

# 1 Lema do Bombeamento

Seja  $L$  uma linguagem reconhecível.

Então, existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que para cada palavra  $\omega \in L$ , com  $|\omega| \geq n$ , existem palavras  $x$ ,  $y$  e  $z$  tal que  $\omega = xyz$ ,  $y \neq \lambda$ ,  $|xy| \leq n$  e para todo  $k \geq 0$ ,  $xy^kz \in L$ .

*Demonstração.* Seja  $L$  uma linguagem reconhecível. Então, existe um *afd*  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$  tal que  $L(\mathcal{A}) = L$ . Considere  $n = |Q|$ . Seja em  $L$  não existem palavras de comprimento  $\geq n$ , nada há para provar. Caso contrário, seja  $\omega \in L$ , com  $|\omega| \geq n$ . Então,  $\omega = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n\omega'$ , com  $\sigma_i \in \Sigma$  ( para  $1 \leq i \leq n$  ) e  $\omega' \in \Sigma^+$   
TERMINAR  $\square$

## 1.1 Exemplos

- $B = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$   
Suponha que  $B$  seja reconhecível.  
Então,  $B \cap L(a^*b^*)$  deveria ser reconhecível, pois  $L(a^*b^*)$  é rec. e  $Rec(\Sigma)$  é fechada para a interseção.  
Mas,  $B \cap L(a^*b^*) = A$  que já provamos que não é rec. Logo, obtemos uma contradição. Portanto,  $B$  não é rec.

## 1.2 Mostre que as seg. ling. não são reconhecíveis

1.  $L1 = \{xx : x \in \{a, b\}^*\}$   
Suponha que  $L1$  seja rec.  
Seja  $n$  o inteiro fornecido pelo L.B. para  $L1$ .  
Considere a palavra  $w = a^nba^n$ .  
Como  $w \in L1$  e  $|w| > n$ , o L.B. garante que existem palavras  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tal que  $w = xyz$ ,  $y \neq \lambda$ ,  $|xy| \leq n$  e para todo  $k \geq 0$ ,  $xy^kz \in L1$ .  
Como  $y \neq \lambda$  e  $|xy| \leq n$ , existem inteiros  $r \geq 0$  e  $s > 0$  (  $r + s \leq n$  ) tal que  $x = a^r$ ,  $y = a^s$  e  $z = a^{n-r-s}ba^n$ .  
Considere a palavra  $t = xy^3z = a^r(a^s)^3a^{n-r-s}ba^n = a^{n+2s}ba^n$ . Pelo L.B.,  $t \in L1$ .  
Como  $|t| = 2(n + s + 1)$  e  $s > 0$ , segue que o prefixo de  $t$  de comprimento  $\frac{|t|}{2}$  é  $t_1 = a^{n+s+1}$  e o sufixo de  $t$  de comprimento  $\frac{|t|}{2}$  é  $t_2 = a^{s-1}ba^n$ .  
Mas, como  $t_1 = t_2$  e  $|t_1| = |t_2|$ , resulta que  $t = t_1t_2 \notin L1$ .  
O que é uma contradição. Portanto,  $L1$  não é reconhecível.
2.  $L2 = \{a^{i^2} : i \geq 0\}$   
Suponha que  $L2$  seja rec.  
Seja  $n$  o inteiro fornecido pelo L.B. para  $L2$ .  
Considere a palavra  $w = a^{n^2}$ .  
Como  $w \in L2$  e  $|w| > n$ , o L.B. garante que existem palavras  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tal que  $w = xyz$ ,  $y \neq \lambda$ ,  $|xy| \leq n$  e para todo  $k \geq 0$ ,  $xy^kz \in L2$ .  
Como  $y \neq \lambda$  e  $|xy| \leq n$ , existem inteiros  $r \geq 0$  e  $s > 0$  (  $r + s \leq n$  ) tal que

$$x = a^r, y = a^s \text{ e } z = a^{n^2-r-s}.$$

Mas,  $n^2 < |t| = n^2 + s \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ .

Logo,  $|t|$  não pode ser quadrado perfeito.

Então,  $t \in L2$ . O que é uma contradição.

Portanto,  $L2$  não é reconhecível.

$$3. L3 = \{a^i b^j : i > j \geq 0\}$$

Suponha que  $L3$  seja rec.

Seja  $n$  o inteiro fornecido pelo L.B. para  $L3$ .

Considere a palavra  $w = a^{n+1}b^n$ .

FAZER EM CASA?!?!?

$$4. L4 = \{a^i b^j : i, j \geq 0 \text{ e } i \neq j\}$$

PENSAR EM CASA?!?!?!?!?

Sem usar o L.B. ...

Vimos que  $A = \{a^i b^i : i \geq 0\}$  não é rec.

$\bar{L} = \{a^i b^j : i, j \geq 0 \text{ e } i = j\} \cup \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ tem pelo menos um fator } ba\}$ .

Suponha que  $L4$  seja rec.

Então,  $\bar{L}$  também seria rec.

$A$  não é rec.

Logo,  $\bar{L} \cap L(a^*b^*)$  também não é rec.

Mas,  $\bar{L} \cap L(a^*b^*) = A$  que não é rec. Chegamos a uma contradição.

Portanto,  $\bar{L}$  e  $L$  não são rec.

*Obs:*  $L = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \text{ e } (i = 0 \text{ ou } j = k)\}$ .

- Prove que  $L$  satisfaz o L.B. ( $n = 1$ )

- Vamos provar que  $L$  não é rec.

$$L = \{b\}^* \{c\}^* \cup \{a\}^+ \{b^j c^k : j, k \geq 0 \text{ e } j = k\}.$$

Mostrar que  $L^R$  não é rec.

"Esboço:"

Suponha que  $L$  é rec.

Então,  $L \cap \{a\}^+ \{b\}^* \{c\}^*$  seja rec. Mas  $L \cap \{a\}^+ \{b\}^* \{c\}^* = L'$ .

Prove que  $L' = \{a\}^+ \{b^j c^j : j \geq 0\}$  não é rec.

( Use o L.B. para provar que Rec é fechada para inverso ).

$$5. L5 = \{a^p : p \text{ primo}\}$$