

УДК 517.95  
ББК 22.311  
B57

Владимиров В. С., Жаринов В. В. **Уравнения математической физики: Учебник для вузов.** — 2-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с. — ISBN 5-9221-0310-5.

Учебник — сокращенный и упрощенный вариант курса В.С. Владимира «Уравнения математической физики» (5-е изд.; М.: Наука, 1985). Курс читался автором в течение многих лет (1964–1986) студентам Московского физико-технического института. Основная особенность курса — широкое использование понятия обобщенного решения краевых задач классической математической физики, часто позволяющее придать строгий математический смысл формальным вычислениям. Одна из глав книги посвящена теории обобщенных функций и действиям с ними.

Для студентов высших учебных заведений с повышенной математической подготовкой.

ISBN 5-9221-0310-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2002, 2003, 2004  
© В. С. Владимиров, В. В. Жаринов,  
2000, 2003, 2004



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	10
-----------------------	----

## Глава I

### ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1.1. Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов . . . . .	13
1. Точечные множества в $\mathbb{R}^n$ (13). 2. Классы функций (15).	
3. Пространство непрерывных функций $\mathcal{C}(T)$ (17). 4. Интегралы типа потенциала (18).	
5. Пространство функций $\mathcal{L}_2(G)$ (21).	
6. Ортонормальные системы (23). 7. Полные ортонормальные системы (25).	
8. Линейные операторы и функционалы (26).	
9. Линейные уравнения (28). 10. Эрмитовы операторы (30).	
§ 1.2. Основные уравнения математической физики . . . . .	32
1. Уравнение колебаний (32). 2. Уравнение диффузии (36).	
3. Стационарное уравнение (38). 4. Уравнения газо-гидродинамики (40).	
5. Уравнение Максвелла (40). 6. Уравнение Шрёдингера (42).	
§ 1.3. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	42
1. Классификация уравнений в точке (43). 2. Выражение оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах (45).	
3. Характеристические поверхности (характеристики) (46). 4. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными (47).	
5. Пример. Уравнение Трикоми (53).	
§ 1.4. Постановка основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	54
1. Классификация краевых задач (54). 2. Задача Коши (56).	
3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа (57).	
4. Смешанная задача (58). 5. Другие краевые задачи (59).	

6. Корректность постановок задач математической физики (61). 7. Теорема Коши–Ковалевской (62). 8. Пример Адамара (63). 9. Классические и обобщенные решения (64).

## Г л а в а II

### ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Основные и обобщенные функции . . . . .	65
1. Введение (65). 2. Пространство основных функций $\mathcal{D}$ (67). 3. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$ (70). 4. Носитель обобщенной функции (72). 5. Регулярные обобщенные функции (74). 6. Сингулярные обобщенные функции (75). 7. Формулы Сохоцкого (77). 8. Линейная замена переменных в обобщенных функциях (78). 9. Умножение обобщенных функций (79). 10. Упражнения (81).	
§ 2.2. Дифференцирование обобщенных функций . . . . .	81
1. Производные обобщенной функции (82). 2. Свойства обобщенных производных (82). 3. Первообразная обобщенной функции (85). 4. Примеры, $n = 1$ (88). 5. Примеры, $n \geq 2$ (92). 6. Упражнения (99).	
§ 2.3. Свертка обобщенных функций . . . . .	101
1. Прямое произведение обобщенных функций (101). 2. Определение свертки обобщенных функций (104). 3. Свойства свертки (108). 4. Существование свертки (110). 5. Уравнения в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ (112). 6. Регуляризация обобщенных функций (114). 7. Ньютоны потенциалы — примеры сверток (115). 8. Упражнения (117).	
§ 2.4. Обобщенные функции медленного роста . . . . .	118
1. Пространство основных функций $\mathcal{S}$ (118). 2. Пространство обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'$ (119). 3. Примеры обобщенных функций медленного роста (121). 4. Структура обобщенных функций с точечным носителем (123).	
§ 2.5. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	124
1. Преобразование Фурье основных функций из $\mathcal{S}$ (124). 2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ (126). 3. Свойства преобразования Фурье (128). 4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем (130). 5. Преобразование Фурье свертки (131). 6. Примеры, $n = 1$ (132). 7. Примеры, $n > 1$ (136). 8. Упражнения (140).	

## Глава III

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ**

§ 3.1. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов . . . . .	142
1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений (142). 2. Фундаментальные решения (144). 3. Уравнения с правой частью (146). 4. Метод спуска (147). 5. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с обыкновенными производными (150). 6. Фундаментальное решение оператора теплопроводности (150). 7. Фундаментальное решение волнового оператора (151). 8. Фундаментальное решение оператора Лапласа (152). 9. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца (154). 10. Упражнения (155).	
§ 3.2. Волновой потенциал . . . . .	156
1. Свойства фундаментального решения волнового оператора (156). 2. Дополнительные сведения о свертках (158). 3. Волновой потенциал (161). 4. Поверхностные волновые потенциалы (163).	
§ 3.3. Задача Коши для волнового уравнения . . . . .	167
1. Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (168). 2. Постановка обобщенной задачи Коши для волнового уравнения (169). 3. Решение обобщенной задачи Коши (171). 4. Решение классической задачи Коши (173). 5. Упражнения (174).	
§ 3.4. Распространение волн . . . . .	177
1. Наложение волн и область влияния (177). 2. Распространение волн в пространстве (177). 3. Распространение волн на плоскости (179). 4. Распространение волн на прямой (182). 5. Метод распространяющихся волн (184). 6. Метод отражений. Полубесконечная струна (187). 7. Метод отражений. Конечная струна (189).	
§ 3.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности . . . . .	191
1. Тепловой потенциал (191). 2. Поверхностный тепловой потенциал (194). 3. Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности (196). 4. Решение задачи Коши (197). 5. Упражнения (198).	

## Г л а в а IV

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

§ 4.1. Метод последовательных приближений . . . . .	202
1. Интегральные уравнения с непрерывным ядром (202). 2. Повторные ядра. Резольвента (206). 3. Интегральные уравнения Вольтерра (209). 4. Упражнения (211).	
§ 4.2. Теоремы Фредгольма . . . . .	212
1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром (212). 2. Теорема Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром (215). 3. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром (218). 4. Следствия из теорем Фредгольма (222). 5. Упражнения (224).	
§ 4.3. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром . . . . .	225
1. Интегральные операторы с эрмитовым непрерывным ядром (225). 2. Лемма Арчела–Асколи (226). 3. Интегральные уравнения с эрмитовым непрерывным ядром (227).	
§ 4.4. Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствия . . . . .	230
1. Теорема Гильберта–Шмидта для эрмитова непрерывного ядра (230). 2. Билинейное разложение повторных ядер (234). 3. Билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра (235). 4. Решение неоднородного интегрального уравнения с эрмитовым непрерывным ядром (237). 5. Положительно определенные ядра (239). 6. Развитие теории интегральных уравнений (240).	

## Г л а в а V

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА**

§ 5.1. Задача на собственные значения . . . . .	243
1. Постановка задачи на собственные значения (243). 2. Формулы Грина (244). 3. Свойства оператора $L$ (246). 4. Свойства собственных значений и собственных функций оператора $L$ (247). 5. Физический смысл собственных значений и собственных функций (251).	
§ 5.2. Задача Штурма–Лиувилля . . . . .	252
1. Функция Грина (252). 2. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению (255). 3. Свойства собственных	

значений и собственных функций (257). 4. Нахождение собственных значений и функций (258).	
§ 5.3. Гармонические функции . . . . .	261
1. Формула Грина (262). 2. Распространение формул Грина (264). 3. Теорема о среднем арифметическом (266). 4. Принцип максимума (267). 5. Следствия из принципа максимума (268). 6. Стирание особенностей гармонической функции (269). 7. Обобщенно-гармонические функции (270). 8. Дальнейшие свойства гармонических функций (271). 9. Аналог теоремы Лиувилля (272). 10. Поведение гармонической функции на бесконечности (273). 11. Упражнения (275).	
§ 5.4. Метод Фурье для задачи на собственные значения . . . . .	276
1. Общая схема метода (276). 2. Примеры (277).	
§ 5.5. Ньютонов потенциал . . . . .	282
1. Объемный потенциал (282). 2. Потенциалы простого и двойного слоя (283). 3. Физический смысл ньютоновых потенциалов (286). 4. Поверхности Ляпунова (287). 5. Свойства потенциалов простого и двойного слоя на поверхности $S$ (288). 6. Разрыв потенциала двойного слоя (289). 7. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя (291). 8. Упражнения (293).	
§ 5.6. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве . . . . .	294
1. Постановка основных краевых задач (294). 2. Теоремы единственности решения краевых задач (295). 3. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям (297). 4. Исследование интегральных уравнений (299). 5. Решение задач Дирихле и Неймана для шара (303).	
§ 5.7. Функция Грина задачи Дирихле . . . . .	305
1. Определение и свойства функции Грина (305). 2. Примеры построения функции Грина (метод отражений) (307). 3. Решение краевой задачи с помощью функции Грина (310). 4. Формула Пуассона (311). 5. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению (312). 6. Свойства собственных значений и собственных функций (314). 7. Упражнения (316).	
§ 5.8. Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости . . . . .	318
1. Постановка и единственность решения основных краевых задач (318). 2. Логарифмический потенциал (320). 3. Разрешимость краевых задач (323). 4. Решение краевых задач для круга (326). 5. Функция Грина задачи Дирихле (327). 6. Решение	

задачи Дирихле для односвязной области (329). 7. Упражнения (330).

## Г л а в а VI

### СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

§ 6.1. Метод Фурье . . . . .	333
1. Однородное гиперболическое уравнение (334). 2. Неоднородное гиперболическое уравнение (336). 3. Параболическое уравнение (338). 4. Уравнение Шрёдингера (339). 5. Эллиптическое уравнение (339). 6. Примеры (341). 7. Упражнения (347).	
§ 6.2. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа . . . . .	348
1. Классическое решение. Интеграл энергии (348). 2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения (350). 3. Функции, непрерывные в $\mathcal{L}_2(G)$ (353). 4. Обобщенное решение (356). 5. Единственность и непрерывная зависимость обобщенного решения (359). 6. Существование обобщенного решения (359). 7. Существование классического решения (362).	
§ 6.3. Смешанная задача для уравнения параболического типа . . . . .	365
1. Классическое решение. Принцип максимума (365). 2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения (367). 3. Обобщенное решение (369). 4. Существование обобщенного решения (370). 5. Существование классического решения (371).	

### Д о п о л н е н и е

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ Д.1. Функции Бесселя . . . . .	373
1. Определение и простейшие свойства функций Бесселя (373). 2. Свойство ортогональности (376). 3. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя (377). 4. Корни функций Бесселя (378). 5. Краевая задача на собственные значения для уравнения Бесселя (380). 6. Неоднородная краевая задача для уравнения Бесселя (381). 7. Полнота функций Бесселя (383). 8. Другие цилиндрические функции (384).	

§ Д.2. Сферические функции . . . . .	386
1. Определение сферических функций (386). 2. Дифференциальное уравнение для сферических функций (388). 3. Полиномы Лежандра (389). 4. Производящая функция (391). 5. Присоединенные функции Лежандра (393). 6. Сферические функции (394). 7. Формула Лапласа (396). 8. Шаровые функции (397).	
Список литературы . . . . .	399

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Предмет математической физики составляет построение и исследование математических моделей физических явлений.* Математическая физика развивалась со времен Ньютона параллельно развитию физики и математики. В конце XVII века было открыто дифференциальное и интегральное исчисление (И. Ньютон, Г. Лейбниц) и сформулированы основные законы классической механики и закон всемирного тяготения (И. Ньютон). В XVIII веке методы математической физики начали формироваться при изучении колебаний струн и стержней, а также задач, связанных с акустикой и гидродинамикой; закладываются основы аналитической механики (Ж. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Лагранж, П. Лаплас). В XIX веке идеи математической физики получили новое развитие в связи с задачами теплопроводности, диффузии, упругости, оптики, электродинамики, нелинейными волновыми процессами и т. д.; создаются теория потенциала и теория устойчивости движения (Ж. Фурье, С. Пуассон, К. Гаусс, О. Коши, М. В. Остроградский, П. Дирихле, Б. Риман, С. В. Ковалевская, Д. Стокс, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. Гильберт). В XX веке в математическую физику включаются задачи квантовой физики и теории относительности, а также новые проблемы газовой динамики, переноса частиц и физики плазмы.

Многие задачи классической математической физики сводятся к *краевым задачам для дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений — уравнений математической физики*. Основными математическими средствами исследования этих задач являются теория дифференциальных уравнений (включая родственные области: интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения и вариационное исчисление), теория функций, функциональный анализ, нелинейный анализ, теория вероятностей, приближенные методы и вычислительная математика.

Изучение математических моделей квантовой физики потребовало привлечения таких новых областей математики, как теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, геометрических, топологических, алгебраических и теоретико-

числовых методов.

С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей, допускающих детальный анализ; появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты. В интенсивном взаимодействии теоретической физики и современной математики создаются качественно новые классы моделей современной математической физики.

Среди задач математической физики выделяется важный класс *корректно поставленных задач*, т. е. задач, для которых решение существует, единствено и непрерывно зависит от данных задачи. Хотя эти требования на первый взгляд кажутся совершенно естественными, их тем не менее *необходимо доказывать в рамках принятой математической модели*. Доказательство корректности — это первая аprobация математической модели: модель непротиворечива (решение существует), модель однозначно описывает физический процесс (решение единствено), модель мало чувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи).

В этой книге изучаются в основном корректно поставленные задачи для дифференциальных уравнений классической математической физики. Однако в отличие от традиционных способов изложения уравнений в книге широко используется концепция *обобщенного решения*. Обобщенные решения возникают при изучении интегральных соотношений типа локального баланса. В свою очередь учет обобщенных решений приводит к *обобщенным постановкам* краевых задач математической физики.

Точное определение обобщенного решения опирается на понятие *обобщенной производной* и, как следствие, на понятие *обобщенной функции*. Аппарат теории обобщенных функций является удобным средством для исследования линейных краевых задач в обобщенной и классической постановках. Поэтому специальная глава книги посвящена изложению теории обобщенных функций.

Ряд разделов книги использует язык функционального анализа (на элементарном уровне), что позволяет значительно сократить изложение.

В книге принята следующая схема расположения материала.

В главе I излагается постановка и классификация основных краевых задач математической физики, а также приводятся некоторые необходимые для дальнейшего сведения из анализа.

Глава II содержит элементы теории обобщенных функций, включая преобразование Фурье обобщенных функций.

В главе III строятся фундаментальные решения для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и исследуются обобщенная и классическая задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Особенность изложения состоит в том, что в обобщенной постановке задачи Коши начальные условия учитываются как мгновенно действующие источники; это позволяет построить решение задачи Коши в виде свертки источника с надлежащим образом выбранным фундаментальным решением.

Глава IV содержит теорию интегральных уравнений с непрерывным ядром. Формулируются теоремы Фредгольма, Гильберта–Шмидта, Мерсера, некоторые из них доказываются.

В главе V рассматриваются задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа, включая задачу Штурма–Лиувилля, а также краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

В главе VI изучаются смешанные задачи для уравнений гиперболического и параболического типов в обобщенной и классической постановках. Излагается метод Фурье и дается его обоснование.

В дополнении излагается элементарная теория гармонических функций, сферических функций и функций Бесселя.

Для более глубокого понимания теории ряд разделов книги иллюстрируется типичными задачами с полными решениями. Приводятся также характерные задачи для самостоятельного решения; ряд задач сформулирован в виде теорем. Для упражнений можно также рекомендовать «Сборник задач по уравнениям математической физики» В. С. Владимира, В. П. Михайлова, А. А. Варшарина, Х. Х. Кадимовой, Ю. В. Сидорова, М. И. Шабунина (М., Наука, 1982).

Данная книга является сокращенным и упрощенным вариантом курса В. С. Владимира «Уравнения математической физики» (5-е изд., М., Наука, 1985), который читался автором в течение многих лет (1964–1986 гг.) студентам Московского физико-технического института. Она рассчитана на студентов технических вузов с повышенной математической подготовкой. Авторы благодарны профессорам МФТИ Ю. В. Сидорову и М. И. Шабунину за конструктивную критику, а также за предоставленные ими примеры и задачи с решениями.

*B. С. Владимиров, B. B. Жаринов*

# Глава I

## ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### § 1.1. Некоторые понятия и предложения теории множеств, теории функций и теории операторов

В этой книге мы будем широко пользоваться материалом, изложенным в следующих книгах: С. М. Никольский «Курс математического анализа» [2], Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин «Лекции по теории функций комплексного переменного» [3], Д. В. Беклемишев «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры» [4] и В. К. Романко «Курс обыкновенных дифференциальных уравнений» [5].

Для полноты изложения мы приведем основные понятия теории множеств, теории функций и теории операторов, заодно введя обозначения, которых мы будем придерживаться ниже.

Пусть  $A$  — произвольное множество. Если элемент  $a$  содержится (не содержится) в множестве  $A$ , то это будем записывать так:  $a \in A$  ( $a \notin A$ ). Пусть  $B$  — другое множество. Обозначим  $A \subset B$  — *включение*  $A$  в  $B$ ,  $A = B$  — *совпадение*  $A$  с  $B$ ,  $A \cup B$  — *объединение*  $A$  и  $B$ ,  $A \cap B$  — *пересечение*  $A$  и  $B$ ,  $A \setminus B$  — *дополнение*  $B$  до  $A$  (рис. 1),  $A \times B$  — *произведение*  $A$  и  $B$  (множество пар  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ),  $\emptyset$  — *пустое множество*.

1. **Точечные множества в  $\mathbb{R}^n$ .** Обозначим  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство через  $\mathbb{R}^n$ , а его точки через  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y$ ,  $\xi$  и т. д., где  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — координаты точки  $x$ . Символами  $(x, y)$  и  $|x|$  обозначим *скалярное произведение*

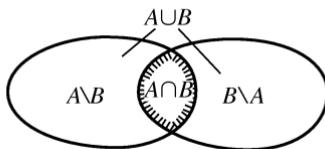


Рис. 1

и длину (норму) в  $\mathbb{R}^n$ :

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Таким образом, число  $|x - y|$  есть евклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$ .

Множество точек  $x$  из  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < R$ , называется *открытым шаром* радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$ . Этот шар будем обозначать  $U(x_0; R)$ ,  $U_R = U(0; R)$ .

Последовательность точек  $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называется *сходящейся* к точке  $x$  в  $\mathbb{R}^n$  (пишем  $x_k \rightarrow x$ ,  $k \rightarrow \infty$ ), если  $|x_k - x| \rightarrow 0$ , когда  $k \rightarrow \infty$ . Последовательность  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называется *сходящейся в себе* в  $\mathbb{R}^n$ , если  $|x_k - x_p| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ . Пространство  $\mathbb{R}^n$  *полное*, т.е. всякая сходящаяся в себе последовательность сходится к некоторой точке в  $\mathbb{R}^n$ .

Множество называется *ограниченным* в  $\mathbb{R}^n$ , если существует шар, содержащий это множество. Точка  $x_0$  называется *внутренней* точкой множества, если существует шар  $U(X_0; \varepsilon)$ , содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кусочно гладкой кривой, лежащей в этом множестве.

Связное открытое множество называется *областью*.

Точка  $x_0$  называется *пределной точкой* множества  $A$ , если существует последовательность  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что  $x_k \in A$ ,  $x_k \neq x_0$ ,  $x_k \rightarrow x_0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Если к множеству  $A$  добавить все его предельные точки, то полученное множество называется *замыканием* множества  $A$  и обозначается  $\bar{A}$ ; ясно, что  $A \subset \bar{A}$ . Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*.

Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*.

*Окрестностью* множества  $A$  называется всякое открытое множество, содержащее  $A$ ;  $\varepsilon$ -окрестностью  $A_\varepsilon$  множества  $A$  называется объединение шаров  $U(x; \varepsilon)$ , когда  $x$  пробегает  $A$ :  $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} U(x; \varepsilon)$ .

Функция  $\chi(x)$ , равная 1 при  $x \in A$  и 0 при  $x \notin A$ , называется *характеристической функцией* множества  $A$ .

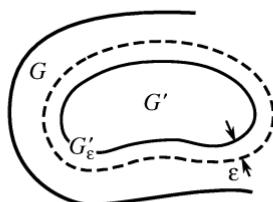


Рис. 2

Пусть  $G$  — область. Точки из замыкания  $\overline{G}$ , не принадлежащие  $G$ , образуют замкнутое множество  $S$ , называемое *границей* области  $G$ , так что  $S = \overline{G} \setminus G$ . Например, границей открытого шара  $U(x_0; R)$  является сфера  $|x - x_0| = R$ . Эту сферу будем обозначать  $S(x_0; R)$ ,  $S_R = S(0; R)$ . Ограниченнная область  $G'$  называется *подобластью*, строго лежащей в области  $G$ , если  $\overline{G'} \subset G$ ; при этом пишут  $G' \Subset G$ . В силу леммы Гейне–Бореля существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что  $G'_\varepsilon \Subset G$  (рис. 2).

**2. Классы функций.** Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  — целочисленный вектор с неотрицательными составляющими  $\alpha_i$  (мультииндекс). Через  $\partial^\alpha f(x)$  обозначаем производную функции  $f(x)$  порядка  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ :

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \partial^0 f(x) = f(x);$$

$$\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для низших производных мы иногда будем употреблять обозначения  $f_{x_i}, f_{x_i x_j}, \dots$ , а для одной переменной — обозначения  $f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$  Мы будем пользоваться также следующими сокращениями обозначениями:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

Множество (комплексных) функций  $f$ , непрерывных вместе с производными  $\partial^\alpha f(x)$ ,  $|\alpha| \leq p$  ( $0 \leq p < \infty$ ), в области  $G$ , образует *класс функций*  $\mathcal{C}^p(G)$ . Функции  $f$  класса  $\mathcal{C}^p(G)$ , у которых все производные  $\partial^\alpha f(x)$ ,  $|\alpha| \leq p$ , допускают непрерывное продолжение на замыкание  $\overline{G}$ , образуют *класс функций*  $\mathcal{C}^p(\overline{G})$ ; при этом под значением  $\partial^\alpha f(x)$ ,  $x \in S$ ,  $|\alpha| \leq p$ , понимаем  $\lim_{x' \rightarrow x} \partial^\alpha f(x')$  при  $x' \rightarrow x$ ,  $x' \in G$ . Класс функций, принадлежащих  $\mathcal{C}^p(G)$  при всех  $p$ , обозначим через  $\mathcal{C}^\infty(G)$ ; аналогично определяется и класс функций  $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ .

Таким образом, класс  $\mathcal{C}^0(G)$  состоит из всех непрерывных функций в  $G$ , а класс  $\mathcal{C}^0(\overline{G})$  можно отождествить с множеством всех непрерывных функций на  $\overline{G}$ . Для сокращения записи обозначаем  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}^0(G)$ ,  $\mathcal{C}(\overline{G}) = \mathcal{C}^0(\overline{G})$ . Иногда аргумент  $G$  или  $\overline{G}$  у класса  $\mathcal{C}^p$  будем опускать.

Пусть функция  $f(x)$  задана на некотором множестве, содержащем область  $G$ . В этом случае принадлежность  $f$  классу  $\mathcal{C}^p(\overline{G})$  обозначает, что *сужение*  $f$  на  $G$  принадлежит  $\mathcal{C}^p(G)$ . Например,

функция  $H(x) = 0, x < 0; H(0) = 1/2; H(x) = 1, x > 0$ , принадлежит классам  $\mathcal{C}^\infty(x \leq 0)$  и  $\mathcal{C}^\infty(x \geq 0)$ , причем если  $H$  рассматривается как функция класса  $\mathcal{C}^\infty(x \leq 0)$ , то ее значение в 0 следует считать равным 0, а если  $H$  — функция класса  $\mathcal{C}^\infty(x \geq 0)$ , то ее значение в 0 следует считать равным 1 (в соответствии с определениями).

Введенные классы функций представляют собой *линейные множества*, т. е. из принадлежности функций  $f$  и  $g$  какому-либо из классов следует принадлежность этому же классу и любой их линейной комбинации  $\lambda f + \mu g$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  — произвольные комплексные числа.

Функция  $f$  называется *кусочно непрерывной* в  $\mathbb{R}^n$ , если существует конечное или счетное число областей  $G_k, k = 1, 2, \dots$ , без общих точек с кусочно гладкими границами таких, что каждый шар покрывается конечным числом замкнутых областей  $\{\bar{G}_k\}$  и  $f \in C(\bar{G}_k), k = 1, 2, \dots$ . Кусочно непрерывная функция называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого шара.

Пусть  $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ . *Носителем* непрерывной функции  $\varphi$  называется замыкание множества тех точек, где  $\varphi(x) \neq 0$ ; носитель  $\varphi$  обозначаем  $spt \varphi$ .

Таким образом, функция  $\varphi(x)$  финитна тогда и только тогда, когда  $spt \varphi$  ограничен.

Функция  $f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называется *аналитической в точке*  $x_0$ , если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

(точка  $x_0$  может быть и комплексной). Если функция  $f(x)$  аналитична в каждой точке области  $G$ , то говорят, что она *аналитична в области*  $G$ .

Функция  $f(x)$  называется *локально интегрируемой* в области  $G$ , если она интегрируема (по Риману) в любой ограниченной подобласти  $G' \Subset G$ . Заметим, что в этом случае функция  $|f(x)|$  тоже локально интегрируема в  $G$ .

Будем говорить, что поверхность  $S$  принадлежит *классу*  $\mathcal{C}^p, p \geq 1$ , если в некоторой окрестности каждой точки  $x_0 \in S$  она определяется уравнением  $\omega_{x_0}(x) = 0$ , причем  $\text{grad } \omega_{x_0}(x) \neq 0$  и  $\omega_{x_0}(x) \in \mathcal{C}^p$  в упомянутой окрестности. Поверхность  $S$  называется *кусочно гладкой*, если она состоит из конечного числа поверхностей класса  $\mathcal{C}^1$ . Впредь мы будем рассматривать только области с кусочно гладкими границами; через  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$  обозначим единичный вектор внешней

нормали к границе  $S$  в точке  $x \in S$ .

Пусть точка  $x_0$  лежит на кусочно гладкой поверхности  $S$ . *Окрестностью точки  $x_0$  на поверхности  $S$*  называется та связная часть множества  $S \cap U(x_0; R)$ , которая содержит точку  $x_0$ .

**3. Пространство непрерывных функций  $\mathcal{C}(T)$ .** Пусть  $T$  — замкнутое множество, например замыкание  $\bar{G}$  или граница  $S$  области  $G$ . Обозначим через  $\mathcal{C}(T)$  класс непрерывных и ограниченных на  $T$  функций. Снабдим класс  $\mathcal{C}(T)$  нормой, положив

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{x \in T} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{C}(T). \quad (1)$$

Легко проверяются следующие свойства, характеризующие норму:

- а)  $\|f\|_{\mathcal{C}} \geq 0$ ;  $\|f\|_{\mathcal{C}} = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = 0$ ;
- б)  $\|\lambda f\|_{\mathcal{C}} = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{C}}$ , где  $\lambda$  — любое комплексное число;
- в)  $\|f + g\|_{\mathcal{C}} \leq \|f\|_{\mathcal{C}} + \|g\|_{\mathcal{C}}$  (неравенство треугольника).

Вообще всякое линейное множество, снаженное нормой, обладающей свойствами а)–в), называется *линейным нормированным пространством*.

Таким образом,  $\mathcal{C}(T)$  — линейное нормированное пространство.

Последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $\mathcal{C}(T)$  называется *сходящейся к функции  $f \in \mathcal{C}(T)$  в пространстве  $\mathcal{C}(T)$*  (пишут:  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{C}(T)$ ), если  $\|f_k - f\|_{\mathcal{C}} \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Очевидно, сходимость  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{C}(T)$  эквивалента *равномерной сходимости* последовательности функций  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , к функции  $f(x)$  на множестве  $T$ :

$$f_k(x) \rightrightarrows f(x), \quad k \rightarrow \infty, \quad x \in T.$$

Последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $\mathcal{C}(T)$ , называется *сходящейся в себе в  $\mathcal{C}(T)$* , если  $\|f_k - f_p\|_{\mathcal{C}} \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ .

Следующее предложение выражает свойство полноты пространства  $\mathcal{C}(T)$ .

**ТЕОРЕМА Коши.** Для того чтобы последовательность функций из  $\mathcal{C}(T)$  сходилась в  $\mathcal{C}(T)$ , необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе в  $\mathcal{C}(T)$ .

Справедливы следующие полезные предложения.

**ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА.** Если  $G$  — ограниченная область и  $f \in C^p(\bar{G})$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует полином  $P$  такой, что

$$\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha P\|_{\mathcal{C}} < \varepsilon \quad \text{при всех } |\alpha| \leq p.$$

**ЛЕММА ДИНИ.** *Если монотонная последовательность непрерывных функций на компакте  $K$  сходится в каждой точке к непрерывной функции на  $K$ , то она сходится равномерно на  $K$ .*

Ряд, составленный из функций  $u_k \in \mathcal{C}(T)$ , называется *регулярно сходящимся на  $T$* , если ряд из абсолютных величин  $|u_k(x)|$  сходится в  $\mathcal{C}(T)$ , т. е. сходится равномерно на  $T$ .

Множество  $M \subset \mathcal{C}(T)$  называется *равностепенно непрерывным* на  $T$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta_\varepsilon$ , что при всех  $f \in M$  имеет место неравенство  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , как только  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ ,  $x_1, x_2 \in T$ .

Функция  $f \in \mathcal{C}(T)$  называется *непрерывной по Гёльдеру на  $T$* , если существуют такие числа  $C > 0$  и  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , что при всех  $x_1 \in T$  и  $x_2 \in T$  справедливо неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha;$$

если  $\alpha = 1$ , то функция  $f(x)$  называется *непрерывной по Липшицу на  $T$* .

Пусть функции  $f(x)$  и  $\omega(x)$  заданы в окрестности точки  $x_0$  (конечной или бесконечно удаленной). Будем писать

$$f(x) = O[\omega(x)] \quad \text{или} \quad f(x) = o[\omega(x)], \quad x \rightarrow x_0,$$

если отношение  $f(x)/\omega(x)$  ограничено или стремится к 0 при  $x \rightarrow x_0$  соответственно.

**4. Интегралы типа потенциала.** Пусть функция  $\rho(y)$  кусочно непрерывна на ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Интеграл

$$I(x) = \int_G \frac{\rho(y) dy}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < n,$$

называется *интегралом типа потенциала*. Такие интегралы часто встречаются в математической физике.

Докажем сначала справедливость оценки

$$\int_{U_R} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \leq C_\alpha R^{n-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Действительно, если  $|x| \geq 2R$ , то  $|x - y| \geq |x| - |y| > R$  при всех  $|y| < R$ , и поэтому

$$\int_{U_R} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{1}{R^\alpha} \int_{U_R} dy = \frac{\sigma_n}{n} R^{n-\alpha};$$

если же  $|x| < 2R$ , то  $|x - y| \leq |x| + |y| < 3R$  и

$$\int_{U_R} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} = \int_{U(R;x)} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} \leq \int_{U_{3R}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \frac{\sigma_n}{n - \alpha} (3R)^{n - \alpha}.$$

Здесь  $\sigma_n$  — площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ . Оценка (2) доказана.

Из (2) вытекает, что при всех  $R > 0$  существует повторный интеграл

$$\int_G |\rho(y)| \left[ \int_{U_R} \frac{dx}{|x - y|^\alpha} \right] dy \leq C_\alpha \mathbb{R}^{n - \alpha} \int_G |\rho(y)| dy.$$

Следовательно, интеграл  $I(x)$  существует при всех  $x$  и представляет собой локально интегрируемую функцию в  $\mathbb{R}^n$ .

