

Неостановимая Машина Добра
@mashine_of_goodness

Подписаться

Задонатить

16 февраля

Музыкальная арифметика: в поисках кода гармонии

Задумывались ли вы, почему одни сочетания звуков ласкают слух, а другие вызывают дискомфорт? Почему одни музыкальные фразы кажутся завершенными, а другие – будто обрываются на полуслове? Музыкальная арифметика: в поисках кода гармонии

Задумывались ли вы, почему одни сочетания звуков ласкают слух, а другие вызывают дискомфорт? Почему одни музыкальные фразы кажутся завершенными, а другие – будто обрываются на полуслове? Дело не только в мелодии, ритме или таланте композитора. Есть ещё гармония – таинственная система отношений между звуками, которая, как выяснилось ещё в древности, тесно связана с... арифметикой.

Пифагор ещё в шестом столетии до нашей эры заметил: если взять струну и зажать её посередине, получится звук на октаву выше. А если в отношении 3:2 – получится квинта, основа многих гармонических построений. И если Пифагору приходилось полагаться на монохорд и собственные уши, то сегодня у нас есть инструмент куда более мощный – компьютер. С его помощью мы можем не просто повторить опыты древних, но и пойти гораздо дальше.

Эта статья – не очередной пересказ основ теории музыки. Это приглашение к исследованию. Мы посмотрим на музыку глазами математика (и немного – программиста), разберем звук на составляющие, увидим, как рождаются консонансы и диссонансы, и, вооружившись кодом на Julia, попытаемся нащупать те самые "правила", которые управляют гармонией не только в созвучиях, но и в ладах, и в построении целых музыкальных произведений.

И кто знает, может, ковыряясь в этих цифровых звуковых потрохах, мы случайно наткнемся на что-нибудь эдакое. На новый 'рецепт' гармонии, или на объяснение, почему та самая песня так цепляет. А может, просто чуть лучше поймем, как устроен мир звуков. Тоже неплохо, согласитесь?

I. АнATOMия звука: симфония внутри одной ноты

Закройте глаза и представьте гитарную струну. Одно касание пальца – и вот, рождается звук. Нам кажется, это просто один тон, но на самом деле, это – целый космос колебаний, скрытая симфония, невидимая обычному глазу.

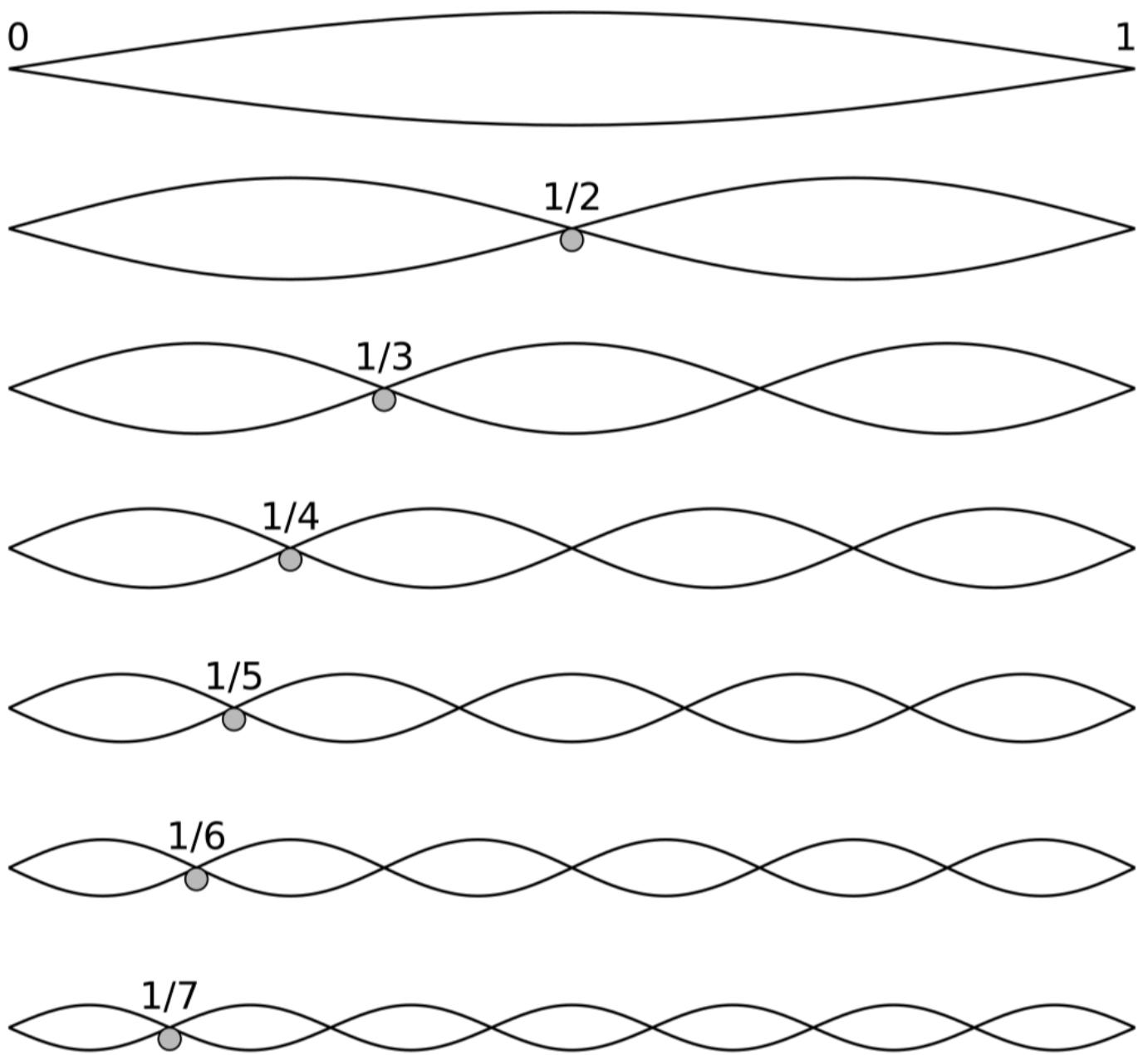
Фокус со струной:

Вспомните, как меняется звук гитарной струны, когда вы прижимаете ее в разных точках. Попробуйте этот "звуковой микроскоп" на любой струне:

1. Извлеките чистый звук.
2. Легко касаясь середины струны (12-й лад на гитаре), вы услышите, как тон становится тональнее, прозрачнее.
3. Повторите, разделяя струну на три части (7-й или 19-й лад). Звук снова преобразится.
4. Продолжайте эксперимент, деля струну на четыре, пять...

Что происходит? Вы не создаете новых звуков, а лишь выступаете в роли звукового фильтра, отсекая одни колебания и выпуская на свободу другие.

Разгадка тайны: Музыкальный звук – это не монолитная волна, а целый хор колебаний, скрытых гармоник (или обертонов).

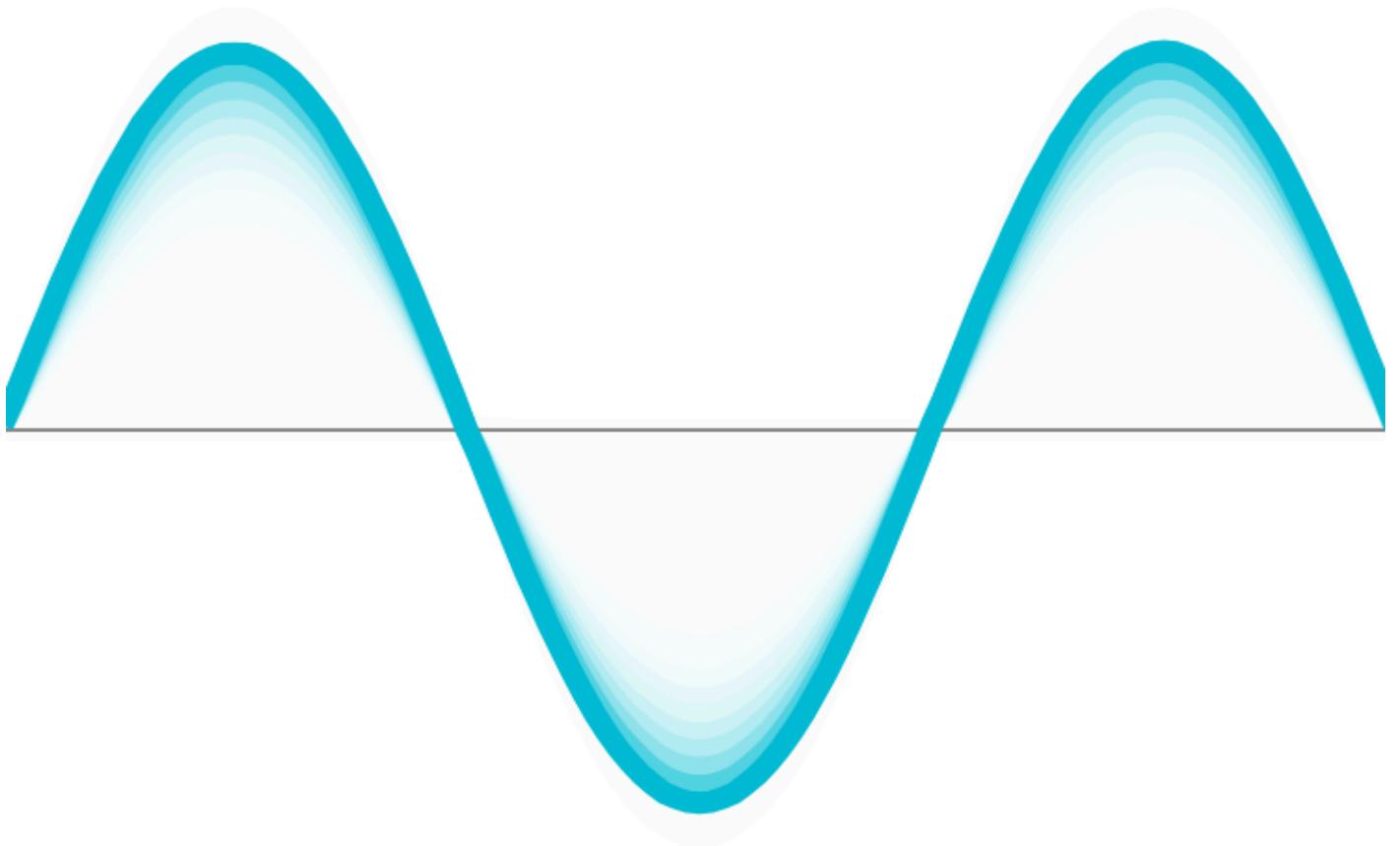


Кто есть кто в этом хоре?

- **Основной тон:** Король звука, самое низкое и мощное колебание. Именно его высоту мы слышим отчетливее всего, идентифицируя ноту.
- **Обертоны (гармоники):** Свита короля – призрачные, более высокие и тихие призвуки. Их частоты – словно зеркальные отражения основного тона, помноженные на целые числа: в 2, 3, 4, 5 и так далее раз выше основной частоты. Они – словно невидимые спутники, окружающие каждый музыкальный звук.

Примечание: есть и негармонические/перкуссионные инструменты, такие как колокол, и целые музыкальные культуры, основанные на гармонии которые они рождают (см. гамелан). Но законы гармонии голоса или струны одинаковы везде, и наша тема — именно они.

Увидеть обертоны своими глазами:



200 Hz

400 Hz

600 Hz

800 Hz

1000 Hz

Музыкальный звук – это сумма стоячих волн, гармоник, чьи частоты кратны основному тону. Каждая гармоника – словно отдельный голос в хоре, со своей частотой и громкостью (амплитудой). И хотя основной тон, как правило, солирует громче всех, именно уникальное сочетание гармоник, их относительная громкость, формирует неповторимый **тембр** каждого инструмента или голоса.

Почему мы не слышим обертоны отдельно?

Наш мозг – гениальный дирижер, он мгновенно объединяет все эти колебания в цельный звуковой образ. Мы воспринимаем не отдельные ноты хора, а слаженное звучание всего оркестра, окрашенное их неповторимым сочетанием.

Немного математики для понимания чуда:

Если частота основного тона – f , то частоты обертонов выстраиваются в стройный ряд: $2f, 3f, 4f, 5f$ и далее до бесконечности. Это – арифметическая прогрессия гармонии:

$f, 2f, 3f, 4f, 5f, \dots$

В чем магия обертонов?

Обертоны – не просто "звуковой мусор", неизбежный побочный эффект колебаний. Они – ключ к пониманию музыкальной гармонии, ее фундамент:

- **Тембр – их голос:** Разные инструменты обладают уникальным набором обертонов, словно отпечатком пальца звука. Именно это придает им неповторимое звучание.

- **Консонанс – их секрет:** Как именно обертоны влияют на благозвучие и диссонанс, мы раскроем чуть позже.

Вывод первый, но не последний: Звук – не просто волна, а сложная структура, сотканная из множества гармоник. Понимание этого – первый шаг к разгадке главной тайны музыки: секрета гармонии.

II. Математика консонанса: когда числа звучат в унисон

Итак, мы узнали, что музыкальный звук – это "коктейль" гармоник. Но почему некоторые сочетания звуков ласкают слух, словно пение ангелов (консонансы), а другие режут его, словно скрежет металла (диссонансы)? Почему одни звуки "дружат", словно родственные души, а другие "враждуют", создавая напряжение и дискомфорт?

