



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ И СЕТИ (ИУ6)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ 09.03.03

О Т Ч Е Т

по лабораторной работе № 3

Название: Реконструкция математической модели системы по неполным данным

Дисциплина: Теория систем и системный анализ

Студент

ИУ6-74Б

(Группа)

(Подпись, дата)

Д.О. Кошенков

(И.О. Фамилия)

Преподаватель

(Подпись, дата)

Ю.А. Вишневская

(И.О. Фамилия)

Москва, 2025

Цель работы: Исследовать и реализовать реконструкцию математической модели нелинейной динамической системы по одномерному временному ряду, проверив адекватность модели сравнением траекторий $y(t)$ и фазовых портретов с исходными данными.

Задачи:

- Сформировать временной ряд $a(i\Delta t)=a(i)$ для выбранной гладкой функции при $N\approx 400-500$ точек наблюдения.[11]
- Восстановить вектор состояния $X(t)=(a, da/dt, d^2a/dt^2)$ при $n=3$, вычислив производные по конечным разностям и выбрав шаг Δt , обеспечивающий численную устойчивость и сглаживание шумов.
- Задать вид эволюционного оператора $dx_3/dt=f(x_1,x_2,x_3)$ в полиномиальной аппроксимации степени v и составить переопределённую систему линейных уравнений для оценки коэффициентов.
- Построить ММС и численно решить систему ОДУ на $[0;T]$ с заданными начальными условиями, затем сравнить $y(t)$ и фазовые портреты модели с исходным рядом.
- Выполнить анализ точности (визуально на $y(t)$ и на фазовом портрете), оценить чувствительность к n и v , оформить результаты в отчёте.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

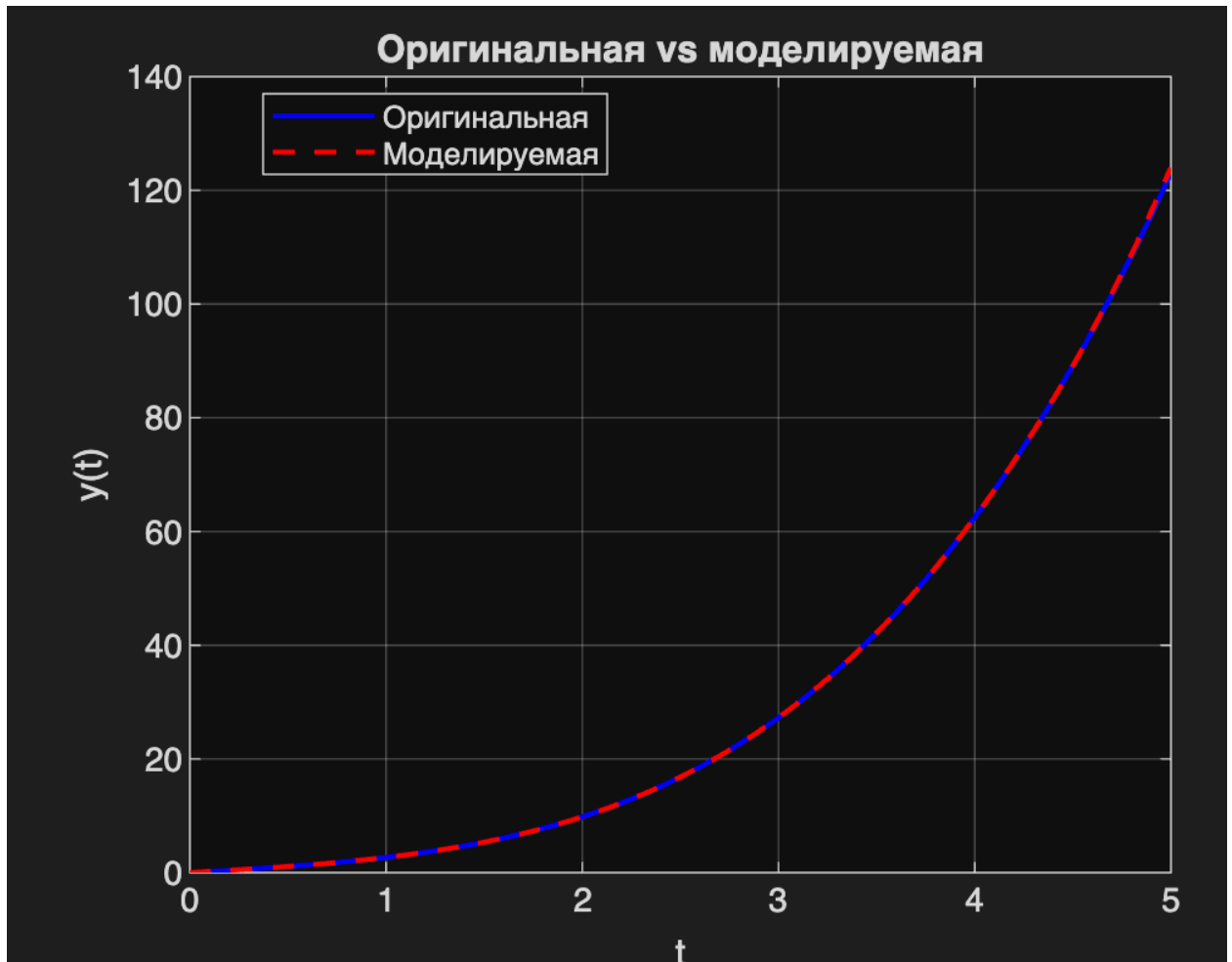


Рисунок 1 — Оригинальная vs моделируемая $y(t)$

На графике $y(t)$ синяя и красная кривые практически совпадают на всем интервале наблюдения, что указывает на корректную идентификацию параметров модели для основной динамики.