Вне области  $G$  интеграл  $I(x)$  есть бесконечно дифференцируемая функция и все ее производные получаются дифференцированием под знаком интеграла

$$\partial^\beta I(x) = \int_G \rho(y) \partial_x^\beta \frac{1}{|x - y|^\alpha} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}.$$

Докажем, что при всех  $\beta$

$$\partial^\beta I(x) = O(|x|^{-\alpha - |\beta|}), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Действительно, пусть  $G \subset U_R$  и  $|x| > R$ ; тогда  $|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x| - R$  при всех  $y \in G$ . Отсюда, принимая во внимание оценку

$$\left| \partial_x^\alpha \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right| \leq \frac{K_\beta}{(|x| - R)^{\alpha + |\beta|}}$$

при  $|x| > R$ , получим

$$|D^\beta I(x)| \leq K_\beta \int_G \frac{|\rho(y)| dy}{|x - y|^{\alpha + |\beta|}} \leq \frac{K_\beta}{(|x| - R)^{\alpha + |\beta|}} \int_G |\rho(y)| dy,$$

откуда и следует (3) (см. п. 3).

**ТЕОРЕМА.** Пусть функция  $\rho$  кусочно непрерывна,  $|\rho(y)| \leq M$  в  $G$ . Тогда интеграл  $I$  принадлежит  $C^p(\mathbb{R}^n)$ , где  $p$  — наибольшее число такое, что  $\alpha + p < n$ . Соответствующие производные функции  $I(x)$  получаются дифференцированием под знаком интеграла.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что  $I(x)$  — непрерывная функция в  $\mathbb{R}^n$ . Фиксируем  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  и возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned}
|I(x_0) - I(x)| &\leq \int_G |\rho(y)| \left| \frac{1}{|x_0 - y|^\alpha} - \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right| dy \leq \\
&\leq M \int_{U(x_0; \eta)} \left[ \frac{1}{|x_0 - y|^\alpha} + \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right] dy + \\
&\quad + M \int_{G \setminus U(x_0; \eta)} \left| \frac{1}{|x_0 - y|^\alpha} - \frac{1}{|x - y|^\alpha} \right| dy.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое справа в силу оценки (2) не превосходит  $2MC_\alpha\eta^{n-\alpha}$  и потому может быть сделано меньшим  $\varepsilon/2$  при достаточно малом  $\eta$ . Во втором слагаемом подынтегральная функция равномерно непрерывна по  $(x, y)$  в области  $|x - x_0| \leq \eta/2$ ,  $|y - x_0| \geq \eta$ ,  $y \in \overline{G}$ , и обращается в нуль при  $x = x_0$ ; поэтому этот интеграл может быть сделан меньшим  $\varepsilon/2$  при всех  $x \in U(x_0; \delta)$ , если  $\delta$  достаточно мало,  $\delta \leq \eta/2$ . Итак, нашлось такое число  $\delta$ , что  $|I(x_0) - I(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$  при всех  $|x - x_0| < \delta$ . Это и означает, что функция  $I(x)$  непрерывна в (произвольной) точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , т. е.  $I \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть  $\alpha + 1 < n$ . Продифференцируем подынтегральное выражение в  $I(x)$  по  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и рассмотрим функции

$$I_i(x) = \int_G \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^\alpha} dy = \alpha \int_G \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x - y|^{\alpha+2}} dy.$$

В силу оценки

$$\left| \frac{y_i - x_i}{|x - y|^{\alpha+2}} \right| \leq \frac{1}{|x - y|^{\alpha+1}}$$

рассуждение, полностью аналогичное тому, которое мы только что проделали для интеграла  $I(x)$ , показывает, что функции  $I_i(x)$  непрерывны в  $\mathbb{R}^n$ .

Докажем, что

$$I_{x_i}(x) = I_i(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\int_{x_i^0}^{\xi_i} I_i(x) dx_i &= \int_{x_i^0}^{\xi_i} \left[ \int_G \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^\alpha} dy \right] dx_i = \\
&= \int_G \rho(y) \left[ \int_{x_i^0}^{\xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x - y|^\alpha} dx_i \right] dy = \\
&= I(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, \dots, x_n) - I(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

откуда, дифференцируя по  $\xi_i$ , получим равенство (4). Законность перемены порядка интегрирования в предыдущих равенствах вытекает из существования повторного интеграла

$$\int_{x_i^0}^{\xi_i} \left[ \int_G \frac{|\rho(y)| dy}{|x - y|^{1+\alpha}} \right] dx_i \leq M |\xi_i - x_i^0| C_{\alpha+1} R^{n-\alpha-1}.$$

Здесь мы воспользовались оценкой (2), предполагая, что  $G \subset U_R$ .

Таким образом, мы доказали, что  $I \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  и допустимо дифференцирование один раз под знаком интеграла  $I(x)$ . Если же  $\alpha + 2 < n$ , то, применяя предыдущие рассуждения к функциям  $I_i(x)$ , установим, что  $I \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  и допустимо дифференцирование два раза под знаком интеграла  $I(x)$  и т. д. Теорема доказана.

Пусть функции  $\mathcal{K}(x, y)$ ,  $\mathcal{K}_1(x, y)$  и  $\mathcal{K}_2(x, y)$  непрерывны на  $\overline{G} \times \overline{G}$ . Аналогично предыдущему устанавливается, что интегралы

$$\int_G \frac{\mathcal{K}(x, y)}{|x - y|^\alpha} dy, \quad \int_G \frac{\mathcal{K}_1(x, y') \mathcal{K}_2(y', y)}{|x - y'|^{\alpha_1} |y' - y|^{\alpha_2}} dy'$$

непрерывны на  $\overline{G}$  и  $\overline{G} \times \overline{G}$ , если  $\alpha < n$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 < n$  соответственно.

**Замечание.** Все сказанное об интеграле  $I(x)$  без существенных изменений переносится и на интеграл типа потенциала вида

$$\int_S \frac{\rho(y)}{|x - y|^\alpha} dS_y, \quad 0 < \alpha < n - 1,$$

где  $S$  — ограниченная кусочно гладкая поверхность и  $\rho$  — кусочно непрерывная функция на  $S$ .

**5. Пространство функций  $\mathcal{L}_2(G)$ .** Совокупность всех функций  $f$ , для которых функция  $|f(x)|^2$  интегрируема (по Риману) на области  $G$ , обозначим через  $\mathcal{L}_2(G)$ .

Множество функций  $\mathcal{L}_2(G)$  линейное.

Действительно, если  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  и  $g \in \mathcal{L}_2(G)$ , то из неравенства

$$|\lambda f + \mu g|^2 \leq 2|\lambda|^2 |f|^2 + 2|\mu|^2 |g|^2$$

вытекает, что и их любая линейная комбинация  $\lambda f + \mu g$  также принадлежит  $\mathcal{L}_2(G)$ .

Справедливо важное неравенство (*неравенство Коши–Буняковского*): если  $f, g \in \mathcal{L}_2(G)$ , то

$$\left| \int_G f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_G |g(x)|^2 dx}.$$

Если  $G$  — ограниченная область и  $f \in \mathcal{L}_2(G)$ , то функция  $f(x)$  интегрируема на  $G$ .

Действительно, применяя неравенство Коши–Буняковского с  $g \equiv 1$ , получим

$$\int_G |f(x)| dx \leq \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_G dx} < \infty.$$

На множестве функций  $\mathcal{L}(G)$  введем *скалярное произведение* и норму по формулам

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx},$$

превращая тем самым  $\mathcal{L}_2(G)$  в (линейное) нормированное пространство. Здесь  $\overline{g(x)}$  — функция, комплексно сопряженная с  $g(x)$ .

Очевидно, введенное скалярное произведение обладает свойствами

$$(f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h).$$

Кроме того, в терминах нормы и скалярного произведения неравенство Коши–Буняковского принимает вид

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G).$$

Из этого неравенства вытекает следующее *неравенство Минковского*:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G).$$

Таким образом, норма  $\|\cdot\|$  удовлетворяет условиям а)–в) из п. 3.

Последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $\mathcal{L}_2(G)$  называется *сходящейся* к функции  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  в пространстве  $\mathcal{L}_2(G)$  (или в *среднем* в  $G$ ), если  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ ; при этом будем писать

$$f_k \rightarrow f \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad k \rightarrow \infty.$$

Последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $\mathcal{L}_2(G)$  называется *сходящейся в себе* в  $\mathcal{L}_2(G)$ , если  $\|f_k - f_p\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ .

Множество функций  $\mathcal{L}_2(G)$  неполно. Пополним его подобно тому, как пополняется множество рациональных чисел вещественными числами. Для этого сопоставим каждой сходящейся в себе в  $\mathcal{L}_2(G)$  последовательности функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , «идеальный» элемент  $f$  с нормой

$$\|f\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|.$$

При этом два «идеальных» элемента  $f$  и  $g$  считаем равными, если определяющие их последовательности  $f_1, f_2, \dots$  и  $g_1, g_2, \dots$  эквивалентны, т. е. если «сплетающая» последовательность  $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots$  сходится в себе в  $\mathcal{L}_2(G)$ . Пополненное таким путем наше пространство  $\mathcal{L}_2(G)$  будем по-прежнему обозначать через  $\mathcal{L}_2(G)$ . Можно доказать, что «идеальный» элемент  $f$  из  $\mathcal{L}_2(G)$  можно отождествить с некоторой функцией  $f(x)$ , определенной почти везде в  $G$ , такой, что

$$\|f\|^2 = \int_G |f(x)|^2 dx,$$

если интеграл справа понимать в более широком смысле (в смысле Лебега).

Итак, всюду ниже  $\mathcal{L}_2(G)$  — полное пространство, полученное из исходного пространства с помощью пополнения.

Следующее предложение выражает свойство полноты пространства  $\mathcal{L}_2(G)$ .

**Теорема Рисса–Фишера.** *Если последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , из  $\mathcal{L}_2(G)$  сходится в себе в  $\mathcal{L}_2(G)$ , т. е.  $\|f_k - f_p\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ , то существует функция  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  такая, что  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ; при этом функция  $f$  единственна.*

Пространство  $\mathcal{L}_2(G)$  относится к классу гильбертовых пространств.

Множество функций  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}_2(G)$  называется *плотным* в  $\mathcal{L}_2(G)$ , если для любой  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  существует последовательность функций из  $\mathcal{M}$ , сходящаяся к  $f$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ . Например, множество  $C(\overline{G})$  плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$ ; отсюда следует, что и множество полиномов плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$ , если  $G$  — ограниченная область (в силу теоремы Вейерштрасса; см. п. 3).

Пространство  $\mathcal{L}_2(G)$  имеет дискретный аналог: линейное пространство  $l_2$ , состоящее из всех последовательностей комплексных чисел  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$  с конечной нормой

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

и скалярным произведением  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ , для всех  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_2$ .

**6. Ортонормальные системы.** Функции  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{L}_2(G)$  называются *ортогональными*, если  $(f, g) = 0$ ; функция  $f$  из  $\mathcal{L}_2(G)$  называется *нормированной*, если  $\|f\| = 1$ . Система функций  $\{\varphi_k\}$  из  $\mathcal{L}_2(G)$  называется *ортонормальной*, если  $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$ , где  $\delta_{ki}$  — символ Кронекера:  $\delta_{ki} = 0$ ,  $k \neq i$ ,  $\delta_{ii} = 1$ .

Всякая ортонормальная система  $\{\varphi_k\}$  состоит из линейно независимых функций.

Всякая система  $\psi_1, \psi_2, \dots$  линейно независимых функций из  $\mathcal{L}_2(G)$  преобразуется в ортонормальную систему  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  следующим процессом ортогонализации Шмидта:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, & \varphi_2 &= \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|}, \\ &\dots &&\dots \\ \varphi_k &= \frac{\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \dots - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_k - (\psi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \dots - (\psi_k, \varphi_1)\varphi_1\|}, \\ &\dots &&\dots\end{aligned}$$

Пусть система функций  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна в  $\mathcal{L}_2(G)$  и  $f \in \mathcal{L}_2(G)$ . Числа  $(f, \varphi_k)$  называются *коэффициентами Фурье*, а формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \quad (5)$$

— *рядом Фурье* функции  $f$  по ортонормальной системе  $\{\varphi_k\}$ .

Если система функций  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна в  $\mathcal{L}_2(G)$ , то для каждой  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  и любых (комплексных) чисел  $a_1, a_2, \dots, a_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , справедливо равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k) - a_k|^2. \quad (6)$$

Из равенства (6) вытекает неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2.$$

Далее, полагая в (6)  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , получаем равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2. \quad (7)$$

Из этого равенства вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2,$$

называемое *неравенством Бесселя*.

Из неравенства Бесселя и из теоремы Рисса–Фишера (см. п. 5) следует, что ряд Фурье (5) сходится в  $\mathcal{L}_2(G)$  к некоторой функции из  $\mathcal{L}_2(G)$  (но не обязательно к  $f$ ).

Кроме того, из равенства (7) и из теоремы Рисса–Фишера (см. п. 5) вытекает такое предложение. Для того чтобы ряд Фурье (5) сходился к функции  $f$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство Парсеваля–Стеклова (уравнение замкнутости)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \|f\|^2.$$

**7. Полные ортонормальные системы.** Пусть система функций  $\{\varphi_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна в  $\mathcal{L}_2(G)$ . Если для любой  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  ее ряд Фурье по системе  $\{\varphi_k\}$  сходится к  $f$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ , то эта система называется *полной (замкнутой) в  $\mathcal{L}_2(G)$*  (*ортонормальным базисом в  $\mathcal{L}_2(G)$* ). Примером полной ортонормальной системы в  $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$  служит тригонометрическая система. Из этого определения и из результатов п. 6 вытекает

**ТЕОРЕМА 1.** *Для того чтобы ортонормальная система  $\{\varphi_k\}$  была полной в  $\mathcal{L}_2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f$  из  $\mathcal{L}_2(G)$  было выполнено равенство Парсеваля–Стеклова.*

Справедлива также

**ТЕОРЕМА 2.** *Для того чтобы ортонормальная система  $\{\varphi_k\}$  была полной в  $\mathcal{L}_2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы каждую функцию  $f$  из множества  $M$ , плотного в  $\mathcal{L}_2(G)$ , можно было сколь угодно точно приблизить в  $\mathcal{L}_2(G)$  линейными комбинациями функций этой системы.*

**СЛЕДСТВИЕ.** *Если  $G$  — ограниченная область, то в  $\mathcal{L}_2(G)$  существует счетная полная ортонормальная система полиномов.*

Действительно, множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$  (см. п. 5), счетно и его можно сделать ортонормальным, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. п. 6).

Нам понадобится еще

**ЛЕММА.** *Пусть области  $G \subset \mathbb{R}^n$  и  $D \subset \mathbb{R}^m$  ограничены, система функций  $\psi_i(y)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , ортонормальна и полна в  $\mathcal{L}_2(D)$ , и при каждом  $i = 1, 2, \dots$  система функций  $\varphi_{ki}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормальна и полна в  $\mathcal{L}_2(G)$ . Тогда система функций*

$$\chi_{ki}(x, y) = \varphi_{ki}(x)\psi_i(y), \quad k, i = 1, 2, \dots,$$

ортонормальна и полна в  $\mathcal{L}_2(G \times D)$ .

Все сказанное о пространстве  $\mathcal{L}_2(G)$  переносится и на пространства  $\mathcal{L}_2(G; \rho)$  или  $\mathcal{L}(S)$  со скалярными произведениями

$$(f, g)_\rho = \int_G \rho(x) f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(G; \rho),$$

$$(f, g) = \int_S f(x) \overline{g(x)} dS, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(S),$$

где  $\rho \in C(\overline{G})$ ,  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in \overline{G}$ , а  $S$  — кусочно гладкая поверхность.

**8. Линейные операторы и функционалы.** Пусть  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  — линейные множества. Оператор  $L$ , преобразующий элементы множества  $\mathcal{M}$  в элементы множества  $\mathcal{N}$ , называется *линейным*, если для любых элементов  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{M}$  и комплексных чисел  $\lambda$  и  $\mu$  справедливо равенство

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda Lf + \mu Lg.$$

При этом множество  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L$  называется *областью определения* оператора  $L$ . Если  $Lf = f$  при всех  $f \in \mathcal{M}$ , то оператор  $L$  называется  *тождественным (единичным)* оператором. Единичный оператор будем обозначать через  $I$ .

Пусть на линейных множествах  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  определены сходимости элементов с непрерывными линейными комбинациями, например, если  $f_k \rightarrow f$  и  $g_k \rightarrow g$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{M}$ , то и  $\lambda f_k + \mu g_k \rightarrow \lambda f + \mu g$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{M}$ . Линейный оператор  $L$ , переводящий  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , называется *непрерывным* из  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , если из сходимости  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{M}$  следует сходимость  $Lf_k \rightarrow Lf$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{N}$ . Из определения вытекает: для того чтобы линейный оператор  $L$  был непрерывным из  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $Lf_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{N}$ , коль скоро  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{M}$ .

Пусть  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  — линейные нормированные пространства с нормами  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  и  $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$  соответственно (например,  $\mathcal{N} = C(T)$ ,  $\mathcal{M} = \mathcal{L}_2(G)$ ). Линейный оператор  $L$ , переводящий  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , называется *ограниченным* из  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , если существует такое число  $C > 0$ , что для любого  $f \in \mathcal{M}$  справедливо неравенство

$$\|Lf\|_{\mathcal{N}} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}}.$$

Из этих определений вытекает: если линейный оператор  $L$  ограничен из  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , то он непрерывен из  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ .

Множество  $\mathcal{B}$  линейного нормированного пространства  $\mathcal{M}$  называется *ограниченным* в  $\mathcal{M}$ , если существует такое число  $A$ , что  $\|f\|_{\mathcal{M}} < A$  при всех  $f \in \mathcal{B}$ .

Пусть линейный оператор  $L$  переводит  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}_1$  и линейный оператор  $K$  переводит  $\mathcal{N}_1$  в  $\mathcal{N}$ . Линейный оператор  $KL$ , переводящий  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$  по правилу:  $KLf = K(Lf)$ ,  $f \in \mathcal{M}$ , называется *произведением* операторов  $K$  и  $L$ ; в частности,  $K^p f = K(K^{p-1} f) = K^{p-1}(Kf)$ ,  $K^1 = K$ ,  $K^0 = I$ .

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Если линейный оператор  $l$  преобразует множество элементов  $\mathcal{M}$  в множество комплексных чисел  $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}$ , то  $l$  называется *линейным функционалом* на множестве  $\mathcal{M}$ . Значение функционала  $l$  на элементе  $f$  (комплексное число  $lf$ ) будем обозначать через  $(l, f)$ . Таким образом, непрерывность линейного функционала  $l$  означает следующее: если  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{M}$ , то последовательность комплексных чисел  $(l, f_k)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , стремится к 0.

Будем говорить, что последовательность  $l_1, l_2, \dots$  линейных функционалов на  $\mathcal{M}$  *слабо сходится* к (линейному) функционалу  $l$  на  $\mathcal{M}$ , если она сходится к  $l$  на каждом элементе  $f$  из  $\mathcal{M}$ , т. е.  $(l_k, f) \rightarrow (l, f)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , для всякого  $f \in \mathcal{M}$ .

Линейный функционал  $\tilde{l}$  на множестве  $\widetilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$  называется *продолжением* линейного функционала  $l$ , заданного на  $\mathcal{M}$ , если  $(\tilde{l}, f) = (l, f)$  для всех  $f \in \mathcal{M}$ .

#### ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ФУНКЦИОНАЛОВ.

##### а) Линейный оператор вида

$$Kf(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y) f(y) dy, \quad x \in G,$$

называется *интегральным оператором*, а функция  $\mathcal{K}(x, y)$  — его *ядром*. Если ядро  $\mathcal{K}$  принадлежит  $\mathcal{L}^2(G \times G)$  и

$$\int_{G \times G} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy = C^2 < \infty,$$

то оператор  $K$  ограничен (и, следовательно, непрерывен) из  $\mathcal{L}_2(G) = \mathcal{M}$  в  $\mathcal{L}^2(G) = \mathcal{N}$ .

Аналогично, линейный оператор  $A$ , действующий из  $l_2$  в  $l_2$  (см. п. 5) по правилу:

$$(A\mathbf{a})_k = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} a_i, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_{k,i=1}^{\infty} |A_{ki}|^2 = C^2 < \infty,$$

ограничен (и, стало быть, непрерывен), причем

$$\|A\mathbf{a}\| \leq C\|\mathbf{a}\|, \quad \mathbf{a} = \{a_k\} \in l_2.$$

б) Линейный оператор вида

$$Lf(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha f(x), \quad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha(x)| \neq 0, \quad m > 0,$$

называется *дифференциальным оператором порядка*  $m$ , а функции  $a_\alpha(x)$  — его *коэффициентами*. Если коэффициенты  $a_\alpha(x)$  — непрерывные функции на области  $\bar{G} \subset \mathbb{R}^n$ , то оператор  $L$  переводит  $C^m(\bar{G}) = \mathcal{M}$  в  $C(\bar{G}) = \mathcal{N}$ . Однако, оператор  $L$  не является непрерывным из  $C(\bar{G})$  в  $C(\bar{G})$ . В самом деле,

$$f_k(x) = \frac{1}{k} e^{ik(x,a)} \rightarrow 0 \quad \text{в } C(\bar{G}), \quad k \rightarrow \infty,$$

в то время как последовательность

$$Lf_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha f_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (ia)^\alpha k^{|\alpha|-1} e^{ik(x,a)}$$

не имеет предела в  $C(\bar{G})$ . Отметим попутно, что оператор  $L$  определен не на всем пространстве  $C(\bar{G})$ , а лишь на его части — на множестве функций  $C^m(\bar{G})$ .

в) Линейный оператор

$$Lf(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[ \int_G K(x,y) \partial^\alpha f(y) dy + a_\alpha(x) \partial^\alpha f(x) \right]$$

называется *интегро-дифференциальным оператором*.

г) Пример линейного непрерывного функционала  $l$  на  $L_2(G)$  дает скалярное произведение:  $(l, f) = (f, \bar{g})$ , где  $\bar{g}$  — фиксированная функция из  $L_2(G)$ . Линейность этого функционала следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу (см. п. 5), а в силу неравенства Коши–Буняковского он ограничен:

$$|(l, f)| = |(f, \bar{g})| \leq \|g\| \|f\|,$$

и, следовательно, непрерывен.

**9. Линейные уравнения.** Пусть  $L$  — линейный оператор с областью определения  $\mathcal{M}_L$ . Уравнение

$$Lu = F \tag{8}$$

называется *линейным неоднородным* уравнением. В уравнении (8) заданный элемент  $F$  называется *свободным членом* (или *правой*

частью), а неизвестный элемент  $u$  из  $\mathcal{M}_L$  — решением этого уравнения.

Если в уравнении (8) свободный член  $F$  положить равным нулю, то полученное уравнение

$$Lu = 0 \quad (9)$$

называется *линейным однородным уравнением*, соответствующим уравнению (8).

В силу линейности оператора  $L$  совокупность решений однородного уравнения (9) образует линейное множество; в частности,  $u = 0$  всегда является решением этого уравнения.

Всякое решение  $u$  линейного неоднородного уравнения (8) (если оно существует) представляется в виде суммы частного решения  $u_0$  этого уравнения и общего решения  $\tilde{u}$  соответствующего линейного однородного уравнения (9)

$$u = u_0 + \tilde{u}.$$

Отсюда непосредственно выводим: для того чтобы решение уравнения (8) было единственным в  $\mathcal{M}_L$ , необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (9) имело только нулевое решение в  $\mathcal{M}_L$ .

Пусть однородное уравнение (9) имеет только нулевое решение в  $\mathcal{M}_L$ . Обозначим через  $\mathcal{R}_L$  область значений оператора  $L$ , т. е. (линейное) множество элементов вида  $\{Lf\}$ , где  $f$  пробегает  $\mathcal{M}_L$ . Тогда для любого  $F \in \mathcal{R}_L$  уравнение (8) имеет единственное решение  $u \in \mathcal{M}_L$ , и, таким образом, возникает некоторый оператор, сопоставляющий каждому элементу  $F$  из  $\mathcal{R}_L$  соответствующее решение уравнения (8). Этот оператор называется *обратным оператором* к оператору  $L$  и обозначается через  $L^{-1}$ , так что

$$u = L^{-1}F. \quad (10)$$

Оператор  $L^{-1}$ , очевидно, является линейным и отображает  $\mathcal{R}_L$  на  $\mathcal{M}_L$ . Непосредственно из определения оператора  $L^{-1}$ , а также из соотношений (8) и (10) вытекает

$$LL^{-1}F = F, \quad F \in \mathcal{R}_L; \quad L^{-1}Lu = u, \quad u \in \mathcal{M}_L,$$

т. е.

$$LL^{-1} = I, \quad L^{-1}L = I.$$

Если линейный оператор  $L$  имеет обратный  $L^{-1}$ , то системы функций  $\{\varphi_k\}$  и  $\{L\varphi_k\}$  одновременно линейно независимы. (При этом, естественно, предполагается, что все  $\varphi_k$  принадлежат  $\mathcal{M}_L$ .)

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$Lu = \lambda u, \quad (11)$$

где  $\lambda$  — комплексный параметр. Это уравнение имеет нулевое решение при всех  $\lambda$ . Может случиться, что при некоторых  $\lambda$  оно имеет ненулевые решения из  $\mathcal{M}_L$ . Те комплексные значения  $\lambda$ , при которых уравнение (11) имеет ненулевые решения из  $\mathcal{M}_L$ , называются *собственными значениями* оператора  $L$ , а соответствующие решения — *собственными элементами* (функциями), соответствующими этому собственному значению. Полное число  $r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , линейно независимых собственных элементов, соответствующих данному собственному значению  $\lambda$ , называется *кратностью* этого собственного значения; если кратность  $r = 1$ , то  $\lambda$  называется *простым* собственным значением.

Если кратность  $r$  собственного значения  $\lambda$  оператора  $L$  конечна и  $u_1, \dots, u_r$  — соответствующие линейно независимые собственные элементы, то любая их линейная комбинация

$$u_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r$$

также является собственным элементом, соответствующим этому собственному значению, и приведенная формула дает общее решение уравнения (11). Отсюда вытекает: если решение уравнения

$$Lu = \lambda u + f \quad (12)$$

существует, то его общее решение представляется формулой

$$u = u^* + \sum_{k=1}^r c_k u_k, \quad (13)$$

где  $u^*$  — частное решение (12) и  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , — произвольные постоянные.

**10. Эрмитовы операторы.** Линейный оператор  $L$ , переводящий  $\mathcal{M}_L \subset \mathcal{L}_2(G)$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ , называется *эрмитовым*, если его область определения  $\mathcal{M}_L$  плотна в  $\mathcal{L}_2(G)$  и для любых  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{M}_L$  справедливо равенство

$$(Lf, g) = (f, Lg).$$

Выражения  $(Lf, g)$  и  $(Lf, f)$  называются соответственно *билинейной* и *квадратичной формами*, порожденными оператором  $L$ .

Для того чтобы линейный оператор  $L$  был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы порожденная им квадратичная форма  $(Lf, f)$ ,  $f \in \mathcal{M}_L$ , где  $\mathcal{M}_L$  плотна в  $\mathcal{L}_2(G)$ , принимала только вещественные значения.

Линейный оператор  $L$ , переводящий  $\mathcal{M}_L \subset \mathcal{L}_2(G)$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ , называется *положительным*, если  $\mathcal{M}_L$  плотна в  $\mathcal{L}_2(G)$  и

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L.$$

В частности, всякий положительный оператор эрмитов.

**ТЕОРЕМА.** *Если оператор  $L$  эрмитов (положительный), то все его собственные значения вещественны (неотрицательны), а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\lambda_0$  — собственное значение, а  $u_0$  — соответствующая нормированная собственная функция эрмитова оператора  $L$ ,  $Lu_0 = \lambda_0 u_0$ . Умножая скалярно это равенство на  $u_0$ , получим

$$(Lu_0, u_0) = (\lambda_0 u_0, u_0) = \lambda_0 (u_0, u_0) \lambda_0 \|u_0\|^2 = \lambda_0. \quad (14)$$

Но для эрмитова (положительного) оператора квадратичная форма  $(Lf, f)$  принимает только вещественные (неотрицательные) значения, и, стало быть, в силу (13)  $\lambda_0$  — вещественное (неотрицательное) число.

Докажем, что любые собственные функции  $u_1$  и  $u_2$ , соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , ортогональны. Действительно, из соотношений

$$Lu_1 = \lambda_1 u_1, \quad Lu_2 = \lambda_2 u_2,$$

из вещественности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и из эрмитовости оператора  $L$  получаем цепочку равенств

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, u_2) = (Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2) = (u_1, \lambda_2 u_2) = \lambda_2(u_1, u_2),$$

т. е.  $\lambda_1(u_1, u_2) = \lambda_2(u_1, u_2)$ . Отсюда, поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , вытекает, что скалярное произведение  $(u_1, u_2)$  равно нулю. Теорема доказана.

Предположим, что множество собственных значений эрмитова оператора  $L$  не более чем счетно, а каждое собственное значение конечной кратности. Перенумеруем все его собственные

значения:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , повторя  $\lambda_k$  столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через  $u_1, u_2, \dots$  так, чтобы каждому собственному значению соответствовала только одна собственная функция  $u_k$ :

$$Lu_k = \lambda_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно выбрать ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. п. 6). При этом опять получаются собственные функции, соответствующие тому же самому собственному значению. По теореме из п. 10 собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Таким образом, если система собственных функций  $\{u_k\}$  эрмитова оператора  $L$  не более чем счетна, то ее можно выбрать ортонормальной:

$$(Lu_k, u_i) = \lambda_k(u_k, u_i) = \lambda_k \delta_{ki}.$$

Все сказанное в пп. 5–7, 10 о пространстве  $\mathcal{L}_2(G)$  с очевидными изменениями справедливо и для его дискретного аналога  $l_2$ , и тем более для всех конечномерных подпространств пространства  $l_2$ .

## § 1.2. Основные уравнения математической физики

Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям или даже к интегро-дифференциальным уравнениям. Весьма широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка (см. § 1.1, п. 8)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x). \quad (1)$$

В этом параграфе мы рассмотрим характерные физические процессы, сводящиеся к различным краевым задачам для дифференциальных уравнений.

**1. Уравнение колебаний.** Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (2)$$

где неизвестная функция  $u(x, t)$  зависит от  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) пространственных координат  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и времени  $t$ ; коэффициенты  $\rho$ ,  $p$  и  $q$  определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член  $F(x, t)$  выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (2) в соответствии с определением операторов  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Продемонстрируем вывод уравнения (2) на примере малых поперечных колебаний струны. Струной называется натянутая нить, не сопротивляющаяся изгибу. Пусть в плоскости  $(x, u)$  струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью  $x$ . Величину отклонения струны от положения равновесия в точке  $x$  в момент времени  $t$  обозначим через  $u(x, t)$ , так что  $u = u(x, t)$  есть уравнение струны в момент времени  $t$ . Ограничиваюсь рассмотрением лишь малых колебаний струны, мы будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с  $\operatorname{tg} \alpha = \partial u / \partial x$ .

