

Cinematica, trasformazioni di Lorentz

esercizio 1.1

Consideriamo due sistemi di riferimento S e S' , con S' in moto con velocità costante V rispetto a S lungo l'asse x : i punti A e B sono fermi in S e sono situati a una stessa distanza L dal punto O , da parti opposte. All'istante $t = t' = 0$ da O viene emesso un impulso luminoso che si propaga in tutte le direzioni con velocità c e raggiunge i punti A e B contemporaneamente al tempo $t_A = t_B = L/c$. Quali sono i tempi di arrivo t'_A e t'_B dei due segnali luminosi nei punti A e B misurati nel sistema di riferimento S' ?

esercizio 1.2

Due eventi avvengono nello stesso punto in un sistema di riferimento inerziale S . Dimostrare che la sequenza temporale con la quale i due eventi si susseguono è la stessa in tutti i possibili sistemi di riferimento inerziali. Dimostrare inoltre che l'intervallo di tempo minimo tra i due eventi è quello misurato nel sistema di riferimento S .

esercizio 1.3

In un sistema di riferimento S , 2 eventi sono separati da una distanza $\Delta x = 600$ m e da un intervallo di tempo di $\Delta t = 0.8 \mu s$. Nel sistema di riferimento S' che si muove a una velocità costante $V = V_x$ rispetto a S , i 2 eventi avvengono nello stesso istante. Trovare il valore della velocità V e la distanza $\Delta x'$ tra i 2 eventi in S' .

$$[v = 0.4c, \Delta x' = 550 \text{ m}]$$

esercizio 1.4

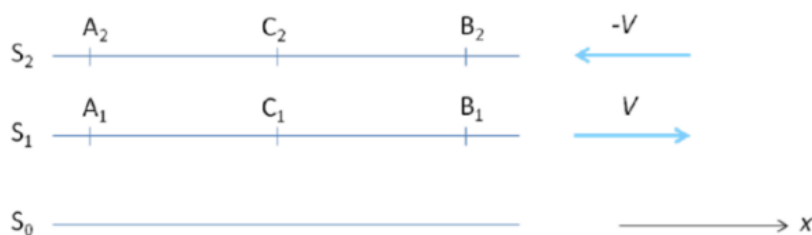
Una astronave si allontana dalla Terra con velocità v costante. Un segnale radar viene trasmesso dalla Terra alle 12:00. Il segnale viene riflesso dalla coda dell'astronave e viene ricevuto dalla stazione radar alle 12:02. Lo stesso segnale, riflesso dal muso dell'astronave, viene ricevuto $2\mu s$ dopo. Un secondo segnale viene inviato alle 12:04 e, dopo essere stato riflesso dalla coda dell'astronave, viene ricevuto dalla stazione radar alle 12:18. Trovare la velocità dell'astronave e la sua lunghezza propria.

$$[v = 0.6c, L_0 = 150 \text{ m}]$$

esercizio 1.5

Dati 3 sistemi di riferimento S_0, S_1, S_2 come quelli in figura, determinare:

1. la lunghezza L_2 del segmento A_2B_2 , di lunghezza propria L , nel sistema S_0
2. la velocità relativa u dei sistemi S_1 e S_2
3. la lunghezza L'_1 del segmento A_1B_1 in S_2 in funzione della velocità V



esercizio 1.6

Una astronave A parte dalla Terra alla volta di α Centauri, viaggiando a velocità costante. La distanza della stella dalla Terra è di 4 anni luce. Si consideri la Terra come un sistema di riferimento inerziale S e l'astronave come un sistema di riferimento S' che si muove ad una velocità V rispetto alla Terra.

1. quale deve essere il modulo della velocità V perché il viaggio abbia una durata di 4 anni per i passeggeri dell'astronave?
2. quant'è la durata del viaggio per un osservatore sulla Terra?
3. una seconda astronave B sta tornando da α Centauri con una velocità $v_{Bx} = -c/\sqrt{2}$ rispetto alla Terra; qual è la velocità di B misurata da un osservatore in A?
4. Se B ha una lunghezza a riposo di $l_{B0} = 48$ m, quant'è la sua lunghezza misurata da un osservatore sull'astronave A?

