

Análisis exhaustivo y modelo simplificado de un sensor de fibra óptica para desplazamiento angular

Gorka Zubia¹, Joseba Zubia^{2,3}, Josu Amorebieta⁴, Gotzon Aldabaldetreku² y Gaizka Durana²

1. Dpto. Expresión Gráfica y Proyectos de Ingeniería, Universidad del País Vasco UPV/EHU, Bilbao, 48013, España.
2. Dpto. Ing. de Comunicaciones, Universidad del País Vasco UPV/EHU, Bilbao, 48013, España.
3. EHU Quantum Center, Universidad del País Vasco UPV/EHU, Bilbao, 48013, España.
4. Dpto. Matemática Aplicada, Universidad del País Vasco UPV/EHU, Bilbao, 48013, España.

Contact: Gorka Zubia (gorka.zubia@ehu.eus)

ABSTRACT:

Accurate tilt measurement is crucial in aerospace and structural monitoring, particularly under harsh conditions. We present an analytical model for intensity-based optical fiber displacement sensors measuring multi-axis tilt. The model describes optical coupling into receiving fiber arrays as a function of fiber geometry, numerical aperture NA, and target distance. We experimentally validated the model with bifurcated, trifurcated, differential, symmetric, and quasi-random 19-fiber bundles, demonstrating accuracy up to $\pm 20^\circ$ tilt and 15 mm distances. Results confirm theoretical predictions, showing differential configurations suppress noise, resolve tilt-axis ambiguity, and enhance sensitivity. This enables robust, cost-effective, real-time multi-axis tilt sensing suitable for Industry 5.0 and advanced instrumentation.

Key words: instrumentation, optical fiber sensors, optical fiber displacement sensor, photonic sensor, structural health monitoring, optical fiber devices.

1.- Introducción

La Industria 5.0 plantea una fabricación más humana, sostenible y resiliente, donde la monitorización avanzada es clave para integrar máquinas y personas[1]. En este contexto, medir ángulos de inclinación con precisión es esencial para la seguridad y rendimiento estructural e industrial, por ejemplo, en álabes de turbinas aeroespaciales o detección temprana en puentes y presas. Los sensores de fibra óptica, inmunes a interferencias electromagnéticas (EMI/EMC), compactos y capaces de sensado remoto, son ideales para estos entornos [2, 3]. Aunque senso-

res ópticos tipo FBG y Fabry–Pérot ofrecen alta precisión, requieren sistemas complejos. Los sensores ópticos basados en intensidad (OFDS) son más económicos y simples, midiendo potencia óptica reflejada en superficies inclinadas [4, 5, 6], pero necesitan calibración y presentan dificultad para distinguir múltiples ejes. Aunque estas limitaciones mejoran mediante configuraciones diferenciales avanzadas [7], aún no existe un modelo analítico unificado para sensores multieje basados en intensidad [8]. Presentamos un modelo matemático que relaciona la inclinación y la potencia medida en configuraciones multifibra, analizando cómo parámetros

geométricos, NA y distribución espacial afectan la sensibilidad, linealidad y rango. Validamos experimentalmente el modelo con haces bifurcados, trifurcados, diferenciales, simétricos y quasi-aleatorios, confirmando precisión hasta $\pm 15^\circ$ y distancias hasta 15 mm. Nuestro diseño trifurcado mide simultáneamente distancia y ángulo, simplificando significativamente la medición.

2.- Modelo matemático

El principio de operación de un sensor angular de fibra óptica (OFDS) se ilustra en la Fig. 1, donde se presenta el problema general de medición abordado en este trabajo: un haz de fibras ópticas emite luz hacia un objetivo que puede desplazarse en la dirección z e inclinarse en los ángulos $\{\alpha_x, \alpha_y\}$. El sensor captura las reflexiones a distintas distancias y orientaciones sin necesidad de óptica externa adicional. La luz que emerge de la fibra transmisora (TF) puede describirse mediante un perfil gaussiano. En [9] se presentó el perfil del haz gaussiano en coordenadas polares. Aquí lo reescribimos en coordenadas cartesianas. Si la potencia óptica total incidente es P_0 y el radio de la cintura del haz es [10],

$$\omega(z) \approx z^2 \tan^2 \theta_0 \quad \text{con } \text{NA} = \sin \theta_0, \quad (1)$$

la irradiancia $I(x, y, z)$ a la distancia z [11, 12]:

$$I(z) = \frac{2 P_0}{\pi \omega^2(z)} \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{\omega^2(z)}\right). \quad (2)$$