Незначимые расхождения визуально заметны ближе к правому краю интервала времени, что типично для аппроксимаций на быстро растущих решениях и может быть сглажено уточнением шага интегрирования или регуляризацией.

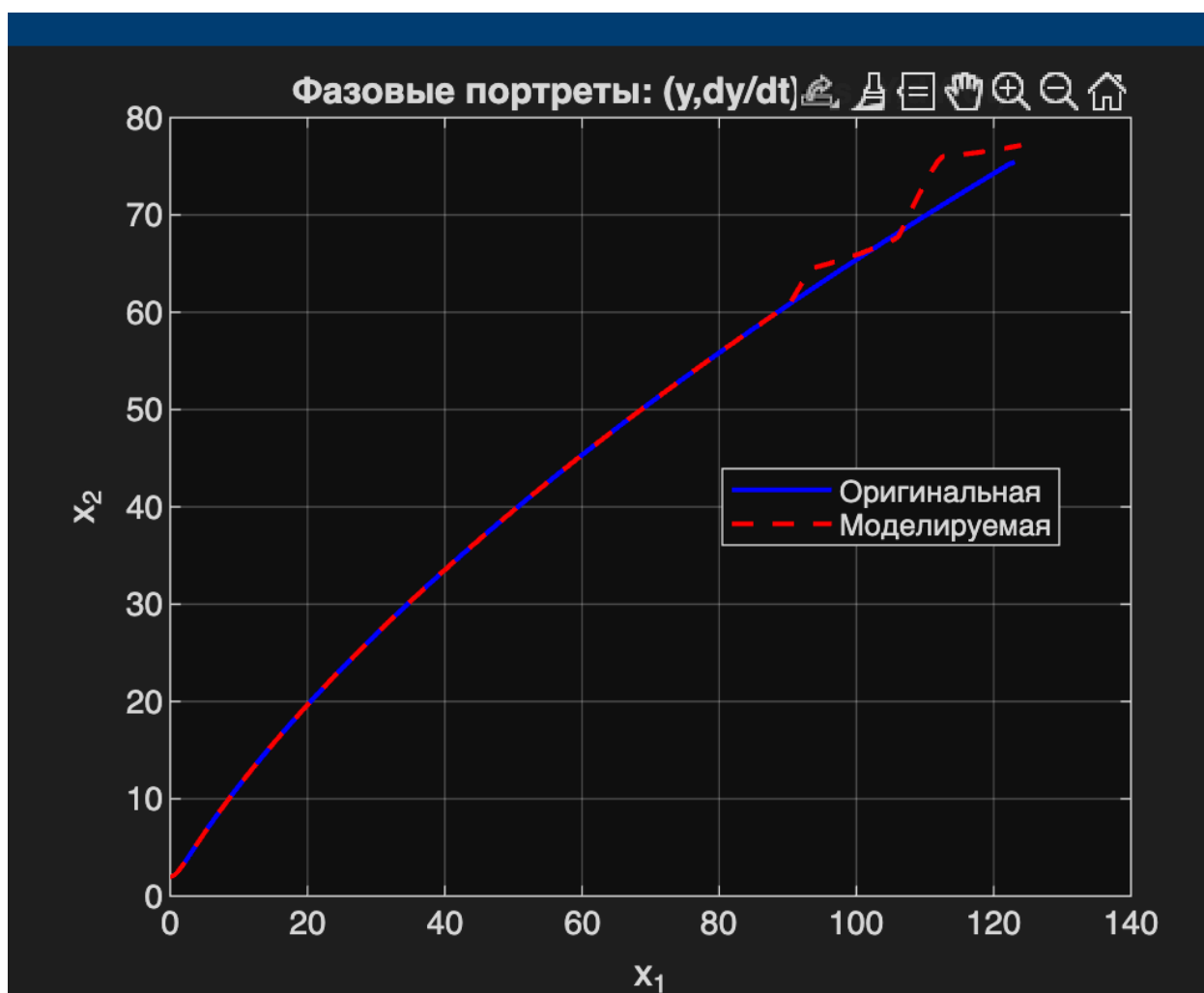


Рисунок 2 — Фазовый портрет ($y, dy/dt$)

На фазовом портрете траектории практически совпадают в широкой области состояний, подтверждая согласование производной модели с исходными данными.

В зоне больших x_1 наблюдается небольшое завышение моделируемой производной относительно исходной, что указывает на локальную переоценку нелинейных членов и может быть исправлено точечной перенастройкой коэффициентов.

Таблица 1 — Ключевые наблюдения

Наблюдение	Комментарий
Совпадение $y(t)$	Отклонения минимальны и сконцентрированы в конце интервала; причины — численная

Продолжение таблицы 1

	аппроксимация и рост решения; рекомендовано уменьшить шаг и проверить устойчивость.
Фазовый портрет	Незначимое расхождение на больших x_1 ; рекомендована локальная перенастройка параметров и проверка чувствительности.