$$[v = c/\sqrt{2}, t = 5.66 \text{ anni}, u = 0.94c, l'_{B0} = 16 \text{ m}]$$

esercizio 1.7

Un sistema di riferimento S' si muove con velocità costante $v = 0.5c$ lungo la direzione x di un sistema di riferimento S. In S, una sbarra di lunghezza $L = 1$ m si muove con velocità costante $v_y = 0.5c$ lungo la direzione positiva dell'asse y mantenendosi parallela all'asse x. Il centro della sbarra passa per il punto $x = y = x' = y' = 0$ al tempo $t = t' = 0$. Quanto vale in S' l'angolo θ' formato dall'asse della sbarra e l'asse x'?

$$[\theta' = 16^\circ]$$

esercizio 1.8

Due astronavi si dirigono una contro l'altra con velocità costante. Un osservatore in quiete sulla Terra misura una velocità pari a $v_1 = 0.8c$ per l'astronave S_1 e $v_2 = 0.6c$ per S_2 , una lunghezza di 50 m per entrambe ed una distanza iniziale di $2.52 \cdot 10^{12}$ m.

1. quali sono le lunghezze proprie di S_1 ed S_2 ?
2. quale è la lunghezza di S_1 e S_2 misurata da osservatori stazionari sulle due astronavi?
3. quanto tempo impiegano le due astronavi per scontrarsi (in S)?
4. per un osservatore solidale con S_1 , quanto tempo passa prima della collisione?
5. per un osservatore solidale con S_2 , quanto tempo passa prima della collisione?
6. quanto vale la distanza iniziale tra le due astronavi misurata da un osservatore su S_1 ?

$$[L_{01} = 83.3 \text{ m}, L_{02} = 62.5 \text{ m}, t = 6000 \text{ s}, t_1 = 60 \text{ min}, t_2 = 80 \text{ min}, d_1 = 1.02 \times 10^{12} \text{ m}]$$

esercizio 1.9

Una sbarra rigida di lunghezza L_0 si trova nel piano xy di un sistema di riferimento S e forma un angolo ϑ rispetto alla direzione positiva dell'asse x. Un secondo sistema di riferimento S' si muove con una velocità costante $V = V_x$ rispetto ad S. Calcolare l'angolo ϑ' formato dalla sbarra in S' rispetto all'asse x'.

$$[\vartheta' = \arctg(g \tg \vartheta)]$$

esercizio 1.10

Una sbarra rigida di lunghezza L si muove in un sistema di riferimento S con una velocità costante $u = u_x$ ed ha una pendenza α rispetto all'asse x . Un secondo sistema di riferimento S' si muove con una velocità costante $V = V_x$ rispetto a S . Calcolare la pendenza della sbarra in S' rispetto all'asse x' .

$$[\alpha' = \gamma \alpha (1 - V_x u_x / c^2)]$$

esercizio 1.11

Un pione π^0 (massa $m_\pi = 135 \text{ MeV}/c^2$) si muove con velocità $\beta = 0.8$ e decade in due fotoni con un angolo di 90° rispetto alla direzione di volo (nel sistema di riferimento del pione). Trovare l'angolo tra i due fotoni nel sistema di riferimento del laboratorio.

$$[2\theta = 73.6^\circ]$$

esercizio 1.12

Un osservatore O osserva la luce emessa da un oggetto X ad un angolo di 45° rispetto alla linea di volo dell'oggetto. Se il corrispondente angolo di emissione nel sistema di riferimento di X è di 60° , calcolare la velocità di X .

$$[v = 0.32c]$$

esercizio 1.13

Un pione si muove lungo l'asse x del sistema di riferimento del laboratorio con $\beta = 0.8$ ed emette un muone con $\beta_1' = 0.268$ nel sistema di riferimento del pione. Calcolare:

1. la velocità (modulo e direzione) del muone nel laboratorio se emesso lungo l'asse x'
2. la velocità del muone nel laboratorio se emesso lungo l'asse y'
3. il muone è emesso lungo la direzione positiva dell'asse y . Trovare la velocità del muone nel laboratorio e l'angolo di emissione nel sistema di riferimento del pione (si assuma ora $\beta = 0.2$).

$$[\beta_1 = 0.88c, \beta_1 = 0.82c, \beta_1 = 0.185c]$$

esercizio 1.14

La vita media propria di un muone è approssimativamente di $2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Si supponga che un gran numero di muoni, prodotti in una esplosione ad una certa altezza nell'atmosfera, viaggi verso la terra a $v = 0.99c$. Il numero di urti nell'atmosfera durante il percorso è piccolo. Se l'1% dei muoni originali sopravvive fino a raggiungere la superficie della terra, si calcoli l'altezza iniziale.

