
p=1e-2;%出错概率
I_not=[0 1;1 0];
PM_G=[1 0;0 1]; %在当前电路下

%% 触发器的PTM计算
%与非门的PTM
P_nand=[p 1-p;p 1-p;p 1-p;1-p p];
P_not=[1-p p;p 1-p];
M_nand=P_nand';
M_not=P_not';

%基本RS与非门锁存器的PTM
P_rs_latch=semi_tensor(P_nand,P_nand)

%正边沿R-S触发器的PTM
P_rs_FF_e=kron(kron(I_not,eye(2)),I_not)*P_rs_latch
%% 当前电路的输入输出逻辑PTM
PM_F=kron(eye(2),P_not);
PM_Y1=semi_tensor(semi_tensor(generateF(2,1),P_rs_FF_e),PM_G)
PM_Z1=semi_tensor(semi_tensor(kron(generateF(2,1),eye(2)),P_rs_FF_e),PM_F)
PM_S1=PM_Y1
PM_S2=semi_tensor(semi_tensor(generateF(1,2),kron(eye(2),PM_Z1)),PM_Y1)

%% 触发器的ITM计算
p=0;
%与非门的ITM
I_nand=[p 1-p;p 1-p;p 1-p;1-p p];
P_not=[1-p p;p 1-p];
M_nand=P_nand';
M_not=P_not';

%基本RS与非门锁存器的ITM
P_rs_latch=semi_tensor(P_nand,P_nand)

%正边沿R-S触发器的ITM
P_rs_FF_e=kron(kron(I_not,eye(2)),I_not)*P_rs_latch
%% 当前电路的输入输出逻辑ITM
PM_G=[1 0;0 1];
```

```
PM_F=kron(eye(2),P_not);
PM_Y1=semi_tensor(semi_tensor(generateF(2,1),P_rs_FF_e),PM_G)
PM_Z1=semi_tensor(semi_tensor(kron(generateF(2,1),eye(2)),P_rs_FF_e),PM_F)
IM_S1=PM_Y1
IM_S2=semi_tensor(semi_tensor(generateF(1,2),kron(eye(2),PM_Z1)),PM_Y1)

%% 电路可靠度计算
V1=ones(1,8)/8
R1=V1*(PM_S1.*IM_S1)

V2=ones(1,32)/32
R2=V2*(PM_S2.*IM_S2)

sum(R1)
sum(R2)

%% 计算半张量积
function T=semi_tensor(A,B)
   [i,j] = size(A);
   [m,n]=size(B);
   q=lcm(j,m);
   eye(q/j);
   T1=kron(A,eye(q/j));
   T2=kron(B,eye(q/m));
   T=T1*T2;
end

%% 生成F(m,k)
function F=generateF(m,k)
      F=zeros(2^m,2^(m*k));
      for i=1:2^m
           sum=0
           for j=0:k-1
                sum=sum+i*(2^m)^j;
           end
           F(i,sum)=1;
      end
end
```