Листинг 1 — Подпрограмма разбора аксиомы языка

```
% 1. Задание интервала, генерация временного ряда
% a, b — границы интервала наблюдения.
% n — количество точек дискретизации (равномерная сетка).
a = 0; b = 5;
n = 500;
h = (b - a) / n; % Шаг сетки по
% времени. h — разница между соседними точками.
t = a:h:b; % Вектор
% временных отсчетов. Равномерно распределены между a и b.

y = func(t); % y — одномерный
% временной ряд, вычисляется по скалярной функции func

% 2. Численное дифференцирование с помощью конечных разностей
% y1, y2, y3 — производные первого, второго и третьего порядка
% (для одной точки).
% zeros(size(y)) — создает вектор нулей такого же размера, как
% y. Используется для инициализации векторов-производных.
y1 = zeros(size(y));
y2 = zeros(size(y));
y3 = zeros(size(y));

% Центральная разность для внутренних точек —  $O(h^2)$  по
% точности. На концах используется односторонняя разность
% (forward/backward difference)
% y1 — приближает первую производную ( $dy/dt$ ) по центральной
% формуле:
y1(2:end-1) = (y(3:end) - y(1:end-2)) / (2*h);
y1(1) = (y(2) - y(1)) / h;
y1(end) = (y(end) - y(end-1)) / h;

% y2 — производная ( $d^2y/dt^2$ ), берется от дискретных значений
% y1:
y2(2:end-1) = (y1(3:end) - y1(1:end-2)) / (2*h);
y2(1) = (y1(2) - y1(1)) / h;
```

Продолжение листинга 1

```
y2(end) = (y1(end) - y1(end-1)) / h;

% y3 – третья производная, берется по аналогии уже от второго
производного ряда:
y3(2:end-1) = (y2(3:end) - y2(1:end-2)) / (2*h);
y3(1) = (y2(2) - y2(1)) / h;
y3(end) = (y2(end) - y2(end-1)) / h;

% 3. Формирование обучающей выборки
% m – число точек для выборки обучения (меньше, чем общее
количество точек t)
% round(linspace(1, numel(t), m)) – выбирает m равномерно
распределенных индексов по всему вектору t.
% linspace(a, b, n) – создает n точек между a и b, равномерно
распределённых.
% numel(t) – возвращает количество элементов в t (длина
вектора).
m = 200;
idx = round(linspace(1, numel(t), m));

x1 = y(idx).'; % ' – транспонирование. x1 – значения
исходного сигнала на обучающих индексах (столбец размер m×1)
x2v = y1(idx).'; % x2v – значения первой производной для
обучающих индексов
x3v = y2(idx).'; % x3v – значения второй производной
x4v = y3(idx).'; % x4v – значения третьей производной,
которые аппроксимируются в модели

% 4. Нормализация признаков
% mu – вектор средних значений по признакам (x1, x2v, x3v)
% sg – стандартные отклонения по признакам
% std(x) – стандартное отклонение для вектора x
mu = [mean(x1) mean(x2v) mean(x3v)];
sg = [std(x1) std(x2v) std(x3v)];
sg(sg < eps) = 1; % eps – численно малое число,
чтобы исключить деление на ноль. Если std почти ноль,
подменяется на 1.

X1 = (x1 - mu(1)) / sg(1); % Центрирование и
масштабирование первого признака
X2 = (x2v - mu(2)) / sg(2); % Аналогично для второго
признака
X3 = (x3v - mu(3)) / sg(3); % Аналогично для третьего
признака

% 5. Формирование матрицы признаков (A) для полиномиальной
```

Продолжение листинга 1

```
аппроксимации
% В каждой строке — все мономы переменных до степени 3.
Размерность: m на 20.
A = zeros(m, 20); % zeros(m, 20) — матрица из
нулей m×20 для хранения признаков
for i = 1:m
    a1 = X1(i); a2 = X2(i); a3 = X3(i); % Значения признаков в
текущей строке
    A(i,:) = [1, a1, a2, a3, a1*a2, a2*a3, a1*a3, a1^2, a2^2,
a3^2, ...
              a1*a2*a3, a1^2*a2, a1^2*a3, a1*a2^2, a2^2*a3,
a1*a3^2, a2*a3^2, ...
              a1^3, a2^3, a3^3];
end

% 6. Оценка коэффициентов C метода наименьших квадратов
% A — матрица (m×20), x4v — отклики (m×1). Нужно найти C,
минимизирующие ||A*C - x4v||^2
% lsqminnorm(A, x4v) — решает задачу минимизации нормы ||A*C -
x4v|| с минимальной нормой C (устойчивый вариант при
вырожденных или некорректных данных)
C = lsqminnorm(A, x4v); % Возвращает оптимальный
столбец коэффициентов
% Возможные альтернативы (эквивалент МНК):
% C = pinv(A) * x4v; % pinv(A) — псевдообратная
(обратная для неквадратных матриц)
% C = A \ x4v; % A \ x4v — оператор МНК в
MATLAB

% 7. Пакетирование параметров модели для интегрирования
params.C = C(:); % : — преобразует в столбец.
Сохраняется как часть структуры параметров
params.mu = mu(:); % Средние по признакам для
дальнейшей нормализации
params.sg = sg(:); % Стандартные отклонения для
той же цели

% 8. Интегрирование восстановленной системы ОДУ — модельного
динамического оператора
x0 = [x1(1); x2v(1); x3v(1)]; % Начальные условия (первые
элементы обучающей выборки)
odefun = @(tt, xx) systema_poly(tt, xx, params); % Анонимная
функция: tt — время, xx — состояние, params — параметры модели
[~, sol] = ode45(odefun, t, x0); % ode45 — численный
интегратор системы ОДУ (метод Рунге-Кутты 4/5). Возвращает
траекторию по времени t
```