$$[d = 19.3 \text{ km}]$$

Effetto Doppler

esercizio 2.1

Una galassia si allontana da noi, in una particolare direzione, con velocità pari a $0.3c$ e un'altra si allontana, in direzione opposta, con la stessa velocità. Qual è lo spostamento dovuto a effetto Doppler misurato da una galassia rispetto all'altra?

$$[\Delta\lambda/\lambda_0 = 0.86]$$

esercizio 2.2

Una sorgente luminosa si muove su di un'orbita circolare ad una velocità di $0.5c$. Qual è lo spostamento dovuto all'effetto Doppler della riga gialla del Sodio osservato nel centro della circonferenza (la riga ha una lunghezza d'onda di 589 nm misurata in laboratorio)?

$$[\Delta\lambda = 91 \text{ nm}]$$

esercizio 2.3

Un fascio luminoso di frequenza f è inviato perpendicolarmente contro uno specchio in moto in verso opposto con velocità V . Determinare:

1. la frequenza f_1 della luce nel sistema S solidale con lo specchio;
2. la frequenza f_2 della luce riflessa, nel sistema del laboratorio, in funzione di f e V .

$$[f_2 = f(1 + b)/(1 - b)]$$

esercizio 2.4

C'è un servizio di navette spaziali tra la Terra e Marte. Ogni astronave è equipaggiata con due fari identici, uno davanti e uno sul posteriore della nave. Le astronavi normalmente viaggiano ad una velocità costante v_0 rispetto alla Terra, così che la luce anteriore quando una astronave si avvicina alla Terra appare verde ($\lambda = 500 \text{ nm}$) mentre quella posteriore di una in partenza appare rossa ($\lambda = 600 \text{ nm}$).

1. quanto vale v_0 ?
2. una astronave accelera per superare una davanti a lei. A quale velocità deve andare (relativamente alla Terra) affinché la luce posteriore della nave che la precede le appaia verde ($\lambda = 500 \text{ nm}$)?

$$[\beta_0 = 1/11, \beta = 11/61]$$

Dinamica Relativistica

esercizio 3.1

Una particella ha una energia cinetica pari a 250 MeV e un impulso di 368 MeV/c. Qual è la massa a riposo di tale particella?

$$[m_0 = 146 \text{ MeV}/c^2]$$

esercizio 3.2

Un fascio di π^+ di energia pari a 1 GeV ha un flusso di 10^6 particelle/s. Il fascio percorre una distanza di 10 m in laboratorio; qual è il flusso di particelle alla fine del percorso, assumendo una massa a riposo per i pioni di $140 \text{ MeV}/c^2$ e una vita media di $2.56 \cdot 10^{-8} \text{ s}$?

$$[\phi = 0.83 \times 10^6 \text{ particelle/s}]$$

esercizio 3.3

Un mesone K^0 ($m_{K^0} = 494 \text{ MeV}/c^2$) decade in volo in una coppia $\pi^+ \pi^-$ ($m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$). Se il pione negativo è prodotto a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio, calcolare l'energia cinetica del pione positivo.

$$[E_k = 591.6 \text{ MeV}]$$

esercizio 3.4

Un pione si muove con una velocità v e decade via $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Se il neutrino (si assuma $m_\nu = 0$) forma un angolo di 90° con la direzione di volo del pione nel laboratorio, trovare l'angolo ϑ_μ tra la direzione del muone e quella del pione (nel sistema di riferimento del laboratorio).

$$[\tan \vartheta_\mu = (m_\pi^2 - m_\mu^2)/2m_\pi^2 \gamma^2 \beta]$$

esercizio 3.5

Una particella con massa a riposo m si trova in quiete nel sistema del laboratorio. La particella decade in due particelle: una con massa a riposo m_1 che si muove con velocità $V_1 = (3/5)c$ ed un'altra di massa m_2 che si muove con velocità $V_2 = (4/5)c$. Trovare:

1. i valori di m_1 e m_2 in funzione di m ;
2. le energie cinetiche delle due particelle in funzione di m .

$$[m_1 = (16/35)m, m_2 = (9/35)m]$$

esercizio 3.6

Una particella in quiete di massa M decade in una particella di massa a riposo m e in un fotone. Trovare le energie della nuova particella e del fotone.

$$[E_\gamma = (M^2 - m^2)c^2/2M, E_m = (M^2 + m^2)c^2/2M]$$

esercizio 3.7

Consideriamo un urto tra un fotone di energia E_γ ed un elettrone inizialmente fermo nel laboratorio. Dopo l'urto il fotone rimbalza all'indietro. Determinare l'impulso finale dell'elettrone p_e e del fotone p'_γ dopo l'urto.

$$[p'_\gamma = E_\gamma m_e c^2 / (2E_\gamma + m_e c^2)]$$

esercizio 3.8

Un pione (massa $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$), inizialmente in moto con velocità $V = 0.5c$ diretta lungo l'asse x del sistema di riferimento del laboratorio S , decade in un muone ed un neutrino ($\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$).