2.1.- Efecto de la inclinación del espejo y transformación de coordenadas

Al inclinar el espejo un ángulo α alrededor del eje X , se generan desplazamientos tanto angulares como lineales en el punto de incidencia del haz en la fibra receptora (RF). Para describir este desplazamiento, resulta conveniente definir un nuevo sistema de coordenadas $\{x_R, y_R, z_R\}$ rotado un ángulo 2α con respecto al sistema original $\{x, y, z\}$. Este giro de 2α se debe a que, en una reflexión especular, el ángulo reflejado se duplica respecto al ángulo incidente, Fig. 2.

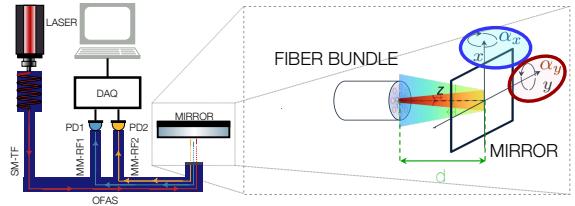


Figura 1. (a) Montaje experimental típico de un OFDS. (b) Propagación desde el extremo del haz.

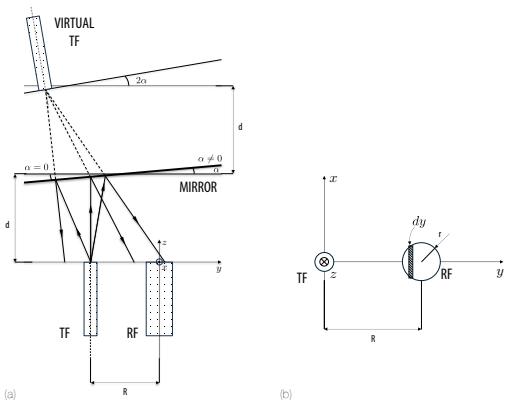


Figura 2. Definición de los parámetros geométricos del problema. R es la distancia entre la TF y la RF; r es el radio de la RF; α_x es el ángulo de la superficie reflectante respecto al eje x . d es la distancia TF/RF-espejo para $\alpha_x = 0^\circ$. (b) Procedimiento de integración en la RF.

Sea d la posición del centro del espejo inclinado sobre el eje Y en el sistema original. La transformación al sistema rotado (en torno al eje X) queda definida por:

$$x_R = x, \quad (3)$$

$$y_R = y \cos 2\alpha - d \sin 2\alpha, \quad (4)$$

$$z_R = d + d \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \approx d \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}\right). \quad (5)$$

En el sistema rotado, el haz reflejado llega a la RF con un factor adicional $\cos 2\alpha$:

$$I(z) = \frac{2\Gamma P_0 \cos 2\alpha}{\pi \omega^2(z_R)} \exp\left(-\frac{2(x^2 + y_R^2)}{\omega^2(z_R)}\right), \quad (6)$$

donde,

$$\omega^2(z_R) \approx d^2(1 + \cos 2\alpha)^2 \frac{\tan^2 \theta_0}{\cos^2(2\alpha)}. \quad (7)$$

2.2.- Potencia total recolectada

Para determinar la potencia total recolectada por la RF, se integra $I(z)$ sobre la superficie de la RF. Sea r el radio de la RF, que está ubicada a una distancia R del eje de rotación del espejo, Fig. 2. Entonces,

$$P_R(R, \alpha, d) = \Gamma \frac{2P_o \cos^3 2\alpha}{\pi d^2 (1 + \cos 2\alpha)^2 \tan^2 \theta_0} \times \iint_{R_x} \exp\left(-\frac{2(x^2 + y_R^2) \cos^2 2\alpha}{d^2 (1 + \cos 2\alpha)^2 \tan^2 \theta_0}\right) dx \quad (8)$$

donde R_x indica la región de integración correspondiente al área de la RF y Γ es la reflectividad del espejo. Integrando respecto a x ,

$$\int_{-\sqrt{r^2 - (y-R)^2}}^{\sqrt{r^2 - (y-R)^2}} \exp\left(-\frac{2x^2 \cos^2 2\alpha}{d^2 (1 + \cos 2\alpha)^2 \tan^2 \theta_0}\right) dx \quad (9)$$

donde $\text{erf}(\cdot)$ es la función error y

$$a = \frac{2 \cos^2(2\alpha)}{d^2, (1 + \cos 2\alpha)^2, \tan^2 \theta_0}.$$

La integral restante queda:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{R-r}^{R+r} \text{erf}\left(\sqrt{a} \sqrt{r^2 - (y-R)^2}\right) \times \exp\left(-a(y \cos 2\alpha - d \sin 2\alpha)^2\right) dy. \quad (10)$$