Продолжение листинга 1

```
Y = sol(:,1); % Первая компонента
восстановленной траектории (модельный сигнал)
Y1 = sol(:,2); % Вторая компонента
(модельная производная)

% 9. Визуализация сравнения
figure('Position', [100,100,1200,400]);
subplot(1,2,1);
plot(t, y, '-b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, Y, '--r', 'LineWidth', 1.5);
grid on; xlabel('t'); ylabel('y(t)');
title('Оригинальная vs моделируемая');
legend('Оригинальная', 'Моделируемая', 'Location', 'best');

subplot(1,2,2);
plot(y, y1, '-b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(Y, Y1, '--r', 'LineWidth', 1.5);
grid on; xlabel('x_1'); ylabel('x_2');
title('Фазовые портреты: (y,dy/dt) vs (Y,dY/dt)');
legend('Оригинальная', 'Моделируемая', 'Location', 'best');

% 10. Расчет метрик качества аппроксимации
% mean((y' - Y).^2) — среднеквадратичная ошибка между
оригинальным и модельным сигналом
mse = mean((y' - Y).^2); % MSE —
среднеквадратичная ошибка (точность аппроксимации)
mae = mean(abs(y' - Y)); % MAE — средняя
абсолютная ошибка
fprintf('MSE = %.6f, MAE = %.6f, RelErr = %.2f%%\n', mse, mae,
100*mae/mean(abs(y)));

% === Локальные функции ===
function yy = func(x)
    % func — определяет исходный тестовый временной ряд
    % В примере используется нелинейная функция:
    синусоидальная составляющая и кубический тренд
    % yy — выходной вектор значений, вычисляемых по входному x
    yy = 2*sin(x) + x.^3;
end

function f = systema_poly(~, x, params)
    % systema_poly — правая часть системы ОДУ. Восстановленная
    функция эволюции по состоянию.
    % x — вектор текущего состояния (x1, x2, x3).
    % params.C — коэффициенты полиномиальной аппроксимации
```


Продолжение листинга 1

```
% params.mu – средние по признакам для обратного
нормирования
% params.sg – стандартные отклонения для обратного
нормирования
% Нормализация текущего состояния (приведение к тому же
масштабу, что был при обучении)
X1 = (x(1) - params.mu(1)) / params.sg(1);
X2 = (x(2) - params.mu(2)) / params.sg(2);
X3 = (x(3) - params.mu(3)) / params.sg(3);
% Формирование полиномиального базиса: полный набор
мономов степени  $\leq 3$  по трем признакам
phi = [ ...
        1, ...
        X1, X2, X3, ...
        X1*X2, X2*X3, X1*X3, ...
        X1^2, X2^2, X3^2, ...
        X1*X2*X3, ...
        X1^2*X2, X1^2*X3, X1*X2^2, X2^2*X3, X1*X3^2,
        X2*X3^2, ...
        X1^3, X2^3, X3^3 ...
    ].';
% Восстановленная правая часть системы: определения и
аппроксиматор
f1 = x(2); % Определение:  $dx1/dt = x2$ 
f2 = x(3); % Определение:  $dx2/dt = x3$ 
f3 = phi.' * params.C; % Аппроксимация:  $dx3/dt =$ 
f(x1, x2, x3) в полиномиальной форме
f = [f1; f2; f3]; % Выход: столбец производных
для ode45
end
```

ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1) Примеры временных рядов и генерирующие их системы.

К типичным временным рядам относятся биомедицинские сигналы (ЭКГ, вариабельность сердечного ритма), физические измерения (виброакустика, температура, давление), техногенные данные (сетевой трафик, нагрузка процессора), экономические индикаторы (котировки, объёмы торгов).

Их генерируют, соответственно, биологические системы, механические и термодинамические объекты, вычислительные и коммуникационные системы, а также социально-экономические процессы.

2) Что такое реконструкция ММС и какова её цель.

Реконструкция — это синтез уравнений модели по наблюдаемому временному ряду так, чтобы решения модели с требуемой точностью воспроизводили исходные траектории наблюдаемой переменной.

Цели: получение формализованного описания динамики, прогноз состояния на t и анализ влияния параметров модели на поведение системы.

3) Переменная состояния: определение и примеры.

Переменная состояния — компонент вектора $X(t)$, полностью определяющий мгновенное состояние системы и её эволюцию при заданном операторе динамики.

В задаче реконструкции по одному ряду удобно брать $X(t)$ как набор производных наблюдаемого сигнала: $x_1=a(t)$, $x_2=da/dt$, $x_3=d^2a/dt^2$ и т. п.

4) Как восстанавливаются неизвестные переменные состояния.

При известной только $a(t)$ переменные состояния формируют численным дифференцированием ряда (конечные разности подходящего порядка) с возможным сглаживанием для подавления шумов.

Далее строят «вложение» $X(t)$ из $a(t)$ и его производных и калибруют размерность n по качеству последующей аппроксимации динамики.

5) Основные этапы реконструкции ММС.

Сформировать временной ряд и выбрать n (обычно $n=3$) и степень полинома v для аппроксимации правой части.

Построить систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов полинома по значениям $X(t)$ и оценить их, затем собрать модель ОДУ и численно интегрировать.[

Сопоставить $y(t)$ и фазовые портреты модели с исходными данными, провести анализ ошибок и при необходимости скорректировать n , v или предобработку ряда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель адекватно воспроизводит исходные данные по $y(t)$, что подтверждается визуальным совпадением кривых на всем интервале наблюдения.