Консонанс и диссонанс: гармония и хаос в мире звуков

Консонанс – это благозвучие, сладостное слияние звуков, ощущение гармонии и неподвижного покоя. **Диссонанс** – наоборот, звуковое напряжение, резкость, дискомфорт, словно трещина в звуковом пространстве.

Звуковые примеры, говорящие громче слов:

- **Октава (2:1), квинта (3:2), квarta (4:3)** – классические образцы консонансов, звуковые символы согласия и гармонии.
- **Секунда (9:8), тритон (45:32)** – типичные диссонансы, звуковые воплощения напряжения и конфликта.

В чем секрет этого разделения? Почему одни интервалы звучат словно песня любви, а другие – словно крик о помощи?

Разгадка лежит на поверхности, точнее, в совпадении гармоник!

Когда два звука консонируют, их гармоники словно встречаются друг с другом в звуковом пространстве, часто совпадая или образуя простые, "красивые" математические отношения. В диссонансе же гармоники словно сталкиваются, порождая звуковое трение и дискомфорт.

Как это работает на практике? Почувствуем математику консонанса на слух:

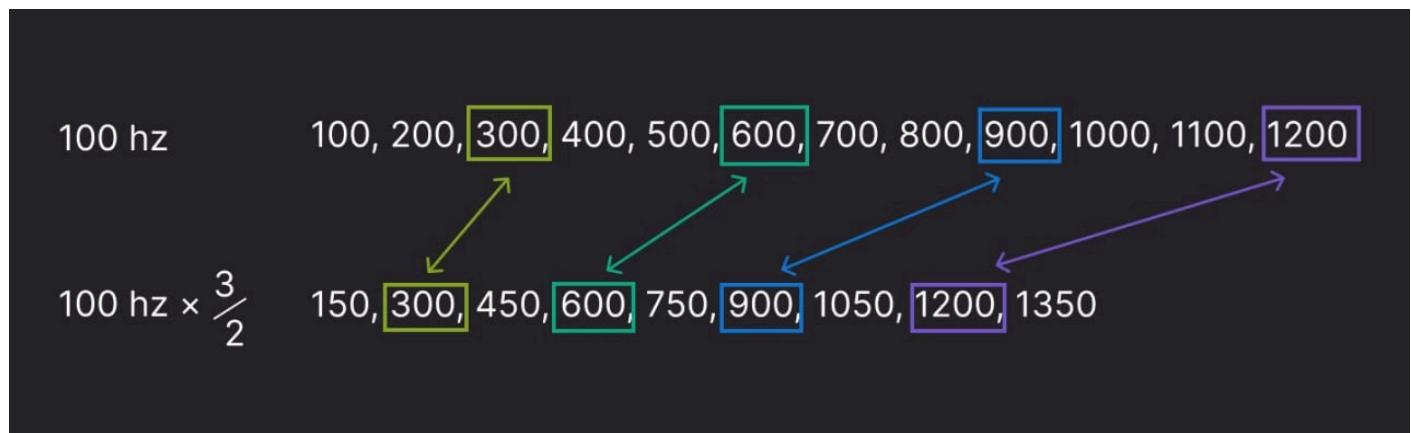
Возьмем для примера **квинту** – один из самых "дружелюбных" и консонансных интервалов. Отношение частот в квинте – 3:2. Это значит, что если нижний звук звучит на частоте f , то верхний – на частоте $1.5f$.

А теперь заглянем в их обертоновый мир:

- **Нижний звук:** $f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, \dots$

- Верхний звук: $1.5f$, $3f$, $4.5f$, $6f$, $7.5f$, $9f$, ...

Видите волшебство? **Каждый второй обертон верхнего звука ($3f$, $6f$, $9f$...) словно зеркальное отражение каждого третьего обертона нижнего звука!** Они встречаются в общем звуковом пространстве, создавая ощущение гармонии.



Совпадение гармоник

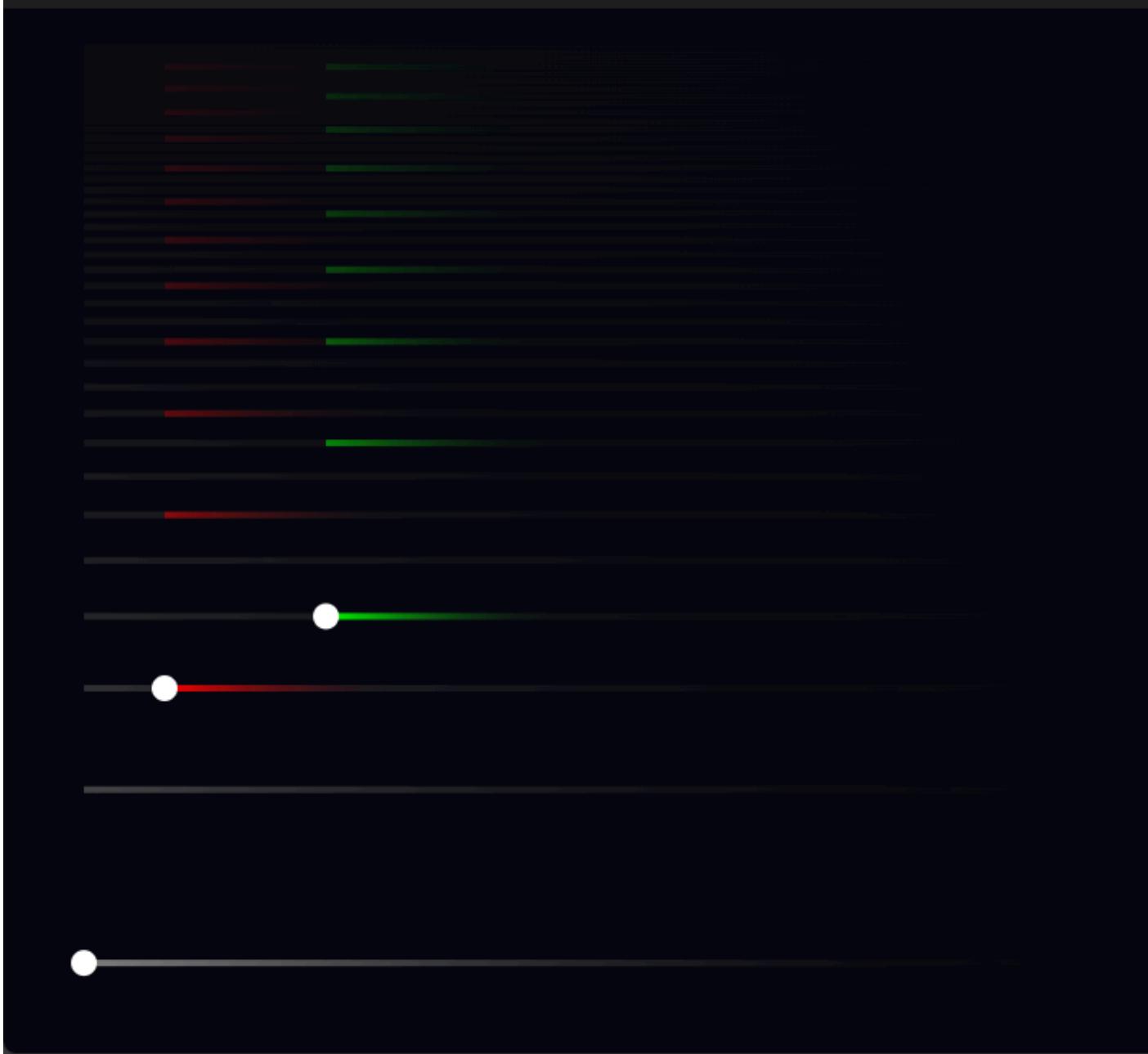
Увидеть совпадение гармоник – лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать:

3/2

× 4/3 =

2/1

Тоника: 1/2



Комментарий: Визуализатор гармоник на спектрограмме – ваш проводник в невидимый мир звука. Выберите два звука, и программа подсветит совпадающие гармоники, словно указывая на точки созвучия. Наглядно видно, что у консонансных интервалов (октава, квинта, кварта) – целые скопления таких точек.

Главное правило консонанса: чем больше совпадений гармоник – тем консонанее интервал, тем слаще звучит их дуэт.

Формула консонанса: математика благозвучия

Консонанс – не миф, не субъективное ощущение, а явление, поддающееся математическому измерению! Для количественной оценки консонанса интервала, выраженного отношением m/n , гениальный Евгений Мурзин предложил простую, но поразительно точную формулу: $1/m + 1/n$.

Она, по сути, измеряет **процент совпадающих гармоник в созвучии**. Чем меньше числа m и n (числитель и знаменатель дроби, выражющей интервал), тем больше гармонии в их отношениях, тем выше значение консонанса по формуле.

Математика на службе музыки: примеры расчета консонанса

```
function consonance(ratio :: Rational{Int}) :: Float64      Float64(denominator(ra
```

◀ ▶

Примеры:

```
println("Консонанс октавы (2/1): ", consonance(2//1)) # 1/2 + 1/1 = 1.5print
```

Гармоническая энтропия: мера сложности созвучия

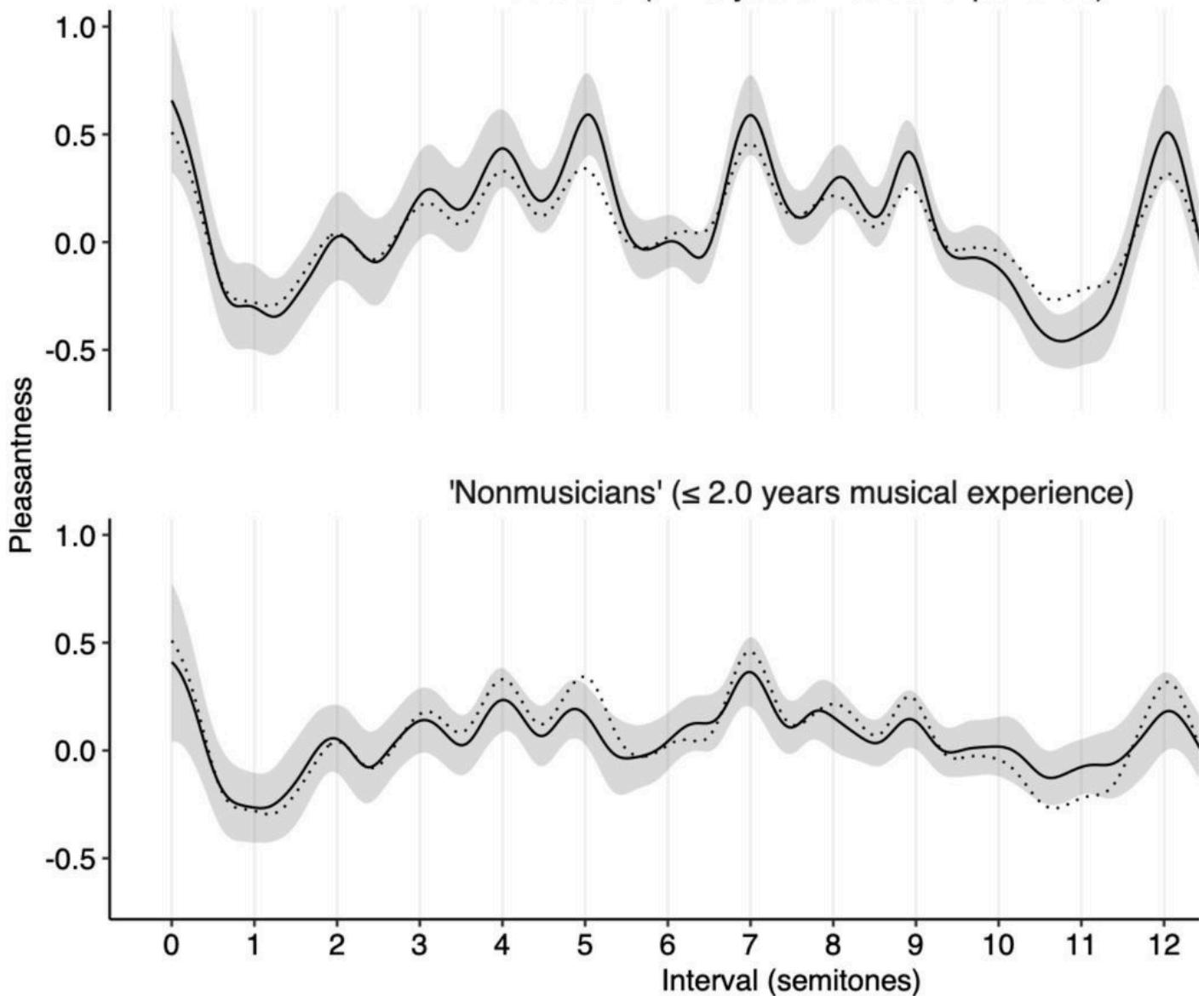
Но не только совпадение гармоник определяет наше восприятие консонанса. Важную роль играет и **гармоническая энтропия**. Это понятие из теории информации, которое в музыкальном контексте отражает **сложность соотношения частот в созвучии**. Чем проще соотношение, чем меньше и "красивее" числа в дроби, тем ниже энтропия, тем более упорядоченным и консонансным кажется нам созвучие. Сложные же соотношения порождают высокую энтропию и ощущение диссонанса, звукового хаоса.

