1 5 - Gramáticas e linguagens livres de contexto

Uma gramática livre de contexto é $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \mathcal{S})$, onde V é um alfabeto finito;
Σ (conjunto de símbolos não terminais) é um subconjunto não-vazio de V;
$\mathcal{P}$ (conjunto de produções ou regras de substituição) é um subconunto finito de $(V - \Sigma) \times V^*$;
e $\mathcal{S}$ (símbolo inicial) é um elemento de $(V - \Sigma)$.

Obs:

1. $(V - \Sigma)$é o conjunto de símbolosnão-terminais.
2. Para todo $A \in (V - \Sigma)$ e $\alpha \in V^*$, escrevemos $A \to \alpha$, sempre que $(A, \alpha) \in \mathcal{P}$.
3. Convencionamos que letras maiúsculas são símbolos não-terminais e que letras minúsculas são símbolos terminais.

- Para palavras α e β em V^+, escrevemos $\alpha \Longrightarrow_G \beta$, e dizemos que β é derivável de α em um passo (ou que α deriva de β em um passo) sse existem palavras α_1, α_2 e γ em V^* e $A \in (V - \Sigma)$ tq
  $\alpha = \alpha_1 A \alpha_2$, $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ e $A \to \gamma \in \mathcal{P}$.
- Denotamos por $\Rightarrow_G^*$ o fecho reflexivo e transitivo de $\Rightarrow_G$.
- Todo seq. da forma $\alpha_0 \Rightarrow_G \alpha_1 \Rightarrow_g \cdots \Rightarrow_g \alpha_n$, para $0 \leq i \leq n$, é uma derivação de α_n em G, a partir de α_0
- Toda palavra de V^+ derivável a partir de $\mathcal{S}$ (símbolo inicial) é chamada de forma sentencial.
  Uma sentença é uma forma sentencial em Σ^*.
- A linguagem gerada por uma gramática G, denotada por $L(G)$, é:

  $$L(G) = \{x \in \Sigma^* : \mathcal{S} \Rightarrow_G^* x\}$$

  Dizemos também que G gera cada palavra em $L(G)$.
- Uma linguagem L é livre de contexto se $L = L(G)$, para alguma gramática livre de contexto G.

1.1 Exemplos

1. Seja $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \mathcal{S})$ uma glc, onde:

   $V = \{a, b, c\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ e
   $\mathcal{P} = \{\mathcal{S} \to_1 \lambda, \mathcal{S} \to_2 a\mathcal{S}b\}$.

   $\mathcal{S} \Rightarrow_1 \lambda$
   $\mathcal{S} \Rightarrow_2 a\mathcal{S}b$

$\mathcal{S} \Rightarrow_2 aa\mathcal{S}bb$
$\mathcal{S} \Rightarrow_2 aaa\mathcal{S}bbb$
$\mathcal{S} \Rightarrow_1 aaabbb$

$L(G) = \{a^n b^n : n \geq 0\} = L$

(a) Para provar que $L \subseteq L(G)$, vamos provar que:

$\forall n \geq 0$, $\mathcal{S} \Rightarrow_G^* a^n b^n$, por indução em n.

Base: $n = 0$, então $a^0 b^0 = \lambda$ e
$\mathcal{S} \Rightarrow \lambda$ (pois $\mathcal{S} \rightarrow \lambda \in \mathcal{P}$)

Seja $n \geq 0$.

Hipótese de indução: Suponha que $\mathcal{S} \Rightarrow_G^* a^n b^n$

Passo da indução:
Seja $\alpha = a^{n+1} b^{n+1}$
Então, $\mathcal{S} \Rightarrow_2 a\mathcal{S}b \Rightarrow^* aa^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1} = x$.
$h.i.$

(b) Para provar que $L(G) \subseteq L$, vamos provar que:
se $\mathcal{S} \Rightarrow_G^* x$ em $n > 0$ passos e $x \in \Sigma^*$,
então $x = a^{n-1} b^{n-1}$. (Por indução no número n de passos da derivação)

Base:
Se $\mathcal{S} \Rightarrow x$ em 1 passo e $x \in \Sigma^*$, então só podemos utilizar a produção $\mathcal{S} \rightarrow \lambda$ em $\mathcal{P}$.
Logo, $x = \lambda = a^0 b^0$.

Seja $n \geq 1$.

H.I.: Suponha que se $\mathcal{S} \Rightarrow_G^* x$ em n passos e $x \in \Sigma^*$, então $x = a^{n-1} b^{n-1}$.

Passo da indução: Então, $\mathcal{S} \Rightarrow a\mathcal{S}b \Rightarrow^* x$.
Logo, existe $y \in \Sigma^*$ tq $x = ayb$ e $\mathcal{S} \Rightarrow^* y$ em n passos.
Pela $h.i.$, segue que $y = a^{n-1} b^{n-1}$.

2. $L = \{x \in \{a, b\}^* : x = x^R\}$ (Exercício: Prove que L não é rec.)
glc $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \mathcal{S})$, onde:

$V = \Sigma \cup \{\mathcal{S}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ e
$\mathcal{P} = \{\mathcal{S} \rightarrow_1 \lambda | a | b, \mathcal{S} \rightarrow_2 a\mathcal{S}b, \mathcal{S} \rightarrow_2 b\mathcal{S}b\}$.

3. $L = \{a^i b^i : i \neq j\}$
$L_1 = \{a^i b^i : i > j\}$
glc $G_1 = (V_1, \Sigma, \mathcal{P}_1, \mathcal{S}_1)$, onde:

$V_1 = \Sigma \cup \{\mathcal{S}_1, A, X\}$,
$\mathcal{P}_1 = \{\mathcal{S}_1 \rightarrow AX, A \rightarrow a | aA, X \rightarrow \lambda | aXb\}$

$L(G_1) = L_1$.

$L_2 = \{a^i b^i : i < j\}$
glc $G_2 = (V_2, \Sigma, \mathcal{P}_2, \mathcal{S}_2)$, onde:

$V_2 = \Sigma \cup \{\mathcal{S}_2, B, X\}$,
$\mathcal{P}_2 = \{\mathcal{S}_2 \rightarrow XB, B \rightarrow b|bB, X \rightarrow \lambda|aXb\}$

glc $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, \mathcal{S})$, onde:

$V = \Sigma \cup \{\mathcal{S}, A, X, B\}$,
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$