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение  $\mathbf{T}(x, t)$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  направлено по касательной к струне в точке  $x$  (рис. 3). Любой участок струны  $(a, b)$  после отколо-

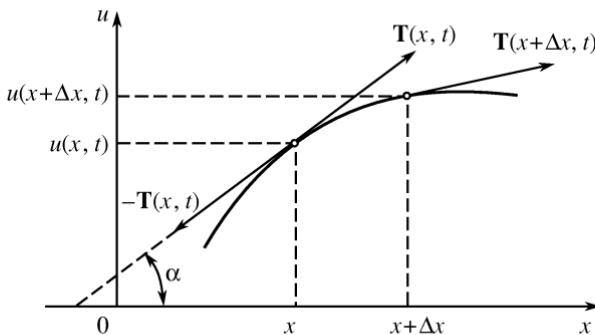


Рис. 3

нения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx \simeq b - a,$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения  $|\mathbf{T}(x, t)|$  будет оставаться постоянной, не зависящей от  $x$  и  $t$ ,  $|\mathbf{T}(x, t)| = T_0$ . Обозначим через  $F(x, t)$  плотность внешних сил, действующих на струну в точке  $x$  в момент времени  $t$  и направленных перпендикулярно оси  $x$  в плоскости  $(x, u)$ . Наконец, пусть  $\rho(x)$  обозначает линейную плотность струны в точке  $x$ , так что приближенно  $\rho(x)\Delta x$  — масса элемента струны  $(x, x + \Delta x)$ .

Составим уравнение движения струны. На ее элемент  $(x, x + \Delta x)$  действуют силы натяжения  $\mathbf{T}(x + \Delta x, t)$ ,  $-\mathbf{T}(x, t)$  (см. рис. 3) и внешняя сила, сумма которых согласно законам Ньютона должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение, так что

$$\mathbf{T}(x + \Delta x, t) - \mathbf{T}(x, t) + F(x, t) \Delta x \mathbf{j} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \mathbf{j},$$

где единичный вектор  $\mathbf{j}$  направлен вдоль оси  $u$ . Проектируя это векторное равенство на ось  $u$ , на основании всего сказанного получим равенство

$$T_0 \sin \alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \sin \alpha|_x + F(x, t) \Delta x = \rho(x) \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Но в рамках нашего приближения

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

а потому из (3) имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t),$$

откуда при  $\Delta x \rightarrow 0$  следует равенство

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \quad (4)$$

Это и есть *уравнение малых поперечных колебаний струны*. При  $F \neq 0$  колебания струны называются *вынужденными*, а при  $F = 0$  — *свободными*.

Если плотность  $\rho$  постоянна,  $\rho(x) = \rho$ , то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (5)$$

где  $f = F/\rho$ , а  $a^2 = T_0/\rho$  — постоянная. Уравнение (5) мы будем также называть *одномерным волновым уравнением*.

Уравнение вида (2) описывает также *малые продольные колебания упругого стержня*

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), \quad (6)$$

где  $S(x)$  — площадь поперечного сечения стержня и  $E(x)$  — модуль Юнга в точке  $x$ .

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний струны или стержня необходимо дополнительно задать смещения  $u$  и скорости  $u_t$  в начальный момент времени (*начальные условия*) и режим на концах (*граничные условия*).

ПРИМЕРЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

а) Если конец  $x_0$  струны или стержня движется по закону  $\mu(t)$ , то

$$u|_{x=x_0} = \mu(t).$$

б) Если на правый конец  $x_0$  струны действует заданная сила  $\nu(t)$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{\nu(t)}{T_0}.$$

Действительно, в этом случае

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \simeq T_0 \sin \alpha|_{x=x_0} = \nu(t).$$

в) Если правый конец  $x_0$  стержня закреплен упруго и  $\alpha$  — коэффициент жестокости закрепления, то

$$E \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u|_{x=x_0} = 0$$

в соответствии с законом Гука.

Аналогично выводится *уравнение малых поперечных колебаний мембранны*

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F. \quad (7)$$

Если плотность  $\rho$  постоянна, то уравнение колебаний мембранны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad (8)$$

будем называть *двумерным волновым уравнением*.

*Трехмерное волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \quad (9)$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы (см. п. 5 ниже).

Мы будем записывать волновые уравнения (5), (8) и (9) единой формулой

$$\square_a u = f, \quad (10)$$

где  $\square_a$  — *волновой оператор* (*оператор Даламбера*),

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \quad (\square = \square_1),$$

$\Delta$  — *оператор Лапласа*,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

**2. Уравнение диффузии.** Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим *уравнением диффузии*:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t). \quad (11)$$

Выведем *уравнение распространения тепла*. Обозначим через  $u(x, t)$  температуру среды в точке  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в момент времени  $t$ . Считая среду изотропной, обозначим через  $\rho(x)$ ,  $c(x)$  и  $r(x)$  соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности в точке  $x$ . Обозначим через  $F(x, t)$  интенсивность источников тепла в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Подсчитаем баланс тепла в произвольном объеме  $V$  за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$ . Обозначим через  $S$  границу  $V$ , и пусть  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье через поверхность  $S$  в объем  $V$  поступает количество тепла

$$Q_1 = \int_S k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \Delta t = \int_S (k \operatorname{grad} u, \mathbf{n}) dS \Delta t,$$

равное в силу формулы Гаусса–Остроградского

$$Q_1 = \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dx \Delta t.$$

За счет тепловых источников в объеме  $V$  возникает количество тепла

$$Q_2 = \int_V F(x, t) dx \Delta t.$$

Так как температура в объеме  $V$  за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$  выросла на величину

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) \simeq \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx \Delta t.$$

С другой стороны,  $Q_3 = Q_1 + Q_2$ , и потому

$$\int_V \left[ \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \Delta t = 0,$$

откуда в силу произвольности объема  $V$  получаем уравнение распространения тепла

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x, t). \quad (12)$$

Если среда однородна, т. е.  $c$ ,  $\rho$  и  $k$  — постоянные, то уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}. \quad (13)$$

Уравнение (13) называется *уравнением теплопроводности*. Число  $n$  пространственных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в этом уравнении может быть любым.

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры  $u$  в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие).

ПРИМЕРЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.

а) Если на границе  $S$  поддерживается заданное распределение температуры  $u_0$ , то

$$u|_S = u_0. \quad (14)$$

б) Если на  $S$  поддерживается заданный поток тепла  $u_1$ , то

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = u_1. \quad (15)$$

в) Если на  $S$  происходит теплообмен согласно закону Ньютона, то

$$k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + h(u - u_0)|_S = 0, \quad (16)$$

где  $h$  — коэффициент теплообмена,  $u_0$  — температура окружающей среды.

Аналогично выводится и *уравнение диффузии частиц*. При этом вместо закона Фурье нужно пользоваться законом Нэрнста для потока частиц через элемент поверхности  $\Delta S$  за единицу времени:  $\Delta Q = -D \partial u / \partial n$ , где  $D(x)$  — коэффициент диффузии и  $u(x, t)$  — плотность частиц в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Уравнение для плотности  $u$  будет иметь вид (11), где  $\rho$  обозначает коэффициент пористости,  $p = D$  и  $q$  характеризует поглощение среды.

**3. Стационарное уравнение.** Для стационарных процессов  $F(x, t) = F(x)$ ,  $u(x, t) = u(x)$  уравнения колебания (2) и диффузии (11) принимают вид

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x). \quad (17)$$

При  $p = \text{const}$  и  $q = 0$  уравнение (17) называется *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{p}; \quad (18)$$

при  $f = 0$  уравнение (18) называется *уравнением Лапласа*:

$$\Delta u = 0. \quad (19)$$

Для полного описания стационарного процесса необходимо еще задать режим на границе — одно из граничных условий (14)–(16).

Пусть в волновом уравнении (10) внешнее возмущение  $f(x, t)$  периодическое с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a^2 f(x)$ :

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Если искать периодические возмущения  $u(x, t)$  с той же частотой и неизвестной амплитудой  $u(x)$ ,

$$u(x, t) = u(x)e^{i\omega t},$$

то для функции  $u(x)$  получим стационарное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad (20)$$

называемое *уравнением Гельмгольца*.

К краевым задачам для уравнения Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Например, пусть задана приходящая (из бесконечности) плоская волна  $e^{ik(a, x)}$ ,  $|a| = 1$ ,  $k > 0$ , которая подвергается изменению из-за наличия некоторого препятствия на границе  $S$  ограниченной области  $G$  (рис. 4). Препятствие можно задавать, например с помощью условия  $u|_S = 0$  или  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$ . Это препятствие порожда-

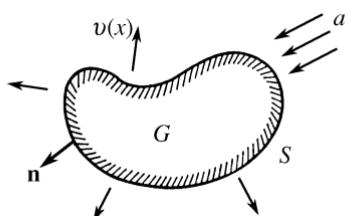


Рис. 4

ет рассеянную волну  $v(x)$ . Эта волна вдали от рассеивающих центров будет близка к расходящейся сферической волне

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \quad (21)$$

Поэтому при  $|x| \rightarrow \infty$  волна  $v(x)$  должна удовлетворять условиям вида

$$v(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o(|x|^{-1}), \quad (22)$$

называемым *условиями излучения Зоммерфельда*. Суммарное же возмущение  $u(x)$  вне области  $G$  складывается из плоской и рассеянной волн:

$$u(x) = e^{ik(a, x)} + v(x). \quad (23)$$

Отметим попутно, что функция  $f(s)$ ,  $s = x/|x|$ , фигурирующая в (21), называется *амплитудой рассеяния*; она зависит, кроме того, от падающего импульса  $ka$ .

**4. Уравнения газо-гидродинамики.** Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т. е. жидкости, в которой отсутствуют силы вязкости. Пусть  $\mathbf{V}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$  — вектор скорости движения жидкости,  $\rho(x, t)$  — ее плотность,  $p(x, t)$  — давление,  $f(x, t)$  — интенсивность источников и вектор  $\mathbf{F}(x, t) = (F_1, F_2, F_3)$  — интенсивность массовых сил. Тогда эти величины удовлетворяют следующей (нелинейной) системе уравнений, называемых *уравнениями гидродинамики* (газовой динамики):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = f, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \operatorname{grad}) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{F}. \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) называются соответственно *уравнением неразрывности* и *уравнением движения Эйлера*. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо еще задать связь между давлением и плотностью:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \quad (26)$$

так называемое *уравнение состояния*. Например, для несжимаемой жидкости уравнение состояния имеет вид  $\rho = \operatorname{const}$ , а для адиабатического движения газа —

$$p\rho^{-\kappa} = \operatorname{const}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

где  $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

В частности, если жидкость несжимаема ( $\rho = \operatorname{const}$ ) и ее движение потенциально ( $\mathbf{V} = -\operatorname{grad} u$ ), то из уравнения неразрывности (24) следует, что потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению Пуассона (18).

**5. Уравнение Maxwella.** Пусть в некоторой среде имеется переменное электромагнитное поле.

Обозначим:  $\mathbf{E}(x, t) = (E_1, E_2, E_3)$  — напряженность электрического поля;  $\mathbf{H}(x, t) = (H_1, H_2, H_3)$  — напряженность магнитного поля;  $\rho(x)$  — плотность зарядов;  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды;  $\mu$  — коэффициент магнитной проницаемости среды;  $\mathbf{I}(x, t) = (I_1, I_2, I_3)$  — ток проводимости.

Тогда эти величины удовлетворяют следующей (линейной) системе дифференциальных уравнений, называемых *уравнениями Maxwella*:

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t}, \quad (28)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \quad (29)$$

где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с — скорость света в пустоте.

Уравнение (28) выражает закон Фарадея, а уравнение (29) — закон Ампера.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.

а)  $\rho = 0, \varepsilon = \text{const}, \mu = \text{const}$  и  $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{E}$  (закон Ома),  $\lambda = \text{const}$ . Применяя к уравнениям (28) и (29) оператор  $\operatorname{rot}$  и пользуясь уравнениями (27), для компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получим так называемое *телеграфное уравнение*

$$\square_a u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (30)$$

б)  $\mathbf{I} = 0, \varepsilon = \text{const}, \mu = \text{const}$ . Вводя четырехкомпонентный *электромагнитный потенциал*  $(A_0, \mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ , представим решение уравнений Максвелла в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (31)$$

При этом компоненты электромагнитного потенциала должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\square_a A_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2 \mu} \rho, \quad \square_a \mathbf{A} = 0 \quad (32)$$

и условию Лоренца

$$\frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

в) Если процесс стационарный, то уравнения Максвелла превращаются в *уравнения электростатики*

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

и в *уравнения магнитостатики*

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}.$$

При  $\varepsilon = \text{const}$  электростатический потенциал  $A_0$  удовлетворяет (в си-лу (32)) уравнению Пуассона (18) с  $f = -(4\psi/\varepsilon)\rho$ .

При преобразовании уравнений Максвелла мы пользовались следующими формулами векторного анализа:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta I, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0.$$

**6. Уравнение Шрёдингера.** Пусть квантовая частица массы  $m_0$  движется во внешнем силовом поле с потенциалом  $V(x)$ . Обозначим через  $\psi(x, t)$  волновую функцию этой частицы, так что  $|\psi(x, t)|^2 \Delta x$  есть вероятность того, что частица будет находиться в окрестности  $v(x)$  точки  $x$  в момент времени  $t$ ; здесь  $\Delta$  — объем  $v(x)$ . Тогда функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi, \quad (33)$$

где  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг · с — постоянная Планка.

Если энергия  $E$  частицы имеет определенное значение, то такое состояние ее называется *стационарным*. В этом случае волновая функция  $\psi(x, t)$  имеет вид

$$\psi(x, t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} Et \right\} \psi(x),$$

где волновая волна функция  $\psi(x)$  в силу (33) удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi = E\psi. \quad (34)$$

При  $V = 0$  (свободная частица) уравнение Шрёдингера (34) превращается в однородное уравнение Гельмгольца (20).

Как и для уравнения Гельмгольца, в задачах на рассеяние на потенциале  $V$  необходимо требовать выполнения условий излучения Зоммерфельда (22) на бесконечности (где  $k = \sqrt{2m_0 E} \hbar^{-1}$ ,  $E \geq 0$ ).

### § 1.3. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка

Прежде чем формулировать математические постановки краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, необходимо классифицировать эти уравнения.

**1. Классификация уравнений в точке.** Рассмотрим квазилинейное (линейное относительно всех старших производных) дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \operatorname{grad} u) = 0 \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами  $a_{ij}(x)$ . Выясним прежде всего, по какому закону преобразуются коэффициенты  $a_{ij}$  при произвольной неособенной замене переменных  $y = y(x)$ ,

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ y_i \in C^2, \quad D \left( \frac{y_1, y_2, \dots, y_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) \equiv \det \left( \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} \right) \neq 0. \quad (2)$$

Так как  $D \neq 0$ , то в некоторой окрестности можно выразить переменные  $x$  через переменные  $y$ :  $x = x(y)$ . Обозначим  $u(x(y)) = \tilde{u}(y)$ ; тогда  $\tilde{u}(y(x)) = u(x)$ . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \Phi^*(y, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \quad (4)$$

Обозначая теперь через  $\tilde{a}_{lk}$  новые коэффициенты при вторых производных,

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \quad (5)$$

перепишем уравнение (4) в виде (1):

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk}(y) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \quad (6)$$

Фиксируем точку  $x_0$  и обозначим  $y_0 = y(x_0)$ ,  $\alpha_{li} = \partial y_l(x_0)/\partial x_i$ . Тогда формула (5) в точке  $x_0$  запишется в виде

$$\tilde{a}_{lk}(y_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \alpha_{li} \alpha_{kj}. \quad (7)$$

Полученная формула преобразования коэффициентов  $a_{ij}$  в точке  $x_0$  совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) p_i p_j \quad (8)$$

при неособенном линейном преобразования

$$p_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{li} q_l, \quad \det(\alpha_{li}) \neq 0, \quad (9)$$

переводящем форму (8) форму

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk}(y_0) q_k q_l. \quad (10)$$

Итак, чтобы упростить уравнение (1) в точке  $x_0$  с помощью замены переменных (2), достаточно упростить в этой точке квадратичную форму (8) с помощью неособенного линейного преобразования (9). В курсе линейной алгебры (см. [4]) доказывается, что всегда существует неособенное преобразование (9), при котором квадратичная форма (8) принимает следующий канонический вид:

$$\sum_{l=1}^r q_l^2 - \sum_{l=r+1}^m q_l^2, \quad m \leq n. \quad (11)$$

Кроме того, в силу закона инерции квадратичных форм целые числа  $r$  и  $m$  не зависят от преобразования (9). Это позволяет классифицировать дифференциальные уравнения (1) в зависимости от значений, принимаемых коэффициентами  $a_{ij}$  в точке  $x_0$ .

Если в квадратичной форме (11)  $m = n$  и все слагаемые одного знака (т. е. либо  $r = m$ , либо  $r = 0$ ), то уравнение (1) называется уравнением *эллиптического типа в точке  $x_0$* ; если  $m = n$ , но имеются слагаемые разных знаков (т. е.  $1 \leq r \leq n-1$ ), то уравнение (1) —

гиперболического типа в точке  $x_0$  (при  $r = 1$  или  $r = n - 1$  — нормально-гиперболического типа в точке  $x_0$ ); наконец, если  $m < n$ , то уравнение (1) — параболического типа в точке  $x_0$  (при  $m = n - 1$  и  $r = 1$  или  $r = n - 1$  — нормально-параболического типа в точке  $x_0$ ).

Подчеркнем, что приведенная классификация зависит от точки  $x_0$ , так как числа  $r$  и  $m$  зависят от  $x_0$ . Например, уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

— смешанного типа: при  $y < 0$  — гиперболического типа, при  $y > 0$  — эллиптического типа, а при  $y = 0$  — параболического типа.

Пусть коэффициенты  $a_{ij}$  в уравнении (1) постоянны, и пусть преобразование (9) приводит квадратичную формулу (8) к каноническому виду (11). Тогда линейная замена независимых переменных

$$y_l = \sum_{i=1}^n \alpha_{li} x_i$$

преобразует уравнение (1) к следующему каноническому виду:

$$\sum_{l=1}^r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \operatorname{grad} \tilde{u}) = 0. \quad (13)$$

**ПРИМЕРЫ.** Уравнение Лапласа — эллиптического типа, волновое уравнение — гиперболического типа и уравнение теплопроводности — параболического типа.

**2. Выражение оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах.** Для иллюстрации преобразований из п. 1 приведем выражение трехмерного оператора Лапласа  $\Delta$  ( $n = 3$ ,  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $\Phi = 0$ ) в сферических и цилиндрических координатах.

а) Сферические координаты:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (14)$$

б) Цилиндрические (полярные) координаты:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z,$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (15)$$

### 3. Характеристические поверхности (характеристики).

Пусть функция  $\omega(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$ , класса  $C^1$  такова, что на поверхности  $\omega(x) = 0$ ,  $\operatorname{grad} \omega(x) \neq 0$  и

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (16)$$

Тогда поверхность  $\omega(x) = 0$  называется *характеристической поверхностью* (или *характеристикой*) квазилинейного дифференциального уравнения (1), а уравнение (16) — *характеристическим уравнением*. При  $n = 2$  характеристическая поверхность называется *характеристической линией*.

Предположим, что каждая поверхность семейства  $\omega(x) - C = 0$ ,  $a < C < b$ , есть характеристика уравнения (1). Поскольку на каждой характеристике  $\operatorname{grad} \omega \neq 0$ , то это семейство заполняет некоторую достаточно малую область  $G$ , через каждую точку которой проходит одна и только одна характеристика. Пусть  $\omega \in C^2(G)$ . Тогда если в преобразовании (2) взять  $y_1 = \omega(x)$ , то в силу (5) и (16) коэффициент  $\tilde{a}_{11}$  обратится в нуль в соответствующей области  $\tilde{G}$ . Поэтому знание одного или нескольких семейств характеристик дифференциального уравнения дает возможность привести это уравнение к более простому виду.

#### ПРИМЕРЫ ХАРАКТЕРИСТИК.

а) Волновое уравнение (см. (10) из § 1.2). Его характеристическое уравнение имеет вид

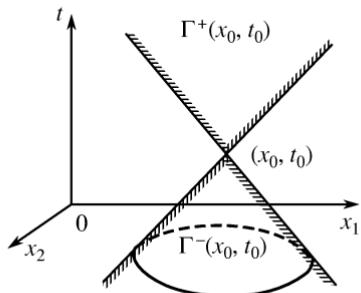


Рис. 5

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0.$$

Поверхность

$$a^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0, \quad (17)$$

называемая *характеристическим конусом* с вершиной в точке  $(x_0, t_0)$ , есть характеристика волнового уравнения.

Характеристический конус (17) является границей конусов

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = \{a(t - t_0) > |x - x_0|\}, \quad \Gamma^-(x_0, t_0) = \{a(t - t_0) < |x - x_0|\},$$

называемых соответственно *конусами будущего* и *прошлого* с вершиной в точке  $(x_0, t_0)$  (рис. 5).

Обозначим  $\Gamma^\pm = \Gamma^\pm(0, 0)$ . Волновое уравнение имеет и другое семейство характеристических поверхностей — семейство касательных плоскостей к характеристическим конусам

$$at + (x, b) = C, \quad (18)$$

где  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $b_k$  и  $C$  — любые вещественные числа, при чем  $|b| = 1$ .

б) Уравнение теплопроводности (см. (13) из § 1.2). Его характеристиками, очевидно, является семейство плоскостей  $t = C$ .

в) Уравнение Пуассона (см. (18) из § 1.2). Оно не имеет (вещественных) характеристик, ибо из характеристического уравнения

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \quad \text{на } \omega = 0$$

следует  $\operatorname{grad} \omega = 0$  на  $\omega = 0$ , что невозможно.

**4. Канонический вид уравнений с двумя независимыми переменными.** В п. 1 рассмотрен способ приведения квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка к каноническому виду в каждой отдельной точке, где задано это уравнение. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли одним и тем же преобразованием (2) привести уравнение (1) к каноническому виду (13) в какой-либо окрестности данной точки? Чтобы такое приведение можно было сделать для любого уравнения, необходимо, чтобы число условий

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lk} &= 0, \quad l \neq k, \quad l, k = 1, 2, \dots, n, \\ \tilde{a}_{ll} &= \varepsilon_l \tilde{a}_{11}, \quad l = 2, 3, \dots, n, \\ \tilde{a}_{11} &\neq 0, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = 0, \pm 1$ , не превосходило числа неизвестных функций  $y_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ :

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leq n,$$

т. е.  $n \leq 2$ .

Покажем, что для  $n = 2$  (и, очевидно, для  $n = 1$ ) такое приведение всегда можно сделать.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (19)$$

причем предполагаем, что коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  принадлежат классу  $\mathcal{C}^2$  в некоторой окрестности и нигде в ней не обращаются в нуль одновременно. Для определенности можно считать, что  $a \neq 0$  в этой окрестности. Действительно, в противном случае может оказаться, что  $c \neq 0$ . Но тогда, меняя местами  $x$  и  $y$ , получим уравнение, у которого  $a \neq 0$ . Если же  $a$  и  $c$  обращаются в нуль одновременно в какой-либо точке, то  $b \neq 0$  в окрестности этой точки. В таком случае после деления на  $2b$  уравнение (19) уже будет иметь канонический вид (26).

Переходя к новым переменным

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \xi, \eta \in \mathcal{C}^2, \quad D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) \neq 0, \quad (20)$$

приведем уравнение (19) к виду

$$\tilde{a} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\tilde{b} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{c} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi}\left(\xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0, \quad (21)$$

где в силу (5)

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ \tilde{b} &= a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \tilde{c} &= a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Потребуем, чтобы функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  обращали в нуль коэффициенты  $\tilde{a}$  и  $\tilde{c}$ , т. е. в силу (22) удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} a \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= 0, \\ a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как  $a \neq 0$ , то уравнения (23) эквивалентны линейным уравнениям

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2\sqrt{d}}{a}, \quad d = b^2 - ac. \quad (25)$$

Согласно классификации, изложенной в п. 1, возможны следующие три типа уравнений (19).

I. Гиперболический тип, если  $d > 0$ .

II. Параболический тип, если  $d = 0$ .

III. Эллиптический тип, если  $d < 0$ .

Рассмотрим отдельно все три случая.

I. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТИП,  $d > 0$ . В этом случае уравнение (19) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{\Phi} = 0. \quad (26)$$

Отметим, что замена переменных  $\rho = \xi + \eta$ ,  $\sigma = \xi - \eta$  приводит уравнение (19) к другому, эквивалентному, каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + \Phi_1 = 0. \quad (27)$$

Для доказательства представления (26) установим существование хотя бы одной пары решений  $\xi, \eta$  уравнений (24), удовлетворяющих условиям (20). Отметим, что  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2$ . Установим сначала связь этих решений с характеристиками уравнения (19).

Предположим, что существуют решения уравнений (24) такие, что  $\operatorname{grad} \xi \neq 0$  и  $\operatorname{grad} \eta \neq 0$  в рассматриваемой окрестности. Тогда по определению (см. п. 3) кривые

$$\xi(x, y) = C_1, \quad \eta(x, y) = C_2 \quad (28)$$

определяют два семейства характеристик уравнения (19).

Для дальнейшего нам понадобится следующая

**ЛЕММА.** Пусть функция  $\omega(x, y)$  класса  $\mathcal{C}^2$  такова, что  $\partial \omega / \partial y \neq 0$ . Для того чтобы семейство кривых  $\omega(x, y) = C$  давало характеристики уравнения (19), необходимо и достаточно, чтобы выражение  $\omega(x, y) = C$  было общим интегралом одного из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y). \quad (29)$$

Уравнения (29) называются *дифференциальными уравнениями характеристик* данного уравнения (19).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу теоремы о неявной функции уравнение  $\omega(x, y) = C$  при условии  $\partial\omega/\partial y \neq 0$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x, C)$ , причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} = - \left( \frac{\partial\omega}{\partial x} \right) / \left( \frac{\partial\omega}{\partial y} \right).$$

Далее, согласно определению (16) функция  $\omega(x, y) - C$  является характеристикой уравнения (19), если справедливо уравнение

$$a \left( \frac{\partial\omega}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial y} + c \left( \frac{\partial\omega}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (30)$$

т. е. если

$$a \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - 2b \frac{d\varphi}{dx} + c = 0,$$

т. е. если

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

т. е. когда  $\varphi(x, C)$  есть решение либо уравнения  $dy/dx = \lambda_1(x, y)$ , либо уравнения  $dy/dx = \lambda_2(x, y)$ . Последнее условие и означает, что выражение  $\omega(x, y) = C$  есть общий интеграл одного из указанных дифференциальных уравнений.

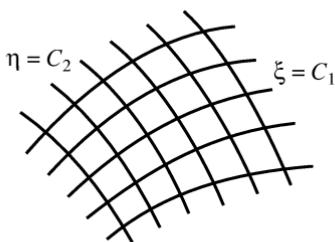


Рис. 6

На основании доказанной леммы общие интегралы уравнений (29):  $\xi(x, y) = C_1$  и  $\eta(x, y) = C_2$  такие, что  $\xi, \eta \in \mathcal{C}^1$ ,  $\partial\xi/\partial y \neq 0$  и  $\partial\eta/\partial y \neq 0$ , определяют два семейства характеристик уравнения (19). Как доказывается в общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [5]), такие интегралы существуют в, возможно, меньшей окрестности. Поскольку при

этом  $\lambda_i \in \mathcal{C}^2$ , то  $\xi, \eta \in \mathcal{C}^2$ , и в силу (29) и (25)

$$D \left( \frac{\xi, \eta}{x, y} \right) = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} (\lambda_1 - \lambda_2) = 2 \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0. \quad (31)$$

Таким образом, семейства характеристик (28) образуют семейства координатных линий (рис. 6), и функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$

можно принять за новые переменные. При этом в уравнении (21) будет  $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$ , и в силу (22) и (29)

$$\tilde{b} = [a\lambda_1\lambda_2 - b(\lambda_1 + \lambda_2) + c] \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{2d}{a} \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} \neq 0.$$

Разделив уравнение (21) на коэффициент  $2\tilde{b} \neq 0$ , получим уравнение в канонической форме (26).

**П. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ тип.** Пусть  $d \equiv 0$  в некоторой окрестности. Тогда уравнение (19) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2} + \tilde{\Phi} = 0. \quad (32)$$

В этом случае в силу (25)  $\lambda_1 = \lambda_2 = b/a \in \mathcal{C}^2$ , так что дифференциальные уравнения (24) совпадают и сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0. \quad (33)$$

Поэтому имеется одно семейство  $\xi(x, y) = C_1$  характеристик уравнения (19), определяемое в силу леммы общим интегралом уравнения  $dy/dx = b/a$  таким, что  $\partial\xi/\partial y \neq 0$ ; при этом  $\xi \in \mathcal{C}^2$ . В качестве второго семейства координатных линий выберем прямые  $x = C_2$ . В результате замена переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = x, \quad D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = -\frac{\partial\xi}{\partial y} \neq 0,$$

дает в силу (22) и (23)

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = a \frac{\partial\xi}{\partial x} + b \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \quad \tilde{c} = a.$$

Разделив уравнение (21) на коэффициент  $\tilde{c} = a \neq 0$ , получим уравнение в канонической форме (32).

**III. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ тип,**  $d < 0$ . Пусть коэффициенты  $a, b$  и  $c$  уравнения (19) — аналитические функции переменных  $x, y$  в окрестности некоторой точки (см. § 1.1, п. 1). Тогда это уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2} + \tilde{\Phi} = 0. \quad (34)$$

В этом случае в силу (25) коэффициенты  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  уравнений (24) есть аналитические функции, причем  $\lambda_1(x, y) = \overline{\lambda_2(x, y)}$  при вещественных  $x, y$ . Из теоремы Коши–Ковалевской вытекает (см. § 1.4, п. 8 далее), что в достаточно малой окрестности существует аналитическое решение  $\omega(x, y)$  уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (24')$$

удовлетворяющее условию  $\partial \omega / \partial y \neq 0$ . Положим

$$\xi = \frac{\omega(x, y) + \overline{\omega(x, y)}}{2}, \quad \eta = \frac{\omega(x, y) - \overline{\omega(x, y)}}{2i}, \quad (35)$$

где  $\bar{\omega} = \xi - i\eta$  — функция, комплексно сопряженная с  $\omega = \xi + i\eta$ ; она удовлетворяет второму из уравнений (24):

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = 0.$$

Функции  $\xi, \eta$  принадлежат  $C^\infty$ , и в силу (35) и (31) их якобиан отличен от нуля:

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = D\left(\frac{\xi, \eta}{\omega, \bar{\omega}}\right) D\left(\frac{\omega, \bar{\omega}}{x, y}\right) = -\frac{1}{2i} 2 \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = -\frac{\sqrt{-d}}{a} \left| \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

Поэтому функции  $\xi$  и  $\eta$  можно взять за новые переменные. Посмотрим, какой вид примет уравнение (19) в этих переменных. По построению функция  $\omega$  удовлетворяет уравнению

$$a \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Отделяя здесь вещественную и мнимую части и пользуясь (35), получим

$$\begin{aligned} a \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\ a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (22), заключаем отсюда, что  $\tilde{a} = \tilde{c}$  и  $\tilde{b} = 0$  в переменных  $\xi, \eta$ . Далее, так как  $d < 0$  и  $\partial \xi / \partial y \neq 0$ , то  $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$ . Разделив уравнение (21) на  $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$ , приведем его к каноническому виду (34).