Гармоническая энтропия в действии: интерактивная визуализация



Интерактивный пример с визуализацией гармонической энтропии – почувствуйте консонансы вживую. Можно увеличивать и уменьшать сглаживание, менять диапазон, а главное, график звучит! Можно нажать и проверить, настолько ли благозвучна квинта и страшны самые страшные из диссонансов.

'Musicians' (> 2.0 years musical experience)



А это реальные измерения консонантности созвучий, на музыкантах и обычных людях. Не правда ли, графики кое-что напоминают?

[Reshaping musical consonance with timbral manipulations and massive online experiments | bioRxiv](#)

Наука подтверждает то, что чувствует наш слух: гармоническая энтропия и субъективное восприятие консонанса – неразрывно связаны.

Вывод второй, открывающий дверь в мир гармонии: Консонанс – не магия, а математика в чистом виде! Совпадение гармоник и простота соотношений частот – вот ключ к благозвучию, звуковая формула гармонии.

III. Музыкальная арифметика: интервалы как кирпичики гармонии

Теперь, когда мы постигли тайну консонанса и узнали, что гармония говорит на языке математики, научимся оперировать с музыкальными интервалами – звуковыми "кирпичиками", из которых складывается здание гармонии.

Интервал – язык отношений между звуками

Интервал в музыке – это не просто расстояние между двумя нотами, а **отношение их частот**, математическое выражение их звуковой связи.

Примеры, говорящие на языке дробей:

- **Октава:** отношение 2:1 (верхний звук колеблется вдвое чаще, чем нижний, словно эхо, повторяющее исходный звук на более высокой ноте).
- **Квинта:** отношение 3:2 (верхний звук в полтора раза выше нижнего, созвучие, полное силы и уверенности).
- **Большая терция:** отношение 5:4 (верхний звук в 1.25 раза выше нижнего, интервал, наполненный теплом и мягкостью).

Сложение интервалов: магия умножения звуковых отношений

Чтобы сложить два интервала, нужно не складывать их ноты в привычном смысле, а **перемножить их частотные отношения**. Словно умножая звуковые силы, мы получаем новый, более мощный интервал.

Пример звуковой алхимии:

Допустим, мы хотим соединить большую терцию (5/4) и малую терцию (6/5), словно смешать два цвета, чтобы получить третий.

- Перемножаем отношения: $(5/4) * (6/5) = 30/20$
- Сокращаем дробь, приводя ее к простейшему виду: $30/20 = 3/2$
- Результат – **квинта** (3/2), новое звуковое качество, рожденное из союза двух интервалов.

То есть, большая терция плюс малая терция равны квинте – математика гармонии в действии.

Вычитание интервалов: звуковая операция деления

Чтобы вычесть один интервал из другого, нужно не вычитать ноты, а **разделить** большее частотное отношение на меньшее. Словно отсекая часть звукового пространства, мы получаем новый, более узкий интервал.

Пример звуковой хирургии:

Допустим, мы хотим "отрезать" большую терцию (5/4) от квинты (3/2), словно отделить один цвет от другого.

- Делим отношения: $(3/2) : (5/4) = (3/2) * (4/5) = 12/10$
- Сокращаем дробь: $12/10 = 6/5$
- Результат – **малая терция** (6/5), звуковой остаток после операции деления.

То есть, квинта минус большая терция равны малой терции – звуковая математика во всем своем великолепии.

Полутоны и центы: атомы и молекулы музыкального пространства

Для более тонких измерений звуковых расстояний, для навигации в мире микроинтервалов, музыканты используют **полутоны и центы** – мельчайшие частицы музыкального пространства.

- **Полутон:** минимальный интервал в равномерно темперированном строе (12-EDO), где октава делится на 12 равных частей, словно на 12 равных шагов звуковой лестницы.
- **Цент:** атом музыкального пространства, одна сотая полутона (1/1200 октавы). Сверхточная единица измерения для самых тонких слуховых различий.

Перевод звуковых отношений в центы: от дробей – к точности

```
function ratio_to_cents(ratio::Rational{Int})    1200 * log2(ratio)end# Прим
```



Сложение и вычитание в центах: арифметика звуковых микрочастиц

Зная количество центов в каждом интервале, мы можем складывать и вычитать их, словно обычные числа. Теперь арифметика интервалов становится простой и наглядной.

Пример арифметики в центах:

```
println("Большая терция + малая терция = квинта: ", round(ratio_to_cents(maj
```



Как измерить интервал между нотами: звуковые расстояния в цифрах

Чтобы найти интервал между двумя нотами, заданными в виде частотных отношений, нужно разделить большее отношение на меньшее, словно измерить расстояние между двумя точками на звуковой шкале.

Примеры измерения звуковых интервалов:

- Между нотами 5/4 и 3/2 интервал равен $3/2 : 5/4 = 3/2 * 4/5 = 6/5$ (малая терция) – звуковое расстояние равно малой терции.
- Между нотами 9/8 и 4/3 интервал равен $4/3 : 9/8 = 4/3 * 8/9 = 32/27$ – новый, нестандартный интервал 32/27, открывающий пространство для музыкальных исследований.

Вывод третий, практический и вдохновляющий: Умение складывать и вычитать интервалы – ключ к музыкальному мышлению, основанному на естественных отношениях звуков. Зная эти простые, но мощные правила звуковой арифметики, мы можем анализировать созвучия, строить аккорды и лады, сочинять музыку, руководствуясь не только интуицией, но и точным математическим расчетом. Гармония открывает свои двери тем, кто готов говорить с ней на языке чисел.

В следующей главе мы погрузимся в мир **акустической тоники** – невидимого фундамента, на котором держится здание гармонии. Мы раскроем секреты ее поиска и научимся использовать акустическую тонику для создания новых, необычных музыкальных ладов. А затем – окунемся в стихию **программирования** и научимся генерировать гармонические структуры с помощью кода, словно алхимики звука, превращающие цифры в мелодии. Музыкальная математика только начинается!

IV. Акустическая тоника: невидимый центр гармонической Вселенной

До сих пор мы изучали отдельные звуки и интервалы, словно звезды по отдельности. Но музыка – это не хаос одиноких светил, а слаженная симфония космических тел. В музыке, как правило, звучит не один и не два, а целые созвездия звуков, словно оркестр инструментов. И чтобы вся эта звуковая палитра не превратилась в хаотичный шум, нужен какой-то организующий принцип, точка отсчета, незримый центр притяжения, вокруг которого вращаются все остальные звуки, словно планеты вокруг звезды. Эту роль выполняет **тоника** – главная нота лада, звуковой центр, к которому тяготеют все остальные ноты, словно к магниту.

Но что если пойти еще глубже, заглянуть за кулисы гармонии? Что если у самой тоники есть своя "прадитительница"? Некий еще более фундаментальный уровень гармонической организации, скрытый от поверхностного взгляда?

Откройте для себя акустическую тонику! – невидимый стержень музыкальной гармонии

Это не звук, который можно услышать, не нота, которую можно сыграть на инструменте. **Акустическая тоника – это математическая абстракция, невидимый стержень, вокруг которого выстраивается вся система гармонических отношений, словно незримый центр музыкальной Вселенной.** Это – **общий знаменатель** для всех частот, используемых в музыкальном произведении или его фрагменте, звуковая первооснова.

Как найти эту неуловимую акустическую тонику? – ключ в математике

Для поиска акустической тоники нам понадобится знание о **наименьшем общем знаменателе (НОЗ)** – математическом понятии, скрывающем в себе тайну гармонии.

Алгоритм поиска акустической тоники – шаг за шагом к гармонической первооснове:

- 1. Соберите звуковое созвездие:** Выберите набор нот, которые звучат в музыкальном фрагменте, словно звезды в скоплении. Каждая нота

выражается в виде частотного отношения к некоторой условной тонике (пока не важно, какой именно, это – лишь временная точка отсчета).

2. **Разложите знаменатели на атомы:** Разложите знаменатели этих отношений на простые множители, словно разобрав молекулы на атомы.
3. **Соберите уникальный набор множителей:** Найдите НОЗ, перемножив все простые множители, входящие в разложения, в их максимальных степенях, словно собрав уникальный набор атомов для построения новой молекулы.
4. **Общий знаменатель – звуковая первооснова:** Полученный НОЗ – это знаменатель акустической тоники. Сама акустическая тоника выражается простой дробью – $1/\text{НОЗ}$, звуковая первочастица.

Примеры поиска акустической тоники – от простого к сложному:

1. **Простейший случай:** Допустим, у нас есть три ноты: $4/3$, $6/5$ и $3/2$, словно три звезды в созвездии.
 - Разложим знаменатели на простые множители: $3 = 3$, $5 = 5$, $2 = 2$ – простые атомы звука.
 - $\text{НОЗ} = 2 * 3 * 5 = 30$ – уникальный набор множителей, общий знаменатель.
 - Акустическая тоника = $1/30$ – звуковая первооснова.
2. **Случай посложнее:** Другой набор нот: $16/9$, $16/15$ и $4/3$, новое звуковое созвездие.
 - Разложим знаменатели: $9 = 3*3$, $15 = 3*5$, $3 = 3$ – звуковые атомы в разных комбинациях.
 - $\text{НОЗ} = 3*3*5 = 45$ – новый общий знаменатель, учитывающий повторения.
 - Акустическая тоника = $1/45$ – измененная звуковая первооснова.
3. **Сложный пример для мастеров гармонии:** Еще один пример: $15/4$, $16/9$ и $27/16$, сложное звуковое созвездие для исследования.
 - Знаменатели: $4 = 2*2$, $9 = 3*3$, $16 = 2*2*2*2$ – разнообразные звуковые атомы.
 - Ищем НОЗ, игнорируя степени двойки, словно отсекая октавное удвоение, фокусируясь на гармонической сути: $\text{НОЗ}(1, 9, 1) = 9$ – упрощенный общий знаменатель, исключающий избыточность.
 - Акустическая тоника (после "спуска" условной тоники, устранения октавного сдвига): $1/9$ – очищенная звуковая первооснова.
 - Теперь каждую ноту можно представить как обертон этой тоники, словно увидеть их связь с общей первоосновой:

- $15/4 \rightarrow (15/4) / (1/9) = 135/4$ (135-й обертон тоники 1/9, приведенный к октаве делением на подходящую степень двойки) – звезда 15/4 оказалась 135-м обертоном первоосновы.
- $16/9 \rightarrow (16/9) / (1/9) = 16/1$ (16-й обертон тоники 1/9) – звезда 16/9 – 16-й обертон первоосновы.
- $27/16 \rightarrow (27/16) / (1/9) = 243/16$ (243-й обертон тоники 1/9, приведенный к октаве) – звезда 27/16 – 243-й обертон первоосновы.

Зачем нужна акустическая тоника? – ключ к гармоническому порядку

- **Единая система координат для звука:** Акустическая тоника задает единую систему координат для всех звуков в музыкальном фрагменте, словно единую сетку долготы и широты на звуковой карте. Теперь все ноты можно рассматривать как обертоны акустической тоники, что упрощает анализ их взаимосвязей и гармонических функций, словно увидеть скрытые связи между звездами в созвездии.
- **Скрытая гармоническая основа:** Акустическая тоника не обязана звучать реально, быть слышимой в произведении, словно невидимая гравитация. Но она незримо присутствует, словно фундамент здания, организуя гармоническое пространство изнутри, словно сила, удерживающая планеты на орbitах. Она – как гравитационный центр, вокруг которого вращаются все остальные звуки, даже если этот центр скрыт от глаз (ушей), молчаливый страж гармонии.
- **Платформа для новых музыкальных миров:** Акустическая тоника открывает путь к созданию новых музыкальных ладов, основанных на естественных отношениях звуков, словно ключ к неизведанным гармоническим ландшафтам. Об этом мы поговорим подробнее в следующих главах, отправляясь в звуковые экспедиции.
- **Инструмент гармонического детектива:** Понимание акустической тоники превращает нас в гармонических детективов, позволяя глубже понять гармоническую структуру произведения, выявить скрытые связи между звуками, словно расшифровать тайный код музыки.

Акустическая тоника vs. традиционная тоника: две грани музыкального центра

- **Традиционная тоника** – звуковой маяк, нота, которая воспринимается на слух как тональный центр, точка опоры и разрешения, словно солнце в центре планетной системы. Она, как правило, явно звучит в произведении, притягивая к себе другие ступени лада, словно магнит.
- **Акустическая тоника** – математический стержень, вычисленный общий знаменатель для всех частот звукового пространства, словно невидимый центр гравитации музыкальной Вселенной. Она может совпадать с

традиционной тоникой, словно зримое и незримое совпадают в одной точке, а может и скрываться в тенях, не проявляясь на поверхности звучания.

Пример для понимания различий:

Представьте себе мажорный лад – звуковой пейзаж, знакомый каждому слушателю. Традиционная тоника – первая ступень лада, явный центр притяжения, звуковой дом. А вот акустической тоникой может оказаться, например, 1/9, скрытая первооснова, а сама тоника, которую мы слышим, может быть представлена как 9/9, то есть, 9-й обертон акустической тоники 1/9, словно видимое отражение невидимой первоосновы.