2.3.- Solución aproximada y potencia detectada

La integral derivada en Eqs. (9) y (10) puede evaluarse numéricamente. Sin embargo, es más conveniente aproximarla para observar explícitamente cómo la potencia detectada depende de distintos parámetros. Aplicando el teorema del valor medio, aproximamos evaluando la irradiancia en el centro de la RF, $y = R$. Por lo tanto,

$$P_{R_i} = \frac{2\sqrt{2}r \Gamma P_0 \cos^2(2\alpha)}{\sqrt{\pi} d (1 + \cos 2\alpha) \tan \theta_0} \times \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2}r \cos 2\alpha}{d (1 + \cos 2\alpha) \tan \theta_0}\right) \times \exp\left(-\frac{2(R \cos 2\alpha - d \sin 2\alpha)^2 \cos^2(2\alpha)}{d^2 (1 + \cos 2\alpha)^2 \tan^2 \theta_0}\right). \quad (11)$$

3.- Resultados

3.1.- Haz bifurcado

La Fig. 4 muestra la respuesta representativa de un haz con una TF y una RF, de acuerdo con la de la Fig. 2b. Los parámetros son $\text{NA} = 0,09$, $r = 50 \mu\text{m}$, $R = 600 \mu\text{m}$, y ángulos de inclinación $\alpha_x \in \{0, 20\}^\circ$ en incrementos de 2° (véase Fig. 4a). En la Fig. 4b se detalla la respuesta para ángulos pequeños, de 0° a 2° , cada $0,2^\circ$. La potencia detectada aumenta al inclinar la superficie reflectante; a 20° se recibe aproximadamente 60 veces más potencia que a 0° . La respuesta del haz bifurcado es *bivaluada*; una misma potencia detectada corresponde a dos distancias diferentes, complicando así su uso en diseños de sensores, salvo que se restrinja el rango operativo a una sola región.

3.2.- Haz bifurcado simétrico

Una forma de obtener una respuesta equilibrada frente a ángulos positivos y negativos es utilizar dos RFs idénticas dispuestas simétricamente respecto a la TF, situadas a $+R$ y $-R$, ver Fig. 4c. Definimos la responsividad $\eta(\alpha_x, d)$ como,

$$\eta(\alpha_x, d) = \frac{P_{R_2}(-R)}{P_{R_1}(R)} = \exp\left(-\frac{8R \sin 2\alpha_x \cos^3 2\alpha_x}{d (1 + \cos 2\alpha_x)^2 \tan^2 \theta_0}\right). \quad (12)$$

Una ventaja de esta configuración es la cancelación del ruido común mediante la relación de potencias, proporcionando una respuesta simétrica para rotaciones positivas y negativas.

4.- Validación del modelo

Para validar el modelo teórico de la Sec. 2-, diseñamos el montaje experimental de la Fig. 5. Este consta de siete elementos: una fuente láser Fabry-Perot de sobremesa de 660 nm (Thorlabs), el haz de fibras, un espejo que actúa como superficie reflectante, na etapa de desplazamiento lineal (Zaber), otra de desplazamiento angular (Zaber), varios fotodetectores (Thorlabs), y una tarjeta de adquisición (Keithley). Para la validación se utilizaron cuatro haces bifurcados con