**5. Пример. Уравнение Трикоми.** Как отмечалось в п. 1, уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

принадлежит к смешанному типу: при  $y < 0$  оно гиперболического типа, а при  $y > 0$  — эллиптического типа, поскольку  $d = -y$ . Уравнение

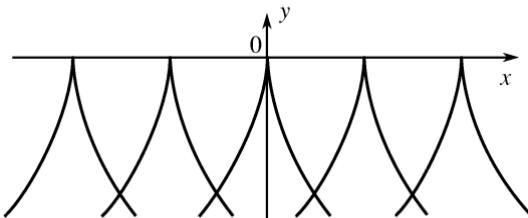


Рис. 7

ние Трикоми представляет интерес для газовой динамики, причем в области гиперболичности оно соответствует сверхзвуковому движению, а в области эллиптичности — дозвуковому движению.

При  $y < 0$  уравнения характеристик (29) принимают вид

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{-y}}.$$

Поэтому кривые (рис. 7)

$$\frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3} = C_1, \quad \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3} = C_2$$

являются характеристиками уравнения Трикоми. Преобразование

$$\xi = \frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3}, \quad \eta = \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3}$$

приводит уравнение Трикоми к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right), \quad \xi > \eta.$$

Если же  $y > 0$ , то в соответствии с рассуждениями из п. 4

$$\omega = \frac{3}{2}x - i\sqrt{y^3},$$

и подстановка типа (35)

$$\xi = \frac{3}{2}x, \quad \eta = -\sqrt{y^3}$$

приводит уравнение Трикоми к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}, \quad \eta < 0.$$

#### § 1.4. Постановка основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

В этом параграфе мы сформулируем математические модели для ряда характерных физических процессов, которые сводятся к различным краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

**1. Классификация краевых задач.** Как было показано в § 1.2, линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (1)$$

описывает процессы колебаний, уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \quad (2)$$

описывает процессы диффузии и, наконец, уравнение

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = F(x) \quad (3)$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — область, где происходит процесс, и  $S$  — ее граница, которую считаем кусочно гладкой поверхностью. Таким образом,  $G$  есть область изменения аргументов  $x$  в уравнении (3) — *область задания уравнения* (3). Областью задания уравнений (1) и (2) будем считать цилиндр  $\Pi_T = G \times (0, T)$  высоты  $T$  с основанием  $G$ . Его граница состоит из боковой поверхности  $S \times [0, T]$  и двух оснований: нижнего  $\overline{G} \times \{0\}$  и верхнего  $\overline{G} \times \{T\}$  (рис. 8).

Будем предполагать, что коэффициенты  $\rho$ ,  $p$  и  $q$  уравнений (1)–(3) не зависят от времени  $t$ ; далее в соответствии с их физическим смыслом будем считать, что  $\rho(x) > 0$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  при  $x \in \overline{G}$ . На-

конец, в соответствии с математическим смыслом уравнений (1)–(3) необходимо считать, что  $\rho \in \mathcal{C}(\overline{G})$ ,  $p \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$  и  $q \in \mathcal{C}(\overline{G})$ .

При этих предположениях согласно классификации § 1.3 уравнение колебаний (1) — уравнение гиперболического типа, уравнение диффузии (2) — параболического типа и стационарное уравнение (3) — эллиптического типа. Таким образом, различие в типах рассматриваемых уравнений тесно связано с различием физических процессов, описываемых этими уравнениями.

Как отмечалось в § 1.2, чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе той области, в которой происходит этот процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения дифференциальных уравнений. Действительно, даже для обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка общее решение зависит от  $n$  произвольных постоянных. Для уравнений же в частных производных решение, вообще говоря, зависит от произвольных функций; например, общее решение уравнения  $\partial u / \partial x = 0$  в классе функций, зависящих от двух переменных  $x, y$ , имеет вид  $u(x, y) = f(y)$ , где  $f$  — произвольная функция класса  $C^2$ . Поэтому чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия*: начальные и граничные условия. Соответствующая задача называется *краевой задачей*. Различают, таким образом, следующие три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

а) *Задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область  $G$  совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^n$ , граничные условия отсутствуют.

б) *Краевая задача* для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе  $S$ , начальные условия, естественно, отсутствуют.

в) *Смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются и начальные, и граничные условия,  $G \neq \mathbb{R}^n$ .

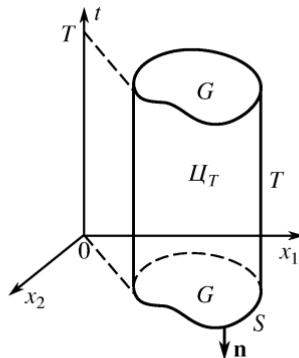


Рис. 8

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач для рассматриваемых уравнений (1)–(3).

**2. Задача Коши.** Для уравнения колебаний (1) (гиперболический тип) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в полупространстве  $t > 0$  и начальным условиям при  $t = +0$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x). \quad (4)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in \mathcal{C}(t > 0)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .

Для уравнения диффузии (2) (параболический тип) задача Коши ставится так: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению (2) в полупространстве  $t > 0$  и начальному условию при  $t = +0$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (5)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in \mathcal{C}(t > 0)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .

Приведенная постановка задачи Коши допускает следующее обобщение. Даны квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \Phi \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (6)$$

кусочно гладкая поверхность  $\Sigma = \{t = \sigma(x)\}$  и функции  $u_0$  и  $u_1$  на  $\Sigma$  (данные Коши). Задача Коши для уравнения (6) состоит в нахождении решения  $u(x, t)$ , определенного в некоторой части области  $t > \sigma(x)$ , примыкающей к поверхности  $\Sigma$ , и удовлетворяющего на  $\Sigma$  краевым условиям

$$u|_{\Sigma} = u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = u_1, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $\Sigma$ , направленная в сторону возрастающих  $t$  (рис. 9).

В задаче Коши (6), (7) важно, что поверхность  $\Sigma$  ни в одной точке не касается характеристической поверхности (см. § 1.3, п. 3) уравнения (6). В противном случае задача Коши может или вовсе не иметь решения, или иметь неединственное решение.

Для доказательства сказанного приведем

**ПРИМЕР.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения  $u_{xt} = 0$  с данными на характеристике  $t = 0$ :

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x).$$

Если решение поставленной задачи существует, то из уравнения и второго начального условия вытекает необходимое условие разре-

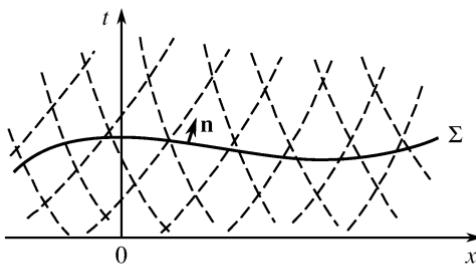


Рис. 9

шимости  $u'_1(x) = 0$ . Таким образом, решение задачи может существовать лишь в случае  $u_1(x) = \text{const} = a$ . При этом если  $u_0 \in C^2$ , то решение действительно существует и, как легко убедится, дается формулой

$$u(x, t) = u_0(x) + at + c(t),$$

где  $c(t)$  — любая функция класса  $C^2(t \geq 0)$  удовлетворяющая условию  $c(0) = c'(0) = 0$ . Решение не единственное.

### 3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа.

Краевая задача для уравнения (3) (эллиптический тип) состоит в нахождении функции  $u(x)$  класса  $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ , удовлетворяющей в области  $G$  уравнению (3) и граничному условию на  $S$  вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v, \quad (14)$$

где  $\alpha, \beta$  и  $v$  — заданные кусочно непрерывные функции на  $S$ , причем  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ .

Выделяют следующие типы граничных условий (14):

граничные условия I рода ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )

$$u|_S = u_0; \quad (15)$$

границные условия II рода ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = u_1; \quad (16)$$

границные условия III рода ( $\beta = 1, \alpha \geq 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \Big|_S = u_2. \quad (17)$$

Соответствующие краевые задачи называются *краевыми задачами I, II и III рода*.

Для уравнений Лапласа и Пуассона (см. § 1.2, п. 3) краевая задача I рода

$$\Delta u = -f, \quad u \Big|_S = u_0 \quad (18)$$

называется *задачей Дирихле*, а краевая задача II рода

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = u_1 \quad (19)$$

называется *задачей Неймана*.

Аналогично ставятся краевые задачи для уравнения (3) и во внешности ограниченной области  $G$  (*внешние краевые задачи*). Отличие состоит в том, что, помимо граничного условия (14) на  $S$ , задаются еще условия на бесконечности. Такими условиями, например, могут быть: условия излучения Зоммерфельда (22) из § 1.2 для уравнения Гельмгольца или Шрёдингера (см. § 1.2); условия вида

$$u(x) = O(1) \quad \text{или} \quad u(x) = o(1), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (20)$$

для уравнения Пуассона; принадлежность  $\psi$  к  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$  для собственных функций уравнения Шрёдингера (40) из § 1.2 и другие.

**4. Смешанная задача.** Для уравнения колебаний (1) (гиперболический тип) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $\mathcal{C}^2(\Pi_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Pi}_T)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре  $\Pi_T$ , начальным условиям (4) при  $t = 0, x \in \overline{G}$  (на нижнем основании цилиндра  $\Pi_T$ ) и граничному условию

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v \quad (14')$$

(на боковой поверхности цилиндра  $\Pi_T$ ). При этом необходимо должны быть выполнены условия гладкости

$$F \in \mathcal{C}(\Pi_T), \quad u_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{G}), \quad u_1 \in C(\overline{G}), \quad v \in \mathcal{C}(S \times [0, T])$$

и условие согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v|_{t=0}. \quad (21)$$

Аналогично для уравнения диффузии (2) (параболический тип) смешанная задача ставится так: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $\mathcal{C}^2(\Pi_T) \cap \mathcal{C}(\Pi_T)$ ,  $\operatorname{grad}_x u \in \mathcal{C}(\Pi_T)$ , удовлетворяющую уравнению (2) в  $\Pi_T$ , начальному условию (5) и граничному условию (14).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Решения поставленных краевых задач с гладкостью  $\mathcal{C}^1$  вплоть до границы области задания уравнения существуют не всегда. Поэтому иногда приходится отказываться от требования такой гладкости и требовать, например, чтобы решение было только непрерывным вплоть до границы области. Эта постановка является естественной в задачах, не содержащих первых производных в краевых условиях, например, для уравнений (2) и (3) с граничным условием I рода. Если же в краевые условия входят первые производные, то в каждом конкретном случае необходимо указывать, в каком смысле должны быть выполнены эти краевые условия. Например, для смешанной задачи для уравнения (1) выполнения второго из начальных условий (4) можно требовать в смысле  $\mathcal{L}_2(G)$ :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - u_1 \right\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +0. \quad (22)$$

Для задачи Неймана для уравнения Лапласа выполнения граничного условия (16) можно требовать в следующем смысле:

$$\frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_x} \Rightarrow u_1(x), \quad x \in S, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in G, \quad x' \in -\mathbf{n}_x. \quad (23)$$

**5. Другие краевые задачи.** Сформулируем еще две краевые задачи, часто встречающиеся в математической физике.

a) *Задача Гурса.* Пусть дано линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа с двумя независимыми переменными в каноническом виде (см. § 1.3, п. 4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad (24)$$

с непрерывными коэффициентами  $a$ ,  $b$  и  $c$  в замкнутом прямоугольнике  $\bar{\Pi}$ ,  $\Pi = (0, x_0) \times (0, y_0)$ .

Требуется найти функцию  $u(x, y)$  класса  $C^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ ,  $u_{xy} \in C(\Pi)$ , удовлетворяющую уравнению (24) в прямоугольнике  $\Pi$  и принимающую на его сторонах  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq x_0$  и  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq y_0$  (рис. 10) заданные значения

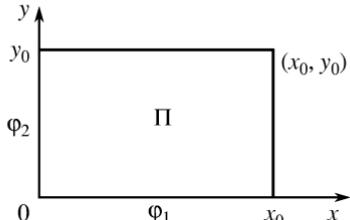


Рис. 10

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad u|_{x=0} = \varphi_2(y). \quad (25)$$

При этом должны быть выполнены условия гладкости

$$f \in C(\Pi), \\ \varphi_1 \in C([0, x_0]), \quad \varphi_2 \in C([0, y_0])$$

и условие согласованности  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ .

Отметим, что в задаче Гурса задается *одно* краевое условие на *двух* пересекающихся характеристиках уравнения (24).

б) *Задача Трикоми для уравнения Чаплыгина.* Уравнение Чаплыгина имеет вид

$$K(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (26)$$

где

$$K(0) = 0, \quad K'(y) > 0, \quad y \neq 0.$$

При  $K(y) = y$  уравнение (26) превращается в уравнение Трикоми (см. § 1.3, п. 5).

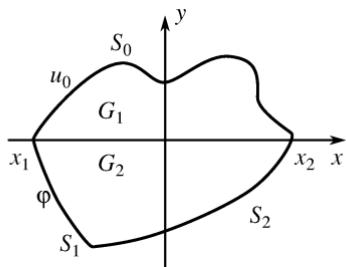


Рис. 11

Пусть односвязная область  $G$  в плоскости  $(x, y)$  разделена параболической линией  $y = 0$  уравнения Трикоми на две части: эллиптическую  $G_1(y > 0)$  и гиперболическую  $G_2(y < 0)$ . Предположим, что область  $G_1$  в  $y > 0$  ограничена кусочно гладкой кривой  $S_0$ , которая оканчивается в точках  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$ , на оси  $x$ , а область  $G_2$  в  $y < 0$  ограничена двумя пересекающимися характеристиками  $S_1$  и  $S_2$  уравнения (26) (ср. § 1.3, п. 5), проходящими соответственно через точки  $x_1$  и  $x_2$  на оси  $x$  (рис. 11).

$S_1$  и  $S_2$  уравнения (26) (ср. § 1.3, п. 5), проходящими соответственно через точки  $x_1$  и  $x_2$  на оси  $x$  (рис. 11).

Требуется найти функцию  $u(x, y)$  класса  $C^2(G_1 \cup G_2) \cap C^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , удовлетворяющую уравнению (26) в областях  $G_1$  и  $G_2$  и принимающую на дуге  $S_0$  и на одной из характеристик, например, на  $S_1$ , заданные значения

$$u|_{S_0} = u_0, \quad u|_{S_1} = \varphi. \quad (27)$$

При этом необходимо, чтобы  $u_0 \in \mathcal{C}(S_0)$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}(S_1)$  и  $u_0(x_1) = \varphi(x_1)$ .

**6. Корректность постановок задач математической физики.** Так как задачи математической физики представляют собой математические модели реальных физических процессов, то их постановки должны удовлетворять следующим естественным требованиям.

- а) Решение должно *существовать* в каком-либо классе функций  $\mathcal{M}_1$ .
- б) Решение должно быть *единственным* в каком-либо классе функций  $\mathcal{M}_2$ .
- в) Решение должно *непрерывно зависеть от данных задачи* ( начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т. д.).

Непрерывная зависимость решения  $u$  от данных задачи  $D$  означает следующее: пусть последовательность данных  $D_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в каком-то смысле стремится к  $D$ ,  $k \rightarrow \infty$ , и  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — соответствующие решения задачи; тогда должно быть  $u_k \rightarrow u$ ,  $k \rightarrow \infty$  в смысле надлежащим образом выбранной сходимости. Например, пусть задача приводится к уравнению  $Lu = F$ , где  $L$  — линейный оператор, переводящий  $\mathcal{M}$  в  $\mathcal{N}$ , где  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  — линейные нормированные пространства. В этом случае непрерывная зависимость решения  $u$  от свободного члена  $F$  будет обеспечена, если оператор  $L^{-1}$  существует и ограничен из  $\mathcal{N}$  в  $\mathcal{M}$  (см. § 1.1, пп. 8, 9). Требование непрерывной зависимости решения обусловливается тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из эксперимента приближению, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи в рамках выбранной математической модели не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется *корректно поставленной* (по Адамару), а множество функций  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$  называется *классом корректности*. Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий а)–в), называется *некорректно поставленной*.

К некорректно поставленным задачам часто приводят обратные задачи математической физики: по некоторой информации о

решении прямой задачи восстановить некоторые неизвестные физические величины, определяющие эту задачу (источники, краевые условия, коэффициенты уравнения и т. д.).

В этой книге мы устанавливаем корректность поставленных основных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка в том или ином классе, а также изучаем качественные свойства решений и методы построения (точных или приближенных) решений этих задач.

**7. Теорема Коши–Ковалевской.** В этом пункте мы выделим довольно общий класс задач Коши, для которых решение существует и единственно. Прежде всего введем определение (мы используем обозначения, введенные в § 1.1, пп. 1, 2).

Система  $N$  дифференциальных уравнений с  $N$  неизвестными функциями  $u_1, u_2, \dots, u_N$

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^\alpha u_j, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

называется *нормальной относительно переменной  $t$* , если правые части  $\Phi_i$  не содержат производных порядка выше  $k_i$  и производных по  $t$  порядка выше  $k_i - 1$ , т. е.

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i, \quad \alpha_0 \leq k_i - 1.$$

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной  $x$ ; волновое уравнение, кроме того, нормально относительно  $t$ .

Для нормальной относительно  $t$  системы уравнений (28) поставим следующую задачу Коши: найти решение  $u_1, u_2, \dots, u_N$  этой системы, удовлетворяющее начальным условиям при  $t = t_0$

$$\left. \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (29)$$

где  $\varphi_{ik}(x)$  — заданные функции в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**ТЕОРЕМА Коши–КОВАЛЕВСКОЙ.** Если все функции  $\varphi_{ik}(x)$  аналитичны в некоторой окрестности точки  $x_0$  и все функции  $\Phi_i(x, t, \dots, u_j \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n, \dots)$  аналитичны в некоторой окрестности точки

$$(x_0, t_0, \dots, \partial^\alpha \varphi_{j \alpha_0}(x_0), \dots),$$

то задача Коши (28), (29) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ , и притом единственное в классе аналитических функций.

Приведем идею доказательства. Решение  $u_1, u_2, \dots, u_N$  в окрестности точки  $(x_0, t_0)$  ищется в виде степенных рядов

$$u_i(x, t) = \sum_{\alpha_0 \geq 0, |\alpha| \geq 0} \frac{\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^\alpha u_i(x_0, t_0)}{\alpha_0! \alpha!} (t - t_0)^{\alpha_0} (x - x_0)^\alpha, \quad i = 1, \dots, N. \quad (30)$$

Из начальных условиях (29) и из уравнений (28) последовательно определяются все производные  $\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^\alpha u_i$  в точке  $(x_0, t_0)$ . Доказывается равномерная сходимость рядов (30) в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$ . Единственность построенного решения в классе аналитических функций следует из теоремы единственности для аналитических функций.

**8. Пример Адамара.** Теорема Коши–Ковалевской, несмотря на ее общий характер, полностью не решает вопроса корректности постановки задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Действительно, эта теорема гарантирует существование и единственность решения лишь в достаточно малой окрестности, или, как говорят, в *малом*; обычно же эти факты требуется установить в наперед заданных (и отнюдь не малых) областях, или, как говорят, в *целом*. Далее, начальные данные и свободный член уравнения, как правило, оказываются неаналитическими функциями. Наконец, может вовсе не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных. Это показывает пример, впервые построенный Адамаром.

Решение задачи Коши

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin kx$$

для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

есть

$$u_k(x, t) = \frac{\sin kt}{k^2} \sin kx.$$

Если  $k \rightarrow +\infty$ , то  $\frac{1}{k} \sin kx \rightharpoonup 0$  по  $x$ ; тем не менее при  $x \neq j\pi$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots$

$$u_k(x, t) = \frac{\sin kt}{k^2} \sin kx \not\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно (в смысле определения из п. 6).

**9. Классические и обобщенные решения.** Изложенные в предыдущих пунктах постановки задач характеризуется тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими и они должны удовлетворять уравнению в каждой точке области задания этого уравнения. Такие решения мы будем называть *классическими*, а постановку соответствующей краевой задачи — *классической постановкой*.

Таким образом, классические постановки задач уже предполагают достаточную гладкость входящих в задачу данных. Однако в наиболее интересных задачах эти данные могут иметь довольно сильные особенности. Поэтому для таких задач классические постановки уже оказываются недостаточными. Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться (частично или полностью) от требований гладкости решения в области или вплоть до границы, вводить так называемые *обобщенные решения*. Но тогда встает вопрос о том, какие функции можно называть решениями уравнения. Чтобы сделать это, необходимо существенно обобщить понятие производной и вообще понятие функции, т. е. ввести так называемые *обобщенные функции*. Изучению этого вопроса целиком посвящается следующая глава.

## Глава II

# ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Возникновение обобщенных функций связано с именами многих математиков и физиков. Простейшая обобщенная функция — знаменитая  $\delta$ -функция — использовалась Д. Максвеллом (1873 г.) в работах по электродинамике, О. Хевисайдом (1899 г.) — в работах по операционному исчислению, П. Дираком (1926 г.) — в работах по квантовой механике. Ненапрасно  $\delta$ -функция носит имя Дирака. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым (1939 г.) и Л. Шварцем (1950 г.). В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками. Быстрое развитие теории обобщенных функций стимулировалось главным образом потребностями математической физики, в особенности теории дифференциальных уравнений и квантовой физики. В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута вперед, имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход математиков, физиков и инженеров.

### § 2.1. Основные и обобщенные функции

**1. Введение.** Обобщенная функция является расширением классического понятия функции. Это обобщение, с одной стороны, дает возможность выразить в математической форме такие идеализированные понятия, как, например, плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке, и т. д. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя, например, знать плотность вещества в точке, а можно измерить лишь его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявить ее плотностью в данной точке; грубо говоря, обобщенная функция определяется своими «средними значениями» в окрестностях каждой точки.

Чтобы пояснить сказанное, попытаемся определить плотность, создаваемую материальной точкой массы 1. Считаем, что эта точка находится в начале координат.

Чтобы определить эту плотность, распределим массу 1 равномерно внутри шара  $U_\varepsilon$ . В результате получим среднюю плотность

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Примем сначала в качестве искомой плотности (мы ее обозначим через  $\delta(x)$ ) поточечный предел последовательности средних плотностей  $f_\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е.

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

От плотности  $\delta$  естественно требовать, чтобы интеграл от нее по любому объему  $V$  давал массу вещества, заключенного в этом объеме, т. е.

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in V, \\ 0, & \text{если } 0 \notin V. \end{cases}$$

Но в силу (1) интеграл слева всегда равен нулю. Полученное противоречие показывает, что поточечный предел последовательности  $f_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , не может быть принят в качестве плотности  $\delta(x)$ .

Вычислим теперь *слабый предел* последовательности функций  $f_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е. для каждой фиксированной непрерывной функции  $\varphi$  найдем предел числовой последовательности  $\int f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (см. § 1.1, п. 8). Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Действительно, в силу непрерывности функции  $\varphi(x)$  для любого  $\eta > 0$  существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что  $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ , коль скоро  $|x| < \varepsilon_0$  (см. [2]). Отсюда при всех  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  получаем

$$\begin{aligned} \left| \int f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x|<\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq \\ &\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} dx = \eta, \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Таким образом, слабым пределом последовательности функций  $f_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , является функционал, сопоставляющий каждой непрерывной функции  $\varphi(x)$  число  $\varphi(0)$  — ее значение в точке 0. Вот этот-то функционал и принимается за определение плотности  $\delta(x)$ ; это и есть известная  $\delta$ -функция Дирака.

Итак,  $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в том смысле, что для любой непрерывной функции  $\varphi(x)$  справедливо предельное соотношение

$$\int f_\varepsilon(x)\varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где символ  $(\delta, \varphi)$  обозначает число  $\varphi(0)$  — значение функционала  $\delta$  на функции  $\varphi$ .

Чтобы восстановить теперь полную массу, нужно действовать функционалом (плотностью)  $\delta(x)$  на функцию  $\varphi(x) = 1$ :  $(\delta, 1) = 1(0) = 1$ .

Если в точке  $x = 0$  сосредоточена масса  $m$ , то соответствующую плотность следует считать равной  $m\delta$ . Если масса  $m$  сосредоточена в точке  $x_0$ , то ее плотность естественно считать равной  $m\delta(x - x_0)$ , где  $(m\delta(x - x_0), \varphi(x)) = m\varphi(x_0)$ . И вообще, если в различных точках  $x_k$  сосредоточены массы  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , то соответствующая плотность равна

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k).$$

Таким образом, плотность, создаваемая материальными точками, не может быть описана в рамках классического понятия функции, и для ее описания следует привлекать объекты более общей математической природы — линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции).

**2. Пространство основных функций  $\mathcal{D}$ .** Уже на примере  $\delta$ -функции видно, что она определяется посредством непрерывных функций как линейный непрерывный функционал на этих функциях (см. § 1.1, п. 8). Непрерывные функции, как говорят, являются *основными функциями* для  $\delta$ -функции. Эта точка зрения и берется за основу определения произвольной обобщенной функции как линейного непрерывного функционала на пространстве достаточно «хороших» (основных) функций. Ясно, что чем уже пространство основных функций, тем больше существует линейных непрерывных функционалов на нем. С другой стороны, запас основных функций должен быть

достаточно велик. В этом пункте мы введем важное пространство основных функций  $\mathcal{D}$ .

Отнесем ко множеству основных функций  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  все *финитные бесконечно дифференцируемые в  $\mathbb{R}^n$  функции*. Сходимость в  $\mathcal{D}$  определим следующим образом. Последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  из  $\mathcal{D}$  сходится к функции  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$ , если: а) существует такое число  $R > 0$ , что  $\text{spt } \varphi_k \subset U_R$ ; б) при каждом  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$\partial^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \rightarrow \infty.$$

В этом случае будем писать:  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Линейное множество  $\mathcal{D}$  с введенной в нем сходимостью называется *пространством основных функций  $\mathcal{D}$* .

Операция дифференцирования  $\varphi(x) \mapsto \partial^\beta \varphi(x)$  непрерывна из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ .

Действительно, если  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то: а)  $\text{spt } \varphi_k \subset \overline{U}_R$  при некотором  $R > 0$  и всех  $k = 1, 2, \dots$ ; б) при каждом  $\alpha$

$$\partial^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда: а)  $\text{spt } \partial^\beta \varphi_k \subset \overline{U}_R$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ ; б) при каждом  $\alpha$

$$\partial^\alpha [\partial^\beta \varphi_k(x)] = \partial^{\alpha+\beta} \varphi_k(x) \rightrightarrows 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \rightarrow \infty,$$

а это в силу определения сходимости в  $\mathcal{D}$  означает, что  $\partial^\beta \varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Это и значит, что оператор  $\partial^\beta$  непрерывен из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$  (см. § 1.1, п. 8).

Аналогично, операции неособенной линейной замены переменных  $\varphi(x) \mapsto \varphi(Ax + b)$  и умножения на функцию  $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi(x) \mapsto a(x)\varphi(x)$ , непрерывны из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ .

Совокупность основных функций, носители которых содержатся в данной области  $G$ , обозначим через  $\mathcal{D}(G)$ ; таким образом,

$$\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}.$$

В связи с приведенным определением возникает вопрос: существуют ли основные функции, отличные от тождественного нуля? Яс-

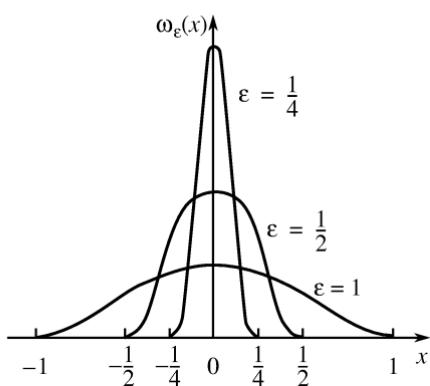


Рис. 12

но, что такие функции не могут быть аналитическими в  $\mathbb{R}^n$  (см. § 1.1, п. 1). Примером основной функции, отличной от нулевой, является «шапочка» (рис. 12)

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right\}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Постоянную  $C_\varepsilon$  выберем так, чтобы  $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$ , т. е.

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int_{U_\varepsilon} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\xi|^2}\right\} d\xi = 1.$$

Легко поверить, что

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Следующая лемма дает другие многочисленные примеры основных функций.

**ЛЕММА.** Для любой области  $G$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует функция  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  такая, что

$$0 \leq \eta(x) \leq 1; \quad \eta(x) = 1 \quad \text{при } x \in G_\varepsilon; \quad \eta(x) = 0 \quad \text{при } x \notin G_{3\varepsilon}.$$

(График функции  $\eta(x)$  при  $G = (a, b)$  изображен на рис. 13.)

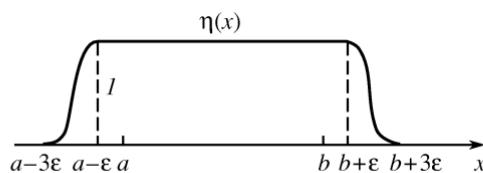


Рис. 13

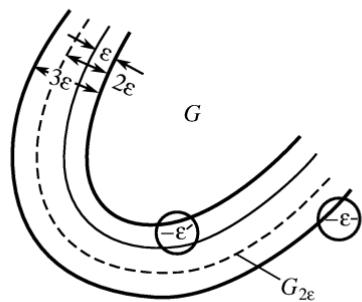


Рис. 14

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\chi(x)$  — характеристическая функция множества  $G_{2\varepsilon}$  (т. е.  $\chi(x) = 1$ ,  $x \in G_{2\varepsilon}$  и  $\chi(x) = 0$ ,  $x \notin G_{2\varepsilon}$ ). Тогда функция

$$\eta(x) = \int \chi(y) \omega_\varepsilon(x - y) dy$$

обладает требуемыми свойствами. Действительно, так как  $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}$ ,  $0 \leq \omega_\varepsilon(x)$ ,  $\text{spt } \omega_\varepsilon = U_\varepsilon$ ,  $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$ , то (рис. 14)

$$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y) dy \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n);$$

$$0 \leq \eta(x) \leq \int \omega_\varepsilon(x-y) dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Далее, если  $x \in G_v e$  и  $|x-y| < \varepsilon$ , то  $y = x + y - x \in G_{2\varepsilon}$ , и, стало быть,  $\chi(y) \equiv 1$ ; если же  $x \notin G_{3\varepsilon}$  и  $|x-y| < \varepsilon$ , то  $y = x + y - x \notin G_{2\varepsilon}$ , и, стало быть,  $\chi(y) \equiv 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_{U(x;\varepsilon)} \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy = \\ &= \begin{cases} \int_{U(x;\varepsilon)} 1 \cdot \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1, & x \in G_\varepsilon, \\ \int_{U(x;\varepsilon)} 0 \cdot \omega_\varepsilon(x-y) dy = 0, & x \notin G_{3\varepsilon}. \end{cases} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает

**СЛЕДСТВИЕ.** *Если область  $G$  ограничена и  $G' \Subset G$ , то существует функция  $\eta \in \mathcal{D}(G)$  такая, что  $0 \leq \eta \leq 1$  и  $\eta(x) \equiv 1$ ,  $x \in G'$ .*

Можно показать, что запас основных функций достаточно велик. Например, множество  $\mathcal{D}(G)$  плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$  (см § 1.1, п. 5).

**3. Пространство обобщенных функций  $\mathcal{D}'$ .** *Обобщенной функцией* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций  $\mathcal{D}$ . В соответствии с обозначениями § 1.1, п. 8 значение функционала (обобщенной функции)  $f$  на основной функции  $\varphi$  будем записывать  $(f, \varphi)$ . Обобщенную функцию  $f$  будем также формально записывать в виде  $f(x)$ , подразумеваемая под  $x$  аргумент основных функций, на которые действует функционал  $f$ .

Расшифруем определение обобщенной функции  $f$ .

1) Обобщенная функция  $f$  есть *функционал* на  $\mathcal{D}$ , т. е. каждой основной функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  сопоставляется (комплексное) число  $(f, \varphi)$ .