Практическое применение акустической тоники – от анализа к творчеству:

Понимание концепции акустической тоники дает нам мощный инструмент для:

- **Гармонического анализа – разложить музыку на атомы:** Мы можем разложить любое созвучие или последовательность звуков на составляющие, словно химический анализ музыкальной ткани. Определив их отношения к акустической тонике, мы поймем, как они связаны между собой, словно увидеть скрытые структуры в хаосе звуков.
- **Создания новых гармоний – архитектура звука с нуля:** Мы можем использовать акустическую тонику как фундамент для построения новых ладов и аккордов, словно архитекторы звука, создающие новые гармонические пространства. Исследуя натуральные звукоряды и открывая неизведанные гармонические территории, мы можем выйти за рамки традиционной гармонии.
- **Генерации музыкальных структур – алгоритмическая композиция:** Используя алгоритмы, основанные на принципах акустической тоники, мы можем создавать целые музыкальные произведения, управляя гармонией с помощью кода, словно цифровые композиторы, пишущие симфонии машинным разумом.

Вывод четвертый, открывающий новые горизонты музыкального мышления:

Акустическая тоника – не просто теоретическая конструкция, не умозрительная абстракция, а мощный инструмент гармонического мышления, словно ключ к пониманию музыкальной логики. Она позволяет нам видеть музыку не как набор разрозненных звуков, а как единую систему, словно космическую гармонию, основанную на строгих математических законах. И пусть она не всегда слышна уху, ее организующая сила пронизывает всю ткань музыкального произведения, словно невидимая гравитация, управляющая движением звуковых тел.

Далее нас ждет самое увлекательное – практическое применение этих знаний. Мы возьмем в руки язык программирования Julia и научимся генерировать музыкальные структуры, основанные на принципах акустической тоники.

Приготовьтесь, звуковые алхимики, мы отправляемся в мир музыкальной математики и кода!

Практический смысл акустической тоники – от теории к практике: Акустическая тоника – не просто абстрактная идея, а мощный инструмент для анализа и синтеза музыки. Позже мы увидим, как она помогает строить необычные и прекрасные лады, словно архитекторы звука, создающие новые гармонические миры.

V. Унтертоны: зазеркалье гармонии, где звучат отражения обертонов

Мы уже познакомились с яркой "свитой" каждого звука – **обертонами**, высшими призвуками, чьи частоты – словно зеркальное отображение основного тона, умноженные на целые числа. Но что, если мы заглянем в звуковое "зазеркалье", по другую сторону гармонического зеркала, и посмотрим на звуки, чьи частоты, напротив, являются не множителями, а делителями частоты основного тона? Что скрывается в этих звуковых тенях?

Встречайте унтертоны! – тени обертонов, звуки-отражения

Если основной тон колеблется с частотой f , то унтертоны – это словно его звуковые отражения в кривом зеркале: $f/2, f/3, f/4, f/5\dots$ словно эхо звука, уходящее в глубь звукового пространства.

Важное различие между мирами обертонов и унтертонов: Обертоны – не призрачные тени, а вполне реальные призвуки, которые мы можем услышать в спектре звука, словно видимые звезды. **Унтертоны же – это скорее умозрительная конструкция, математическая абстракция, словно невидимые планеты, врачающиеся в темноте.** В реальных звуках они или отсутствуют, словно призраки, или едва заметны, словно шепот из зазеркалья.

Главное свойство унтертонов – зеркальное отображение звуковых отношений:

Унтертон данной ноты – это такой звук, для которого *эта нота* является *обертоном*. Словно зеркало, отражающее звуковые отношения в обратном порядке.

То есть, если звук X – унтертон звука Y, то звук Y входит в обертоновый ряд звука X, словно Y – эхо звука X, звучащее на более высокой ноте.

Примеры унтертоновых отношений – звуковые зеркала в действии:

- **F (фа) – унтертон C (до)**, потому что C – это 3-й обертон F, словно C – эхо звука F, отраженное в звуковом зеркале.
- **Звуковой эксперимент:** Если мы возьмем за точку отсчета, за тонику, ноту C (допустим, 100 Гц), то ее третьим унтертоном окажется F (33.33 Гц), словно

ее отражение в зазеркалье, и сама С (100 Гц) станет третьим обертонаом этой F, словно эхо вернулось обратно, уже в виде обертона.

Унтертоника: особая роль в мире унтертонов

В нашем исследовании **унтертоника** – это не просто любой унтертон, случайное звуковое отражение, а **унтертон, взятый от одного из обертонов *акустической тоники***, словно избранный унтертон, связанный с гармонической первоосновой. Она – не случайное отражение, а отправная точка для построения особых музыкальных ладов, словно первый шаг в неизведанное звуковое пространство.

Математика унтертоники – формула для построения звуковых зеркал:

Если акустическая тоника – $1/T$ (где T – знаменатель частотного отношения), а ее n -й обертон выбран в качестве унтертоники, то унтертоника выражается простой формулой – n/T , словно умножение первоосновы на число обертона.

Унтертоновый ряд строится операцией деления, словно последовательность звуковых отражений, уходящих в бесконечность: $n/T, n/(2T), n/(3T), n/(4T)...$

Пример построения унтертонового ряда – звуковые отражения в действии:

- Акустическая тоника: $1/45$ – звуковая первооснова.
- Унтертоника: $5/45$ (5-й обертон) – избранное звуковое отражение, пятый обертон первоосновы.
- Унтертоновый ряд: $5/45, 5/90, 5/135, 5/180...$ – последовательность звуковых отражений, уходящих в глубь звукового пространства.

Зачем нужны унтертоны? – открывая новые грани гармонии

- **Глубинные связи между звуками – звуковые ни

зримые нити, связывающие звуки:** Унтертоны помогают нам увидеть глубинные, неочевидные связи между звуками, словно раскрывая подспудные течения в музыкальном океане. Они показывают, что гармония – это не просто набор отдельных нот, а целостная система взаимоотношений, где каждый звук – отражение другого.

- **Новые лады, рожденные из тени обертонов – неизведанные звуковые территории:** Унтертоны открывают путь к созданию новых, удивительных музыкальных ладов, основанных не на привычных обертонах, а на их таинственных "зеркальных" отражениях. Эти лады, сотканные из унтертонов, обладают особым, призрачным очарованием, словно музыка из иного измерения, из "зазеркалья" гармонии.
- **Гармония, сотканная из обертонов и их теней – единство в многообразии:** Унтертоны позволяют создавать гармонии, объединенные общей акустической тоникой, словно центром притяжения, но при этом поразительно разнообразные по своему звучанию, словно калейдоскоп

звуковых красок. Это гармония, где единство и многообразие не противоречат друг другу, а взаимно дополняют, создавая богатую и насыщенную звуковую палитру.

Практический смысл унтертонов и унтертоники – полимодальная гармония как новое измерение музыки: Унтертоны и унтертоника – не просто умозрительные построения, а мощные инструменты для создания **полимодальных гармоний**, где каждый голос в музыкальной ткани может жить в своем собственном ладу, словно в отдельном звуковом мире, но при этом все голоса связаны невидимыми нитями общей "прародительницей" – акустической тоникой, создавая звуковое единство в многообразии.

Дальше – за горизонт гармонии, к новым звуковым вселенным!

Вооружившись этими знаниями, словно картой неизведанной звуковой территории, мы готовы к самому захватывающему – начать программировать музыку, создавать свои собственные гармонические вселенные, где унтертоны и унтертоника станут нашими верными проводниками! Приготовьтесь к погружению в мир музыкального кода, где математика становится не просто инструментом анализа, но и мощным генератором новых звуковых реальностей!

Умножение и деление: арифметика музыкальных интервалов в действии

Чтобы по-настоящему овладеть языком гармонии, нужно освоить ее грамматику, ее базовые операции. В музыкальной арифметике этими операциями становятся **умножение и деление**, действия, которые, как ни странно, лежат в основе построения музыкальных интервалов и созвучий.

Интервалы как отношения частот: язык пропорций в мире звука

Когда мы говорим о музыкальных интервалах, мы на самом деле оперируем **отношениями частот**, словно выражаем звуковые расстояния в процентах или долях. Например, интервал квинты ($3/2$) – это не просто "пять ступеней" вверх, а математическое утверждение, что верхний звук колеблется в $3/2$ раза быстрее, чем нижний.

Сложение интервалов: умножаем, чтобы сложить, парадокс музыкальной арифметики

Поэтому, чтобы **сложить** два интервала, соединить их в единое целое, мы не складываем их "размеры" в полутонах или ступенях, а **перемножаем** их частотные отношения, словно умножаем звуковые пропорции.

Пример музыкального сложения:

- Большая терция ($5/4$) + малая терция ($6/5$) = квинта ($3/2$) – звуковые кирпичики соединяются в более крупную конструкцию.

- Математически: $5/4 * 6/5 = 30/20 = 3/2$ – магия умножения в мире гармонии.

Вычитание интервалов: делим, чтобы вычесть, обратная сторона музыкальной арифметики

Чтобы **вычесть** один интервал из другого, "отрезать" часть звукового пространства, нужно не вычитать их "размеры", а **разделить** большее частотное отношение на меньшее, словно разделить звуковую пропорцию на части.

Пример музыкального вычитания:

- Квинта ($3/2$) - большая терция ($5/4$) = малая терция ($6/5$) – отсекаем лишнее, получая более узкий интервал.
- Математически: $3/2 : 5/4 = 3/2 * 4/5 = 12/10 = 6/5$ – обратная операция деления в звуковой арифметике.

Логарифмическая шкала: полутоны и центы, измерение звуковых расстояний

В музыке часто используется **логарифмическая шкала** для измерения интервалов. Это не случайно: наше ухо воспринимает высоту звука не линейно, а именно логарифмически, словно сжимая звуковое пространство в более компактную форму. В этой шкале основными единицами измерения становятся **полутоны и центы**, словно миллиметры и микрометры в мире звука.

- **Полутон** – основная единица измерения, "метр" музыкального расстояния, наименьший интервал в равномерно темперированном строе (12-EDO), где октава – словно километр, делится на 12 равных частей – метров.
- **Цент** – микроскопическая единица измерения, "миллиметр" звукового расстояния, одна сотая полутона ($1/1200$ октавы). Точность до сотых долей полутона позволяет измерять самые тонкие звуковые различия, словно микрохирургия в мире звука.

Сложение и вычитание в логарифмической шкале: арифметика полутонов и центов становится простой

В логарифмической шкале **сложение** интервалов превращается в привычное **сложение** их значений в полутонах или центах, словно сложение отрезков на линейке, а **вычитание** интервалов – в **вычитание** их значений, словно измерение длины оставшегося отрезка.

Пример арифметики в полутонах и центах:

- Большая терция (4 полутона) + малая терция (3 полутона) = квинта (7 полутонов) – простое сложение звуковых "метров".
- Квинта (702 цента) - большая терция (386 центов) = малая терция (316 центов) – точное вычитание звуковых "миллиметров".

Нахождение интервала между нотами: измеряем звуковое расстояние

Чтобы найти интервал, звуковое расстояние между двумя нотами, представленными в виде частотных отношений (дробей), нужно разделить большее отношение на меньшее, словно измерить расстояние между двумя точками на звуковой шкале с помощью линейки.

Пример измерения звукового расстояния:

- Найти интервал, расстояние между нотами $5/4$ и $3/2$, словно измерить расстояние между точками на звуковой карте.
- Решение: $3/2 : 5/4 = 3/2 * 4/5 = 12/10 = 6/5$ (малая терция) – звуковое расстояние оказалось равным малой терции.

Вычисление акустической тоники: поиск общего знаменателя гармонии

Акустическая тоника – невидимый фундамент всей гармонической системы, самый низкий звук, **общий знаменатель** для всех используемых нот, словно единая точка отсчета для всего звукового пространства. Она вычисляется на основе **наименьшего общего знаменателя (НОЗ)** частотных отношений тех нот, которые мы хотим использовать в музыке, словно поиск общей меры для разных звуковых единиц.

Пример 1: простейший случай поиска акустической тоники

- Мы хотим использовать ноты с отношениями $4/3$ и $6/5$, словно построить звуковую конструкцию из этих двух "кирпичиков".
- Находим НОЗ для знаменателей 3 и 5: $\text{НОЗ}(3, 5) = 15$ – общий знаменатель для звуковых пропорций.
- Следовательно, акустическая тоника, звуковой фундамент будущей гармонии, будет иметь отношение $1/15$ – первооснова звуковой конструкции.

Пример 2: усложняем задачу поиска акустической тоники

- Мы хотим использовать ноты с отношениями $16/9$ и $16/15$, словно расширить звуковую палитру, добавив новые "цвета".
- Представляем знаменатели в виде произведения простых множителей, словно разобрав звуковые "молекулы" на "атомы": $9 = 3*3$, $15 = 3*5$ – простые составляющие звуковых пропорций.
- НОЗ будет включать максимальное количество каждого простого множителя, словно собираем уникальный набор "атомов": $3*3*5 = 45$ –

новый, более сложный общий знаменатель.

- Следовательно, акустическая тоника смещается, приобретая отношение 1/45 – углубляем фундамент звуковой конструкции.

Пример 3 (для искушенных в гармонии): раскрываем глубинные связи

Допустим, у нас есть три ноты, отношения которых к некой условной тонике (которую мы пока НЕ ищем) равны 15/4, 16/9, и 27/16, словно исследуем сложный звуковой пейзаж.

- Находим НОЗ для знаменателей: $4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. НОЗ = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ – очень низкий общий знаменатель, словно очень глубокий фундамент.
- То есть, самая низкая общая гармоника для этих трех нот имеет частотное отношение 1/144 по отношению к нашей условной тонике, словно первооснова скрыта очень глубоко.
- Это значит, что каждая из этих нот может быть представлена в виде дроби, где числитель – это номер её обертона, а знаменатель – 144, словно каждая нота – "обертон" этой глубинной первоосновы. Например, 15/4 можно представить как 540/144 (домножив и числитель, и знаменатель на 36), то есть, это 540-й обертон тоники 1/144, словно звезда далекого порядка в гармонической Вселенной.