Supposto che il decadimento in S' avvenga lungo l'asse y' , ed assumendo $m_\nu = 0$ e $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$, trovare:

1. l'espressione della velocità del muone nel sistema S' ed il suo valore numerico;
2. le componenti della velocità del muone nel sistema S ed il suo valore numerico;
3. le componenti della velocità del neutrino nel sistema S ed il suo valore numerico.

$$[v'_\mu = 0.27c, v_\mu = 0.55c, v_\nu = c]$$

esercizio 3.9

Una particella Σ decade in moto in 3 pioni carichi A, B e C. La massa a riposo di ogni pione è $140 \text{ MeV}/c^2$. Le loro energie cinetiche sono, rispettivamente, $K_A = 190 \text{ MeV}$, $K_B = 321 \text{ MeV}$ e $K_C = 58 \text{ MeV}$. Le velocità dei pioni formano con l'asse x del laboratorio i seguenti angoli: $\vartheta_A = 22.4^\circ$, $\vartheta_B = 0^\circ$ e $\vartheta_C = -12.25^\circ$. Trovare la massa a riposo della particella iniziale e la sua direzione di moto.

$$[m_\Sigma = 495 \text{ MeV}/c^2, \vartheta_\Sigma = 5.6^\circ]$$

esercizio 3.10

Due particelle identiche con massa a riposo m_0 si muovono una contro l'altra, nel sistema di riferimento del laboratorio, con la stessa velocità βc . Trovare l'energia di una delle due particelle nel sistema di riferimento dell'altra.

$$[E'_2 = m_0 c^2 (1 + \beta^2) / (1 - \beta^2)]$$

esercizio 3.11

Un neutrino di energia E_0 e massa trascurabile collide con un elettrone fermo nel laboratorio. Trovare l'angolo di emissione dell'elettrone nel laboratorio assumendo $E_0 = 2 \text{ GeV}$ e $E_e = 0.5 \text{ GeV}$ (massa elettrone $m_e = 0.5 \text{ MeV}/c^2$).

$$[\vartheta_e = 2.22^\circ]$$

esercizio 3.12

Consideriamo un fotone di energia E_γ che colpisca un protone fermo nel sistema del laboratorio. Calcolare la velocità del centro di massa nel sistema del laboratorio. Quanto valgono le energie del fotone e del protone nel centro di massa?

$$[\beta = E_\gamma / (E_\gamma + m_p c^2)]$$

esercizio 3.13

Qual è l'energia minima che deve avere un fotone perché avvenga la seguente reazione di fotoproduzione di un pione $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ (il protone si trova a riposo nel laboratorio)? Le masse a riposo del protone e del pione sono di $0.938 \text{ GeV}/c^2$ e $140 \text{ MeV}/c^2$, rispettivamente.

$$[E_\gamma = 150.4 \text{ MeV}]$$

esercizio 3.14

Una collisione tra un elettrone ($m_e = 0.5 \text{ MeV}/c^2$) ed un protone ($m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$) può dare origine ad un processo di fusione in cui tutta l'energia disponibile è trasferita ad un neutrone ($m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$). Nella reazione viene creato anche un neutrino la cui energia ed impulso possono essere al momento trascurate. Quale è la velocità che deve avere un elettrone per creare un neutrone scontrandosi con un protone a riposo?

$$[v = 2.8 \times 10^8 \text{ m/s}]$$

esercizio 3.15

Un fascio di protoni viene fatto collidere contro un fascio di luce laser con lunghezza d'onda di $0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Determinare il valore minimo per l'energia cinetica dei protoni affinché si possa realizzare la reazione protone + fotone \rightarrow protone + pione (massa riposo del protone = $0.938 \text{ GeV}/c^2$ e del pione = $0.14 \text{ GeV}/c^2$, $h = 4.135 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$)

$$[E_k = 2.85 \times 10^7 \text{ GeV}]$$

esercizio 3.16

Un mesone π con energia cinetica di 140 MeV decade in volo in un muone e un neutrino. Calcolare l'energia massima che il muone e il neutrino possono avere nel sistema di riferimento del laboratorio (massa pione = $140 \text{ MeV}/c^2$, massa muone = $106 \text{ MeV}/c^2$, massa neutrino = 0).