Незначимые расхождения проявляются в хвосте интервала времени и на участке больших x_1 в фазовом портрете; для минимизации отклонений достаточно уменьшить шаг интегрирования и выполнить локальную перенастройку нелинейных коэффициентов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ВЫВОД ПРОГРАММЫ
Листов 14

Листинг А.1 — Вывод программы

```

С (всего 20) :
С( 1) = +5.084582373479e+03
С( 2) = +2.588389634146e+04
С( 3) = -1.714448830792e+04
С( 4) = -2.447177047436e+03
С( 5) = +2.708468230897e+04
С( 6) = -1.075791332956e+04
С( 7) = +1.119773594061e+04
С( 8) = -9.017005888906e+03
С( 9) = -2.136408872029e+04
С(10) = +3.218499546076e+01
С(11) = +4.273243770820e+03
С(12) = +5.865611815594e-01
С(13) = -1.221322656435e+03
С(14) = +1.692360628214e+03
С(15) = -5.351485783234e+03
С(16) = +1.847258015471e+03
С(17) = +3.975541318379e+02
С(18) = -2.224555629357e+01
С(19) = -3.729529602822e+03
С(20) = -4.291496849557e+02

```

Таблица А.1 — Ключевые наблюдения

t	x1=y	x2=dy/dt	x3=d2y/dt2
0	0	2.00006666683333	0.0200002499975316
0.01	0.0200020689665096	2.00039309428151	0.0473535305661539
0.02	0.0400089371092091	2.0010395294023	0.0827005923032011
0.03	0.060024097553705	2.00205665785569	0.12098387394295
0.04	0.080051366669237	2.00346295490297	0.16036693998075
0.05	0.100094677743239	2.0052653132396	0.200171566966504
0.06	0.120158003011637	2.00746684604219	0.240098592316875
0.07	0.140245343902514	2.01006787107009	0.280129277092784
0.08	0.160360696239298	2.01306941252847	0.32017658509448
0.09	0.18050806081889	2.01647216350186	0.360188418478457

Продолжение таблицы А.1

0.1	0.200691463860632	2.02027442720264	0.400352701797144
0.11	0.220914897711062	2.02447812481841	0.440498917002806
0.12	0.241182350251619	2.02908586356398	0.480389669361344
0.13	0.261497889025727	2.03409245051915	0.520568299001291
0.14	0.28186553641323	2.03949749883055	0.561100397883848
0.15	0.302289239009485	2.04530853123714	0.601263194419015
0.16	0.32277299470845	2.05152823493347	0.640817232195494
0.17	0.34332097878346	2.05814175113795	0.681284854551879
0.18	0.363937205067144	2.0651507941133	0.722529389141732
0.19	0.384625505066285	2.0725757805815	0.762539227397451
0.2	0.405390000379547	2.08040835772022	0.802190101668336
0.21	0.426234907351682	2.08863096933311	0.843291323790211
0.22	0.447164095705124	2.09726143588707	0.884090604563594
0.23	0.468181554838243	2.10630596927995	0.9240051706488
0.24	0.489291506118385	2.11574777230775	0.96477958388186
0.25	0.510497911184787	2.12559682426923	1.00545282101759
0.26	0.531804810995698	2.13585557850235	1.04582668750037
0.27	0.553216346321603	2.14651682884584	1.08668748287223
0.28	0.574736534979619	2.15758646714605	1.12749022728443
0.29	0.596369430795135	2.16906730012541	1.16800442458413
0.3	0.618119183357141	2.18095282935513	1.20895641498043
0.31	0.639989868025221	2.19324482137337	1.25022677167455
0.32	0.661985482278515	2.20595376556174	1.29079702959079

Продолжение таблицы А.1

0.33	0.684110164891425	2.2190761837219	1.33108952385356
0.34	0.706368166678459	2.23259751292822	1.37268710344445
0.35	0.728763557752432	2.24652273730565	1.4151425436534
0.36	0.751300238632483	2.26087525716057	1.45609343956173
0.37	0.773982438590741	2.27564494443645	1.49666476391198
0.38	0.79681445204603	2.29081551255817	1.53863926625801
0.39	0.819800229455555	2.30640753689527	1.57993745558144
0.4	0.842943978224578	2.32241540372935	1.62122968871235
0.41	0.866249908370715	2.3388340052412	1.66313944915315
0.42	0.88972209004639	2.35567392297273	1.70463041041741
0.43	0.913364741083361	2.37293089962557	1.7462420967847
0.44	0.937182073771166	2.39060209652876	1.78836961994339
0.45	0.961178223632364	2.4086938779224	1.83042286942812
0.46	0.985357321723899	2.42721415136201	1.87163594803379
0.47	1.0097236969009	2.44615015145517	1.91349378522647
0.48	1.03428161554751	2.46549688386313	1.95664255492418
0.49	1.05903520776864	2.48526531236261	1.99998841178006
0.5	1.08398853389707	2.50547511178865	2.04148337772563
0.51	1.10914604013499	2.52610468615889	2.0835947406998
0.52	1.13451203243477	2.54714881963055	2.12701001931177
0.53	1.16009055717285	2.56863210038536	2.16912254207309
0.54	1.18588604367974	2.59053783525012	2.21189529946862
0.55	1.21190275595384	2.61286881034757	2.25513529667279