Важное замечание об акустической тонике: незримый фундамент гармонии

Акустическая тоника не обязана звучать реально в произведении, словно невидимая опора звукового здания. Она – скорее, математическая абстракция, незримый фундамент гармонического "дома", организующий звуковое пространство изнутри.

Обертоны акустической тоники: звуковая палитра, рожденная из первоосновы

Обертоны акустической тоники – это звуки, частоты которых кратно выше частоты акустической тоники, словно разноцветные лучи, исходящие из единого источника света. Если отношение акустической тоники 1/45, то её обертоны выстраиваются в стройный ряд: 2/45, 3/45, 4/45, 5/45 и так далее, словно гамма звуковых оттенков, рожденных из первоосновы.

Кратко об унтертонах и унтертонике: заглядываем в звуковое зазеркалье

- **Унтертоны** строятся от **унтертоники** – звука, который сам является обертоном акустической тоники, словно тени обертонов, отраженные от звукового зеркала.

- **Унтертоника** – "перевернутая тоника", зеркальное отражение обычной тоники, точка отсчета для построения унтертонового ряда в рамках лада, словно начало пути в звуковое зазеркалье.

Более подробно об унтертонах и унтертонике мы поговорим в разделе, посвященном построению ладов, отправляясь в звуковую экспедицию в мир унтертоновой гармонии.

Арифметика гармонии: выводим мажорный лад (и не только) из естественных ограничений

Музыка — это не просто набор звуков, а живая вибрация, резонирующая с глубинами нашей души, универсальный язык, способный передавать эмоции и идеи без слов. С древних времен пытливые умы стремились разгадать тайны музыкальной гармонии. Это дерзновенное путешествие привело нас от наивных экспериментов Пифагора сmonoхордом до сложных, утонченных алгоритмов, способных генерировать целые гармонические структуры с математической точностью, словно создавать музыку по формулам. В этом разделе мы не просто коснемся теории, но и, подобно алхимикам звука, научимся самостоятельно создавать музыкальные лады, используя силу языка программирования Julia. Этот новаторский метод позволит нам смело экспериментировать с новыми, неизведанными строями и постигать глубинную структуру музыки, словно архитектор, постигающий тайны мироздания, строя из звуков новые гармонические миры.

Шаг 3: Строим фундамент – допустимые интервалы, звуковые "кирпичики" гармонии

Теперь – от теории к практике, от слов к делу! Первым шагом на пути к созданию новых гармонических миров станет сотворение набора допустимых интервалов, словно звуковых "кирпичиков", из которых мы будем возводить стены наших лады.

Мы начинаем с генерации всех возможных интервалов в определенном диапазоне, словно собираем полную палитру звуковых возможностей.

```
using Combinatorics
using Primes
# Генерация всех возможных интервалов (дробей)
```

Мы генерируем все возможные дроби, словно перебираем все варианты деления струны на части, где числитель и знаменатель не превышают 45, аналогично тому, как Пифагор экспериментировал с разными делениями струны на своем monoхорде, ища гармонию в простых пропорциях. В его экспериментах длина струны, деленная на целое число или его долю, определяла высоту звука, открывая мир математики в музыке.

Но не все интервалы одинаково "полезны" для гармонии. Среди бескрайнего океана звуковых отношений нам нужно отобрать лишь те, которые обладают достаточной "гармонической ценностью", словно отделить золото от песка. Для этой тонкой "звуковой фильтрации" мы используем два математических сита: `odd_limit` и `prime_limit`.

```
# Фильтрация отношений по odd_limit
```

`odd_limit` выступает в роли грубого фильтра, отсеивая слишком "тяжелые" интервалы, ограничивая величину числителя и знаменателя (не более 32), чтобы избежать излишне сложных и диссонирующих соотношений, словно отсекаем грубые, неотесанные камни, оставляя лишь подходящие для строительства "кирпичи". Это ограничение не только улучшает качество звучания, но и делает вычисления более эффективными, словно оптимизируем процесс звукового строительства.

`prime_limit` – более тонкий фильтр, работающий на уровне "атомов" звука. Он ограничивает использование простых множителей в числителе, словно отдавая предпочтение интервалам, близким к естественному гармоническому ряду, звуковой основе мироздания. Мы разрешаем использовать только простые множители 2, 3, 5 и 7, словно ограничиваем палитру звуковых "атомов" наиболее благозвучными элементами. Дополнительные ограничения на количество 3, 5 и 7 в числителе необходимы, чтобы избежать слишком сложных и диссонирующих интервалов, словно уточняем "рецепт" благозвучия, отсекая излишне резкие "приправы".

Зачем нужны `prime limit` и `odd limit`? – секреты звуковой фильтрации

Важно не просто привести строчки кода, а понять, почему мы используем именно эти ограничения, в чем их глубинный звуковой смысл.

- **Odd Limit – простота и ясность звука:** Ограничевая числитель и знаменатель дроби, мы избегаем слишком сложных соотношений частот, которые трудны для восприятия человеческим ухом и затрудняют интонирование, словно упрощаем звуковую архитектуру, делая ее более ясной и стройной. Это также ускоряет вычисления, словно оптимизируем процесс звукового моделирования. В нашем случае мы выбрали предел 32, который является разумным компромиссом, позволяющим включить в набор допустимых интервалов большинство важных музыкальных созвучий, словно собираем полный набор "кирпичей" для разнообразного звукового строительства.
- **Prime Limit – гармония, рожденная из обертонов:** Ограничевая набор простых множителей в числителе дроби числами 2, 3, 5 и 7 (с определенными дополнительными ограничениями на их количество), мы сознательно отаем предпочтение интервалам, которые наиболее близки к естественному гармоническому ряду, словно выбираем "кирпичи",

созданные по законам природы, по ее гармоническим пропорциям. Это основано на том фундаментальном факте, что гармонический ряд играет ключевую роль в нашем восприятии гармонии, являясь звуковой матрицей благозвучия. Ограничения на количество 3, 5 и 7 в числителе необходимы, чтобы удержать звуковую палитру в рамках консонанса, избежать слишком сложных и диссонирующих интервалов, словно балансируем между разнообразием и гармонией, отсекая излишнюю резкость звуковых "красок".

После тонкой "звуковой фильтрации" мы приступаем к последнему шагу подготовки "строительных материалов" – нормализуем отобранные интервалы к октаве, словно приводим их к единому масштабу, и безжалостно удаляем дубликаты, словно избавляемся от лишних "кирпичей", которые только загромождают пространство творчества. Затем мы выводим на свет таблицу полученных интервалов, словно рассматриваем отобранные "звуковые кирпичики", любуясь их математической красотой, снабжая их названиями и измеряя их величину в центах, словно оцениваем каждый "кирпич" на вес золота. (Заполнение названий интервалов в таблице остается пока ручной работой, словно тонкая ручная доводка звукового материала, так как не все отобранные дроби соответствуют традиционным названиям интервалов, открывая простор для новых звуковых открытий).

```
# Нормализация интервалов к октаве и удаление дубликатовnormalize_to_octave(
```

◀ ━━━━━━ ▶

Таблица допустимых интервалов – звуковая палитра для новых гармоний (пример):

Шаг 4: Построение ладов – звуковое зодчество методом полного перебора

Теперь, когда в наших руках набор отобранных "кирпичиков" – допустимых интервалов, словно палитра звуковых красок, мы можем приступить к самому увлекательному – построению музыкальных ладов, словно возведению зданий гармонии. Мы выбираем метод полного перебора, словно перебираем все возможные комбинации "кирпичиков", постепенно увеличивая число нот в ладу, словно строим звуковое здание этаж за этажом.

Алгоритм полного перебора – это метод научного "тыка", который, несмотря на кажущуюся простоту, гарантирует нам, что мы не упустим ни одного возможного варианта в заданных рамках ограничений, словно перебираем все возможные ходы в звуковой шахматной партии.

```
# ... (определение типов данных Scale, ScaleWithConsonance, ScaleDatabase)fu
```

◀ ━━━━ ▶

Алгоритм начинается с самого простого лада – унисона (одна нота, словно фундамент здания), и затем последовательно строит лады с 2, 3, ..., MAX_NOTES

нотами, словно возводит этажи звукового дома. На каждом шаге мы берем все уже найденные лады с $n-1$ нотами, словно используем предыдущий этаж как основу, и пробуем добавить к ним еще одну ноту, используя весь набор допустимых интервалов, словно выбираем подходящий "кирпич" для строительства нового этажа. Для каждого существующего лада и каждого интервала мы генерируем две новые ноты, словно ищем новый "кирпич" как выше, так и ниже исходных нот: умножаем и делим каждую ноту в исходном ладу на каждый допустимый интервал, словно исследуем звуковое пространство вокруг каждой ноты. Затем мы нормализуем результат к октаве, словно приводим новые ноты к единому звуковому масштабу, и проверяем, что полученная нота уникальна, не повторяет уже существующие ноты в ладу, словно следим за тем, чтобы каждый "кирпич" в здании был на своем месте. Затем мы вычисляем консонанс нового лада, оценивая его благозвучие, словно проверяем прочность звуковой конструкции, и, если он превышает заданный порог `MIN_CONSONANCE`, словно звуковая конструкция признана достаточно гармоничной, добавляем лад в нашу коллекцию звуковых "зданий".

Ratio	Cents	EDO Steps	Error	Consonance
1:1	0.0	0	0.0	2.000
3:2	702.0	7	2.0	0.833
4:3	498.0	5	2.0	0.583
5:3	884.4	9	15.6	0.533

Полный перебор – гарантия полноты звуковых открытий: Этот метод полного перебора гарантирует, что мы рассмотрим все возможные варианты лады в пределах заданных ограничений, словно исследуем каждый уголок звукового пространства, не упуская ни одной возможности. Вывод результатов этого звукового зодчества покажет нам все найденные лады, словно каталог новых гармонических миров, отсортированные по степени консонанса, от самых гармоничных к менее благозвучным. Среди этого звукового многообразия мы непременно обнаружим и хорошо знакомые нам лады, словно родные мотивы в новой звуковой палитре, – мажорный лад, мажорное и минорные трезвучия, – и множество совершенно необычных, неизведанных звуковых структур, словно новые гармонические открытия, ждущие своих исследователей.

Исторический экскурс: визуализация строев – от схем древности к цифровым диаграммам

Чтобы понять в полной мере новаторство предлагаемого нами подхода к гармонии, необходимо оглянуться назад, в прошлое, оценить исторический контекст, путь, который прошла музыкальная мысль в поисках гармонии. Давайте проследим эволюцию музыкальных строев – от древности до современности – через призму визуализации, словно рассматривая звуковые идеи сквозь линзу истории.

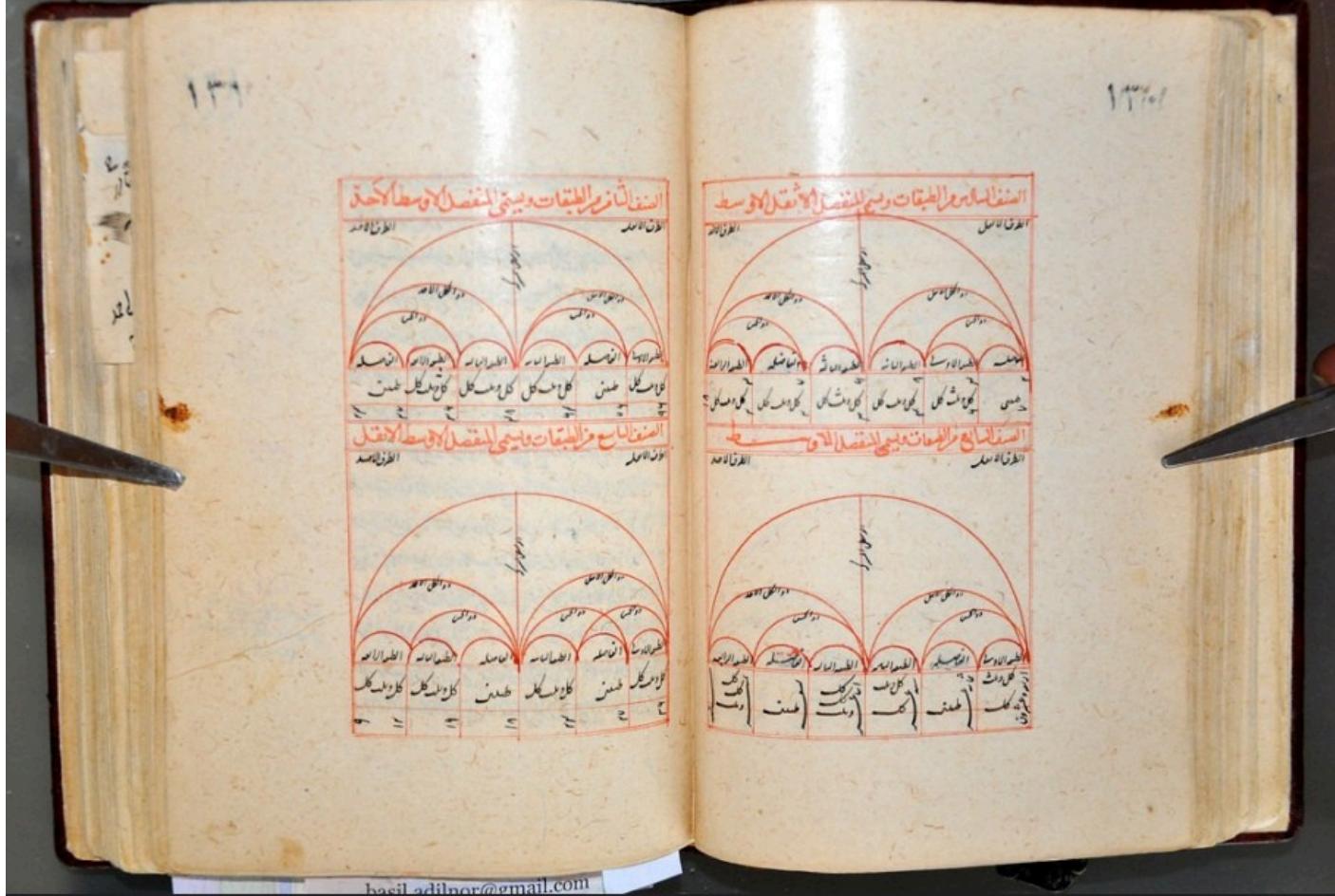
1. Древность и Средневековье: модальность, натуральный строй и первые визуализации

1.1. Модальность и натуральный строй: гармония, рожденная слухом и природой (Античность, Средневековье)

В музыкальной древности и Средневековье музыка строилась не на привычной нам тональной системе, а на **модальных ладах**, словно на звуковых "модусах", которые по своей структуре были очень близки к **натуральному строю**. Эти лады, рожденные скорее слухом и интуицией, чем строгим математическим расчетом, словно отражение естественной гармонии природы, использовали числовые соотношения частот, основанные на простых дробях, словно на математических "золотых сечениях" звука, что обеспечивало поразительную чистоту звучий, словно кристальную прозрачность звукового пространства.

