1 Lema do Bombeamento

Seja L uma linguagem reconhecível.
Então, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que para cada palavra $\omega \in L$, com $|\omega| \geq n$, existem palavras x, y e z tal que $x = xyz$, $y \neq \lambda$, $|xy| \leq n$ e para todo $k \geq 0$, $xy^k z \in L$.

Demonstração. Seja L uma linguagem reconhecível. Então, existe um *afd* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ tal que $L(\mathcal{A}) = L$. Considere $n = |Q|$. Seja em L não existem palavras de comprimento $\geq n$, nada ha para provar. Caso contrario, seja $\omega \in L$, com $|\omega| \geq n$. Então, $w = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n \omega`$, com $\sigma_i \in \Sigma$ (para $1 \leq i \leq n$) e $\omega \in \Sigma^+$
TERMINAR □

1.1 Exemplos

- $B = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$
  Suponha que B seja reconhecível.
  Então, $B \cap L(a^*b^*)$ deveria ser reconhecível, pois $L(a^*b^*)$ e rec. e $Rec(\Sigma)$ e fechada para a interseccao.
  Mas, $B \cap L(a^*b^*) = A$ que ja provamos que não e rec. Logo, obtemos uma contradição. Portanto, B não e rec.

1.2 Mostre que as seg. ling. não são reconhecíveis

1. $L1 = \{xx : x \in \{a, b\}^*\}$
   Suponha que L1 seja rec.
   Seja n o inteiro fornecido pelo L.B. para L1.
   Considere a palavra $w = a^n b a^n b$.
   Como $w \in L1$ e $|w| > n$, o L.B. garante que existem palavras x, y e z, tal que $w = xyz$, $y \neq \lambda$, $|xy| \leq n$ e para todo $k \geq 0$, $xy^k z \in L1$.
   Como $y \neq \lambda$ e $|xy| \leq n$, existem inteiros $r \geq 0$ e $s > 0$ ($r + s \leq n$) tal que $x = a^r$, $y = a^s$ e $z = a^{n-r-s} b a^n b$.
   Considere a palavra $t = xy^3 z = a^r (a^s)^3 a^{n-r-s} b a^n b = a^{n+2s} b a^n b$. Pelo L.B., $t \in L1$.
   Como $|t| = 2(n + s + 1)$ e $s > 0$, segue que o prefixo de t de comprimento $\frac{|t|}{2}$ é $t_1 = a^{n+s+1}$ e o sufixo de t de comprimento $\frac{|t|}{2}$ é $t_2 = a^{s-1} b a^n b$.
   Mas, como $t_1 = t_2$ e $|t_1| = |t_2|$, resulta que $t = t_1 t_2 \notin L1$.
   O que é uma contradição. Portanto, $L1$ não é reconhecível.

2. $L2 = \{a^{i^2} : i \geq 0\}$
   Suponha que L2 seja rec.
   Seja n o inteiro fornecido pelo L.B. para L2.
   Considere a palavra $w = a^{n^2}$.
   Como $w \in L2$ e $|w| > n$, o L.B. garante que existem palavras x, y e z, tal que $w = xyz$, $y \neq \lambda$, $|xy| \leq n$ e para todo $k \geq 0$, $xy^k z \in L2$.
   Como $y \neq \lambda$ e $|xy| \leq n$, existem inteiros $r \geq 0$ e $s > 0(r + s \leq n)$ tal que

$x = a^r$, $y = a^s$ e $z = a^{n^2-r-s}$.
Considere a palavra $t = xy^2z = a^r(a^s)^2a^{n^2-r-s} = a^{n^2+s}$
Pelo L.B., $t \in L2$.
Mas, $n^2 < |t| = n^2 + s \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$
Logo, $|t|$ não pode ser um quadrado perfeito.
Então, $t \notin L2$. O que é uma contradição.
Portanto, L2 não é reconhecível.

3. $L3 = \{a^ib^j : i > j \geq 0\}$
   Suponha que L3 seja rec.
   Seja n o inteiro fornecido pelo L.B. para L3.
   Considere a palavra $w = a^{n+1}b^n$.
   FAZER EM CASA?!?!

4. $L4 = \{a^ib^i : i, j \geq 0 \text{ e } i \neq j\}$
   PENSAR EM CASA?!?!?!?!?!
   Sem usar o L.B. ...
   Vimos que $A = \{a^ib^i : i \geq 0\}$ não é rec.
   $\bar{L} = \{a^ib^i : i, j \geq 0 \text{ e } i = j\} \cup \{w \in \{a,b\}^* :$ w tem pelo menos um fator $ba\}$.
   Suponha que $L4$ seja rec.
   Então, $\bar{L}$ também seria rec.
   A não e rec.
   Logo, $\bar{L} \cap L(a^*b^*)$ também não e rec.
   Mas, $\bar{L} \cap L(a^*b^*) = A$ que não é rec. Chegamos a uma contradição.
   Portanto, $\bar{L}$ e L não são rec.

Obs: $L = \{a^ib^jc^k : i, j, k \geq 0 \text{ e } (i = 0 \text{ ou } j = k)\}$.

- Prove que L satisfaz o L.B. $(n = 1)$
- Vamos provar que L não é rec.
  $L = \{b\}^*\{c\}^* \cup \{a\}^+\{b^jc^k : j, k \geq 0 \text{ e } j = k\}$.
  Mostrar que L^R não é rec.
  "Esboço:"
  Suponha que L é rec.
  Então, $L \cap \{a\}^+\{b\}^*\{c\}^*$ seja rec. Mas $L \cap \{a\}^+\{b\}^*\{c\}^* = L^{'}$.
  Prove que $L^{'} = \{a\}^+\{b^jc^j : j \geq 0\}$ não é rec.
  (Use o L.B. para provar que Rec e fechada para inverso).

5. $L5 = \{a^p : peprimo\}$