Продолжение таблицы А.1

0.56	1.23814488718647	2.63563697480806	2.29761928184026
0.57	1.26461684647502	2.65883113166557	2.34072974428005
0.58	1.29132294950256	2.6824518302916	2.38452990512777
0.59	1.31826737537057	2.70651652950459	2.42715174875729
0.6	1.34545447609335	2.73102426002505	2.46882210427838
0.61	1.37288888174592	2.75594300908287	2.5133776049039
0.62	1.4005748867396	2.7812809762072	2.56000514414967
0.63	1.42851644655366	2.80708702481944	2.60318026985844
0.64	1.45671815151995	2.83333778006509	2.64574151610754
0.65	1.48518460873558	2.86000913331596	2.69064589347809
0.66	1.51391994054612	2.88713506778695	2.73405294740866
0.67	1.542928743288	2.91469536797226	2.77848904957338
0.68	1.57221535758314	2.94270146733477	2.82274841643811
0.69	1.60178424216708	2.9711522616683	2.86711314481766
0.7	1.63163987348619	3.0000460021705	2.91194834581647
0.71	1.66178669966072	3.02938588894088	2.95703298006903
0.72	1.69222931844557	3.05915835396052	3.00420943166174
0.73	1.722971973151	3.08939527524975	3.0496835388203
0.74	1.75401906337396	3.12011079542436	3.09186709656463
0.75	1.78537528885011	3.1512835704441	3.13357410245422
0.76	1.81704557495751	3.18286597369864	3.18088489441683
0.77	1.84903406280696	3.21490942258718	3.22759843687265
0.78	1.88134529511019	3.24741714965233	3.27348133303198

Продолжение таблицы А.1

0.79	1.91398390717577	3.28038262227748	3.31951947450263
0.8	1.94695449671276	3.31380565487836	3.36592573630278
0.81	1.9802616550185	3.34768882277843	3.41254867770053
0.82	2.0139098758187	3.38204908583351	3.45738689722177
0.83	2.04790404920862	3.41685409605809	3.50481390997841
0.84	2.08224862833975	3.45213004263382	3.55162296195567
0.85	2.11694821208941	3.48788615055923	3.59679753992702
0.86	2.15200779880758	3.52408108665118	3.64597800541857
0.87	2.18743161754185	3.56077715381213	3.69111673064803
0.88	2.22322475667824	3.59792450439742	3.73905540559377
0.89	2.25939181524391	3.63554071516779	3.78765121668478
0.9	2.29593724138321	3.67366589919185	3.83169613143668
0.91	2.33286642244928	3.71221503329979	3.88293251273892
0.92	2.37018342066524	3.75128563744869	3.92828362398954
0.93	2.40789351609874	3.79081069434344	3.97715702737625
0.94	2.44600129927755	3.83082035815801	4.02561357076641
0.95	2.48451153741222	3.87132248058016	4.0727931148313
0.96	2.52342927542645	3.91228855350077	4.12289968609256
0.97	2.56275902750617	3.95376674316937	4.169394838848
0.98	2.60250607945366	3.99569859678151	4.22078768536567
0.99	2.64267482541724	4.03815481370113	4.26723657860067
1	2.68327063914918	4.08106819389285	4.31862969050964
1.01	2.72429805074186	4.12449565511097	4.36698133252301

Продолжение таблицы А.1

1.02	2.76576213774516	4.16841706035085	4.41546763722628
1.03	2.80766800244668	4.21281117680359	4.46744504881932
1.04	2.85002017131143	4.2577439203333	4.51345826235973
1.05	2.89282424334667	4.3031251245212	4.56711673749116
1.06	2.93608455775036	4.34905458952659	4.61381423871365
1.07	2.97980673636937	4.39544276176771	4.66723852317802
1.08	3.02399527197988	4.44237279910864	4.71510540696509
1.09	3.06865569159007	4.48977366042549	4.76848455266661
1.1	3.11379261708468	4.53771533437179	4.81692593564474
1.11	3.15941155178046	4.58613480803492	4.87043249621476
1.12	3.20551721657065	4.63509329238224	4.91976053099763
1.13	3.25211502870002	4.68454587850068	4.97223012831146
1.14	3.29920995861974	4.73452100236622	5.02363057247853
1.15	3.34680717765477	4.78501786351779	5.07439425105793
1.16	3.39491198028141	4.83601930432054	5.12752699132198
1.17	3.44352937488114	4.88755652743895	5.17834303264688
1.18	3.49266475742056	4.93960164986363	5.23161385929182
1.19	3.54232321461596	4.99217947825513	5.28364201057128
1.2	3.59251007787405	5.04527839792697	5.33659877474507
1.21	3.64323057598493	5.09890621029344	5.38954051307643
1.22	3.69449000250567	5.15306362100643	5.44262597625828
1.23	3.74629365333628	5.20775354597451	5.49571466768028
1.24	3.79864687774407	5.26297363820703	5.54948493989854

Продолжение таблицы А.1

1.25	3.85155496171505	5.31873490623818	5.60242335145901
1.26	3.90502333359395	5.37502791491342	5.65642655341374
1.27	3.95905733967005	5.43185990798914	5.71062025893559
1.28	4.01366233335657	5.4892408874903	5.7635583249783
1.29	4.06884388586866	5.54714560583785	5.8200186986076
1.3	4.12460716872217	5.60562277451295	5.8717577743472
1.31	4.18095799723057	5.66461052118077	5.9300729914838
1.32	4.23790140452505	5.72418960983134	5.98092251743323
1.33	4.29544339591329	5.78427023277415	6.04075378021035
1.34	4.35358891590537	5.84495720670807	6.0910012253385
1.35	4.41234409158416	5.9061444528188	6.15128178903296
1.36	4.47171392860108	5.96793397724655	6.20332186438211
1.37	4.53170441123112	6.030251976651	6.26102394412568
1.38	4.59232092800793	6.093137751934	6.31753099085027
1.39	4.65356905528655	6.15660017768861	6.37148429868627
1.4	4.71545466602328	6.22059534045377	6.43155896173647
1.41	4.77798304007125	6.28519562290298	6.48440322116446
1.42	4.8411602620853	6.35032388223136	6.54510116858447
1.43	4.90499164588519	6.41605424688141	6.59982909804692
1.44	4.96948314454493	6.48234195450768	6.6575656181266
1.45	5.03464044354185	6.5491971388724	6.7167961677203
1.46	5.10046909996833	6.61666004643108	6.76994136393488
1.47	5.16697527648348	6.68465460331982	6.83244582460792