Преимущество натурального строя, этой гармонии древности, – непревзойденная **акустическая чистота** и глубокая **выразительность** каждого интервала, словно звуковые "самоцветы", отшлифованные временем. Например, малая септима – один из самых выразительных и "драматичных" интервалов – могла быть представлена несколькими вариантами простых дробей: $7/4$, $9/5$ или $16/9$, и эти тончайшие нюансы, микрохроматические различия в несколько центов, словно различия в оттенках цвета, можно было умело использовать для создания богатой и тонкой гармонической палитры, словно работа звукового живописца, играющего на нюансах.

1.2. Аль-Урмави: первые диаграммы лады, визуализация звуковых систем (XIII век)



В эту эпоху первых поисков математики в музыке особое место занимает гений **Сафи ад-Дин аль-Урмави** (XIII век), персидский теоретик музыки, словно звуковой "чертежник" Средневековья. Он не только предложил свою оригинальную музыкальную систему, основанную на 17 ступенях в октаве, словно расширил звуковую палитру за пределы привычной семиступенной гаммы, но и совершил настоящий прорыв в визуализации музыкальной теории – он впервые **визуализировал лады** с помощью уникальных диаграмм, словно создал звуковые "карты" разных гармонических "ландшафтов", которые поразительно напоминают современные **arc diagrams**, словно мостик между средневековой теорией и современными методами визуализации данных.

N	Consonance	Scale Name	Scale
3	0.551	Raga Sarvarsi, Chord sus4	1/1, 4/3, 3/2
3	0.551	-	1/1, 9/8, 3/2
3	0.550	Major Triad	1/1, 5/4, 3/2
3	0.550	Minor Triad e.g. Cm	1/1, 6/5, 3/2
4	0.527	-	1/1, 6/5, 3/2, 9/5
3	0.522	-	1/1, 4/3, 5/3

Параметры генерации

Макс. число нот:

Отсечка:

Мин. конс.:

Сгенерировать лады

<iframe src="https://gorlatoff.github.io/music_math/5_urmovi_scales.html" width="480" height="480" allowfullscreen></iframe>

Визуализатор ладов в схемах Урмави – интерактивный портал в средневековую теорию музыки. Исследуйте древние лады в их графическом представлении, почувствуйте связь между звуком и визуальной формой.

Схемы Урмави – это не просто красивые рисунки, а мощный инструмент анализа музыкальной структуры, словно "рентген" лады, позволяющий увидеть скрытые соотношения между ступенями, словно геометрическую формулу гармонии, сделать структуру лада наглядной, а соотношения между ступенями – очевидными даже неподготовленному глазу, словно звуковая анатомия в графической проекции.

2. От Пифагора к равномерной темперации: поиск идеального строя и его визуализация

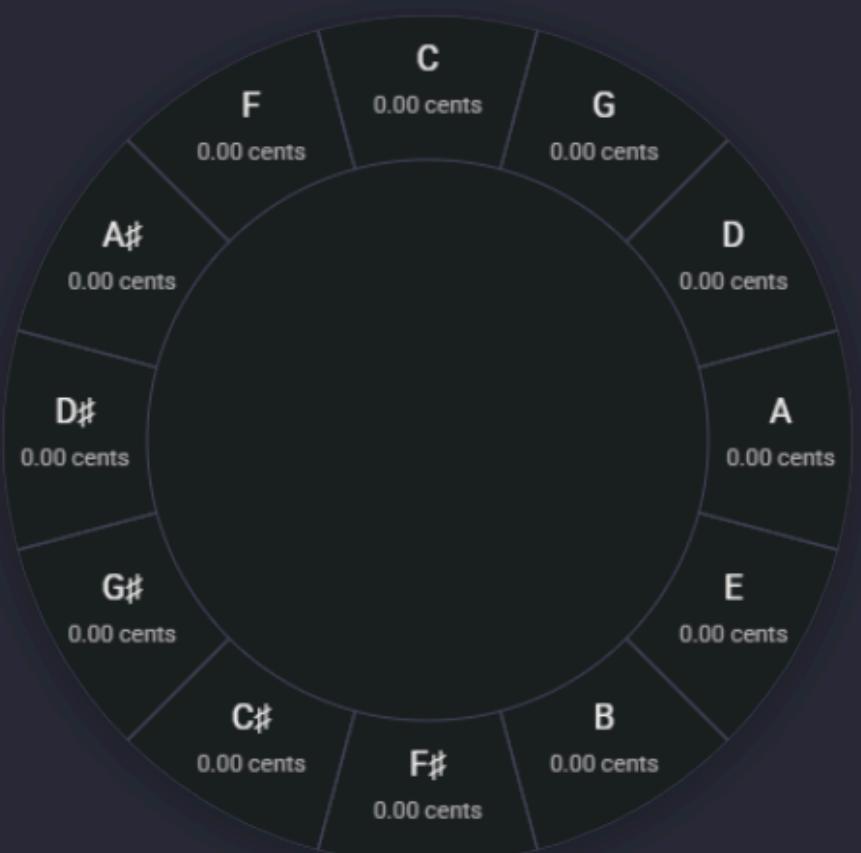
2.1. Пифагоров строй: круг квинт и первые шаги к темперации (Средневековье)

В Средневековье на смену модальным ладательной системе античности приходит новая звуковая парадигма – **пифагоров строй**, словно звуковая "революция", в основе которой лежит математическая гениальность **Пифагора** и его последователей. Этот строй, словно математическое "куружево" звука, получил широкое распространение в европейской музыке и стал настоящим фундаментом для дальнейшего развития гармонической мысли.

В сердце пифагорова строя – **квартово-квинтовый круг**, элегантная геометрическая конструкция, словно звуковая "мандала", визуализация гармонических

отношений, где квинта (интервал 3/2) становится основным "строительным блоком" лады, словно "золотое сечение" звука.

CIRCLE OF FIFTH



EQUAL TEMPERAMENT

PYTHAGOREAN SCALE

JUST INTONATION

Интерактивный визуализатор квартово-квинтового круга – путешествие по звуковой геометрии Пифагора. Наблюдайте, как чистые квинты выстраиваются в круг, раскрывая математические основы пифагорова строя.

Математически пифагоров строй можно описать через простые **степени отношения 3/2**, словно умножая звуковые "порции" квинты, что позволяет генерировать весь звукоряд, словно раскладывая гармонию на математические "множители":

```
pythagor = [(3//2)^i for i in -5:5]for i in -5:5  println("3//2^(i) → $((3
```

Важно понимать, что пифагоров строй – это не просто произвольный набор чистых квинт, а целая **система**, основанная на последовательном умножении квинт (**степени числа 3/2**), что делает его не только звуковой системой, но и **предтечей равномерной темперации**, словно первый шаг на пути к созданию универсального звукового пространства. Ведь квинта (3/2) – это приблизительно 7 полутона (701.96 центов вместо ровно 700 в равномерной темперации), словно небольшая, но значимая "погрешность", открывающая дверь к темперации. **Именно эта "квинтовая" основа пифагорова строя позволяла с неплохой точностью передавать не только квинты, но и другие важные музыкальные**

интервалы, словно создавая звуковое пространство с относительно чистыми созвучиями.

Однако у этой гениальной системы были и свои границы применимости, словно звуковой "потолок". Чем дальше мы движемся по кварт-квинтовому кругу (то есть, чем выше становится степень $3/2$ в наших математических расчетах), тем сложнее становятся дроби, выражающие интервалы, и тем заметнее накапливается неизбежная "погрешность", словно звуковое "отклонение" от чистоты натуральных интервалов. После 12 шагов квант круг не замыкается идеально, словно звуковая "спираль" не сходится в точку, и в результате возникает знаменитая "**волчья квинта**" – резко диссонирующий интервал, практически непригодный для музыки, словно звуковая "фальшивь" в стройной гармонии. **Именно эта акустическая "проблема" пифагорова строя и стала отправной точкой для поиска новых, более совершенных музыкальных строев, темпераций**, способных устраниТЬ "волчью квинту" и расширить гармонические возможности музыки.

2.2. Равномерная темперация: компромисс, победивший "волчью квинту" (Новое время)

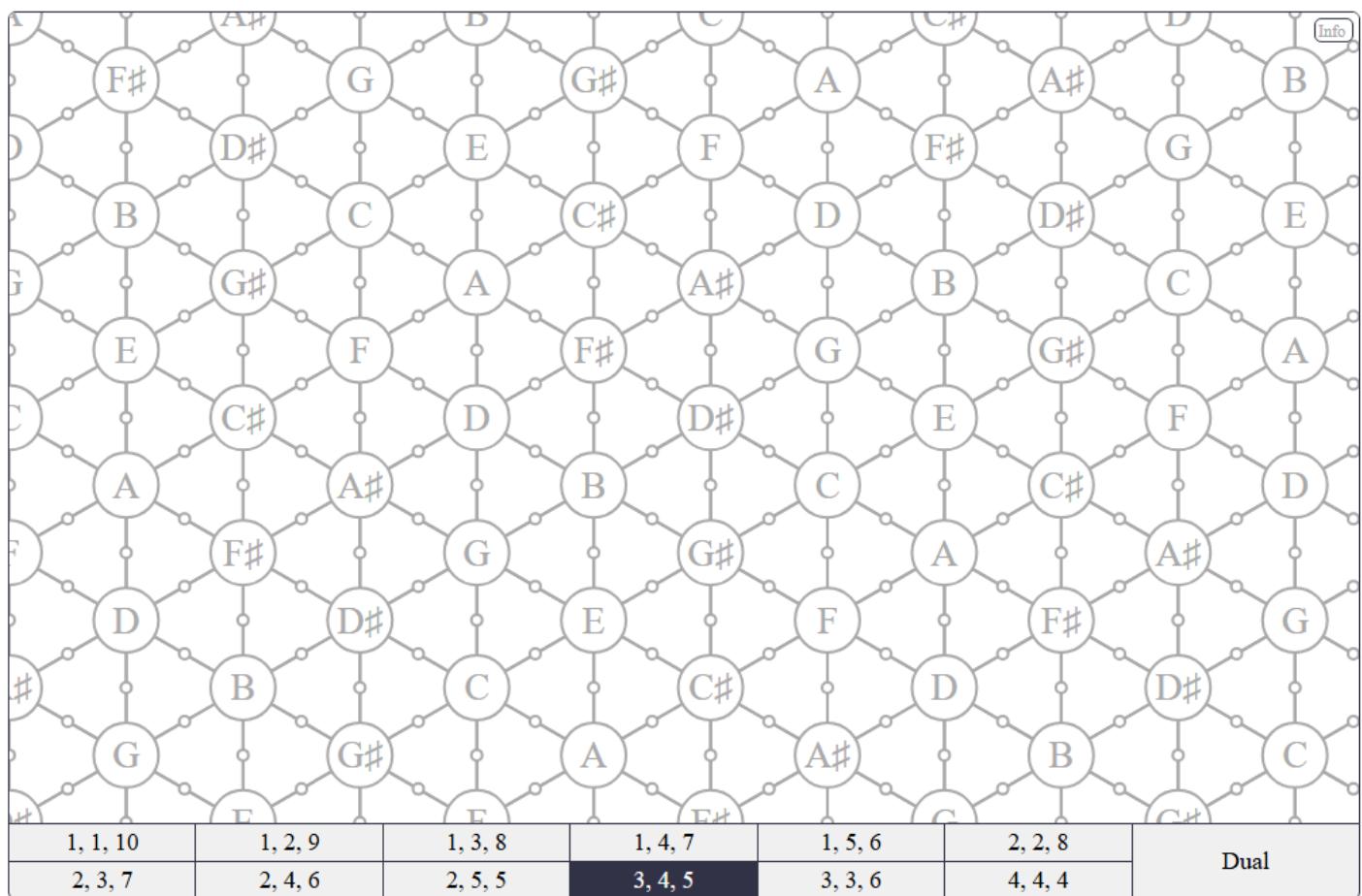
Эпоха Нового времени в музыке – это время поиска **идеальной темперации**, строя, который смог бы устранить акустические "дефекты" пифагорова строя и открыть новые горизонты для гармонического развития. **Равномерная темперация**, словно решение вековой головоломки, стала тем долгожданным компромиссом, который позволил композиторам свободно модулировать и играть во всех тональностях, не опасаясь "волчьих квint" и других дис

Математически тональную логику можно выразить через функцию, генерирующую мажорные аккорды:

```
major_chord(tonica) = [tonic, tonic*5//4, tonic*3//2]
tonic = 1//1
subdominant_chord = major_chord(tonic * (3//2)^-1)
tonic_chord = major_chord(tonic * (3//2)^0)
dominant_chord = major_chord(tonic * (3//2)^1)
major_scale = vcat(subdominant_chord, tonic_chord, dominant_chord)

# Или ещё проще:
major_scale = [tonica, tonica*5//4, tonica*3//2]

sort!(unique!(major_scale))
```



VI. Унтертоновая полимодальность: практика и теория новой гармонии

От общей акустической тоники к полиладовым звуковым пространствам: как унтертоны открывают новые горизонты для композиторов и импровизаторов.