2) Обобщенная функция  $f$  есть *линейный* функционал на  $\mathcal{D}$ , т. е. если  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$  и  $\lambda, \mu$  — комплексные числа, то

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3) Обобщенная функция  $f$  есть *непрерывный* функционал на  $\mathcal{D}$ , т. е. если  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то  $(f, \varphi_k) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  множество всех обобщенных функций.

Множество  $\mathcal{D}'$  линейное, если линейную комбинацию  $\lambda f + \mu g$  обобщенных функций  $f$  и  $g$  определить как функционал, действующий по формуле

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Проверим, что функционал  $\lambda f + \mu g$  линейный и непрерывный на  $\mathcal{D}$ , т. е. принадлежит  $\mathcal{D}'$ . Действительно, если  $\alpha$  и  $\beta$  — комплексные числа, то по определению

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g, \alpha\varphi + \beta\psi) &= \lambda(f, \alpha\varphi + \beta\psi) + \mu(g, \alpha\varphi + \beta\psi) = \\ &= \alpha[\lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi)] + \beta[\lambda(f, \psi) + \mu(g, \psi)] = \\ &= \alpha(\lambda f + \mu g, \varphi) + \beta(\lambda f + \mu g, \psi), \end{aligned}$$

и потому этот функционал линейный. Непрерывность его следует из непрерывности функционалов  $f$  и  $g$ : если  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) = \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Определим сходимость в  $\mathcal{D}'$  как *слабую сходимость* последовательности функционалов (см. § 1.1, п. 8): последовательность обобщенных функций  $f_1, f_2, \dots$  из  $\mathcal{D}'$  сходится к обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'$ , если для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  числовая последовательность  $(f_k, \varphi)$  сходится к  $(f, \varphi)$ ,  $k \rightarrow \infty$ . В этом случае мы будем писать  $f_k \rightarrow f$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Линейное множество  $\mathcal{D}'$  с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций*  $\mathcal{D}'$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Линейные функционалы на  $\mathcal{D}$  не обязательно должны быть непрерывными на  $\mathcal{D}$ . Однако в явном виде не построено ни одного линейного разрывного функционала на  $\mathcal{D}$ ; можно только теоретически доказать их существование, используя аксиому выбора.

Весьма важным является свойство полноты пространства  $\mathcal{D}'$ .

**ТЕОРЕМА.** Пусть последовательность  $f_1, f_2, \dots$  из  $\mathcal{D}'$  такова, что для каждой  $\varphi \in \mathcal{D}$  числовая последовательность  $(f_k, \varphi)$  сходится при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда функционал  $f$  на  $\mathcal{D}$ , определенный равенством

$$(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

также является линейным и непрерывным на  $\mathcal{D}$ , т. е.  $f \in \mathcal{D}'$ .

Мы не будем доказывать эту теорему. Заинтересованный читатель может найти доказательство ее в книге [1].

**4. Носитель обобщенной функции.** Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в области.

Говорят, что обобщенная функция  $f$  равна нулю в области  $G$ , если  $(f, \varphi) = 0$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ . Этот факт будем записывать так:  $f = 0, x \in G$ , или  $f(x) = 0, x \in G$ . В соответствии с этим определением обобщенные функции  $f$  и  $g$  называются *равными в области  $G$* , если  $f - g = 0, x \in G$ ; при этом пишем:  $f = g, x \in G$ . В частности, обобщенные функции  $f$  и  $g$  называются *равными* ( $f = g$ ), если  $(f, \varphi) = (g, \varphi)$  для всех  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ .

Пусть обобщенная функция  $f$  равна нулю в области  $G$ . Тогда она, очевидно, равна нулю и в окрестности каждой точки этой области. Справедливо и обратное.

**ЛЕММА.** *Если обобщенная функция  $f$  равна нулю в окрестности каждой точки области  $G$ , то она равна нулю во всей области  $G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сделанное выше замечание позволяет

нам считать окрестности шарами. Нужно доказать, что  $(f, \varphi) = 0$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ . Фиксируем какую-либо функцию  $\varphi$  из  $\mathcal{D}(G)$ . Компакт  $spt \varphi$  содержится в области  $G$ . Поэтому по лемме Гейне–Бореля (см. § 1.1, п. 1)  $spt \varphi$  можно покрыть конечным числом шаров  $U(x_k; r_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N(\varphi)$ , в которых  $f$  равна нулю. Возьмем уменьшенные шары  $U(x_k; r'_k)$ ,  $r'_k < r_k$ , все еще покрывающие  $spt \varphi$  (рис. 15). По следствию из леммы из п. 2 существуют

основные функции  $h_k(x)$  такие, что

$$h_k(x) = 1, \quad x \in U(x_k; r'_k), \quad spt h_k \subset U(x_k; r_k).$$

Положим

$$h(x) = \sum_{k=1}^N h_k(x), \quad \varphi_k(x) = \varphi(x) \frac{h_k(x)}{h(x)}.$$

По построению  $h(x) \geq 1$  в окрестности  $spt \varphi$ . Поэтому

$$\varphi_k \in \mathcal{D}(U(x_k; r_k)), \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x).$$

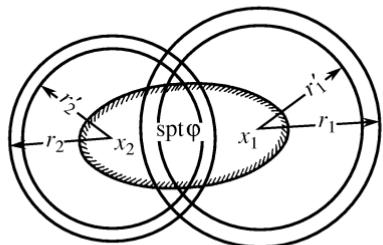


Рис. 15

Отсюда

$$(f, \varphi) = \left( f, \sum_{k=1}^N \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть  $f \in \mathcal{D}'$ . Объединение всех окрестностей, где  $f = 0$ , образует открытое множество  $\mathcal{O}_f$ , которое называется *нулевым множеством* обобщенной функции  $f$ . По лемме  $f = 0$  в каждой области, содержащейся в  $\mathcal{O}_f$ ; далее,  $\mathcal{O}_f$  есть наибольшее открытое множество, в котором  $f$  обращается в нуль. *Носителем обобщенной функции*  $f$  называется дополнение  $\mathcal{O}_f$  до  $\mathbb{R}^n$ ; носитель  $f$  обозначим  $\text{spt } f$ , так что  $\text{spt } f = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_f$  — замкнутое множество. Если  $\text{spt } f$  — ограниченное множество, то обобщенная функция  $f$  называется *финитной*.

Из этих определений выводим:

а) в любой области, лежащей вне  $\text{spt } f$ , обобщенная функция  $f$  обращается в нуль, т. е.

$$(f, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{spt } f \cap \text{spt } \varphi = \emptyset; \quad (2)$$

б) носитель  $f$  состоит из тех и только тех точек, ни в какой окрестности которых  $f$  не обращается в нуль.

Доказанная лемма допускает следующее обобщение. Пусть  $f \in \mathcal{D}'$  и  $G$  — область в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $f$  индуцирует линейный функционал  $f_G$  на  $\mathcal{D}(G)$ , действующий по формуле

$$(f_G, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Функционал  $f_G$  непрерывен на  $\mathcal{D}(G)$ : если  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , и  $\text{spt } \varphi_k \subset G' \Subset G$ , то  $(f_G, \varphi_k) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Функционал  $f_G$  назовем *локальным элементом* обобщенной функции  $f$  на  $G$  (сужение  $f$  на  $G$ ).

Таким образом, всякая обобщенная функция индуцирует в каждой области свой локальный элемент. Справедливо и обратное: из всякой совокупности согласованных локальных элементов можно «склеить» единую обобщенную функцию. Точнее, справедлива следующая

**ТЕОРЕМА «О КУСОЧНОМ СКЛЕИВАНИИ».** *Пусть семейство областей  $\{G_\alpha\}$  покрывает  $\mathbb{R}^n$  и для каждого  $\alpha$  задан линейный непрерывный функционал  $f_\alpha$  на  $\mathcal{D}(G_\alpha)$ , причем если  $G_\alpha \cap G_\beta \neq \emptyset$ , то  $f_\alpha = f_\beta$ ,  $x \in G_\alpha \cap G_\beta$ . Тогда существует единственная обобщенная функция  $f \in \mathcal{D}'$ , имеющая обобщенные функции  $f_\alpha$  своими локальными элементами на  $G_\alpha$  при всех  $\alpha$ .*

**5. Регулярные обобщенные функции.** Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$  функцией  $f(x)$  (см. § 1.1, п. 1)

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3)$$

Из линейности интеграла следует линейность этого функционала:

$$\begin{aligned} (f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= \int f(x)[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)] dx = \\ &= \lambda \int f(x)\varphi(x) dx + \mu \int f(x)\psi(x) dx = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi), \end{aligned}$$

а из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла следует его непрерывность на  $\mathcal{D}$ :

$$(f, \varphi_k) = \int_{U_R} f(x)\varphi_k(x) dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

если  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, функционал (3) определяет обобщенную функцию из  $\mathcal{D}'$ .

Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в  $\mathbb{R}^n$  функциями по формуле (3), называются *регулярными обобщенными функциями*. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными обобщенными функциями*.

Далее нам понадобится следующая

**ЛЕММА** (Дюбуа-Реймон). Для того чтобы локально интегрируемая в  $G$  функция  $f(x)$  обращалась в нуль в области  $G$  в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы  $f(x) = 0$  в  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточность условия очевидна. Необходимость условия следует из основной леммы вариационного исчисления (см. [5]).

Всякая локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^n$  определяет по формуле (3) регулярную обобщенную функцию. Из леммы Дюбуа-Реймона следует, что всякая регулярная обобщенная функция определяется единственной локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$  функцией. Следовательно, между локально интегрируемыми в  $\mathbb{R}^n$  функциями и регулярными обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому мы будем отождествлять локально интегрируемую функцию  $f(x)$  и порождаемую ею по формуле (3) обобщенную функцию — функционал  $(f, \varphi)$ .

Из леммы Дюбуа-Реймона вытекает также, что для непрерывной функции  $f(x)$  носитель в смысле определения из § 1.1, п. 2 совпадает с носителем порождаемой ею регулярной обобщенной функции (3) в смысле определения из п. 4.

Наконец, отметим, что если последовательность  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , локально интегрируемых функций в  $\mathbb{R}^n$  сходится равномерно к функции  $f(x)$  на каждом компакте, то она сходится к  $f(x)$  и в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Действительно, для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  имеем

$$(f_k, \varphi) = \int f_k(x)\varphi(x) dx \rightarrow \int f(x)\varphi(x) dx = (f, \varphi), \quad k \rightarrow \infty.$$

Будем говорить, что обобщенная функция  $f$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^p(G)$ ,  $f \in \mathcal{C}^p(G)$ , если в области  $G$  она совпадает с функцией  $f_G$  класса  $\mathcal{C}^p(G)$  (см. § 1.1, п. 2), т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(f, \varphi) = \int f_G(x)\varphi(x) dx.$$

Если к тому же  $f_G \in \mathcal{C}^p(\overline{G})$ , то будем говорить, что  $f$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^p(\overline{G})$  (см. § 1.1, п. 2).

**6. Сингулярные обобщенные функции.** В соответствии с определением, данным в предыдущем пункте, сингулярную функцию нельзя отождествить ни с какой локально интегрируемой функцией. Простейшим примером сингулярной обобщенной функции является  $\delta$ -функция Дирака (см. п. 1)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно,  $\delta \in \mathcal{D}'$ ,  $\delta(x) = 0$ ,  $x \neq 0$ , так что  $\text{spt } \delta = \{0\}$ .

Докажем, что  $\delta$  — сингулярная обобщенная функция. Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция  $f(x)$  такая, что для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int f(x)\varphi(x) dx = \varphi(0). \tag{4}$$

Так как  $x_1\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , если  $\varphi \in \mathcal{D}$ , то из (4) вытекает

$$\int f(x)x_1\varphi(x) dx = [x_1\varphi(x)]|_{x=0} = 0 = (x_1f, \varphi)$$

при всех  $\varphi \in \mathcal{D}$ ; здесь  $x_1$  — первая координата  $x$ . Таким образом, локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция  $x_1f(x)$  равна нулю в смысле

обобщенных функций. По лемме Дюбуа-Реймона  $x_1 f(x) = 0$ , и, стало быть,  $f(x) = 0$ . Но это противоречит равенству (4). Полученное противоречие доказывает сингулярность  $\delta$ -функции.

Пусть  $\omega_\varepsilon(x)$  — «шапочка» (см. п. 2). Докажем, что

$$\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (5)$$

Действительно, по определению сходимости в  $\mathcal{D}'$  соотношение (5) эквивалентно равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

По непрерывности функции  $\varphi(x)$  для любого  $\eta > 0$  существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что  $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ , коль скоро  $|x| < \varepsilon_0$ . Отсюда, пользуясь свойствами «шапочки»  $\omega_\varepsilon(x)$ , при всех  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  получаем

$$\left| \int \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \int \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \int \omega_\varepsilon(x) dx = \eta,$$

что и утверждалось.

Естественным обобщением  $\delta$ -функции является простой слой на поверхности. Пусть  $S$  — кусочно гладкая поверхность и  $\mu(x)$  — непрерывная функция, определенная на  $S$ . Зададим обобщенную функцию  $\mu\delta_S$  правилом

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x) \varphi(x) dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно,  $\mu\delta_S \in \mathcal{D}'$ ;  $\mu\delta_S(x) = 0$ ,  $x \notin S$ , так что  $\text{spt } \mu\delta_S \subset S$ .

Обобщенная функция  $\mu\delta_S$  называется *простым слоем* на поверхности  $S$  с плотностью  $\mu$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Локально интегрируемые функции и  $\delta$ -функции описывают распределения (плотности) масс, зарядов, сил и т. д. (см. п. 1). Поэтому обобщенные функции называются также *распределениями* (Л. Шварц). Если, например, обобщенная функция  $f$  есть плотность масс или зарядов, то выражение  $(f, 1)$  есть полная масса или заряд соответственно (если  $f$  имеет смысл на функции, тождественно равной 1; эта функция не принадлежит  $\mathcal{D}$ ); в частности,  $(\delta, 1) = 1$  и  $(f, 1) = \int f(x) dx$ , если  $f$  — (абсолютно) интегрируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ .

**7. Формулы Сохоцкого.** Введем линейный функционал  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ , действующий по формуле

$$\begin{aligned} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) &= \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1). \end{aligned}$$

Докажем непрерывность этого функционала на  $\mathcal{D}$ . Пусть  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $\varphi_k(x) = 0$ ,  $|x| > R$  и  $\partial^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi_k \right) \right| &= \left| \text{Vp} \int \frac{\varphi_k(x)}{x} dx \right| = \left| \text{Vp} \int_{-R}^R \frac{\varphi_k(0) + x\varphi'_k(\xi)}{x} dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{-R}^R |\varphi'_k(\xi)| dx \leqslant 2R \max_{|x| \leqslant R} |\varphi'_k(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathcal{P} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$ .

Обобщенная функция  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$  совпадает (в смысле п. 5) с функцией  $1/x$  при  $x \neq 0$ . Она называется *конечной частью* или *главным значением интеграла от  $1/x$* .

Установим теперь равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = -i\pi\varphi(0) + \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (6)$$

Действительно, если  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| > R$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ &= -2i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arctg \frac{R}{\varepsilon} + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \\ &= -i\pi\varphi(0) + \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Соотношение (6) означает, что существует предел последовательности  $1/(x + i\varepsilon)$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ , который мы обозначим  $1/(x + i0)$ ,

и этот предел равен  $-i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$ . Итак,

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \quad (7)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \quad (7')$$

Формулы (7) и (7') называются *формулами Сохоцкого* (1873 г.). Они широко используются, например, в квантовой физике.

**8. Линейная замена переменных в обобщенных функциях.** Пусть  $f(x)$  — локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция и  $x = Ay + b$ ,  $\det A \neq 0$ , — неособенное линейное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$  на себя. Тогда для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  получим

$$\begin{aligned} (f(Ay + b), \varphi(y)) &= \int f(Ay + b)\varphi(y) dy = \\ &= \frac{1}{|\det A|} \int f(x) \varphi[A^{-1}(x - b)] dx = \frac{1}{|\det A|} (f(x), \varphi[A^{-1}(x - b)]). \end{aligned}$$

Это равенство мы и примем за определение обобщенной функции  $f(Ay + b)$  для любой  $f(x) \in \mathcal{D}'$ :

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left( f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|} \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (8)$$

Так как операция  $\varphi(x) \rightarrow \varphi[A^{-1}(x - b)]$  линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$  (см. п. 2), то функционал  $f(Ay + b)$ , определяемый правой частью равенства (8), принадлежит  $\mathcal{D}'$ .

В частности, если  $A$  — вращение, т. е.  $A' = A^{-1}$ , и  $b = 0$ , то

$$(f(Ay), \varphi) = (f, \varphi(A'x));$$

если  $A$  — подобие (с отражением при  $c < 0$ ),  $A = cI$ ,  $c \neq 0$  и  $b = 0$ , то

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{|c^n|} \left( f, \varphi \left( \frac{c}{x} \right) \right);$$

а если  $A = I$ , то

$$(f(y + b), \varphi) = (f, \varphi(x - b)).$$

Обобщенная функция  $f(x + b)$  называется *сдвигом обобщенной функции*  $f(x)$  на вектор  $b$ . Например,  $\delta(x - x_0)$  — сдвиг  $\delta(x)$  на вектор  $-x_0$  — действует по формуле

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0).$$

Изложенное позволяет определить сферически-симметричные, центрально-симметричные, однородные, периодические, лоренц-инвариантные и т. п. обобщенные функции.

Например, обобщенная функция  $f$  называется *инвариантной относительно группы Лоренца* (лоренц-инвариантной), если  $f(Ax) = f(x)$  для всех преобразований  $A$  из группы Лоренца (т. е. для всех линейных преобразований  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ , сохраняющих квадратичную форму  $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ ).

Непосредственно из определения (8) вытекает, что операция линейной замены переменных линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}'$  в  $\mathcal{D}'$ :

$$(\lambda f + \mu g)(Ay + b) = \lambda f(Ay + b) + \mu g(Ay + b), \quad f, g \in \mathcal{D}';$$

$$f_k(Ay + b) \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{если } f_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad k \rightarrow \infty.$$

**9. Умножение обобщенных функций.** Пусть  $f(x)$  — локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция и  $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Тогда для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  справедливо равенство

$$(af, \varphi) = \int a(x)f(x)\varphi(x) dx = (f, a\varphi).$$

Это равенство мы и примем за определение произведения  $af$  обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'$  и бесконечно дифференцируемой функции  $a$ :

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9)$$

Так как операция умножения на функцию  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$  (см. п. 2), то функционал  $af$ , определяемый правой частью равенства (9), принадлежит  $\mathcal{D}'$ .

Из определения (9) вытекает, что операция умножения на функцию  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}'$  в  $\mathcal{D}'$ :

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), \quad f, g \in \mathcal{D}';$$

$$af_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{если } f_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad k \rightarrow \infty.$$

Если  $f \in \mathcal{D}'$ , то справедливо равенство

$$f = \eta f, \quad (10)$$

где  $\eta$  — любая функция класса  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , равная 1 в окрестности носителя  $f$ .

Действительно, для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  носители  $f$  и  $(1 - \eta)\varphi$  не имеют общих точек, а потому в силу (2)

$$(f - \eta f, \varphi) = (f, (1 - \eta)\varphi) = 0.$$

### ПРИМЕРЫ.

а)  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ , так как при всех  $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta, \varphi).$$

б)  $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$ , так как при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \text{Vp} \int \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int \varphi(x) dx = (1, \varphi).$$

Возникает вопрос: нельзя ли определить произведение любых обобщенных функций так, чтобы это произведение опять было обобщенной функцией? Отметим, что произведение двух локально интегрируемых функций не обязательно должно быть локально интегрируемым (например,  $(|x|^{-1/2})^2 = |x|^{-1}$  в  $\mathbb{R}^1$ ). Подобное имеет место и для обобщенных функций: Л. Шварц показал, что на множестве всех обобщенных функций нельзя определить произведение, которое было бы ассоциативно и коммутативно. Действительно, если бы оно существовало, то, пользуясь примерами а) и б), мы имели бы противоречивую цепочку равенств:

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x) \left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Чтобы определить однозначно произведение обобщенных функций  $f$  и  $g$ , достаточно, чтобы они обладали, грубо говоря, следующими свойствами: насколько  $f$  «нерегулярна» в окрестности (произвольной) точки, настолько  $g$  должна быть «регулярной» в окрестности этой точки, и наоборот. Например, естественно считать  $\delta(x-a)\delta(x-b) = 0$ , если  $a \neq b$ , и  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ , если функция  $a(x)$  непрерывна в окрестности точки 0.

## 10. Упражнения.

а) Доказать, что функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-x^2/(4\varepsilon)}, \quad \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\varepsilon}$$

стремятся к  $\delta(x)$  в  $\mathcal{D}'$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

б) Доказать предельные соотношения в  $\mathcal{D}'$  при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ixt}}{x-i0} &\rightarrow 2\pi i\delta(x), & \frac{e^{-ixt}}{x-i0} &\rightarrow 0, \\ \frac{e^{ixt}}{x+i0} &\rightarrow 0, & \frac{e^{-ixt}}{x+i0} &\rightarrow -2\pi i\delta(x), \\ t^m e^{ixt} &\rightarrow 0, \quad m \geq 0, & t\theta(x)e^{ixt} &\rightarrow i\delta(x). \end{aligned}$$

в) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)$$

сходится в  $\mathcal{D}'$  при любых  $a_k$ .

г) Доказать, что  $\delta_{S_R}(x) \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $R \rightarrow \infty$ .

д) Доказать, что  $\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x} \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , где

$$\left( \mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi \right) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x) dx.$$

е) Пусть  $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\int \alpha(x) dx = 1$ . Доказать, что

$$\varepsilon^{-n} \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

ж) Доказать равенство

$$(af)(x+h) = a(x+h)f(x+h), \quad a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

## § 2.2. Дифференцирование обобщенных функций

Обобщенные функции обладают рядом удобных свойств. Например, при надлежащем обобщении понятия производной любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой, сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз.

**1. Производные обобщенной функции.** Пусть  $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^n)$  (см. § 1.1, п. 2). Тогда при всех  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq p$ , и  $\varphi \in \mathcal{D}$  справедлива формула интегрирования по частям

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha f, \varphi) &= \int \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

Это равенство мы и примем за определение (обобщенной) *производной*  $\partial^\alpha f$  обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'$ :

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

Проверим, что  $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'$ . Действительно, поскольку  $f \in \mathcal{D}'$ , то функционал  $\partial^\alpha f$ , определяемый правой частью равенства (1), линейный:

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha f, \lambda\varphi + \mu\psi) &= (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha (\lambda\varphi + \mu\psi)) = (-1)^{|\alpha|} (f, \lambda\partial^\alpha \varphi + \mu\partial^\alpha \psi) = \\ &= \lambda(-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) + \mu(-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \psi) = \lambda(\partial^\alpha f, \varphi) + \mu(\partial^\alpha f, \psi), \end{aligned}$$

и непрерывный:

$$(\partial^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

если  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , поскольку в этом случае и  $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}$ ,  $k \rightarrow \infty$  (см. § 2.1, п. 2).

В частности, при  $f = \delta$  равенство (1) принимает вид

$$(\partial^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Обозначим через  $\{\partial^\alpha f(x)\}$  классическую производную (там, где она существует). Из определения обобщенной производной вытекает, что если обобщенная функция  $f$  принадлежит  $\mathcal{C}^p(G)$ , то

$$\partial^\alpha f = \{\partial^\alpha f(x)\}, \quad x \in G, \quad |\alpha| \leq p$$

(в смысле определений из § 2.1, пп. 4, 5).

**2. Свойства обобщенных производных.** Операции дифференцирования обобщенных функций обладают следующими свойствами.

а) Операция дифференцирования  $\partial^\alpha$  линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}'$  в  $\mathcal{D}'$ :

$$\partial^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial^\alpha f + \mu \partial^\alpha g, \quad f, g \in \mathcal{D}';$$

$$\partial^\alpha f_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{если } f_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad k \rightarrow \infty.$$

Докажем непрерывность. По определению производной при всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  имеем

$$(\partial^\alpha f_k, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f_k, \partial^\alpha \varphi) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что и означает, что  $\partial^\alpha f_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$  (см. § 2.1, п. 3). Линейность доказывается аналогично.

В частности если  $\omega_\varepsilon(x)$  — «шапочка» (см. § 2.1, п. 2), то

$$\partial^\alpha \omega_\varepsilon(x) \rightarrow \partial^\alpha \delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

Соотношение (2) вытекает из соотношения (5) из § 2.1.

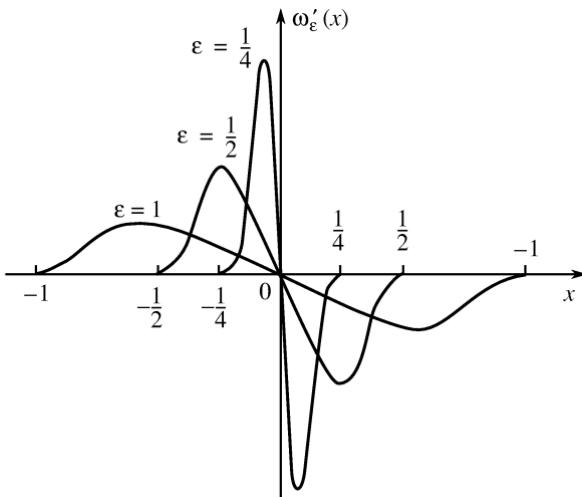


Рис. 16

Например,  $\omega'_\varepsilon(x) \rightarrow \delta'(x)$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Последовательность  $\omega'_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ , изображена на рис. 16.

б) Каждая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.

Действительно, если  $f \in \mathcal{D}'$ , то  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'$ ; в свою очередь  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \in \mathcal{D}'$  и т. д.

в) Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Например,

$$\partial_1(\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1 f) = \partial^{(1,1)} f, \quad f \in \mathcal{D}'. \quad (3)$$

В самом деле, для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  получаем

$$(\partial^{(1,1)} f, \varphi) = (f, \partial_1 \partial_2 \varphi) = (\partial_1(\partial_2 f), \varphi) = (\partial_2(\partial_1 f), \varphi),$$

откуда и вытекают равенства (3) (см. § 2.1). И вообще,

$$\partial^{\alpha+\beta} f = \partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^\beta(\partial^\alpha f). \quad (4)$$

г) Если  $f \in \mathcal{D}'$  и  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , то справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения  $af$  (см. § 2.1, п. 9). Например,

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a \frac{\partial f}{\partial x_1}. \quad (5)$$

Действительно, если  $\varphi$  — любая основная функция, то

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi \right) &= - \left( af, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left( f, a \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = - \left( f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1} \varphi \right) = \\ &= - \left( f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} \right) + \left( f, \frac{\partial a}{\partial x_1} \varphi \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi \right) + \left( \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \\ &= \left( a \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right) + \left( \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \left( a \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi \right), \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (5) (см. § 2.1).

д) Если обобщенная функция  $f = 0$ ,  $x \in G$ , то  $\partial^\alpha f = 0$ ,  $x \in G$ , другими словами,  $\text{spt } \partial^\alpha f \subset \text{spt } f$ .

В самом деле, если  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ , то и  $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(G)$ , а потому

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),$$

что и означает  $\partial^\alpha f = 0$ ,  $x \in G$  (см. § 2.1, п. 4).

е) Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x),$$

составленный из локально интегрируемых функций  $u_k(x)$ , сходится равномерно на каждом компакте, то его можно почленно дифференцировать любое число раз (как обобщенную функцию), и полученные ряды будут сходиться в  $\mathcal{D}'$ .

В самом деле, поскольку при любом  $R > 0$

$$S_p(x) = \sum_{k=1}^p u_k(x) \rightrightarrows S(x), \quad |x| < R, \quad p \rightarrow \infty,$$

то  $S_p \rightarrow S$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $p \rightarrow \infty$  (см. § 2.1, п. 6). Но тогда в силу а)

$$\partial^\alpha S_p = \sum_{k=1}^p \partial^\alpha u_k \rightarrow \partial^\alpha S \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad p \rightarrow \infty,$$

что и утверждалось.

Отсюда, в частности, вытекает: если

$$|a_k| \leq A|k|^m + B, \tag{6}$$

то тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \tag{7}$$

сходится в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ . Действительно, в силу (6) ряд

$$\frac{a_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

сходится равномерно в  $\mathbb{R}^1$ ; следовательно, ряд, представляющий его производную порядка  $m+2$ , сходится в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  и совпадает с рядом (7).

**3. Первообразная обобщенной функции.** В этом пункте считаем  $n = 1$ . Всякая непрерывная функция  $f(x)$  имеет (единственную с точностью до аддитивной постоянной) первообразную

$$f^{(-1)}(x) = \int^x f(\xi) d\xi + C, \quad f^{(-1)'}(x) = f(x).$$

Равенство  $f^{(-1)'} = f$  мы и примем за исходное для определения первообразной произвольной обобщенной функции  $f$ .

Обобщенная функция  $f^{(-1)}$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  называется *первообразной обобщенной функции*  $f$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , если  $f^{(-1)'} = f$ , т. е.

$$(f^{(-1)}, \varphi') = -(f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1). \quad (8)$$

Равенство (8) показывает, что функционал  $f^{(-1)}$  задан не на всех основных функциях, а только на их первых производных. Наша задача — продолжить этот функционал на все  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  (в смысле определения § 1.1, п. 8), причем так, чтобы продолженный функционал  $f^{(-1)}$  был линейным и непрерывным на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , и выяснить степень произвола при таком продолжении.

Предположим сперва, что  $f^{(-1)}$  — первообразная  $f$  — существует. Построим ее. Пусть  $\varphi$  — произвольная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ . Представим ее в виде

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \omega_\varepsilon(x) \int \varphi(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где  $\omega_\varepsilon(x)$  — «шапочка» (см. § 2.1, п. 2) и

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \left[ \varphi(\eta) - \omega_\varepsilon(\eta) \int \varphi(\xi) d\xi \right] d\eta. \quad (10)$$

Докажем, что  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ . Действительно,  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$  и  $\psi(x) = 0$ ,  $x < -\max(R, \varepsilon)$ , если  $\varphi(x) = 0$ ,  $|x| > R$ . Далее, при  $x > \max(R, \varepsilon)$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

в силу нормировки «шапочки». Таким образом,  $\psi(x) = 0$ ,  $|x| > \max(R, \varepsilon)$ . Следовательно,  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ .

Применим функционал  $f^{(-1)}$  к равенству (9), получим

$$(f^{(-1)}, \varphi) = (f^{(-1)}, \psi') + (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon) \int \varphi(\xi) d\xi,$$

т. е., учитывая (8),

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + C \int \varphi(\xi) d\xi, \quad (11)$$

где обозначено  $C = (f^{(-1)}, \omega_\varepsilon)$ . Итак, если  $f^{(-1)}$  — первообразная  $f$  — существует, то она выражается равенством (11), где  $\psi$  определена формулой (10).

Теперь докажем обратное: при любой постоянной  $C$  функционал  $f^{(-1)}$ , определенный равенствами (11) и (10), дает первообразную  $f$ .