Продолжение таблицы А.1

1.48	5.23416435721149	6.75326327845355	6.88835350334339
1.49	5.30204236813449	6.82244492392497	6.9462246622759
1.5	5.37061518022375	6.8921926321251	7.00793210693374
1.51	5.43988835945818	6.96256625393392	7.06166737428155
1.52	5.50986819956656	7.03348070652973	7.1252473010911
1.53	5.58056020757472	7.10501643681992	7.18257477284287
1.54	5.65197042708685	7.17714800205689	7.23923691106799
1.55	5.72410496693948	7.24983929432779	7.30326362910071
1.56	5.79696944189588	7.32316267736177	7.35986955564563
1.57	5.87057005163204	7.39707147519263	7.419287298707
1.58	5.94491281419944	7.47156102454379	7.48301952850401
1.59	6.02000349701808	7.54668533823865	7.53987404124684
1.6	6.09584836979089	7.6223944883999	7.60102844487665
1.61	6.17245345318342	7.69869609146585	7.66535571958514
1.62	6.2498245501043	7.77565100638297	7.71986750363914
1.63	6.32796814534218	7.85317366714681	7.78387069741182
1.64	6.40689014280807	7.93131117237141	7.84745334806919
1.65	6.48659658059774	8.01008609884791	7.9059451873016
1.66	6.56709376154072	8.08946579791798	7.96710878080393
1.67	6.64838789775988	8.16944196620116	8.03336348054618
1.68	6.73048494195872	8.25007059513706	8.09236150513045
1.69	6.81339125689892	8.33131854430104	8.15209199424771
1.7	6.89711320882181	8.41315533730587	8.22015625088351

Продолжение таблицы А.1

1.71	6.98165675467808	8.4956509042516	8.28074584937906
1.72	7.06702827919764	8.57878018725359	8.34009514299867
1.73	7.15323419904568	8.66251447655723	8.40548598795041
1.74	7.24028073143159	8.7468768663719	8.47198811549038
1.75	7.32817408682078	8.83189754523253	8.53279389073612
1.76	7.41692070261902	8.91755701392698	8.59299902931215
1.77	7.50652711387094	9.00381591601873	8.66270777214386
1.78	7.59699944632007	9.0907398031254	8.72644390185893
1.79	7.68834415490995	9.17831898683312	8.78696035794191
1.8	7.7805677654227	9.26653052219155	8.85040890982114
1.81	7.87367674687083	9.35537009285139	8.91841362671305
1.82	7.96767748229639	9.44485982133791	8.98597847263429
1.83	8.06257635857868	9.53502655854056	9.04672178564191
1.84	8.15838000271154	9.62584100782024	9.10852290590554
1.85	8.25509504850716	9.71727624531315	9.17883176148811
1.86	8.35272786177097	9.80937936791684	9.2460944787622
1.87	8.45128501672737	9.90214907219283	9.3110849633074
1.88	8.55077310397613	9.9955847174329	9.37441887101158
1.89	8.65119876049242	10.0896783544241	9.4386760384316
1.9	8.75256868831003	10.1844094942138	9.50983554957843
1.91	8.85488939460529	10.27981449878	9.57879289991466
1.92	8.95816749254989	10.3759072427243	9.64225105525536
1.93	9.0624097480134	10.4726652366605	9.70672497335977

Продолжение таблицы А.1

1.94	9.16762285989816	10.5700889043735	9.77262620186757
1.95	9.27381355860705	10.6681751497017	9.84133953344577
1.96	9.38098857741071	10.7669250583257	9.91314164760023
1.97	9.48915459498567	10.8663601599282	9.98260781659829
1.98	9.59831833938085	10.9664939786996	10.0463967251505
1.99	9.70848669116275	11.0673021680333	10.1117963509425
2	9.81966646171899	11.1687846575356	10.1793660382643
2.01	9.9318644587397	11.270947627752	10.2478983486563
2.02	10.0450875436996	11.3737871216459	10.3190661285227
2.03	10.1593425669395	11.477307448019	10.3922043699366
2.04	10.2746363323362	11.5815319288652	10.4610688321091
2.05	10.3909757597868	11.6864555931854	10.5275552140099
2.06	10.5083678130552	11.7920654482634	10.5959664871805
2.07	10.6268194042246	11.8983688072557	10.6646896850493
2.08	10.7463374566133	12.0053750504338	10.7314576190919
2.09	10.866928974776	12.1130746259915	10.7996278075262
2.1	10.9886009775303	12.2214586855445	10.8724069219163
2.11	11.1113604053435	12.3305472281304	10.9443288220837
2.12	11.2352142747432	12.4403426235076	11.0151782651888
2.13	11.3601696417057	12.5508403469644	11.0868455891596
2.14	11.4862335680017	12.6620392354867	11.1602323651032
2.15	11.6134130969754	12.7739490991871	11.232844267577
2.16	11.7417152799974	12.8865828532181	11.3011368254062