$$[E_{\max}(\mu) = 271.8 \text{ MeV}, E_{\max}(\nu) = 111.6 \text{ MeV}]$$

esercizio 3.17

Al Large Hadron Collider (LHC) del CERN vengono fatti collidere protoni di 7 TeV di energia. Calcolare:

1. l'energia disponibile nell'urto;
2. l'energia necessaria per ottenere la stessa energia totale con un urto protone-protone con bersaglio fisso.

$$[E = 14 \text{ TeV}, E = 9.8 \cdot 10^4 \text{ TeV}]$$

esercizio 3.18

L'acceleratore Tevatron al Fermilab di Chicago può accelerare protoni fino ad una energia di circa 1 TeV . Assumiamo per semplicità che la massa del protone sia pari ad $1 \text{ GeV}/c^2$. Una forza F deve essere applicata dai magneti dell'acceleratore per mantenere i protoni a queste velocità in un'orbita fissa di raggio 1 km . Quanto valgono F , il campo magnetico B e l'accelerazione propria a' dovuta a tale forza F misurata nel sistema di riferimento istantaneo S' del protone? Un protone collide contro un protone di un bersaglio fermo nel laboratorio e produce una particella X attraverso la reazione $p + p \rightarrow X$; quale è il massimo valore della massa m_X della particella X ?

$$[F = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ N}, B = 3.33 \text{ T}, a' = 9 \cdot 10^{19} \text{ m/s}^2, m_X = 44.7 \text{ GeV}/c^2]$$

esercizio 3.19

Sia dato un sistema costituito da due corpi uguali di massa m , collegati da una molla di massa trascurabile. Inizialmente i corpi siano fermi e la molla sia carica. Successivamente la molla scatta e i due corpi vengono lanciati in versi opposti con uguale velocità. Trovare la velocità v dei due corpi in funzione di m e dell'energia potenziale U presente nello stato iniziale.

Elettromagnetismo

esercizio 4.1

Un condensatore a piani paralleli di capacità C si trova a riposo, nel vuoto, in un sistema di riferimento S , con i piani paralleli al piano xz . I due piani hanno una carica pari a $+Q$ e $-Q$ e si trovano ad una distanza d . Trovare il campo elettrico e magnetico misurato da un osservatore in un sistema inerziale S' in moto con velocità parallela all'asse x .

esercizio 4.2

Un condensatore a piani paralleli e rettangolari di lato a e b si trova a riposo, nel vuoto, in un sistema di riferimento S , con i piani paralleli al piano yz . I due piani hanno una carica pari a $+Q$ e $-Q$ e si trovano ad una distanza d . In S non è presente alcun campo magnetico. Trovare i valori di C , ΔV , E e B misurati da un osservatore in un sistema inerziale S' in moto con velocità parallela all'asse x .

$$[C' = \gamma C, \Delta V' = \Delta V / \gamma, E'_x = Q / (Cd), \mathbf{B} = 0]$$

esercizio 4.3

Una particella di massa m inizialmente in quiete si trova in una regione dello spazio immersa in un campo elettrico costante E . Calcolare la velocità della particella al tempo t . Quanto vale al tempo t l'accelerazione della particella?

$$[v = c / \sqrt{1 + (mc/qEt)^2}, a = (qE/m) (1 - v^2/c^2)^{3/2}]$$

esercizio 4.4

Calcolare la frequenza di ciclotrone di una particella di massa a riposo m ed energia cinetica E_k che si muove su di un'orbita circolare di raggio r sotto l'effetto di un campo magnetico B .

$$[f = qB / (2\pi m (1 + E_k/mc^2))]$$

esercizio 4.5

Un elettrone (massa $9.11 \cdot 10^{-31}$ Kg) si muove con una energia cinetica pari alla sua energia a riposo in un campo magnetico $B = 1$ T. Trovare velocità, raggio e passo dell'orbita elicoidale seguita dall'elettrone, supposto che l'angolo formato dalla velocità e dal campo sia α .

$$[v = 2.6 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}, R = 2.96 \cdot 10^{-3} \text{ sen } \alpha \text{ [m]}, p = 1.86 \cdot 10^{-2} \text{ cos } \alpha \text{ [m]}]$$