Действительно, функционал  $f^{(-1)}$ , очевидно, линеен. Докажем его непрерывность на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ . Пусть  $\varphi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $\varphi_k(x) = 0$ ,  $|x| > R$ , и  $\varphi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . А тогда по доказанному

$$\psi_k(x) = \int_{-\infty}^x \left[ \varphi_k(\eta) - \omega_\varepsilon(\eta) \int \varphi_k(\xi) d\xi \right] d\eta = 0, \quad |x| > \max(R, \varepsilon),$$

и, очевидно,  $\psi_k^{(\alpha)}(x) \rightrightarrows 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $\psi_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому в силу непрерывности  $f$  на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  имеем

$$(f^{(-1)}, \varphi_k) = -(f, \psi_k) + C \int \varphi_k(\xi) d\xi \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что и утверждалось. Следовательно,  $f^{(-1)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ . Осталось проверить, что  $f^{(-1)}$  является первообразной  $f$ . В самом деле, заменив в (10)  $\varphi$  на  $\varphi'$  и учитывая, что  $\int \varphi'(\xi) d\xi = 0$ , получим  $\psi = \varphi$ , и тогда из (11) вытекает равенство (8), что и требовалось.

Таким образом, доказана следующая

**ТЕОРЕМА.** *Любая обобщенная функция  $f$  имеет единственную (с точностью до аддитивной постоянной) первообразную, и всякая ее первообразная  $f^{(-1)}$  выражается формулой*

$$(f^{(-1)}, \varphi) = -(f, \psi) + (C, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \quad (12)$$

где  $\psi$  определяется равенством (10) и  $C$  — произвольная постоянная.

Доказанная теорема утверждает, что решение дифференциального уравнения

$$u' = f, \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1), \quad (13)$$

существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  и его общее решение имеет вид  $u = f^{(-1)} + C$ , где  $f^{(-1)}$  — некоторая первообразная и  $C$  — произвольная постоянная. В частности, если  $f$  — непрерывная функция, то всякое решение в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнения (13) классическое. Например, общее решение уравнения  $u' = 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  есть произвольная постоянная.

Аналогично определяется и первообразная  $f^{(-n)}$  порядка  $n$  обобщенной функции  $f$ :  $f^{(-n)(n)} = f$ . Применяя доказанную теорему к рекуррентной цепочке для первообразных  $f^{(-k)}$  порядка  $k$ :

$$f^{(-1)'} = f, \quad f^{(-2)'} = f^{(-1)}, \quad \dots, \quad f^{(-n)'} = f^{(-n+1)},$$

заключаем, что первообразная  $f^{(-n)}$  существует и единственна с точностью до произвольного аддитивного полинома степени  $n - 1$ .

#### 4. Примеры, $n = 1$ .

а) Вычислим плотность зарядов, соответствующих диполю с электрическим моментом +1 в точке  $x = 0$  на прямой.

Этому диполю приближенно соответствует плотность зарядов  $\frac{1}{\varepsilon} \delta(x - \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Переходя здесь к пределу в  $\mathcal{D}'$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ :

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \delta(x - \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x), \varphi \right) = \frac{1}{\varepsilon} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \rightarrow \varphi'(0) = (\delta, \varphi') = -(\delta', \varphi),$$

заключаем, что искомая плотность равна  $-\delta'(x)$ .

Проверим, что полный заряд диполя равен 0:

$$(-\delta', 1) = (d, 1') = (d, 0) = 0,$$

а его момент равен 1:

$$(-\delta', x) = (\delta, x') = (\delta, 1) = 1.$$

б) Пусть функция  $f(x)$  такова, что  $f \in \mathcal{C}^1(x \leqslant x_0)$  и  $f \in \mathcal{C}^1(x \geqslant x_0)$  (рис. 17). Покажем, что (рис. 18)

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \quad (14)$$

где  $[f]_{x_0}$  — скачок  $f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Действительно, если  $\varphi \in \mathcal{D}$ , то

$$\begin{aligned} (f', \varphi) = -(f, \varphi') &= - \int f(x) \varphi' dx = [f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)] \varphi(x_0) + \\ &+ \int \{f'(x)\} \varphi(x) dx = ([f]_{x_0} \delta(x - x_0) + \{f'(x)\}, \varphi(x)). \end{aligned}$$

В частности, если  $\theta$  — функция Хевисайда:  $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$  то

$$\theta'(x) = \delta(x). \quad (15)$$

В теории электрических цепей функция Хевисайда называется «единичной ступенькой», а  $\delta$ -функция — «единичным импульсом».

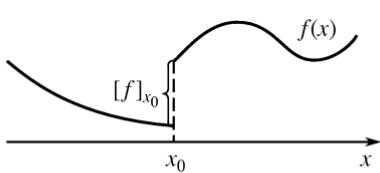


Рис. 17

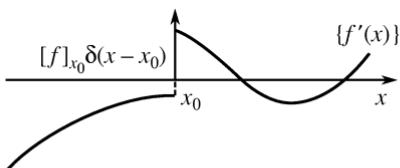


Рис. 18

Формула (15) утверждает, что «единичный импульс» есть производная от «единичной ступеньки».

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Первообразная  $\delta$ -функции есть  $\theta(x) + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная (см. п. 3). Таким образом,  $\theta(x)$  восстанавливается как первообразная *своей обобщенной производной*  $\delta(x)$ ; с другой стороны,  $\theta(x)$  не восстанавливается как первообразная *своей классической производной*  $\{\theta'(x)\} = 0$ ,  $x \neq 0$ .

в) Если же функция  $f(x)$  имеет изолированные разрывы первого рода в точках  $\{x_k\}$  и  $\{f'(x)\}$  — кусочно непрерывная функция на  $\mathbb{R}^1$ , то формула (14) естественно обобщается:

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k). \quad (16)$$

Формулу (16) удобно получать локально в окрестности каждой точки  $x_k$  с использованием формулы (14) и теоремы «о кусочном скле-

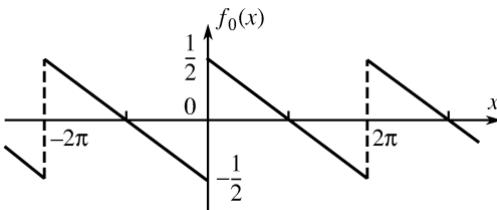


Рис. 19

ивании» (см. замечание из § 2.1, п. 4). В частности, если

$$f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad x \in [0, 2\pi),$$

—  $2\pi$ -периодическая функция (рис. 19), то

$$f'_0 = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \quad (17)$$

Мы видим, таким образом, что обобщенные и классические производные, вообще говоря, не совпадают.

г) Докажем формулу

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \quad (18)$$

Для этого разложим  $2\pi$ -периодическую функцию

$$\int_0^x f_0(\xi) d\xi = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

(функция  $f_0$  определена выше), в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\int_0^x f_0(\xi) d\xi = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikx}.$$

Согласно п. 2, е) этот ряд можно почленно дифференцировать в  $\mathcal{D}'$  любое число раз. Дифференцируя его дважды и учитывая (17), получим

$$f'_0 = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} e^{ikx},$$

что и требовалось. Отметим, что левая часть равенства (18) есть ряд Фурье  $2\pi$ -периодической обобщенной функции  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$ .

д) Покажем, что общее решение уравнения

$$x^m u = 0 \quad (19)$$

в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  дается формулой

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \quad (20)$$

где  $c_k$  — произвольные постоянные.

Поскольку при всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  и  $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = (-1)^k (\delta, (x^m \varphi)^{(k)}) =$$

$$= (-1)^k (x^m \varphi(x))^{(k)}|_{x=0} = 0,$$

то

$$x^m \delta^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

и, следовательно, обобщенная функция (20) удовлетворяет уравнению (19).

Докажем, что всякое решение уравнения (19) в  $\mathcal{D}'$  дается формулой (20). Пусть  $\eta(x)$  — основная функция, равная 1 в окрестности точки  $x = 0$  (по лемме из § 2.1, п. 2 такая функция существует). Тогда любая функция  $\varphi \in \mathcal{D}$  имеет представление

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x), \quad (21)$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[ \varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right].$$

Функция  $\psi$  принадлежит  $\mathcal{D}$ , так как она финитна и имеет производные всех порядков; существование производных в точке  $x = 0$  следует из формулы Тейлора

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^N \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{N+1}),$$

справедливой в некоторой окрестности (где  $\eta = 1$ ) точки  $x = 0$  при всех  $N$ .

Следовательно, если  $u \in \mathcal{D}'$  — решение уравнения (19), то в силу (21)

$$\begin{aligned} (u, \varphi) &= \left( u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + (u, x^m \psi(x)) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (u, \eta(x) x^k) + (x^m u, \psi) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\delta^{(k)}, \varphi), \quad c_k = \frac{(-1)^k}{k!} (u, \eta(x) x^k), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Справедливо более общее утверждение: всякая обобщенная функция, носитель которой есть точка, представляется в виде конечной линейной комбинации  $\delta$ -функции и ее производных в этой точке (см. § 2.4, п. 4).

Отметим, что в классе локально интегрируемых функций уравнение (19) имеет единственное решение  $u = 0$ .

е) Проверим, что функция  $\mathcal{E}(t) = \theta(t)Z(t)$ , где  $Z(t)$  — решение однородного дифференциального уравнения

$$LZ \equiv Z^{(m)} + a_1(t)Z^{(m-1)} + \dots + a_m(t)Z = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(m-2)}(0) = 0, \quad Z^{(m-1)}(0) = 1,$$

есть решение уравнения  $L\mathcal{E} = \delta(t)$ .

Действительно, пользуясь формулой (14) и начальными условиями, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) &= \theta(t)Z'(t), \quad \dots, \quad \mathcal{E}^{(m-1)}(t) = \theta(t)Z^{(m-1)}(t), \\ \mathcal{E}^{(m)}(t) &= \delta(t) + \theta(t)Z^{(m)}(t), \end{aligned}$$

откуда

$$L\mathcal{E} = \theta(t)LZ + \delta(t) = \delta(t),$$

что и утверждалось.

## 5. Примеры, $n \geq 2$ .

а) Многомерным обобщением обобщенной функции  $-\delta'(x)$  является двойной слой на поверхности.

Пусть  $S$  — кусочно гладкая двухсторонняя поверхность,  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $S$  (рис. 20) и  $\nu(x)$  — непрерывная функция, заданная на  $S$ .

Зададим обобщенную функцию  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S)$  правилом

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S), \varphi \right) = \int_S \nu(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно,

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S) \in \mathcal{D}', \quad \text{spt} \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S) \right] \subset S.$$

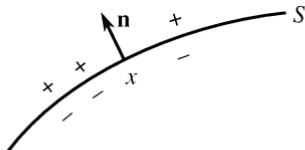


Рис. 20

Обобщенная функция  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S)$  называется *двойным слоем* на поверхности  $S$  с плотностью  $\nu(x)$ , ориентированным по нормали  $\mathbf{n}$ . Эта обобщенная функция описывает плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности  $S$  с поверхностной плотностью момента  $\nu(x)$  и ориентированных вдоль нормали  $\mathbf{n}$  на  $S$  (ср. п. 4, а).

б) Пусть область  $G$  имеет кусочно гладкую границу  $S$  и функция  $f$  принадлежит  $\mathcal{C}^1(\overline{G}) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G}_1)$ , где  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_x$  — внешняя нормаль к  $S$  и  $[f]_S$  — скачок функции  $f$  при переходе извне через поверхность  $S$ :

$$\lim_{x' \rightarrow x, x \in G_1} f(x') - \lim_{x' \rightarrow x, x' \in G} f(x') = [f]_S(x), \quad x \in S.$$

Для вывода формулы (22) используем формулу Грина и определение простого слоя (см. § 2.1, п. 6):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) &= - \left( f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \int f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right\} \varphi(x) dx + \int_S [f]_S(x) \cos(\mathbf{n}x_i) \varphi(x) dS = \\ &= \left( \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(\mathbf{n}x_i) \delta_S, \varphi \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

в) Пусть в условиях примера б) функция  $f$  принадлежит  $\mathcal{C}^2(\overline{G}) \cap \mathcal{C}^2(\overline{G}_1)$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_S \cos(\mathbf{n}x_i) \delta_S) + \left[ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(\mathbf{n}x_j) \delta_S. \quad (23)$$

Для вывода формулы (23) продифференцируем равенство (22) по  $x_j$  и при дифференцииции функции  $\left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right\}$  воспользуемся опять формулой (22):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \left[ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(\mathbf{n}x_j) \delta_S.$$

Полагая в (23)  $i = j$  и суммируя по  $i = 1, 2, \dots, n$ , получаем

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_S \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S) + \sum_{i=1}^n \left[ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}_S \right] \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S. \quad (24)$$

Принимая во внимание равенства

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_S \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ([f]_S \delta_S), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}_S \right] \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S = \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right]_S \delta_S, \quad (26)$$

перепишем формулу (24) в виде

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ([f]_S \delta_S). \quad (27)$$

Докажем формулу (25). При всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} ([f]_S \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S), \varphi \right) &= - \sum_{i=1}^n \left( [f]_S \cos(\mathbf{n}x_i)\delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_S [f]_S \cos(\mathbf{n}x_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dS = - \int_S [f]_S \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cos(\mathbf{n}x_i) dS = \\ &= - \int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ([f]_S \delta_S), \varphi \right). \end{aligned}$$

Формула (26) устанавливается аналогично.

Полагая в формуле (27)  $f = 0$  при  $x \in G_1$ , получим

$$\Delta f = \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \delta_S - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (f \delta_S). \quad (28)$$

Это есть вторая формула Грина, записанная в терминах обобщенных функций. Применяя (28) к основной функции  $\varphi$ , получим эту формулу в обычной записи:

$$\int_G (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f) dx = \int_S \left( f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (29)$$

Если  $G$  — ограниченная область, то формула (29) справедлива для всех  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ .

г) Пусть  $n = 2$ . Вычислим  $\Delta \ln |x|$ .

Функция  $\ln |x|$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^2$ . Если  $x \neq 0$ , то  $\ln |x| \in C^\infty$ , а поэтому  $\partial^\alpha \ln |x| = \{\partial^\alpha \ln |x|\}$  (см. п. 1).

Следовательно, переходя к полярным координатам, получаем (см. § 1.3, п. 2, 6))

$$\Delta \ln |x| = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right) = 0, \quad x \neq 0. \quad (30)$$

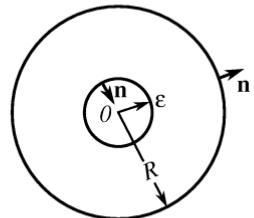


Рис. 21

Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\text{spt } \varphi \subset U_R$ . В этом случае получим следующее:

$$(\Delta \ln |x|, \varphi) = \int_{U_R} \ln |x| \Delta \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < R} \ln |x| \Delta \varphi(x) dx.$$

Применяя формулу (29) при  $f = \ln |x|$  и  $G = \{\varepsilon < |x| < R\}$  (рис. 21) и учитывая (30), получим

$$\begin{aligned} (\Delta \ln |x|, \varphi) &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon < |x| < R} \Delta \ln |x| dx + \left( \int_{S_\varepsilon} + \int_{S_R} \right) \left( \ln |x| \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial \ln |x|}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left( -\ln |x| \frac{\partial \varphi}{\partial |x|} + \varphi \frac{1}{|x|} \right) dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} \varphi dS = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dS + 2\pi\varphi(0) \right) = 2\pi\varphi(0) = (2\pi\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta \ln |x| = 2\pi\delta(x), \quad n = 2. \quad (31)$$

Аналогично, при  $n \geq 3$  получим

$$\Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} = -(n-2)\sigma_n \delta(x), \quad (32)$$

где  $\sigma_n$  — площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\sigma_n = \int_{S^{n-1}} dS = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

$\Gamma$  — эйлеров интеграл (гамма-функция),

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

д) Проверим, что функции

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{\mathcal{E}}(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \quad (33)$$

при  $n = 3$  удовлетворяют уравнению

$$\Delta\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = \delta(x). \quad (34)$$

Действительно, так как функции  $\cos k|x|$  и  $|x|^{-1} \sin k|x|$  бесконечно дифференцируемы, то при дифференцировании функции  $|x|^{-1} e^{ik|x|}$  можно пользоваться формулой Лейбница (см. п. 2, г)). Учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x|} = -\frac{x_j}{|x|^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} e^{ik|x|} = \frac{ikx_j}{|x|} e^{ik|x|}, \quad \Delta e^{ik|x|} = \left( \frac{2ik}{|x|} - k^2 \right) e^{ik|x|}$$

и пользуясь формулой (32) при  $n = 3$ , получаем

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{1}{|x|} e^{ik|x|} &= \\ &= e^{ik|x|} \Delta \frac{1}{|x|} + 2 \left( \operatorname{grad} e^{ik|x|}, \operatorname{grad} \frac{1}{|x|} \right) + \frac{1}{|x|} \Delta e^{ik|x|} + \frac{k^2}{|x|} e^{ik|x|} = \\ &= -4\pi e^{ik|x|} \delta(x) + \left( -\frac{2ik}{|x|^2} + \frac{2ik}{|x|^2} - \frac{k^2}{|x|} + \frac{k^2}{|x|} \right) e^{ik|x|} = -4\pi \delta(x), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

е) Пусть

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\}.$$

Докажем, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x, t). \quad (35)$$

Функция  $\mathcal{E}(x, t)$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , поскольку  $\mathcal{E} = 0$ ,  $t < 0$ ;  $\mathcal{E} \geq 0$ ,  $t \geq 0$ , и при  $t > 0$

$$\int \mathcal{E}(x, t) dx = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\} dx = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_i^2} d\xi_i = 1. \quad (36)$$

Если  $t > 0$ , то  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^\infty$ , а поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \left( \frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t} \right) \mathcal{E}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2t} \mathcal{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_i^2} = \left( \frac{x_i^2}{4a^4t^2} - \frac{1}{2a^2t} \right) \mathcal{E}, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} &= \left( \frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t} \right) \mathcal{E} - \left( \frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t} \right) \mathcal{E} = 0.\end{aligned}\tag{37}$$

Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ . Учитывая равенство (37), получаем

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E}, \varphi \right) &= - \left( \mathcal{E}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) = \\ &= - \int_0^\infty \int \mathcal{E}(x, t) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int \mathcal{E}(x, t) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) dx + \int_\varepsilon^\infty \int \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} \right) \varphi dx dt \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx,\end{aligned}\tag{38}$$

так как в силу (36)

$$\left| \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx \right| \leq K \varepsilon \int \mathcal{E}(x, \varepsilon) dx = K \varepsilon.$$

Докажем теперь соотношение

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\} \rightarrow \delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad t \rightarrow +0.\tag{39}$$

Действительно, пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned}\left| \int \mathcal{E}(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| &\leq \frac{K}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\} |x| dx = \\ &= \frac{K \sigma_n}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{r^2}{4a^2 t} \right\} r^n dr =\end{aligned}$$

$$= \frac{2K\sigma_n \sqrt{ta}}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^n du = C\sqrt{t},$$

в силу (36) получаем при  $t \rightarrow +0$  соотношение (39):

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}(x, t), \varphi) &= \int \mathcal{E}(x, t) \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \int \mathcal{E}(x, t) dx + \int \mathcal{E}(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Теперь формула (35) следует из соотношений (38) и (39). Отметим, что предельное соотношение (39) справедливо и на ограниченных функциях, непрерывных в точке 0.

ж) Пусть  $x = x_1$  и

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Докажем, что

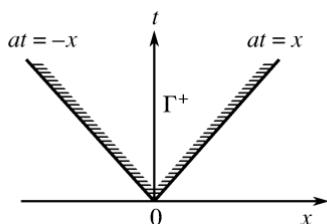
$$\square_a \mathcal{E}_1 = \delta(x, t). \quad (40)$$

Рис. 22

Функция  $\mathcal{E}_1$  локально интегрируема на  $\mathbb{R}^2$  и обращается в нуль вне замыкания конуса будущего  $\bar{\Gamma}^+$  (рис. 22).

Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\square_a \mathcal{E}_1, \varphi) &= (\mathcal{E}_1, \square_a \varphi) = \int \mathcal{E}_1(x, t) \square_a \varphi(x, t) dx dt = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x|/a}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \int_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt = \\ &= -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(x, |x|/a)}{\partial t} dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(x, |x|/a)}{\partial t} dx - \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(-x, |x|/a)}{\partial t} dx + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} \right] dt - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial t} - a \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} \right] dt = \\
 & = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\varphi(at, t)}{dt} dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\varphi(-at, t)}{dt} dt = \\
 & = \frac{1}{2} \varphi(0, 0) + \frac{1}{2} \varphi(0, 0) = (\delta, \varphi),
 \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (40).

з) Пусть  $\delta_{S_r}$  — простой слой на сфере  $|x| = r$  (см. § 2.1, п. 6). Докажем соотношение (формулу Пицетти)

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \delta_{S_r} - \delta \right) \rightarrow \frac{1}{2n} \Delta \delta \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad r \rightarrow 0. \quad (41)$$

Действительно, для всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  при  $r \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \delta_{S_r} - \frac{1}{r^2} \delta, \varphi \right) &= \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \int_{S_r} \varphi(x) ds - \frac{\varphi(0)}{r^2} = \\
 &= \frac{1}{\sigma_n r^2} \int_{S^{n-1}} [\varphi(rs) - \varphi(0)] ds = \\
 &= \frac{1}{\sigma_n r^2} \int_{S^{n-1}} \left[ r \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_k} s_k + \frac{r^2}{2} \sum_{k,i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_k \partial x_i} s_k s_i + O(r^3) \right] ds \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{1}{2n} \Delta \varphi(0) = \frac{1}{2n} (\Delta \delta, \varphi),
 \end{aligned}$$

так как

$$\int_{S^{n-1}} s_k ds = 0, \quad \int_{S^{n-1}} s_k s_i ds = \delta_{ki} \int_{S^{n-1}} s_k^2 ds = \frac{\sigma_n}{n} \delta_{ki},$$

поскольку

$$\int_{S^{n-1}} s_k^2 ds = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} (s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2) ds = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} ds = \frac{\sigma_n}{n};$$

величина  $\sigma_n$  определена в г).

## 6. Упражнения.

а) Доказать, что

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \mathcal{P} \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{x \pm i0} = \mp \delta'(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x^2},$$

где

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \text{Vp} \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

б) Показать, что стоящие справа обобщенные функции являются общими решениями в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  уравнений

$$\begin{aligned} xu' &= 1, & u &= c_1 + c_2\theta(x) + \ln|x|, \\ xu' &= \mathcal{P}\frac{1}{x}, & u &= c_1 + c_2\theta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}, \\ x^2u' &= \mathcal{P}\frac{1}{x}, & u &= c_1 + c_2\theta(x) + c_3\delta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}, \\ xu &= \text{sgn } x, & u &= c\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \\ (\sin x)u &= 0, & u &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(x - k\pi), \end{aligned}$$

где

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|}, \varphi \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx.$$

Обратим внимание на то, что классические решения дифференциальных уравнений первого порядка содержат лишь одну произвольную постоянную.

в) Доказать равенство

$$a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x), \quad a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1).$$

г) Доказать: если  $f \in \mathcal{D}'$  и  $f(x) = 0$ ,  $x < x_0$ , то существует единственная первообразная  $f^{(-1)}$ , обращающаяся в нуль при  $x < x_0$ .

д) Доказать равенство

$$(\partial^\alpha f)(x+h) = \partial^\alpha f(x+h), \quad f \in \mathcal{D}', \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

е) Доказать: если обобщенная функция инвариантна относительно всех сдвигов, то она постоянная.

ж) Доказать, что система обобщенных функций  $\partial^\alpha \delta(x)$ ,  $|\alpha| = m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , линейно независима.

з) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta^{(k)}(x - k)$$

сходится в  $\mathcal{D}'$  при любых  $a_k$ .

и) Доказать, что общее решение в  $\mathcal{D}'$  уравнения  $x^n u^{(m)} = 0$ ,  $n > m$ , есть

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \theta(x) x^{m-1-k} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} d_k x^k,$$

где  $c_k$  и  $d_k$  — произвольные постоянные.

### § 2.3. Свертка обобщенных функций

Важным инструментом математической физики является операция свертки. Для локально интегрируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  их свертка  $f * g$  определяется интегралом

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y) dy = \int g(y)f(x-y) dy = (g * f)(x) \quad (1)$$

при условии, что этот интеграл существует и определяет локально интегрируемую в  $\mathbb{R}^n$  функцию  $(f * g)(x)$ . Наша задача — распространить это определение на обобщенные функции.

**1. Прямое произведение обобщенных функций.** Сначала определим произведение обобщенных функций с различными аргументами (прямое произведение). Для локально интегрируемых функций  $f(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  и  $g(y)$  в  $\mathbb{R}^m$  их произведение  $f(x)g(y)$  будет локально интегрируемой функцией в  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Эта функция определяет (результативную) обобщенную функцию, действующую на основные функции  $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}$  по формулам

$$\begin{aligned} (f(x)g(y), \varphi) &= \int f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int f(x) \int g(y)\varphi(x, y) dy dx = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (g(y)f(x), \varphi) &= \int g(y)f(x)\varphi(x, y) dx dy = \\ &= \int g(y) \int f(x)\varphi(x, y) dx dy = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \end{aligned} \quad (2')$$

Эти равенства следуют из теоремы о совпадении повторных интегралов с кратным (см. [2]). Равенство (2) мы и примем за определение *прямого произведения*  $f(x) \cdot g(y)$  обобщенных функций  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ :

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}). \quad (3)$$

Это определение корректно, т. е. правая часть равенства (3) определяет линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Действительно, можно проверить, что функция  $\psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$  принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , так что правая часть равенства (3), равная  $(f, \psi)$ , определяет функционал на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  для любых обобщенных функций  $f$  и  $g$ . Линейность этого функционала следует из линейности функционалов  $f$  и  $g$ . Можно доказать, что этот функционал и непрерывен на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ , так что  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , т. е. является обобщенной функцией на  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Перечислим свойства прямого произведения.

а) Операция прямого произведения  $f(x) \cdot g(y)$  линейна и непрерывна по  $f$  (из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ ) и по  $g$  (из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ ), например:

$$[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] \cdot g(y) = \lambda_1 [f_1(x) \cdot g(y)] + \lambda_2 [f_2(x) \cdot g(y)],$$

$$f_k(x) \cdot g(y) \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m}), \quad \text{если } f_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad k \rightarrow \infty.$$

б) Ассоциативность прямого произведения: пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  и  $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ , тогда

$$f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)] = [f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z). \quad (4)$$

Действительно, если  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m+k})$ , то

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)], \varphi) &= (f(x), (g(y) \cdot h(z)), \varphi) = \\ &= (f(x), (g(y), (h(z), \varphi))) = \\ &= (f(x) \cdot g(y), (h(z), \varphi)) = ([f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z), \varphi). \end{aligned}$$

в) Коммутативность прямого произведения: пусть  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ ; тогда

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x). \quad (5)$$

Действительно, в соответствии с формулой (3) прямое произведение  $g(y) \cdot f(x)$  определяется равенством

$$(g(y) \cdot f(x), \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}). \quad (3')$$

На основных функциях  $\varphi$  вида

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i(x)v_i(y), \quad u_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad v_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m), \quad (6)$$

справедливость равенства (5) проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(y), \varphi) &= \left( f, \sum_{i=1}^N u_i(g, v_i) \right) = \sum_{i=1}^N (f, u_i)(g, v_i) = \\ &= \left( g, \sum_{i=1}^N v_i(f, u_i) \right) = (g(y) \cdot f(x), \varphi). \end{aligned}$$

С помощью теоремы Вейерштрасса (см. § 1.1, п. 3) можно доказать, что множество основных функций вида (6) плотно в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . В силу непрерывности прямого произведения отсюда следует справедливость равенства (5) на всем  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ .

г) Дифференцирование прямого произведения:

$$\partial_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)] = \partial_x^\alpha f(x) \cdot g(y). \quad (7)$$

В самом деле, если  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ , то (см. § 2.2, п. 1)

$$\begin{aligned} (\partial_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (f(x) \cdot g(y), \partial_x^\alpha \varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (g(y), (f(x), \partial_x^\alpha \varphi(x, y))) = \\ &= (g(y), (\partial_x^\alpha f(x), \varphi)) = (\partial_x^\alpha f(x) \cdot g(y), \varphi). \end{aligned}$$

д) Умножение прямого произведения: если  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , то

$$a(x)[f(x) \cdot g(y)] = a(x)f(x) \cdot g(y). \quad (8)$$

Действительно, пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ , тогда (см. § 2.1, п. 9)

$$\begin{aligned} (a(x)[f(x) \cdot g(y)], \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), a\varphi) = \\ &= (f(x), (g(y), a(x)\varphi(x, y))) = (f(x), a(x)(g(y), \varphi(x, y))) = \\ &= (a(x)f(x), (g(y), \varphi(x, y))) = (a(x)f(x) \cdot g(y), \varphi). \end{aligned}$$

е) Сдвиг прямого произведения:

$$(f \cdot g)(x + h, y) = f(x + h) \cdot g(y).$$

В самом деле, если  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ , то (см. § 2.1, п. 9)

$$\begin{aligned} ((f \cdot g)(x + h, y), \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x - h, y)) = \\ &= (g(y), (f(x), \varphi(x - h, y))) = \\ &= (g(y), (f(x + h), \varphi(x, y))) = (f(x + h) \cdot g(y), \varphi). \end{aligned}$$

ж) Говорят, что обобщенная функция *не зависит от*  $y$ , если она имеет вид  $f(x) \cdot 1(y)$ . В этом случае в силу (5)

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi) = \left( f(x), \int \varphi(x, y) dy \right) = \\ = (1(y) \cdot f(x), \varphi) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy$$

для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ .

Таким образом,

$$\left( f(x), \int \varphi(x, y) dy \right) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy, \quad (10) \\ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

**2. Определение свертки обобщенных функций.** Для локально интегрируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  их свертка  $f * g$  определяется формулой (1). Если интеграл (1) есть локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция, то свертка  $f * g$  определяет регулярную обобщенную функцию, действующую на основные функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  по правилу

$$(f * g, \varphi) = \int (f * g)(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int \left[ \int g(y) f(\xi - y) dy \right] \varphi(\xi) d\xi = \\ = \int g(y) \left[ \int f(\xi - y) \varphi(\xi) d\xi \right] dy = \int g(y) \left[ \int f(x) \varphi(x + y) dx \right] dy,$$

т. е.

$$(f * g, \varphi) = \iint f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (11)$$

Отметим, что мы воспользовались здесь теоремой о перестановке порядков интегрирования и о равенстве повторных интегралов кратному (см. [2]). Применимость этой теоремы будет заведомо обоснована, если мы предположим, что свертка  $|f| * |g|(x)$  локально интегрируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций  $|f(x)|$  и  $|g(x)|$  есть локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^n$  функция

$$h(x) \equiv |f| * |g|(x) = \int |f(y)| |g(x - y)| dy \in \mathcal{L}_{loc}. \quad (12)$$

При этом будет справедливо неравенство

$$|(f * g)(x)| \leq h(x). \quad (13)$$

Отметим три случая, когда приведенное выше условие выполнено и, стало быть, свертка  $f * g$  существует.

1) Хотя бы одна из функций  $f, g$  финитна, например  $\text{spt } g \subset U_\rho$ :

$$\begin{aligned} \int_{U_R} h(x) dx &= \int_{U_\rho} |g(y)| \int_{U_R} |f(x-y)| dx dy \leq \\ &\leq \int_{U_\rho} |g(y)| dy \int_{U_{R+\rho}} |f(\xi)| d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Формула (1) принимает вид

$$(f * g)(x) = \int_{U_\rho} g(y) f(x-y) dy. \quad (14)$$

2) Функции  $f$  и  $g$  обращаются в нуль при  $x < 0$  ( $n = 1$ ):

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R h(x) dx &= \int_0^R \int_0^x |g(y)| |f(x-y)| dy dx = \\ &= \int_0^R |g(y)| \int_0^R |f(x-y)| dx dy \leq \int_0^R |g(y)| dy \int_0^R |f(\xi)| d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Формула (1) принимает вид

$$(f * g)(x) = \int_0^x g(y) f(x-y) dy. \quad (15)$$

3) Функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $\mathbb{R}^n$ :

$$\int h(x) dx = \int |g(y)| |f(x-y)| dx dy = \int |g(y)| dy \int |f(\xi)| d\xi < \infty,$$

так что в этом случае свертка  $f * g$  интегрируема на  $\mathbb{R}^n$ .