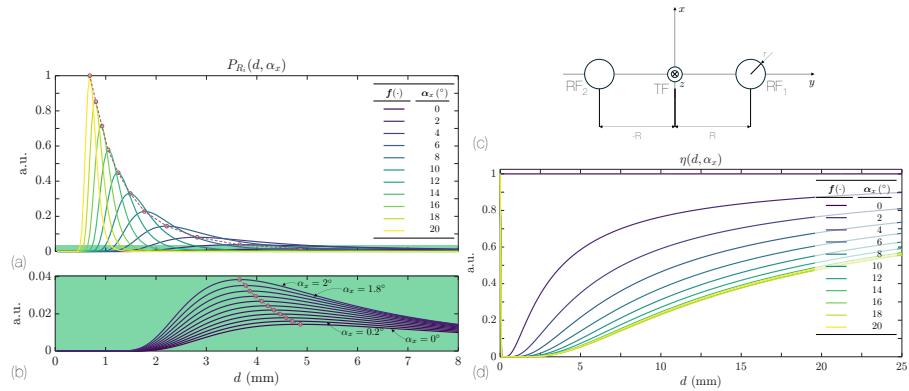


Figura 4. Izquierda: potencia recibida por la RF de un haz bifurcado según Ec. (11) para α_x . Los puntos rojos indican la posición del máximo d_{max} de la potencia P_{R_i} . La línea roja discontinua une estos máximos. (a) Respuesta para $NA = 0,09$, $r = 50 \mu\text{m}$, $R = 600 \mu\text{m}$ y $\alpha_x \in \{0, 20\}^\circ$. (b) Detalle entre $\alpha_x = 0^\circ$ y 2° cada 0.2° . Derecha: (c) Geometría del haz bifurcado simétrico. (d) Relación de potencia detectada $\eta(\alpha_x, d)$ según la Ec. (12) para $\alpha_x \in \{0, 20\}^\circ$, con pasos de 2° y $\theta_0 = 12,71^\circ$, $r = 50 \mu\text{m}$ y $R = 600 \mu\text{m}$.

diferentes diámetros de núcleo y número de fibras, además de un haz trifurcado. Tres de estos haces están construidos a partir de dos fibras con diámetros de núcleo de $\{50, 200, 600\} \mu\text{m}$. Además, incluimos un haz comercial distribuido aleatoriamente (Thorlabs), con 19 fibras (9-TF y 10-RF), todas con núcleos de $200 \mu\text{m}$ y $NA = 0,22$. En comparación, este diseño proporciona una iluminación más uniforme y recoge más potencia.

4.1.- Haces bifurcados

La Fig. 6a muestra las medidas de desplazamiento lineal, y la Fig. 6b, el desplazamiento angular. Observamos una muy buena concordan-
cia entre los resultados experimentales y el modelo teórico desarrollado. En el desplazamiento lineal, apreciamos que la posición del máximo de potencia se desplaza hacia mayores distan-
cias a medida que aumenta la separación TF-RF. El modelo predice una disminución abrupta
después del máximo, aunque a grandes distan-
cias la potencia experimental y la teórica conver-
gen asintoticamente. Las diferencias observadas
a grandes distancias se deben a dos razones: el
haz reflejado se expande más allá del núcleo de

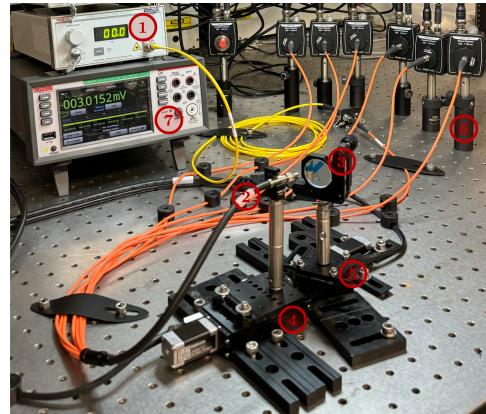


Figura 5. Sensor angular típico de fibra óptica (OFDS). Montaje experimental: (1) fuente láser de 660 nm , (2) haz de fibras ópticas, (3) un espejo, (4) una etapa lineal y otra (5) angular, (6) fotodetectores cuadráticos PD_i y (7) una tarjeta DAQ.

la fibra, siendo parcialmente recortado por el re-
vestimiento, lo que disminuye la potencia detec-
tada. También, la excitación de modos superio-
res en la fibra TF distorsiona el perfil gaussiano
ideal del haz, aumentando su divergencia y redu-
ciendo la eficiencia del acoplamiento en la RF.
La Fig. 6b muestra las medidas angulares para
diferentes distancias. Se observa una res-
puesta asimétrica (Sec. 3.1.-), con un máxi-
mo despla-
zado hacia ángulos positivos. La potencia detec-
tada disminuye con la distancia y la respuesta se