Унтертоновая полимодальность: суть концепции

В основе унтертоновой полимодальности лежит идея **единства гармонического центра при ладовом многообразии**. Вместо того, чтобы ограничиваться одной тональностью или ладом, композитор получает возможность использовать **несколько ладов одновременно**, создавая богатую и многослойную гармоническую текстуру. Ключевым элементом, связывающим эти лады в единое целое, выступает **акустическая тоника**.

Основной принцип: каждый голос в музыкальной композиции может быть организован в рамках **отдельного лада**, при этом все лады "привязаны" к **общей акустической тонике**. Эта тоника, как мы уже выяснили, не всегда слышима напрямую, но является математически вычисленным "общим знаменателем" для всех используемых звуков, незримым центром гармонической системы.

Минорная окраска: Важным аспектом унтертоновой полимодальности является ее **минорная звуковая окраска**. Лады, построенные на унтертонах, естественным образом приобретают минорный характер. Это свойство оказывается полезным, так как уменьшает риск возникновения конфликта между разными ладами, способствует их лучшему "срастанию" в общей гармонии.

Алгоритм генерации унтертоновых ладов (без кода, только суть)

Для создания унтертоновых ладов используется следующий алгоритм:

- Выбор акустической тоники:** Определяется акустическая тоника (например, дробь 1/45, соответствующая ноте F#).
- Генерация обертонов:** Для выбранной акустической тоники генерируется ряд обертонов (например, до 45-го обертона).
- Унтертоновая "развертка":** Для каждого из полученных обертонов строится **унтертоновый ряд**. Унтертоновый ряд – это последовательность звуков, для которых данный обертон выступает в качестве обертона (см. раздел V про унтертоны).
- Нормализация к октаве и общей тоники:** Все звуки унтертоновых рядов приводятся к октавному диапазону и выражаются относительно общей акустической тоники.
- Фильтрация по благозвучию:** Из полученного набора звуков отбираются только те, которые соответствуют критериям благозвучия (например, ограничения prime_limit и odd_limit, описанные ранее).

6. Формирование ладов: Из отобранных звуков формируются различные лады, путем комбинирования нот из разных унтертоновых рядов.

Этот процесс позволяет получить множество разнообразных ладов, объединенных общей гармонической основой – акустической тоникой.

Примеры унтертоновых ладов и их интерпретация

Вот несколько примеров унтертоновых ладов, сгенерированных описанным выше алгоритмом:

- [1, 9//8, 6//5, 4//3, 3//2, 8//5, 9//5] → ["C", "D", "D#", "F", "G", "G#", "A#"] - **Натуральный минор.** Узнаваемый лад, полученный из унтертоновых принципов.
- [1, 21//20, 7//6, 6//5, 21//16, 7//5, 3//2, 14//9, 7//4, 28//15] → ["C", "C#", "D#", "D#", "F", "F#", "G", "G#", "A#", "B"] - **Блюзовый оттенок.** Присутствуют "блюзовые" ноты, обратите внимание на повтор D#.
- [1, 1, 16//15, 9//8, 6//5, 5//4, 4//3, 45//32, 3//2, 8//5, 5//3, 9//5, 7//4, 15//8] → ["C", "C", "C#", "D", "D#", "E", "F", "F#", "G", "G#", "A", "A#", "B", "B"] - **Хроматический размах.** Практически полный хроматический звукоряд в октаве, создающий ощущение богатства и насыщенности.

Унтертоника как ключ к пониманию:

Важно понимать, что структура каждого унтертонового лада определяется **унтертоникой** – обертоном акустической тоники, который служит отправной точкой для построения лада. Разные унтертоники порождают разные лады, создавая богатство гармонических вариантов в рамках единой системы. Представьте, что у нас есть "семейство" ладов, "вырастающих" из разных обертонов акустической тоники.

Гармонические возможности унтертоновой полимодальности:

Унтертоновая полимодальность открывает новые возможности для композиции и аранжировки:

- **Вертикальная полиладовость:** Разные инструменты или голоса могут исполнять мелодии и гармонии в разных унтертоновых ладах одновременно. Это создает плотную и многослойную гармоническую текстуру, где каждый голос сохраняет свою индивидуальность, но при этом все они связаны общей гармонической основой. **Важный практический совет:** для достижения ясности и избежания "гармонической грязи" рекомендуется **разделять лады между разными инструментами**, распределяя их по регистрам и тембровым группам.
- **Горизонтальная полиладовость:** Музыкальное развитие может осуществляться через **смену ладов** внутри композиции. Переходы между

унтертоновыми ладами могут быть как плавными и незаметными, так и резкими и контрастными, создавая различные эффекты гармонического напряжения и разрешения, обогащая драматургию произведения.

Практическое применение: музыкальные примеры

Как унтертоновая полимодальность может звучать в реальной музыке? Вот несколько гипотетических примеров:

- **Струнный квартет в полиладовом пространстве:** Представьте струнный квартет, где каждый инструмент играет в своем унтертоновом ладу. Первая скрипка ведет мелодию в натуральном миноре, альт импровизирует в ладу с блюзовыми нотами, виолончель подчеркивает гармоническую основу арпеджиированными пассажами, а контрабас создает глубокий фон с помощью педали на акустической тонике F#. Несмотря на ладовое разнообразие, общее звучание сохраняет цельность благодаря общей акустической тонике.
- **Электронная музыка и "гармоническое облако":** В электронной музыке унтертоновая полимодальность может быть реализована путем назначения разным синтезаторам разных унтертоновых ладов. Эффекты реверберации и задержки могут размыть границы между ладами, создавая ощущение объемного "гармонического облака", в котором отдельные голоса плавно перетекают друг в друга.
- **Импровизация в унтертоновом пространстве:** Музыканты, импровизирующие в рамках унтертоновой полимодальности, получают большую свободу выбора выразительных средств. Они могут свободно перемещаться между разными унтертоновыми ладами, не теряя ощущения гармонической связи с общей тонией, исследуя разнообразные звуковые ландшафты и создавая неожиданные гармонические повороты.

Унтертоновая полимодальность и музыкальная теория: новые перспективы

Концепция унтертоновой полимодальности предлагает не только новый композиционный метод, но и стимулирует **переосмысление основных понятий музыкальной теории**. Она ставит под вопрос традиционные представления о **тонике, ладе, гармонической функции**, предлагая взамен более гибкую и многомерную модель гармонического пространства. Возможно, дальнейшее развитие этой концепции потребует создания новых систем музыкальной нотации, способных более адекватно отобразить сложные взаимосвязи между звуками в унтертоновой полимодальной гармонии.

В следующем разделе мы рассмотрим практические правила аранжировки и композиции в унтертоновой полимодальности, помогающие реализовать ее потенциал на практике.

Гармония и аранжировка в унтертоновой полимодальности: практические правила

От теории к практике: как применять принципы унтертоновой полимодальности в композиции и аранжировке для создания богатого и цельного звучания.

Унтертоновая полимодальность, предлагая широкий спектр гармонических возможностей, требует внимательного подхода к аранжировке и композиции. Для эффективного использования этой системы важно руководствоваться определенными практическими принципами, обеспечивающими благозвучие, прозрачность фактуры и выразительность музыкального языка.

1. Окта́вное расположение нот и консонанс: достижение благозвучия в аккордах

Цель: Максимизировать консонанс и смягчить диссонансы в вертикальных созвучиях (аккордах), создавая общее ощущение гармонической цельности и благозвучия.

Принцип: При расположении нот в аккорде приоритет отдается **простым отношениям между соседними по высоте звуками**. В унтертоновой полимодальности, как и в традиционной гармонии, окта́вное расположение носит ключевой характер. Перенос звука на октаву вверх или вниз может существенно изменить восприятие интервала, упрощая или усложняя созвучие. **Стремление к увеличению знаменателя общей акустической тоники** аккорда также способствует консонансу, указывая на связь всех нот с более фундаментальной гармонической основой.

Практические советы:

- Избегайте тесного расположения диссонирующих интервалов:** Интервалы секунды (9/8), тритона (45/32) между соседними нотами в аккорде могут создавать излишнее напряжение. Рассмотрите возможность окта́вного переноса одной из нот для упрощения соотношения. Например, вместо секунды между двумя голосами расположите их через дециму (октава + секунда).
- Оптимизируйте расположение для упрощения акустической тоники:** Различные варианты окта́вного расположения одного и того же набора нот могут приводить к разным акустическим тоникам аккорда. Экспериментируйте с расположением, выбирая варианты, ведущие к большему знаменателю общей акустической тоники (что соответствует более низкой основной частоте общего знаменателя). Более низкая акустическая тоника часто коррелирует с более консонансным и цельным звучанием.
- Учитывайте регистровые свойства инструментов:** Эффективность окта́вного расположения может зависеть от регистровых возможностей конкретных

инструментов. Например, низкие регистры лучше подходят для более "плотных" и диссонирующих созвучий, тогда как высокие регистры подчеркивают прозрачность и консонанс.

Пример:

Рассмотрим аккорд, теоретически состоящий из нот с отношениями 5/4, 3/2 и 9/8 относительно некой условной тоники С. В равномерной темперации это примерно соответствует нотам Е, G, D.

- **Неоптимальное октавное расположение:** Расположение нот в пределах одной октавы – 5/4 (Е4), 9/8 (D5), 3/2 (G5) – создает относительно тесное и возможно напряженное созвучие. Акустическая тоника такого аккорда может оказаться относительно высокой, указывая на меньшую степень консонанса. Интервал между D5 и G5 (примерно малая терция) может звучать достаточно диффузно в такой тесной позиции.
- **Оптимальное октавное расположение:** Перенос ноты 9/8 (D) на две октавы вверх – 5/4 (Е4), 3/2 (G4), 9/2 (D6) – значительно меняет восприятие аккорда. Интервалы между соседними нотами становятся более прозрачными (большая терция Е4-G4, большая секста G4-D6). Акустическая тоника такого аккорда, вероятно, будет ниже, указывая на больший консонанс и цельность. Звучание становится более "благородным" и менее напряженным.

2. Инstrumentальное разделение нот и ладовая прозрачность фактуры

Цель: Добиться максимальной прозрачности и различимости отдельных голосов в полифонической или многоголосной фактуре, избегая "гармонической грязи" и обеспечивая слышимость каждого инструмента или голосовой линии.

Принцип: Распределение нот между разными инструментами или группами инструментов должно основываться на принципе **ладовой раздельности**. Каждый инструмент или группа инструментов может исполнять партию, организованную в рамках **отдельного унтертонового лада**. При этом важно учитывать **общие множители** в частотных отношениях нот разных ладов. **Ноты, имеющие общие простые множители в числителях или знаменателях своих частотных отношений, желательно распределять по разным унтертоновым ладам** и, соответственно, назначать разным инструментам или группам инструментов. Это минимизирует вероятность возникновения диссонирующих созвучий и способствует общей прозрачности и слаженности фактуры.

Практические советы:

- **Мыслите ладами, а не отдельными нотами при аранжировке:** При аранжировке партии для разных инструментов исходите не из логики традиционной гармонии (аккордовых последовательностей), а из принципа **ладового распределения**. Представьте, что каждый инструмент играет не

просто набор нот, а звуковое пространство своего собственного унтертонового лада.