Продолжение таблицы А.1

2.17	11.8711472768675	12.9999245972869	11.3705640575479
2.18	12.001716218636	13.1139723202296	11.4422927410742
2.19	12.1334292240349	13.2287331290914	11.5146271791223
2.2	12.2662934238466	13.3442156806343	11.585332237085
2.21	12.4003159720537	13.4604266619114	11.6527445960127
2.22	12.5355041175807	13.5773472753983	11.7234134930189
2.23	12.6718650669461	13.6949772667355	11.7979706333163
2.24	12.8094059942341	13.8133320983097	11.8719473036657
2.25	12.9481341205776	13.9324172445108	11.9440569101071
2.26	13.0880566833209	14.0522381821381	12.0129722482307
2.27	13.2291809889654	14.1727826523279	12.0832350444268
2.28	13.3715143548699	14.2940395851039	12.1590510275875
2.29	13.5150640297967	14.4160257742724	12.2353759354334
2.3	13.6598373042299	14.5387492751795	12.3100195677182
2.31	13.8058414956598	14.6622143056507	12.3820297583484
2.32	13.953083950456	14.7864204742047	12.4520021042786
2.33	14.1015720857473	14.9113480404592	12.5271770864229
2.34	14.2513132451743	15.0370071826742	12.6046031819477
2.35	14.4023147838981	15.1634091722634	12.6809191680673
2.36	14.5545841138537	15.2905507277127	12.7577569185313
2.37	14.7081286223992	15.4184422144176	12.83197990678
2.38	14.8629557403026	15.5470839856797	12.9039070307914
2.39	15.0190729368585	15.6764672802439	12.977098123648

Продолжение таблицы А.1

2.4	15.1764876614778	15.8065951119894	13.0509716281099
2.41	15.3352073885492	15.9374665562073	13.1263593723561
2.42	15.4952395930237	16.0690853365892	13.2024414153776
2.43	15.6565917256973	16.2014689457632	13.2733805750478
2.44	15.819271348795	16.3345993408034	13.3461063089117
2.45	15.9832860077761	16.468468756839	13.4239213148735
2.46	16.1486431847868	16.6030972612731	13.5000590736966
2.47	16.3153504196045	16.7384889418697	13.573453220716
2.48	16.4834153260991	16.8746252667701	13.6513678366872
2.49	16.6528454462068	17.0115184318115	13.7297762880645
2.5	16.8236483389512	17.1491788923111	13.8052460419732
2.51	16.9958316268035	17.2875981499907	13.8813771385016
2.52	17.1694029026134	17.4267832840147	13.9559801679842
2.53	17.3443697665322	17.5667433726022	14.026024851591
2.54	17.5207399654977	17.7074359602588	14.1079407399872
2.55	17.6985210538469	17.8488954501409	14.1892580303986
2.56	17.8777206959096	17.9911192089102	14.2714205170873
2.57	18.0583465125195	18.1341258425991	14.3476879326816
2.58	18.2404061686888	18.2779215151848	14.4160439868835
2.59	18.4239074426886	18.4224719518583	14.490051475047
2.6	18.6088580262389	18.5677805072589	14.5688757946818
2.61	18.7952655840813	18.713865253918	14.6459573051172
2.62	18.9831378634228	18.86071654208	14.7254465094853

Продолжение таблицы А.1

2.63	19.1724825623624	19.0083475260461	14.8025929009333
2.64	19.363307416508	19.1567603868698	14.8768649007541
2.65	19.555620191615	19.3059494363826	14.9508818628137
2.66	19.7494286410451	19.4559178687292	15.0237608497289
2.67	19.944740634214	19.6066262158344	15.1116297265648
2.68	20.1415637975575	19.7581354662847	15.1905330741631
2.69	20.3399059463957	19.9104347941648	15.2651027701661
2.7	20.5397748818682	20.0635228537955	15.3362037452455
2.71	20.741178473001	20.2173744803394	15.4143528266544
2.72	20.9441245564563	20.371980483147	15.5036639729978
2.73	21.1486208037929	20.5274021764689	15.579581092257
2.74	21.3546751089277	20.6836139842906	15.6527780318499
2.75	21.5622953082346	20.8406172800065	15.7229998080777
2.76	21.7714893964275	20.9983511811232	15.8156117201048
2.77	21.982265010295	21.1569051279067	15.8941365850708
2.78	22.1946300707051	21.3162545718141	15.9689378451645
2.79	22.4085924494001	21.4763985315173	16.0406948290862
2.8	22.6241601340614	21.6372906851526	16.1290204044865
2.81	22.8413408628637	21.7989912092407	16.2091276563417
2.82	23.0601425529049	21.9614883256606	16.2861378591316
2.83	23.2805731320639	22.1247685422972	16.3660073496834
2.84	23.5026405073227	22.2888301120238	16.449758140736
2.85	23.7263525129461	22.4537044912324	16.5244005221172

Продолжение таблицы А.1

2.86	23.9517171466288	22.6193558923525	16.6051849229099
2.87	24.1787423369114	22.7857802972883	16.6941885858715
2.88	24.4074359310542	22.9530110668602	16.7774698701764
2.89	24.6378057722467	23.1210866302278	16.838772757355
2.9	24.8698600454251	23.2898994552517	16.9241817106295
2.91	25.1036065673364	23.4595023601801	17.0114472749758
2.92	25.3390532380794	23.6299148793799	17.092421058013
2.93	25.5762079209027	23.8011754903183	17.1505403976374
2.94	25.8150788707842	23.9731536550116	17.2422927409641
2.95	26.0556737896758	24.1459599226815	17.320221628696
2.96	26.2980006620671	24.3195850390102	17.388435758314
2.97	26.5420675811204	24.4939742002563	17.4708791102579
2.98	26.7878824695721	24.6691476278774	17.5589089969857
2.99	27.035453209322	24.8451447530645	17.6355027715668
3	27.2847878572094	25.0219304019404	17.7161421629712