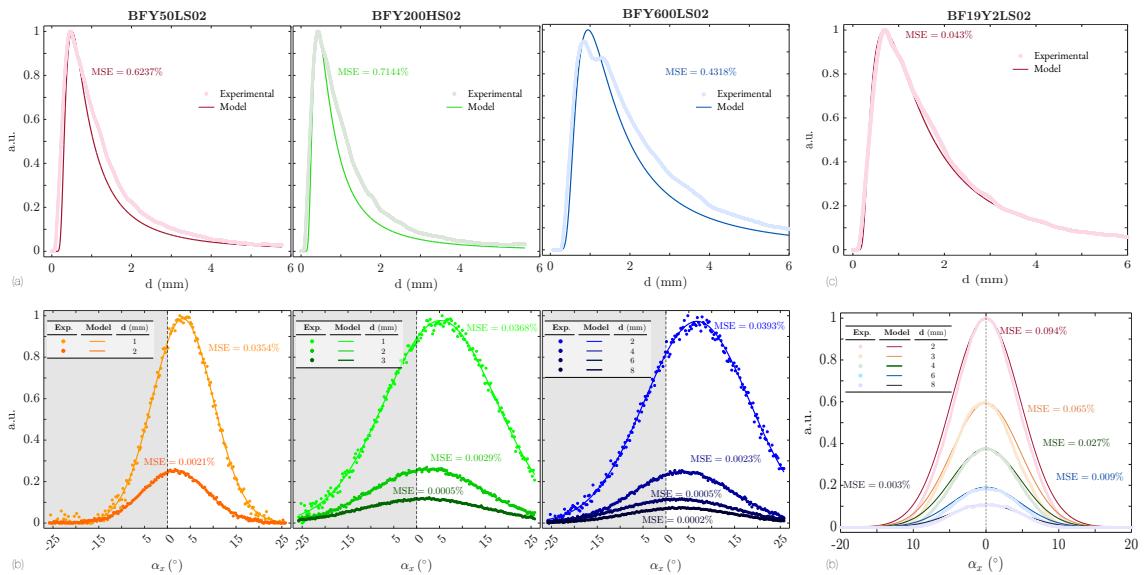


Figura 6. Izquierda: respuestas experimentales y teóricas de los tres haces bifurcados con diámetros $\{50, 200, 600\} \mu\text{m}$. (a) Distancia para $\alpha_x = 0^\circ$. (b) Ángulo para distancias fijas, con $\alpha_x \in [-25, 25]^\circ$. Derecha: lo mismo pero para el BF19Y2LS02. (c) Respuesta frente a la distancia para $\alpha_x = 0^\circ$. (d) Respuesta frente al ángulo para distancias fijas y $\alpha_x \in [-25, 25]^\circ$.

vuelve más simétrica, acercándose el máximo a $\alpha_x = 0^\circ$. Esto ocurre con más rapidez cuanto menor es el tamaño del haz bifurcado. Por ejemplo, para el haz de $50 \mu\text{m}$ la respuesta se vuelve simétrica a solo 2 mm , mientras que para el de $600 \mu\text{m}$ se requiere una distancia de 8 mm .

4.2.- Haz bifurcado de 19 fibras

La Fig. 6c muestra los resultados del haz de 19 fibras. En este caso, la coincidencia con el modelo teórico es aún mejor, atribuible al efecto promediador del conjunto de fibras, que minimiza desalineamientos individuales. Gracias a la casi aleatoriedad, la respuesta angular es simétrica, con un máximo centrado en $\alpha_x = 0^\circ$. Este haz presenta una sensibilidad inversamente proporcional a la distancia, aunque pierde sensibilidad rápidamente fuera del rango $\alpha_x \in [-10, 10]^\circ$. La respuesta sigue siendo bivaluada, lo que impide distinguir el sentido de rotación.

4.3.- Haz trifurcado

Este consta de dos colecciones de RF en $\{R_1 \approx 200, R_2 \approx 400\} \mu\text{m}$. La coincidencia es buena pero inferior respecto a los anteriores, dado

que el modelo considera una configuración lineal mientras que la experimental es azimutal. La discrepancia aparece en la zona muerta de la segunda colección RF, que es mayor en el modelo teórico debido a proyecciones más cortas en la estructura experimental.