- **Используйте разные унтертоники для разных инструментальных групп:** Для достижения гармонического разнообразия и тембровой контрастности целесообразно использовать **разные унтертоники** при построении ладов для разных инструментов. Разные унтертоники порождают лады с различным набором интервалов и характером звучания, что обогащает общую звуковую палитру.
- **Анализируйте общие множители при распределении нот:** Перед тем как назначить партии инструментам, проанализируйте частотные отношения нот в разных унтертоновых ладах. **Обратите особое внимание на наличие общих простых множителей в числителях и знаменателях.** Ноты, имеющие общие множители, могут потенциально порождать диссонансы, если звучат одновременно в тесной регистровой позиции. Разнесите такие ноты по разным инструментам и ладам.
- **Распределение ладов по регистрам инструментов:** Регистровые характеристики инструментов также играют важную роль в достижении прозрачности фактуры. **Более высокие унтертоновые лады можно назначить инструментам верхнего регистра (скрипка, флейта, высокие регистры фортепиано), а более низкие унтертоновые лады – инструментам нижнего регистра (виолончель, контрабас, низкие регистры фортепиано).** Такое регистровое разделение способствует лучшему слышанию каждого лада и общей гармонической ясности.

Пример:

Предположим, для композиции в унтертоновой полимодальности выбрана акустическая тоника F# (1/45). Для разных групп инструментов можно использовать следующие унтертоновые лады, построенные от разных унтертоник:

- **Группа 1 (струнные высокого регистра): Лад от унтертоники 5/1.** Этот лад может включать ноты с отношениями 9/1 (C#), 45/4 (E), 15/1 (A) относительно акустической тоники F#. Эти ноты, хотя и являются обертонаами F# (1/45), организуются вокруг унтертоники 5/1, создавая свой уникальный ладовый колорит.
- **Группа 2 (деревянные духовые среднего регистра): Лад от унтертоники 6/1.** Этот лад может содержать ноты 15/2 (A#), 27/2 (C#), 45/2 (E), 45/1 (F#). Здесь также ноты – обертоны F# (1/45), но сгруппированные вокруг унтертоники 6/1, отличной от первой группы.
- **Группа 3 (струнные низкого регистра): Лад от унтертоники 9/1.** Набор нот: 5/1 (F#), 45/8 (G#), 15/2 (A#), 9/1 (C#). Аналогично, ноты – обертоны F# (1/45), но организованы вокруг унтертоники 9/1.

При таком распределении каждая инструментальная группа получает свой ладовый "голос", отличающийся от других по интервальному составу и характеру звучания. Ноты 9/1 (C#) и 15/2 (A#) встречаются в нескольких ладах, что создает скрытые гармонические связи между группами, но благодаря регистровому разделению и тембровому контрасту инструментов удается избежать "перехлестывания" и диссонансов. Назначение разных унтертоник для разных инструментов обеспечивает богатство и объемность гармонической палитры.

3. Осознанное использование обертонов и микрохроматики: выразительные приемы унтертоновой гармонии

Цель: Обогатить звуковую палитру произведения, создать тонкие нюансы звучания, использовать эффекты микрохроматики и совпадения обертонов для достижения выразительности и эмоционального воздействия.

Принцип: Унтертоновая полимодальность открывает возможности для **сознательного управления обертоновыми соотношениями** между разными звуками и ладами. **Микрохроматические различия**, возникающие между нотами, близкими по высоте, но относящимися к разным унтертоновым ладам, могут использоваться как выразительное средство. **Совпадение обертонов** у нот разных инструментов может подчеркивать гармоническую связь и создавать особые эффекты консонанса или диссонанса в зависимости от контекста.

Практические советы:

- **Подчеркивание совпадения обертонов для усиления консонанса:** В моменты гармонического разрешения или достижения кульминации можно сознательно использовать ноты разных инструментов, чьи частотные отношения обеспечивают **совпадение обертонов**. Например, можно скомбинировать ноту G (отношение к тони 3/2) в одном инструменте с нотой D (отношение 9/8, октавно перенесенное до 9/2) в другом. Третий обертон ноты G (частота $3 \cdot 3/2 = 9/2$) совпадет с основным тоном ноты D (9/2), создавая ощущение особой гармонической спаянности и консонанса. Такое совпадение обертонов можно подчеркнуть темброво, выделив соответствующие инструменты и их регистры.
- **Использование микрохроматических "биений" для создания vibrato и напряжения:** Ноты, представляющие близкие, но не идентичные частотные отношения (например, 16/9 и 9/5 – разница около 22 центов), при одновременном звучании создают эффект **микрохроматических "биений"**, звуковых пульсаций, напоминающих vibrato или tremolo. Этот эффект может быть использован как средство выразительности, добавляя звучанию особую окраску, напряжение или "мерцание". Например, в моменты нарастания динамики или достижения кульминации можно использовать микрохроматические "биения" для усиления эмоционального воздействия. И

наоборот, в моменты затухания или успокоения музыки можно устраниć микрохроматику, добиваясь большей "ровности" и "гладкости" звучания.

- **Эксперимент с тембровыми эффектами и регистровыми нюансами:**

Унтертоновая полимодальность поощряет творческие поиски в области тембра и регистровки. **Экспериментируйте с сочетаниями тембров разных инструментов в разных унтертоновых ладах.** Ищите неожиданные и интересные звуковые эффекты, возникающие на стыке разных ладовых пространств. Используйте регистровую дифференциацию инструментов не только для достижения прозрачности, но и для создания тембровых контрастов и нюансов, обогащающих музыкальную выразительность.

4. Импровизация и унтертоновая свобода: гармоническое пространство для творчества

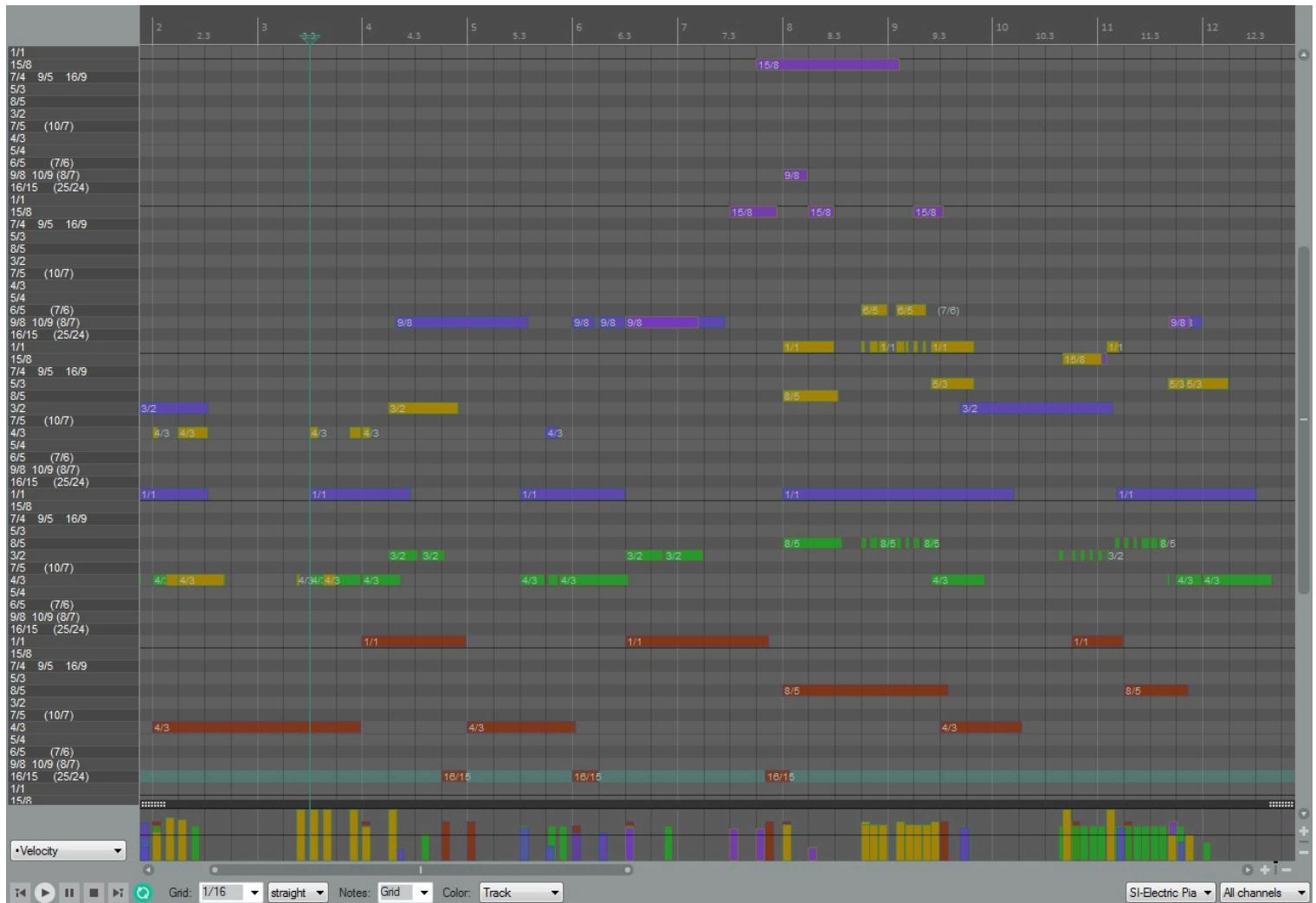
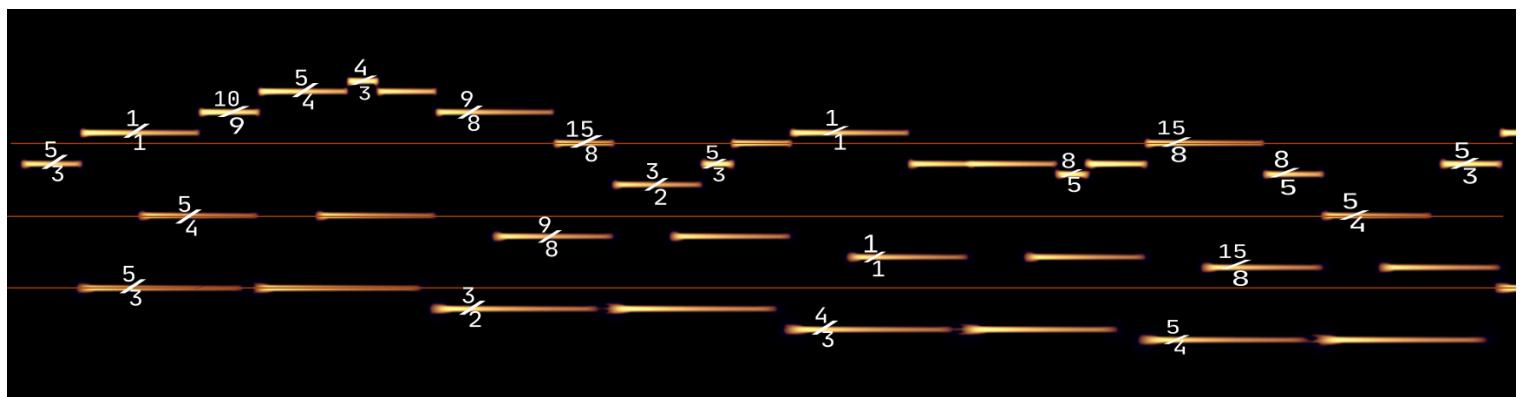
Унтертоновая полимодальность открывает новые перспективы для **музыкальной импровизации**. Общая акустическая тоника служит своеобразным "маяком", задающим гармонический центр и обеспечивающим ощущение целостности, даже при свободном перемещении между разными унтертоновыми ладами. Импровизатор получает возможность **исследовать разнообразные ладовые территории**, не боясь потерять тональную "ориентацию", словно путешественник, свободно передвигающийся по знакомой местности, где каждый ландшафт уникален, но все они связаны общей географической основой.

5. Драматургия гармонического напряжения: унтертоновая модуляция и контраст

Унтертоновая полимодальность предоставляет композиторам эффективные средства для управления **гармоническим напряжением и разрядкой**, создания драматургического развития в музыкальном произведении. **Переходы между разными унтертоновыми ладами** могут выполнять функцию **унтертоновой "модуляции"**, изменения гармонической "плотности" и "окраски". **Контрастное сопоставление ладов** с различным уровнем консонанса или различным характером звучания может использоваться для создания драматических эффектов. Например, музыкальное развитие может начинаться в более простом и консонанском унтертоновом ладу, а затем постепенно усложняться путем подключения инструментов, исполняющих партии в более "насыщенных" унтертоновых ладах, увеличивая гармоническую плотность и напряжение. Обратное движение – от сложного к простому, от насыщенного к прозрачному – может создавать эффект гармонической разрядки и успокоения. **Важно помнить, что при унтертоновой "модуляции" акустическая тоника остается общей**, обеспечивая непрерывность гармонической линии и избегая ощущения тонального "разрыва".

Заключение: унтертоновая полимодальность как инструмент музыкальной выразительности

Унтертоновая полимодальность – это не просто набор технических приемов, а целостная система музыкального мышления, предлагающая новый взгляд на природу гармонии и ее выразительные возможности. Освоение принципов унтертоновой полимодальности требует от композитора и аранжировщика не только технического мастерства, но и глубокого понимания акустических законов, чувства гармонического баланса и творческой смелости в поиске новых звуковых форм. В руках мастера унтертоновая полимодальность становится мощным инструментом для создания музыки невиданной ранее глубины, красоты и эмоциональной выразительности, открывая новые горизонты для музыкального искусства XXI века.



 Поделиться

Задонатить

Один донатер

Made in Moscow



0



0



Еще от Неостановимая Машина Добра

Неостановимая Маш...

Ноль Дней Без
Происшествий

1 63

Неостановимая Маш...

Резерват



1 1 154

Неостановимая Маш...

Rezervat



1 1 142

Оставьте комментарий

Напишите комментарий...