5.- Conclusiones

En este trabajo desarrollamos y validamos experimentalmente un modelo analítico unificado para sensores angulares de fibra óptica basados en intensidad, capaces de medir inclinaciones respecto a uno o más ejes ortogonales. El modelo integra propagación gaussiana, geometría y reflexión, vinculando analíticamente la potencia detectada con los ángulos de inclinación sin recurrir a calibraciones puramente empíricas. Analizamos diversas configuraciones: haces bifurcados simples, simétricos, diferenciales, trifurcados y distribuidos aleatoriamente con 19 fibras. La simetría geométrica y la detección diferencial reducen considerablemente el ruido y la ambigüedad en las medidas. La validación experimental para distancias de hasta 15 mm y án-

gulos hasta $\pm 20^\circ$ confirma que el modelo describe con precisión el comportamiento tanto angular como dependiente de la distancia. Haces con mayor número de fibras muestran respuestas más estables y menos ambiguas, ideales para la detección multiaxial fiable. En comparación con otros sensores angulares de fibra óptica reportados, nuestro modelo ofrece tres ventajas. Una expresión analítica cerrada para inferir directamente la inclinación; adaptabilidad flexible a diversas configuraciones de fibras y mayor rechazo al ruido mediante detección diferencial. Estas permiten mediciones angulares multieje compactas y fiables, adecuadas para entornos hostiles o con limitaciones de espacio, desde inclinómetros industriales hasta componentes aeroespaciales. Como trabajo futuro ampliaremos el modelo a rangos angulares mayores y blancos no especulares.

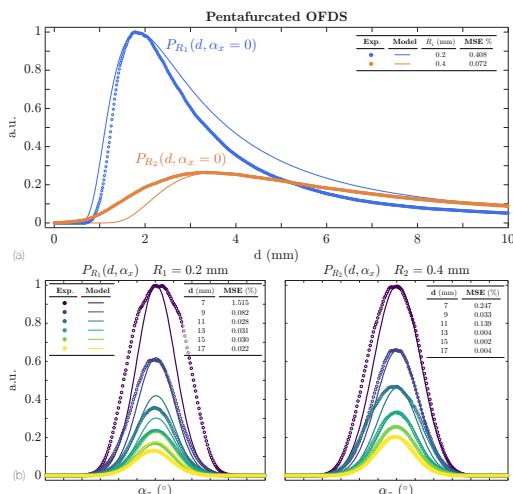


Figura 7. Respuestas experimentales y teóricas de las dos colecciones RF del haz trifurcado. (a) Distancia para $\alpha_x = 0^\circ$. (b) Ángulo $\alpha_x \in [-15, 15]^\circ$.

Referencias

- [1] European Commission, “Industry 5.0,” *Tech. Rep.*, 2021.
- [2] A. Sharbirin *et al.*, “High-performance and 3d-printed two-mode fiber optic tilt sensor,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 37, no. 4, pp. 1140–1146, 2019.
- [3] J. Wang *et al.*, “A bio-inspired fiber-optic attitude sensor for multi-axis tilt measurement,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 41, no. 21, pp. 6844–6851, 2023.
- [4] G. Zubia *et al.*, “High-perfromance optical fiber displacement sensor with extended linear range and sensitivity,” *Sensors, MDPI*, vol. 13, no. 6, pp. 7385–7398, 2025.
- [5] G. Zubia *et al.*, “Design and performance analysis of optical fiber displacement sensors for enhanced range and linearity,” *SPIE*, vol. 12893, pp. 199–206, 2024.
- [6] G. Zubia *et al.*, “An algorithm to optimize the opti-cal sensor design for tip clearance and tip timing measurements,” *SPIE*, vol. 12139, pp. 194–200, May 2022.
- [7] D. Vadapalli *et al.*, “Optical fiber-based intensity-modulated small lean angle measurement sensor,” *MAPAN*, vol. 36, no. 4, pp. 925–930, 2021.
- [8] Y. Shimizu *et al.*, “Optical Sensors for Multi-Axis Angle and Displacement Measurement Using Grating Reflectors,” *Sensors*, vol. 19, no. 23, p. 5289, Jan. 2019.
- [9] G. Zubia *et al.*, “In-depth analysis of optical fiber displacement sensor design process,” *Journal of Optics*, Aug. 2024.
- [10] G. Zubia *et al.*, “A new method to design trifurcated optical fiber displacement sensors,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 24, no. 2, pp. 1532–1545, Jan. 2024.
- [11] G. Zubia *et al.*, “Mathematical modeling and experimental validation of optical fiber sensors for simultaneous measurement of angular and linear displacements,” *SPIE*, vol.12999, pp. 40–47, 2024.
- [12] G. Zubia *et al.*, “Theoretical method for the design of bifurcated fiber optic displacement sensors,” *OPTOEL 2023*, 2024.