Будем говорить, что последовательность  $\{\eta_k\}$  основных функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  *сходится к 1* в  $\mathbb{R}^n$ , если:

- а) для любого компакта  $K$  найдется такой номер  $N$ , что  $\eta(x) = 1$  при  $x \in K$  и  $k \geq N$ ;
- б) функции  $\{\eta_k\}$  равномерно ограничены в  $\mathbb{R}^n$  вместе со всеми производными,  $|\partial^\alpha \eta_k(x)| < C_\alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\alpha$  любое.

Возможный график функций последовательности  $\{\eta_k(x)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , приведен на рис. 23.

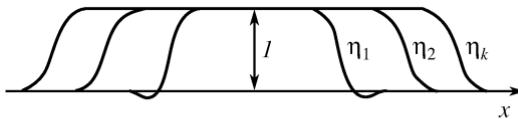


Рис. 23

Отметим, что в силу леммы из § 2.1, п. 2 такие последовательности всегда существуют.

Докажем, что равенство (11) можно переписать в виде

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (11')$$

где  $\eta_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — любая последовательность, сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Действительно в силу условия (12) функция  $|f(x)g(y)\varphi(x + y)|$  интегрируема на  $\mathbb{R}^{2n}$  для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Поэтому, применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла (см. [2]), получим

$$\int f(x)g(y)\varphi(x + y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f(x)g(y)\eta_k(x, y)\varphi(x + y) dx dy,$$

что в силу (11) эквивалентно равенству (11').

Исходя из равенств (11) и (11') примем следующее определение свертки. Пусть обобщенные функции  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  таковы, что их прямое произведение  $f(x) \cdot g(y)$  допускает продолжение (см. § 1.1, п. 8)  $(f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y))$  на функции вида  $\varphi(x + y)$ , где  $\varphi$  — произвольная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , в следующем смысле: какова бы ни была последовательность  $\{\eta_k\}$  функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ , существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)). \quad (16)$$

Отметим, что при каждом  $k$  функция  $\eta_k(x, y)\varphi(x + y)$  принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , так что наша числовая последовательность определена; кроме того, предел (16) этой последовательности не зависит от выбора последовательности  $\{\eta_k\}$ .

*Сверткой*  $f * g$  таких обобщенных функций  $f$  и  $g$  называется функционал

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)) = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (17)$$

Докажем, что функционал  $f * g$  принадлежит  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Для этого в силу полноты пространства  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  (см. § 2.1, п. 3) достаточно установить непрерывность линейных функционалов

$$(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Пусть  $\varphi_\nu \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\eta_k(x, y)\varphi_\nu(x + y) \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}), \quad \nu \rightarrow \infty,$$

поскольку  $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ . Отсюда в силу непрерывности функционала  $f(x) \cdot g(y)$  на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  (см. п. 1) получаем

$$(f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi_\nu(x + y)) \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

что и доказывает непрерывность функционала (18) на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Заметим, что функция  $\varphi(x + y)$  не принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  (она не финитна в  $\mathbb{R}^{2n}$ ), так что правая часть равенства (17) существует не для любых пар обобщенных функций  $f$  и  $g$ , и, таким образом, свертка существует не всегда.

Например, свертка локально интегрируемых функций  $f(x) = 1$  и  $g(x) = \theta(x)$  не существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , поскольку для всякой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  должно быть

$$(1 * \theta, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta_k(x, y)\varphi(x + y) dx dy,$$

а последний предел не существует (иначе он был бы равен  $\int \varphi(x) dx \times \int_0^{\infty} dy$ , где первый интеграл всегда конечен, а второй расходится).

Свертка любой обобщенной функции  $f$  с  $\delta$ -функцией существует и равна  $f$ :

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Действительно, пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  и  $\{\eta_k\}$  — любая последовательность функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Тогда

$$\eta_k(x, 0)\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{в } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad k \rightarrow \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \eta_k(x, 0)\varphi(x)) = (f, \varphi).$$

Отсюда в силу определения (17) следует, что свертки  $f * \delta$  и  $\delta * f$  существуют и равны  $f$ , что и утверждалось.

### 3. Свойства свертки.

a) *Линейность свертки.* Свортка  $f * g$  — линейная операция из  $\mathcal{D}'$  в  $\mathcal{D}'$  относительно  $f$  и  $g$  в отдельности, например,

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 (f_1 * g) + \lambda_2 (f_2 * g), \quad f_1, f_2, g \in \mathcal{D}',$$

при условии, что свертки  $f_1 * g$  и  $f_2 * g$  существуют.

Это свойство свертки непосредственно следует из определения (17) и из линейности прямого произведения  $f(x) \cdot g(y)$  относительно  $f$  и  $g$  в отдельности (см. п. 1, а)).

Отметим попутно, что свертка  $f * g$ , вообще говоря, не является непрерывной операцией из  $\mathcal{D}'$  в  $\mathcal{D}'$  относительно  $f$  или  $g$ , например,  $\delta(x - k) \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , но

$$1 * \delta(x - k) = 1 \not\rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1), \quad k \rightarrow \infty.$$

б) *Коммутативность свертки.* Если свертка  $f * g$  существует, то существует и свертка  $g * f$  и они равны:

$$f * g = g * f. \quad (19)$$

Это утверждение вытекает из определения свертки и из коммутативности прямого произведения (см. п. 1):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g(y) \cdot f(x), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (g * f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

в) *Дифференцирование свертки.* Если существует свертка  $f * g$ , то существуют и свертки  $\partial^\alpha f * g$  и  $f * \partial^\alpha g$ , причем

$$\partial^\alpha f * g = \partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g. \quad (20)$$

Это утверждение достаточно доказать для первых производных  $\partial_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  и  $\eta_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Тогда последовательность  $\eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j}$  также сходится к 1

в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Отсюда, пользуясь тем, что свертка  $f * g$  существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  (см. п. 2), получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 (\partial_j(f * g), \varphi) &= -(f * g, \partial_j \varphi) = \\
 &= -\lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y) \frac{\partial \varphi(x + y)}{\partial x_j} \right) = \\
 &= -\lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(x) \cdot g(y), \frac{\partial [\eta_k \varphi(x + y)]}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \varphi(x + y) \right) = \\
 &\quad = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} [f(x) \cdot g(y)], \eta_k \varphi(x + y) \right) + \\
 &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \left( f(x) \cdot g(y), \left( \eta_k + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) \varphi(x + y) \right) - \\
 &\quad - \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k \varphi(x + y)) = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\partial_j f(x) \cdot g(y), \eta_k \varphi(x + y)) + (f * g, \varphi) - (f * g, \varphi) = (\partial_j f * g, \varphi),
 \end{aligned}$$

откуда и следует первое равенство (20) для  $\partial_j$ . Второе равенство следует из первого и коммутативности свертки:

$$\partial_j(f * g) = \partial_j(g * f) = \partial_j g * f = f * \partial_j g.$$

Из равенств (20) вытекают равенства

$$\partial^\alpha f = \partial^\alpha \delta * f = \delta * \partial^\alpha f, \quad f \in \mathcal{D}'. \quad (21)$$

Отметим, что существования сверток  $\partial^\alpha f * g$  и  $f * \partial^\alpha g$ ,  $|\alpha| \geq 1$ , недостаточно для существования свертки  $f * g$  и справедливости равенства  $\partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$ , например,  $\theta' * 1 = \delta * 1 = 1$ , но  $\theta * 1' = \theta * 0 = 0$ . Другими словами, операция свертки, вообще говоря, не ассоциативна:

$$(\theta * \delta') * 1 = \theta' * 1 = 1, \quad \theta * (\delta' * 1) = \theta * 0 = 0.$$

г) *Сдвиг свертки.* Если свертка  $f * g$  существует, то существует и свертка  $f(x + h) * g(x)$ , причем

$$f(x + h) * g(x) = (f * g)(x + h), \quad h \in \mathbb{R}^n, \quad (22)$$

т. е. операции сдвига и свертки коммутируют.

Действительно, пусть  $\eta_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — любая последовательность, сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Тогда при любом  $h \in \mathbb{R}^n$  последовательность  $\eta_k(x - h, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , также сходится к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Теперь,

пользуясь определениями сдвига (см. § 2.1, п. 9) и свертки (см. п. 2), при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  получаем

$$\begin{aligned} ((f * g)(x + h), \varphi) &= (f * g, \varphi(x - h)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x - h, y)\varphi(x - h + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x + h) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x + h) * g(x), \varphi), \end{aligned}$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались формулой (9) для сдвига прямого произведения.

**4. Существование свертки.** Установим достаточные условия (помимо приведенных в п. 2) существования свертки в  $\mathcal{D}'$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $f$  — произвольная, а  $g$  — финитная обобщенные функции. Тогда свертка  $f * g$  существует в  $\mathcal{D}'$  и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (23)$$

где  $\eta$  — любая основная функция, равная 1 в окрестности носителя  $g$ . При этом свертка непрерывна относительно  $f$  и  $g$  в отдельности:

- 1) если  $f_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то  $f_k * g \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ ;
- 2) если  $g_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ , причем  $\text{spt } g_k \subset U_R$ , где  $R > 0$  не зависит от  $k = 1, 2, \dots$ , то  $f * g_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\text{spt } g \subset U_R$ ,  $\eta$  — функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , равная 1 в окрестности  $\text{spt } g$ ,  $\text{spt } \eta \subset U_R$  (по лемме из § 2.1, п. 2 такая функция существует). Пусть, далее,  $\varphi$  — произвольная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{spt } \varphi \subset U_A$  и  $\eta_k(x, y)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — последовательность, сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$  (см. п. 2). Тогда при всех достаточно больших  $k$

$$\eta(y)\eta_k(x, y)\varphi(x + y) = \eta(y)\varphi(x + y). \quad (24)$$

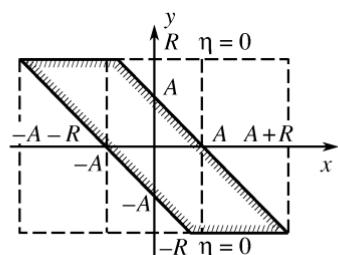


Рис. 24

нечно дифференцируема и ее носитель лежит в ограниченном множестве (рис. 24):

$$\{(x, y) : |x + y| \leqslant A, |y| \leqslant R\} \subset \overline{U}_{A+R} \times \overline{U}_R.$$

Для доказательства равенства (24) следует проверить, что функция  $\eta(y)\varphi(x + y)$  принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ . Но это вытекает из того, что она беско-

Учитывая теперь соотношение (24) и равенство  $g = \eta g$  (см. (10) из § 2.1), убеждаемся в справедливости формулы (23):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \eta(y)g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\eta_k(x, y)\varphi(x + y)) = (f(x) \cdot g(y), \eta(y)\varphi(x + y)). \end{aligned}$$

Непрерывность свертки  $f * g$  относительно  $f$  и  $g$  вытекает из представления (23) и из непрерывности прямого произведения  $f(x) \cdot g(y)$  относительно  $f$  и  $g$  в отдельности (см. п. 1, а)). При этом условие  $\text{spt } g_k \subset U_R$  позволяет выбрать вспомогательную функцию  $\eta$ , единую для всех  $g_k$ . Теорема доказана.

Дадим еще одно условие существования свертки. Обозначим через  $\mathcal{D}'_+$  совокупность всех обобщенных функций из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , обращающихся в нуль при  $t < 0$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $f, g \in \mathcal{D}'_+$ . Тогда их свертка  $f * g$  существует в  $\mathcal{D}'_+$  и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t + \tau)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1), \quad (25)$$

где  $\eta_1, \eta_2$  — любые функции класса  $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^1)$ , равные 1 в окрестности полуоси  $[0, \infty)$  и 0 при достаточно больших отрицательных  $t$ . При этом свертка непрерывна относительно  $f$  и  $g$  в отдельности, например, если  $f_k \in \mathcal{D}'_+$  и  $f_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то  $f_k * g \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Наметим его. Пусть  $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  и  $\eta_k(t, \tau)$  сходится к 1 в  $\mathbb{R}^2$  (см. п. 2). Тогда при всех достаточно больших  $k$  справедливо равенство

$$\eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t, \tau)\varphi(t + \tau) = \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t + \tau) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Учитывая это равенство и равенства  $f = \eta_1 f$ ,  $g = \eta_2 g$  (см. (10) из § 2.1), убеждаемся в существовании свертки  $f * g$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  и в справедливости формулы (25):

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(t) \cdot g(\tau), \eta_k(t, \tau)\varphi(t + \tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\eta_1(t)f(t) \cdot \eta_2(\tau)g(\tau), \eta_k(t, \tau)\varphi(t + \tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\eta_k(t, \tau)\varphi(t + \tau)) = \\ &= (f(t) \cdot g(\tau), \eta_1(t)\eta_2(\tau)\varphi(t + \tau)). \end{aligned}$$

Из представления (25) следует, что  $f * g = 0$  при  $t < 0$  (т. е.  $f * g \in \mathcal{D}'_+$ ), и остальные утверждения теоремы.

Представление (25) влечет

**СЛЕДСТВИЕ.** Свертка обобщенных функций из  $\mathcal{D}'_+$  коммутативна и ассоциативна:

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h, \quad f, g, h \in \mathcal{D}'_+.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Линейное множество  $\mathcal{A}$  называется *алгеброй*, если на нем определена операция умножения, линейная относительно каждого сомножителя в отдельности. Алгебра  $\mathcal{A}$  называется *коммутативной*, если  $xy = yx$  для всех  $x, y \in \mathcal{A}$ , и *ассоциативной*, если  $x(yz) = (xy)z$  для всех  $x, y, z \in \mathcal{A}$ .

Теорема 2 и следствие из нее утверждают, что  $\mathcal{D}'_+$  образует коммутативную ассоциативную алгебру, если в качестве умножения взять операцию свертки  $*$ ; поэтому  $\mathcal{D}'_+$  называется *сверточной алгеброй*. Единицей в  $\mathcal{D}'_+$  является  $\delta$ -функция, поскольку  $\delta * f = f$  для всех  $f \in \mathcal{D}'_+$ .

**5. Уравнения в сверточной алгебре  $\mathcal{D}'_+$ .** В алгебре  $\mathcal{D}'_+$  рассмотрим уравнение

$$a * u = f, \tag{26}$$

где  $a$  и  $f$  — известные, а  $u$  — неизвестная обобщенная функция из  $\mathcal{D}'_+$ . Решение уравнения (26) при  $f = \delta$ , если оно существует, называется *фундаментальным решением сверточного оператора*  $a*$  и обозначается  $a^{-1}$ . Другими словами,  $a^{-1}$  — обратный элемент к  $a$  в алгебре  $\mathcal{D}'_+$ ,  $a * a^{-1} = \delta$ ; отметим, что в этом случае и  $a^{-1} * a = \delta$ , поскольку алгебра  $\mathcal{D}'_+$  коммутативная.

**ТЕОРЕМА.** Если  $a^{-1}$  существует в  $\mathcal{D}'_+$ , то для любой  $f$  из  $\mathcal{D}'_+$  решение уравнения (26) в  $\mathcal{D}'_+$  существует, единственно и выражается формулой

$$u = a^{-1} * f. \tag{27}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Действительно, свертка  $a^{-1} * f$  принадлежит  $\mathcal{D}'_+$  и удовлетворяет уравнению (26):

$$a * (a^{-1} * f) = (a * a^{-1}) * f = \delta * f = f.$$

Так как однородное уравнение  $a * u_0 = 0$ , соответствующее уравнению (26), имеет только нулевое решение:

$$a^{-1} * (a * u_0) = (a^{-1} * a) * u_0 = \delta * u_0 = u_0 = a^{-1} * 0 = 0,$$

то решение уравнения (26) единственно в  $\mathcal{D}'_+$  (см. § 1.1, п. 9).

Доказанная теорема сводит задачу решения уравнения (26) при произвольной  $f$  из  $\mathcal{D}'_+$  к решению его при конкретной  $f = \delta$ , т. е. к нахождению  $a^{-1}$ .

Следующее предложение весьма полезно при построении фундаментальных решений в алгебре  $\mathcal{D}'_+$ : если  $a_1^{-1}$  и  $a_2^{-1}$  существуют в  $\mathcal{D}'_+$ , то

$$(a_1 * a_2)^{-1} = a_2^{-1} * a_1^{-1}. \quad (28)$$

Действительно,

$$(a_1 * a_2) * (a_2^{-1} * a_1^{-1}) = a_1 * (a_2 * a_2^{-1}) * a_1^{-1} = a_1 * \delta * a_1^{-1} = a_1 * a_1^{-1} = \delta.$$

В качестве полезного примера определим в алгебре  $\mathcal{D}'_+$  операторы дробного дифференцирования и интегрирования. Для этого введем обобщенную функцию  $f_\alpha$  из  $\mathcal{D}'_+$ , зависящую от вещественного параметра  $\alpha$ :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}, & \alpha > 0, \\ f'_{\alpha+1}, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Проверим, что

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}. \quad (29)$$

Действительно, если  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ , то (см. (15))

$$\begin{aligned} f_\alpha * f_\beta &= \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x y^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} dy = \\ &= \frac{\theta(x)x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \\ &= \frac{\theta(x)x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = \frac{\theta(x)x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = f_{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

причем мы воспользовались известной формулой

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Если же  $\alpha \leq 0$  или  $\beta \leq 0$ , то, подобрав натуральные числа  $m > -\alpha$  и  $n > -\beta$ , получим

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+m}^{(m)} * f_{\beta+n}^{(n)} = (f_{\alpha+m} * f_{\beta+n})^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta+m+n}^{(m+n)} = f_{\alpha+\beta},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим сверточный оператор  $f_\alpha *$  в алгебре  $\mathcal{D}'_+$ . Так как  $f_0 = \delta$ , то из (29) следует, что фундаментальное решение  $f_\alpha^{-1}$  оператора  $f_\alpha *$  существует и равно  $f_{-\alpha}$ , т. е.  $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$ . Далее, при целых  $n < 0$  имеем  $f_n = \delta^{(n)}$ , и потому  $f_n * u = \delta^{(n)} * u = u^{(n)}$ , т. е.  $f_n *$  — оператор  $n$ -кратного дифференцирования. Наконец, при целых  $n > 0$

$$(f_n * u)^{(n)} = f_{-n} * (f_n * u) = (f_{-n} * f_n) * u = \delta * u = u,$$

т. е.  $f_n * u$  — первообразная порядка  $n$  обобщенной функции  $u$  (см. § 2.2, п. 3). Поэтому оператор  $f_\alpha *$  называют *оператором дробного дифференцирования* при  $\alpha < 0$  и *дробного интегрирования* при  $\alpha > 0$  (а также *оператором Римана–Лиувилля*).

**6. Регуляризация обобщенных функций.** Пусть  $f$  — обобщенная функция и  $\psi$  — основная функция. Поскольку  $\psi$  финитна, свертка  $f * \psi$  существует по теореме 1 из п. 4. Докажем, что

$$f * \psi = (f(y), \psi(x - y)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (30)$$

Действительно, в силу (23) при всех  $\varphi \in \mathcal{D}$  имеем

$$\begin{aligned} (f * \psi, \varphi) &= (f(y) \cdot \psi(\xi), \eta(\xi)\varphi(y + \xi)) = \\ &= \left( f(y), \int \psi(\xi)\eta(\xi)\varphi(y + \xi) d\xi \right) = \\ &= \left( f(y), \int \psi(\xi)\varphi(y + \xi) d\xi \right) = \left( f(y), \int \varphi(x)\psi(x - y) dx \right), \end{aligned}$$

где вспомогательная функция  $\eta \in \mathcal{D}$  равна 1 в окрестности носителя  $\psi$ . Замечая теперь, что функция  $\varphi(x)\psi(x - y)$  принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , и пользуясь равенством (10), получаем равенство (30):

$$(f * \psi, \varphi) = \int \varphi(x)(f(y), \psi(x - y)) dx = ((f(y), \psi(x - y)), \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Бесконечная дифференцируемость правой части равенства (30) устанавливается стандартным образом.

Пусть  $\omega_\varepsilon(x)$  — «шапочка» (см. § 2.1, п. 2). Тогда бесконечно дифференцируемая функция

$$f_\varepsilon(x) = f * \omega_\varepsilon = (f(y), \omega_\varepsilon(x - y))$$

называется *регуляризацией* обобщенной функции  $f$ .

В § 2.1, п. 6 было доказано, что  $\omega_\varepsilon \rightarrow \delta(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'$ . Отсюда, пользуясь непрерывностью свертки относительно  $\omega_\varepsilon$  (см. теорему из п. 4), получаем

$$f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x) \quad \text{в } \mathcal{D}', \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (31)$$

Итак, всякая обобщенная функция есть слабый предел своих регуляризаций.

Пользуясь этим утверждением, установим более сильный результат.

**Теорема.** Всякая обобщенная функция есть слабый предел основных функций, т. е. множество  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathcal{D}'$ .

**Доказательство.** Пусть  $f_\varepsilon(x)$  — регуляризация  $f$  и  $\eta_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ , — последовательность основных функций, равных 1 в шаре  $U_{1/\varepsilon}$ . Тогда последовательность основных функций  $\eta_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ , сходится к  $f$  в  $\mathcal{D}'$ , поскольку для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$  в силу (31) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\eta_\varepsilon f_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \eta_\varepsilon \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi),$$

что и утверждалось.

**Замечание.** Из полноты пространства  $\mathcal{D}'$  (см. § 2.1, п. 3) вытекает обратное утверждение: всякий слабый предел локально интегрируемых функций есть обобщенная функция из  $\mathcal{D}'$ . Поэтому теорию обобщенных функций можно строить, исходя из слабо сходящихся последовательностей обычных функций.

### 7. Ньютоны потенциалы — примеры сверток.

а) Пусть  $\rho$  — обобщенная функция из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 2, 3$ , и

$$V_3 = \frac{1}{|x|} * \rho, \quad n = 3, \quad V_2 = \ln \frac{1}{|x|} * \rho, \quad n = 2. \quad (32)$$

Тогда  $V_n$  называется *ニュтоновым потенциалом* ( $V_2$  называется также *логарифмическим потенциалом*) с плотностью  $\rho$ .

Если  $\rho$  — финитная обобщенная функция, то потенциал  $V_n$  существует в  $\mathcal{D}'$  и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V_3 = -4\pi\rho, \quad \Delta V_2 = -2\pi\rho. \quad (33)$$

Существование потенциала  $V_n$  следует из теоремы 1 из п. 4. Пользуясь формулами (20) из п. 3 и (32) из § 2.2, заключаем, что, например, при  $n = 3$

$$\Delta V_3 = \Delta \left( \frac{1}{|x|} * \rho \right) = \Delta \frac{1}{|x|} * \rho = -4\pi\delta * \rho = -4\pi\rho.$$

Аналогично разбирается случай  $n = 2$ .

б) Если  $\rho$  — (абсолютно) интегрируемая функция в ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^n$  и  $\rho = 0$  вне  $G$ , то потенциал  $V_n$  называется *объемным потенциалом* ( $V_2$  называется также *потенциалом площади*).

Объемный потенциал  $V_n$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^n$ , причем

$$V_3(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy, \quad V_2(x) = \int_G \rho(y) \ln \frac{1}{|x - y|} dy. \quad (34)$$

Эти представления вытекают из формулы (14) для свертки финитной интегрируемой функции  $\rho$  с локально интегрируемой функцией  $\frac{1}{|x|}$  ( $n = 3$ ) и  $-\ln|x|$  ( $n = 2$ ).

в) Пусть  $S$  — ограниченная кусочно гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^3$  или ограниченная кусочно гладкая кривая в  $\mathbb{R}^2$  с выбранным направлением нормали  $\mathbf{n}$  на ней, а  $\mu$  и  $\nu$  — непрерывные функции на  $S$ .

Пусть  $\mu\delta_S$  и  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S)$  — соответственно простой и двойной слои на  $S$  с поверхностными плотностями  $\mu$  и  $\nu$  (см. § 2.1, п. 6 и § 2.2, п. 5, а)). Порождаемые ими ньютоновы потенциалы

$$V_3^{(0)} = \frac{1}{|x|} * \mu\delta_S, \quad V_2^{(0)} = \ln \frac{1}{|x|} * \mu\delta_S, \quad (35)$$

$$V_3^{(1)} = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S), \quad V_2^{(1)} = -\ln \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S) \quad (36)$$

называются соответственно поверхностными *потенциалами простого и двойного слоя* с плотностями  $\mu$  и  $\nu$ .

Поверхностные потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  — локально интегрируемые функции в  $\mathbb{R}^n$ , причем

$$V_3^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y, \quad V_2^{(0)}(x) = \int_S \mu(y) \ln \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad (37)$$

$$V_3^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} dS_y, \quad V_2^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \frac{1}{|x - y|} dS_y. \quad (38)$$

Докажем, например, формулу (38) для потенциала  $V_3^{(1)}$ . Пользуясь представлением (23) для свертки и определением двойного слоя, получаем

$$(V_3^{(1)}, \varphi) = - \left( \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S), \varphi \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S(y)) \cdot \frac{1}{|\xi|}, \eta(y) \varphi(y + \xi) \right) = \\
&= - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S(y)), \eta(y) \left( \frac{1}{|\xi|}, \varphi(y + \xi) \right) \right) = \\
&= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left[ \eta(y) \int \frac{\varphi(y + \xi)}{|\xi|} d\xi \right] dS_y = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \int \frac{\varphi(x)}{|x - y|} dx dS_y = \\
&= \int_S \nu(y) \int \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|x - y|} dx dS_y = \int \varphi(x) \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} dS_y dx
\end{aligned}$$

для любой  $\varphi \in \mathcal{D}$ , что и требовалось доказать.

Дифференцирование под знаком интеграла здесь обеспечивается теоремой из § 1.1, п. 4, а перемена порядка интегрирования законна (см. [2]).

## 8. Упражнения.

а) Доказать равенство

$$\frac{\partial^n [\theta(x_1) \dots \theta(x_n)]}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta(x_1) \dots \delta(x_n).$$

б) Доказать:  $\text{spt}[f(x) \cdot g(y)] = \text{spt } f \times \text{spt } g$ .

в) Доказать: для того чтобы обобщенная функция  $f(x)$  не зависела от  $x_i$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ .

г) Доказать: для того чтобы обобщенная функция  $f(x)$  не зависела от  $x_i$ , необходимо и достаточно, чтобы она была инвариантной относительно всех сдвигов по  $x_i$ .

д) Доказать:

$$\text{spt}(f * g) \subset \overline{\{x: x = y + z, y \in \text{spt } f, z \in \text{spt } g\}}.$$

е) Доказать: если обобщенная функция  $f$  не зависит от  $x_i$ , то таким же свойством обладает и свертка  $f * g$ . (Указание: использовать в) или г).)

ж) Пользуясь е), доказать: если свертка  $f * 1$  существует, то она совпадает с постоянной.

з) Проверить равенства:

$$1) f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \quad f_\alpha(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{ax}, \quad \alpha > 0;$$

$$2) f_\alpha * f_\beta = f_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\alpha^2} \right\}, \quad \alpha > 0;$$

$$3) f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \alpha > 0.$$

и) Доказать, что

$$*(\delta' - \lambda\delta)^k]^{-1} = *[(\delta' - \lambda\delta)^{-1}]^k = \frac{\theta(x)}{(k-1)!} x^{k-1} e^{\lambda x},$$

где  $*f^k = f * \dots * f$  ( $k$  раз).

к) Пользуясь формулой (29), показать, что функция

$$u(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} d\xi$$

есть решение интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi = g(x), \quad g(0) = 0, \quad g \in \mathcal{C}^1(x \geq 0), \quad 0 < \alpha < 1.$$

л) Доказать равенство

$$e^{ax} f * e^{ax} g = e^{ax} (f * g), \quad f, g \in \mathcal{D}'_+.$$

м) Доказать: если  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $f * \varphi \in \mathcal{D}'_+$  при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(x > 0)$ , то  $f \in \mathcal{D}'_+$ .

н) Обозначим через  $\mathcal{E}'$  пространство финитных обобщенных функций со сходимостью  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{E}'$ , если: 1)  $f_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'$ ; 2) существует  $R > 0$  такое, что  $\text{spt } f_k \subset U_R$  при всех  $k = 1, 2, \dots$

Доказать теорему: для того чтобы оператор  $L$ , действующий из  $\mathcal{E}'$  в  $\mathcal{D}'$ , представлялся в виде свертки  $Lf = g * f$ , где  $g \in \mathcal{D}'$ , необходимо и достаточно, чтобы он был линейным и непрерывным из  $\mathcal{E}'$  в  $\mathcal{D}'$  и коммутировал с операцией сдвига (см. п. 3, г)). При этом элемент  $g$  единственный и  $g = L\delta$ .

## § 2.4. Обобщенные функции медленного роста

Одним из мощных средств решения задач математической физики является метод преобразования Фурье. Естественным образом преобразование Фурье действует на пространстве *обобщенных функций медленного роста*, к изучению которых мы приступаем.

**1. Пространство основных функций  $\mathcal{S}$ .** Отнесем к множеству *основных функций*  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  все функции класса  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , убывающие при  $|x| \rightarrow \infty$  вместе со всеми производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ . Сходимость в  $\mathcal{S}$  определим следующим образом:

последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  из  $\mathcal{S}$  сходится к функции  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ , если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows x^\beta \partial^\alpha \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Очевидно,  $\mathcal{S}$  — линейное пространство. Легко проверить, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  и из сходимости в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$ . Однако  $\mathcal{S}$  не совпадает с  $\mathcal{D}$ . Например, функция  $e^{-x^2}$  принадлежит  $\mathcal{S}$ , но не принадлежит  $\mathcal{D}$ . Тем не менее,  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathcal{S}$ , т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$  найдется последовательность  $\varphi_k \in \mathcal{D}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ . Действительно, последовательность  $\varphi_k(x) = \varphi(x)\eta(\frac{x}{k}) \in \mathcal{D}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\eta \in \mathcal{D}$  и  $\eta(x) = 1$ ,  $|x| < 1$ , сходится к  $\varphi$  в  $\mathcal{S}$ .

Операции дифференцирования  $\partial^\alpha \varphi(x)$  и неособенной замены переменных  $\varphi(Ay + b)$  непрерывны из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ . Это вытекает из определения сходимости в  $\mathcal{S}$ .

С другой стороны, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию может вывести за пределы множества  $\mathcal{S}$ , например,  $e^{-x^2} e^{x^2} = 1 \notin \mathcal{S}$ .

Обозначим через  $\Theta_M$  множество всех функций  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , расширяющих на бесконечности вместе со всеми производными не быстрее полинома:

$$|\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{m(\alpha)}. \quad (2)$$

Операция умножения на функцию  $a \in \Theta_M$  непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ .

Действительно, из неравенства (2) вытекает: если  $\varphi \in \mathcal{S}$ , то  $a\varphi \in \mathcal{S}$ , и если  $\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ , то при всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$x^\beta \partial^\alpha (a(x)\varphi_k(x)) \rightrightarrows 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \rightarrow \infty,$$

т. е.  $a\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ .

**2. Пространство обобщенных функций медленного роста  $\mathcal{S}'$ .** *Обобщенной функцией медленного роста* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций  $\mathcal{S}$ . Обозначим через  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  множество всех обобщенных функций медленного роста. Очевидно,  $\mathcal{S}'$  — линейное множество (ср. § 2.1, п. 3). Сходимость в  $\mathcal{S}'$  определим как *слабую* сходимость последовательности функционалов: последовательность обобщенных функций  $f_1, f_2, \dots$  из  $\mathcal{S}'$  сходится к обобщенной функции  $f \in \mathcal{S}'$  (пишем:  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}'$ ), если  $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Линейное множество  $\mathcal{S}'$  с введенной таким образом сходимостью называется *пространством обобщенных функций медленного роста*  $\mathcal{S}'$ .

Из этих определений непосредственно вытекает, что  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  и из сходимости в  $\mathcal{S}'$  следует сходимость в  $\mathcal{D}'$ .

Действительно, если  $f \in \mathcal{S}'$ , то  $f \in \mathcal{D}'$ , так как  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$  и из сходимости в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$  (см. п. 1). Далее, если  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}'$ , то  $(f_k, \varphi) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , при всех  $\varphi$  из  $\mathcal{D}$ , и, стало быть,  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{D}'$ .

**ТЕОРЕМА (Л. Шварц).** Для того чтобы линейный функционал  $f$  на  $\mathcal{S}$  принадлежал  $\mathcal{S}'$  (т. е. был непрерывным на  $\mathcal{S}$ ), необходимо и достаточно, чтобы существовали число  $C > 0$  и целое число  $p \geq 0$  такие, что

$$|(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_p \quad (3)$$

для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$ , где

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^p |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть линейный функционал  $f$  на  $\mathcal{S}$  удовлетворяет неравенству (3) при некоторых  $C > 0$  и  $p \geq 0$ . Докажем, что  $f \in \mathcal{S}'$ . Пусть  $\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ . Тогда  $\|\varphi_k\|_p \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , а потому  $|(f, \varphi_k)| \leq C \|\varphi_k\|_p \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Это и значит, что  $f$  — непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$ .

**НЕОБХОДИМОСТЬ.** Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ . Докажем, что существуют числа  $C > 0$  и  $p \geq 0$  такие, что для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$  справедливо неравенство (3). Пусть, напротив, указанных чисел  $C$  и  $p$  не существует. Тогда найдется последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  из  $\mathcal{S}$  таких, что

$$|(f, \varphi_k)| \geq k \|\varphi_k\|_k. \quad (4)$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходится к 0 в  $\mathcal{S}$ , ибо при  $k \geq |\alpha|$  и  $k \geq |\beta|$

$$|x^\beta \partial^\alpha \psi_k(x)| = \frac{|x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x)|}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Отсюда и из непрерывности функционала  $f$  на  $\mathcal{S}$  следует, что  $(f, \psi_k) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . С другой стороны, неравенство (4) дает

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k} \|\varphi_k\|_k} |(f, \varphi_k)| \geq \sqrt{k}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказанная теорема утверждает, что всякая обобщенная функция медленного роста непрерывна относительно некоторой нормы  $\|\cdot\|_p$  (или, как говорят, имеет конечный порядок).

### 3. Примеры обобщенных функций медленного роста.

а) Если  $f(x)$  — локально интегрируемая функция медленного роста на бесконечности, т. е.

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-m} dx < \infty$$

при некотором  $m \geq 0$ , то она определяет регулярную обобщенную функцию медленного роста из  $\mathcal{S}'$  по формуле (3) из § 2.1

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (5)$$

Конечно, не всякая локально интегрируемая функция определяет обобщенную медленного роста, например,  $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ .

С другой стороны, не всякая локально интегрируемая функция, принадлежащая  $\mathcal{S}'$ , имеет медленный рост. Например, функция  $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$  не является функцией медленного роста, но тем не менее задает обобщенную функцию медленного роста по формуле

$$((\cos e^x)', \varphi) = - \int \cos e^x \varphi'(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Пользуясь теоремой Л. Шварца (см. п. 2), можно доказать, что всякая обобщенная функция из  $\mathcal{S}'$  является производной (в смысле обобщенных функций) от непрерывной функции медленного роста. Этим и объясняется название пространства  $\mathcal{S}'$ .

б) Если  $f$  — финитная обобщенная функция из  $\mathcal{D}'$ , то она единственным образом продолжается на  $\mathcal{S}$  как элемент из  $\mathcal{S}'$  по формуле

$$(f, \varphi) = (f, \eta\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (6)$$

где  $\eta \in \mathcal{D}$  и  $\eta = 1$  в окрестности носителя  $f$ .

Действительно, линейный функционал  $(f, \eta\varphi)$ , стоящий в правой части равенства (6), непрерывен на  $\mathcal{S}$ : если  $\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ , то  $\eta\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{D}$ , и потому

$$(f, \eta\varphi_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Единственность продолжения функционала  $f$  на  $\mathcal{S}$  следует из плотности  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{S}$  (см. п. 1). В частности, продолжение (6) не зависит от вспомогательной функции  $\eta$ .

в) Если  $f \in \mathcal{S}'$ , то и каждая производная  $\partial^\alpha f$  принадлежит  $\mathcal{S}'$ . Действительно, поскольку операция дифференцирования  $\partial^\alpha \varphi$  непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$  (см. п. 1), то правая часть равенства

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

есть линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$  (ср. § 2.2, п. 1).

г) Если  $f \in \mathcal{S}'$  и  $\det A \neq 0$ , то  $f(Ay + b) \in \mathcal{S}'$ .

В самом деле, поскольку операция преобразования  $\varphi[A^{-1}(x - b)]$  непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$  (см. п. 1), то правая часть равенства

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left( f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|} \right)$$

есть линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$  (ср. § 2.1, п. 8).

д) Если  $f \in \mathcal{S}'$  и  $a \in \Theta_M$ , то  $af \in \mathcal{S}'$ .

Действительно, поскольку операция умножения на функцию  $a \in \Theta_M$  непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$  (см. п. 1), то правая часть равенства

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

есть линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$  (ср. § 2.1, п. 9).

е) Так же, как и в § 2.3, п. 1, определяется *прямое произведение*  $f(x) \cdot g(y)$  обобщенных функций  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  и  $g(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , причем  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ .

Все свойства прямого произведения, перечисленные в § 2.3, п. 1, сохраняются и в этом случае, в частности, прямое произведение ассоциативно и коммутативно, а формула (10) из § 2.3

$$\left( f(x), \int \varphi(x, y) dy \right) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy \quad (7)$$

справедлива при всех  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  и  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ .

ж) Как и в § 2.3, п. 2, определяется *свертка*  $f * g$  обобщенных функций  $f, g \in \mathcal{S}'$ , причем все свойства свертки, перечисленные в § 2.3, п. 3, сохраняются. В частности, свертка  $f * g$  обобщенной функции медленного роста  $f \in \mathcal{S}'$  с финитной обобщенной функцией  $g \in \mathcal{E}'$  существует,  $f * g \in \mathcal{S}'$  и сохраняется представление (23) из § 2.3 для всех  $\varphi \in \mathcal{S}$ .

Множество обобщенных функций  $\mathcal{S}'_+ = \mathcal{D}'_+ \cap \mathcal{S}'$ , где  $\mathcal{D}'_+$  — сверточная алгебра, определенная в § 2.3, п. 5, образует сверточную алгебру — подалгебру алгебры  $\mathcal{D}'_+$ .

#### 4. Структура обобщенных функций с точечным носителем.

ТЕОРЕМА. Если носитель обобщенной функции  $f$  есть точка  $\{0\}$ , то она имеет единственное представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m C_\alpha \partial^\alpha \delta(x). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как обобщенная функция  $f$  имеет носитель  $\{0\}$ , то  $f \in \mathcal{S}'$  (см. п. 3), и в силу (10) из § 2.1  $f = \eta(kx)f$  при всех  $k > 0$ , где  $\eta(x)$  — основная функция, равная 1 в окрестности точки 0 и равная 0 при  $|x| > 1$ .

Пусть  $n = 1$ . По теореме Л. Шварца (см. п. 2) справедливо неравенство

$$|(x^N f, \varphi)| = |(f, x^N \eta(kx)\varphi)| \leq C \|x^N \eta(kx)\varphi(x)\|_m, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (9)$$

при некоторых  $C > 0$  и  $m \geq 0$ , не зависящих от  $\varphi$ ,  $N$  и  $k$ . Положив  $N = m + 1$ , получим оценку

$$\|x^{m+1} \eta(kx)\varphi(x)\|_m = \sup_{|x| \leq 1/k, |\alpha| \leq m} (1 + |x|^m) |\partial^\alpha [x^{m+1} \eta(kx)\varphi(x)]| \leq \frac{C_1}{k},$$

где  $C_1$  не зависит от  $k$ . Отсюда, переходя в неравенстве (9) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , приходим к выводу, что обобщенная функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$x^{m+1} f = 0.$$

Следовательно, в силу формулы (20) из § 2.2  $f$  имеет представление (8).

Докажем единственность представления (8). Пусть

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m C'_\alpha \partial^\alpha \delta(x)$$

— другое представление  $f$ ; тогда

$$\sum_{|\alpha|=0}^m (C_\alpha - C'_\alpha) \partial^\alpha \delta(x) = 0.$$

Применяя это равенство к моному  $x^\beta$ ,  $|\beta| \leq m$ , получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{|\alpha|=0}^m (C_\alpha - C'_\alpha)(\partial^\alpha \delta(x), x^\beta) = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} (C_\alpha - C'_\alpha)(\delta(x), \partial^\alpha x^\beta) = (-1)^{|\beta|} \beta! (C_\beta - C'_\beta), \end{aligned}$$

т. е.  $C_\beta = C'_\beta$ . При  $n > 1$  доказательство аналогично. Теорема доказана.

### § 2.5. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Замечательное свойство класса обобщенных функций медленного роста состоит в том, что на нем определено преобразование Фурье.

**1. Преобразование Фурье основных функций из  $\mathcal{S}$ .** Для основной функции  $\varphi \in \mathcal{S}$  положим (см. [2])

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx;$$

интеграл справа определен для всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , поскольку  $\varphi(x)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}^n$ . Функция  $F[\varphi](\xi)$  называется *преобразованием Фурье* функции  $\varphi(x)$ . Очевидно,  $F[\varphi](\xi)$  непрерывна и ограничена в  $\mathbb{R}^n$ . Поскольку  $\varphi(x)$  убывает на бесконечности быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ , ее преобразование Фурье можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз:

$$\partial^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi, x)} dx = F[(ix)^\alpha \varphi(x)](\xi), \quad (1)$$

так что  $F[\varphi](\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Далее, такими же свойствами обладает всякая производная  $\partial^\alpha \varphi$ , а потому интегрирование по частям дает

$$F[\partial^\alpha \varphi](\xi) = \int (\partial^\alpha v p(x)) e^{i(\xi, x)} dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi). \quad (2)$$

Наконец, из формул (1) и (2) получаем

$$\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[\partial^\beta (x^\alpha \varphi(x))](\xi). \quad (3)$$

Из равенства (3) вытекает, что при всех  $\alpha$  и  $\beta$  функции  $\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi](\xi)$  равномерно ограничены по  $\xi$  на  $\mathbb{R}^n$ :

$$|\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |\partial^\beta (x^\alpha \varphi(x))| dx. \quad (4)$$

Это означает, что  $F[\varphi] \in \mathcal{S}$  (см. § 2.4, п. 1). Итак, преобразование Фурье переводит пространство  $\mathcal{S}$  в себя.

Отметим, что преобразование Фурье не переводит пространство основных функций  $\mathcal{D}$  в себя, поскольку преобразование Фурье финитной функции есть аналитическая функция и, стало быть, не может быть финитной (см. [3]).

Так как преобразование Фурье  $F[\varphi]$  основной функции  $\varphi \in \mathcal{S}$  есть интегрируемая и непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , то согласно общей теории преобразования Фурье (см. [2]) функция  $\varphi$  восстанавливается по  $F[\varphi]$  операцией обратного преобразования Фурье  $F^{-1}$ :

$$\varphi(x) = F^{-1}[F[\varphi]](x) = F[F^{-1}[\varphi]](x), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что всякая функция  $\varphi \in \mathcal{S}$  есть преобразование Фурье функции  $\psi = F^{-1}[\varphi] \in \mathcal{S}$ ,  $\varphi = F[\psi]$ , причем, если  $F[\varphi] = 0$ , то и  $\varphi = 0$ . Другими словами, преобразование Фурье  $F$  взаимно однозначно отображает  $\mathcal{S}$  на  $\mathcal{S}$ .

**ЛЕММА.** *Операция преобразования Фурье непрерывна из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{S}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ . Применяя оценку (4) к функциям  $\varphi_k$  при данных  $\alpha$  и  $\beta$ , получим

$$\begin{aligned} |\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\leq \int |\partial^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))| dx \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))(1 + |x|)^{n+1}| \int \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|\xi^\beta \partial^\alpha F[\varphi_k]| \rightharpoonup 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad k \rightarrow \infty,$$

т. е.  $F[\varphi_k] \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$  (см. § 2.4, п. 1). Лемма доказана.

Аналогичными свойствами обладает и операция обратного преобразования Фурье  $F^{-1}$ .

## 2. Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ .

Пусть сначала  $f(x)$  — (абсолютно) интегрируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда ее преобразование Фурье

$$F[f](\xi) = \int f(x)e^{i(\xi, x)} dx, \quad |F[f](\xi)| \leq \int |f(x)| dx,$$

есть непрерывная, ограниченная в  $\mathbb{R}^n$  функция, и, следовательно, определяет обобщенную функцию из  $\mathcal{S}'$ :

$$(F[f], \varphi) = \int F[f](\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Используя теорему о перемене порядка интегрирования (см. [2]), преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \int F[f](\xi)\varphi(\xi) d\xi &= \int \left( \int f(x)e^{i(\xi, x)} dx \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int f(x) \left( \int \varphi(\xi)e^{i(x, \xi)} d\xi \right) dx = \int f(x)F[\varphi](x) dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (7)$$

Равенство (7) мы и примем за определение *преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста*  $f \in \mathcal{S}'$ .

Проверим, что правая часть равенства (7) определяет линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$ , т. е. что  $F[f] \in \mathcal{S}'$ . Действительно, так как  $F[\varphi] \in \mathcal{S}$  для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$  (см. п. 1), то  $(f, F[\varphi])$  есть функционал (очевидно, линейный) на  $\mathcal{S}$ . Пусть  $\varphi_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ . По лемме из п. 1  $F[\varphi_k] \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}$ , и потому  $(f, F[\varphi_k]) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  (напомним,  $f \in \mathcal{S}'$ ), так что функционал  $(f, F[\varphi])$  непрерывный на  $\mathcal{S}$ .

Таким образом операция преобразования Фурье  $F$  переводит пространство  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$ .

Более того,  $F$  — линейная и непрерывная операция из  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$ .

Линейность  $F$  очевидна. Докажем ее непрерывность. Пусть  $f_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}'$ . Тогда в силу (7) при всех  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Это и означает, что  $F[f_k] \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{S}'$ .

Введем на  $\mathcal{S}'$  еще операцию  $F^{-1}$ :

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathcal{S}'. \quad (8)$$

Проверим, что операция  $F^{-1}$  является обратной к операции преобразования Фурье  $F$ , т. е.

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathcal{S}'. \quad (9)$$

Действительно, из (5)–(8) для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем

$$\begin{aligned} (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\xi), F[\varphi]) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = \\ &= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi), \end{aligned}$$

откуда и следуют формулы (9).

Из формул (9) вытекает, что всякая обобщенная функция  $f \in \mathcal{S}'$  есть преобразование Фурье обобщенной функции  $g = F^{-1}[f] \in \mathcal{S}'$ ,  $f = F[g]$ , и если  $F[f] = 0$ , то и  $f = 0$ . Таким образом, мы доказали, что преобразование Фурье  $F$  отображает  $\mathcal{S}'$  на  $\mathcal{S}'$  взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Введем преобразование Фурье  $F_x[f]$  по переменным  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , положив для  $\varphi(\xi, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \quad (10)$$

Как и в лемме из п. 1, устанавливается, что

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(x, \xi)} d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

и что операция  $F_\xi[\varphi]$  непрерывна из  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$  в  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ , так что формула (10) действительно определяет обобщенную функцию  $F_x[f](\xi, y)$  из  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ .

**ПРИМЕР.** Покажем, что

$$F[\delta(x - x_0)](\xi) = e^{i(\xi, x_0)}. \quad (11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (F[\delta(x - x_0)], \varphi) &= (\delta(x - x_0), F[\varphi](x)) = F[\varphi](x_0) = \\ &= \int \varphi(\xi) e^{i(x_0, \xi)} d\xi = (e^{i(\xi, x_0)}, \varphi(\xi)), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Полагая в (11)  $x_0 = 0$ , получим

$$F[\delta] = 1, \quad (12)$$

откуда

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

так что

$$F[1](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi). \quad (13)$$

### 3. Свойства преобразования Фурье.

a) *Дифференцирование преобразования Фурье.* Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ , тогда

$$\partial^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f(x)]. \quad (14)$$

Действительно, пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$ , тогда в силу (2)

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[f], \partial^\alpha \varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, F[\partial^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|} (f(x), (-ix)^\alpha F[\varphi](x)) = \\ &= ((ix)^\alpha f(x), F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f(x)], \varphi), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (14).

В частности, полагая в (14)  $f = 1$  и пользуясь формулой (13), получим

$$F[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha F[1] = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta. \quad (15)$$

b) *Преобразование Фурье производной.* Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ , тогда

$$F[\partial^\alpha f](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[f](\xi). \quad (16)$$

В самом деле, пользуясь формулой (1), при всех  $\varphi \in \mathcal{S}$ , получим

$$\begin{aligned} (F[\partial^\alpha f], \varphi) &= (\partial^\alpha f, F[\varphi]) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha F[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[(i\xi)^\alpha \varphi(\xi)]) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} (F[f](\xi), (i\xi)^\alpha \varphi(\xi)) = ((-i\xi)^\alpha F[f](\xi), \varphi(\xi)), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (16).

В частности, полагая  $f = \delta$  и пользуясь формулой (12), получим

$$F[\partial^\alpha \delta](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\delta](\xi) = (-i\xi)^\alpha. \quad (17)$$

в) *Преобразование Фурье сдвига.* Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ , тогда

$$F[f(x - x_0)](\xi) = e^{i(x_0, \xi)} F[f](\xi). \quad (18)$$

Действительно, при всех  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем

$$\begin{aligned} (F[f(x - x_0)](\xi), \varphi(\xi)) &= (f(x - x_0), F[\varphi](x)) = \\ &= (f(x), F[\varphi](x + x_0)) = (f(x), F[\varphi(\xi)e^{i(x_0, \xi)}](x)) = \\ &= (F[f](\xi), e^{i(x_0, \xi)}\varphi(\xi)) = (e^{i(x_0, \xi)}F[f](\xi), \varphi(\xi)), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (18).

г) *Сдвиг преобразования Фурье.* Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ , тогда

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f(x)](\xi). \quad (19)$$

В самом деле, пусть  $\varphi \in \mathcal{S}$ , тогда в силу (18)

$$\begin{aligned} (F[f](\xi + \xi_0), \varphi(\xi)) &= (F[f](\xi), \varphi(\xi - \xi_0)) = \\ &= (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) = (f(x), e^{i(\xi_0, x)} F[\varphi](x)) = \\ &= (e^{i(\xi_0, x)} f(x), F[\varphi](x)) = (F[e^{i(\xi_0, x)} f(x)], \varphi), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (19).

д) *Преобразование Фурье подобия (с отражением).* Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ , тогда при всех вещественных  $c \neq 0$

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right). \quad (20)$$

Действительно, при всех  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем (см. § 2.4, п. 3, г)

$$\begin{aligned} (F[f(cx)], \varphi) &= (f(cx), F[\varphi](x)) = \frac{1}{|c|^n} \left( f(x), F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{|c|^n} \left( f(x), \int \varphi(\xi) e^{i(x/c, \xi)} d\xi \right) = \left( f(x), \int \varphi(c\eta) e^{i(x, \eta)} d\eta \right) = \\ &= (f(x), F[\varphi(c\eta)]) = (F[f](\eta), \varphi(c\eta)) = \frac{1}{|c|^n} \left( F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi(\xi) \right). \end{aligned}$$

е) *Преобразование Фурье прямого произведения.* Пусть  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ , тогда

$$\begin{aligned} F[f(x) \cdot g(y)] &= F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)] = \\ &= F_y[F[f](\xi) \cdot g(y)] = F[f](\xi) \cdot F[g](\eta). \end{aligned} \quad (21)$$

Действительно, при всех  $\varphi(\xi, \eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$  имеем

$$\begin{aligned} (F[f(x) \cdot g(y)], \varphi) &= (f(x) \cdot g(y), F[\varphi](x, y)) = \\ &= (f(x), (g(y), F_\eta F_\xi[\varphi](x, y))) = (f(x), (F[g](\eta), F_\xi[\varphi](x, \eta))) = \\ &= (f(x) \cdot F[g](\eta), F_\xi[\varphi](x, \eta)) = (F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)](\xi), \varphi(\xi, \eta)) = \\ &= (F[g](\eta), (f(x), F_\xi[\varphi])(x, \eta)) = (F[g](\eta), (F[f](\xi), \varphi(\xi, \eta))) = \\ &= (F[f](\xi) \cdot F[g](\eta), \varphi(\xi, \eta)), \end{aligned}$$

откуда и следуют равенства (21).

ж) Аналогичные формулы справедливы и для преобразования Фурье  $F_x$ . Например, пусть  $f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , тогда

$$\partial_\xi^\alpha \partial_y^\beta F_x[f] = F_x[(ix)^\alpha \partial_y^\beta f], \quad F_x[\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f](\xi, y) = (-i\xi)^\alpha \partial_y^\beta F_x[f](\xi, y). \quad (22)$$

#### 4. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем.

**ТЕОРЕМА.** Если  $f$  — финитная обобщенная функция, то ее преобразование Фурье принадлежит классу  $\Theta_M$  и имеет представление

$$F[f](\xi) = (f(x), \eta(x)e^{i(\xi, x)}), \quad (23)$$

где  $\eta$  — любая функция из  $\mathcal{D}$ , равная 1 в окрестности носителя  $f$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Учитывая равенства (6) из § 2.4 и (16) из п. 3, для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F[f], \partial^\alpha \varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f, F[\partial^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f(x), \eta(x)(-ix)^\alpha F[\varphi](x)) = \\ &= \left( f(x), \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \right). \end{aligned}$$

Замечая теперь, что

$$\eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}),$$

и пользуясь формулой (7) из § 2.4, получаем

$$\left( f(x), \int \eta(x)(ix)^\alpha \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \right) = \int (f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}) \varphi(\xi) d\xi.$$

Далее, из предыдущих равенств выводим равенство

$$(\partial^\alpha F[f], \varphi) = \int (f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}) \varphi(\xi) d\xi,$$

из которого вытекает, что

$$\partial^\alpha F[f](\xi) = (f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)}). \quad (24)$$

При  $\alpha = 0$  отсюда следует формула (23).

Из представления (24) следует (см. § 2.3), что  $\partial^\alpha F[f] \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ , так что  $F[f] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Далее, по лемме Л. Шварца (см. § 2.4, п. 2) существуют  $C > 0$  и целое  $p \geq 0$  такие, что справедливо неравенство (3) из § 2.4. Применяя это неравенство к правой части равенства (24), получим оценку

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha F[f](\xi)| &= |(f(x), \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)})| \leq C \left\| \eta(x)(ix)^\alpha e^{i(\xi, x)} \right\|_p = \\ &= C \sup_{|\beta| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|)^p \partial_x^\beta [\eta(x)x^\alpha e^{i(\xi, x)}]| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^p \end{aligned}$$

для всех  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , из которой и вытекает, что  $F[f] \in \Theta_M$  (см. § 2.4, п. 1). Теорема доказана.

**5. Преобразование Фурье свертки.** Пусть  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $g$  — фиксированная обобщенная функция. Тогда

$$F[f * g] = F[f]F[g]. \quad (25)$$

Действительно, в силу § 2.4, п. 3, ж) свертка  $f * g$  принадлежит  $\mathcal{S}'$  и представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \eta(y)\varphi(x+y))), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

где  $\eta \in \mathcal{D}$ ,  $\eta = 1$  в окрестности носителя  $g$ . Учитывая это представление, для всякой  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем

$$(F[f * g], \varphi) = (f * g, F[\varphi]) = \left( f(x), (g(y), \eta(y) \int \varphi(\xi) e^{i(x+y, \xi)} d\xi) \right).$$

Принимая во внимание, что по теореме из п. 4  $F[g] \in \Theta_M$ , и пользуясь формулами (7) из § 2.4 и (23), преобразуем полученное равенство:

$$(F[g * g], \varphi) = \left( f(x), \int (g(y), \eta(y) e^{i(y, \xi)}) e^{i(x, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( f(x), \int F[g](\xi) \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \right) = (f, F[F[g]\varphi]) = \\
&= (F[f], F[g]\varphi) = (F[g]F[f], \varphi),
\end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (25).

### 6. Примеры, $n = 1$ .

а) Легко проверяется равенство

$$F[\theta(R - |x|)](\xi) = \int_{-R}^R e^{i\xi x} dx = 2 \frac{\sin R\xi}{\xi}. \quad (26)$$

б) Имеет место равенство

$$F[e^{-\alpha^2 x^2}](\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4\alpha^2} \right\}. \quad (27)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
F[e^{-\alpha^2 x^2}](\xi) &= \int e^{-\alpha^2 x^2 + i\xi x} dx = \frac{1}{\alpha} \int \exp \left\{ \sigma^2 + i\frac{\xi}{\alpha}\sigma \right\} d\sigma = \\
&= \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4\alpha^2} \right\} \int \exp \left\{ -\left( \sigma + \frac{i\xi}{2\alpha} \right)^2 \right\} d\sigma = \\
&= \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{4\alpha^2} \right\} \int_{\operatorname{Im} \zeta = \xi/(2\alpha)} e^{-\zeta^2} d\zeta.
\end{aligned}$$

Осталось доказать, что линия интегрирования  $\operatorname{Im} \zeta = \xi/(2\alpha)$  в последнем интеграле может быть сдвинута на вещественную ось, т. е. при всех  $a \in \mathbb{R}$

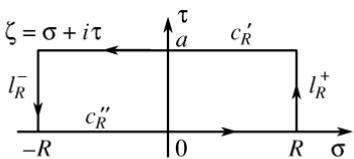


Рис. 25

$$\int_{\operatorname{Im} \zeta = a} e^{-\zeta^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}. \quad (28)$$

По теореме Коши при любом  $R > 0$  имеем (см. [3])

$$\int_{C_R} e^{-\zeta^2} d\zeta = 0, \quad \zeta = \sigma + i\tau, \quad (29)$$

где контур  $C_R = c_R' \cup l_R^- \cup c_R'' \cup l_R^+$  изображен на рис. 25. Но на отрез-

как  $l_R^\pm = \{0 \leq \tau \leq a, \sigma = \pm R\}$

$$|e^{-\zeta^2}| = |e^{-\sigma^2 + \tau^2 - 2i\sigma\tau}| = e^{-R^2 + \tau^2} \rightarrow 0, \quad \tau \in [0, a], \quad R \rightarrow \infty,$$

а потому справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{l_R^-} + \int_{l_R^+} \right) = 0,$$

откуда в силу (29) следует равенство (28):

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-\zeta^2} d\zeta &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{c'_R} + \int_{c''_R} \right) e^{-\zeta^2} d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma - \int_{\tau=ia} e^{-\zeta^2} d\zeta = 0. \end{aligned}$$

в) Имеет место равенство

$$F[e^{ix^2}](\xi) = \sqrt{\pi} \exp \left\{ -\frac{i}{4} (\xi^2 - \pi) \right\}. \quad (30)$$

Действительно, из сходимости несобственного интеграла (интеграла Френеля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} dy = \sqrt{\pi} \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} \right\}$$

вытекает равномерная сходимость по  $\xi$  на каждом конечном интервале несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2 + i\xi x} dx &= \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N e^{ix^2 + i\xi x} dx = \\ &= \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N \exp \left\{ \left( x + \frac{\xi}{2} \right)^2 - \frac{i}{4} \xi^2 \right\} dx = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{4} \xi^2 \right\} \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M + \xi/2}^{N + \xi/2} e^{iy^2} dy = \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{4} \xi^2 \right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} dy = \sqrt{\pi} \exp \left\{ -\frac{i}{4} (\xi^2 - \pi) \right\}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали равенство (30) поточечно при условии, что преобразование Фурье понимается как несобственный интеграл. Докажем справедливость этого равенства в  $\mathcal{S}'$ . В силу доказанного при всех  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\text{spt } \varphi \subset (-R, R)$ , имеем

$$\begin{aligned} (F[e^{ix^2}](\xi), \varphi(\xi)) &= (e^{ix^2}, F[\varphi](x)) = \int e^{ix^2} F[\varphi](x) dx = \\ &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N e^{ix^2} \int_{-R}^R \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi dx = \\ &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \varphi(\xi) \int_{-M}^N e^{ix^2 + ix\xi} dx d\xi = \\ &= \int_{-R}^R \varphi(\xi) \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N e^{ix^2 + ix\xi} dx d\xi = \\ &= \sqrt{\pi} \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} \right\} \int \varphi(\xi) \exp \left\{ -\frac{i}{4}\xi^2 \right\} d\xi, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость равенства (30) на основных функциях из  $\mathcal{D}$ . Но  $\mathcal{D}$  плотно в  $\mathcal{S}$  (см. § 2.4, п. 1), так что это равенство справедливо на всех основных функциях из  $\mathcal{S}$  (обратим внимание на то, что правая часть (30) определяет непрерывный функционал на  $\mathcal{S}$ ).

г) Справедливы равенства

$$F[\theta](\xi) = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}, \quad (31)$$

$$F[\theta(-x)](\xi) = \pi\delta(\xi) - i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}. \quad (31')$$

Действительно, при всех  $a > 0$  имеем

$$F[\theta(x)e^{-ax}](\xi) = \int_0^\infty e^{-ax+i\xi x} dx = \frac{i}{\xi+ia}. \quad (32)$$

Так как

$$\theta(x)e^{-ax} \rightarrow \theta(x) \quad \text{в } \mathcal{S}', \quad a \rightarrow +0,$$

то, переходя в формуле (32) к пределу при  $a \rightarrow +0$  и пользуясь непрерывностью преобразования Фурье (см. п. 2), получаем

$$F[\theta] = \frac{i}{\xi+i0}. \quad (33)$$

Применяя теперь формулу Сохоцкого (10) из § 2.1, получаем равенство (31). Равенство (31') устанавливается аналогично.

д) Имеет место равенство

$$F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|} \right] (\xi) = -2C - 2 \ln |\xi|, \quad (34)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,

$$C = \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u} du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u} du,$$

и обобщенная функция  $\mathcal{P} \frac{1}{|x|}$  определена в § 2.2, п. 6, б).

Действительно, при всех  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем

$$\begin{aligned} \left( F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|} \right], \varphi \right) &= \left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|}, F[\varphi](x) \right) = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi) (e^{ix\xi} - 1) d\xi dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi dx = \\ &= 2 \int_0^1 \int \varphi(\xi) \frac{\cos x\xi - 1}{x} d\xi dx + 2 \int_1^\infty \int \varphi(\xi) \frac{\cos x\xi}{x} d\xi dx = \\ &= 2 \int \varphi(\xi) \int_0^1 \frac{\cos \xi x - 1}{x} dx d\xi - 2 \int_1^\infty \int \varphi'(\xi) \frac{\sin x}{x^2} d\xi dx = \\ &= 2 \int \varphi(\xi) \int_0^{|\xi|} \frac{\cos u - 1}{u} du d\xi - 2 \int \varphi'(\xi) \int_1^\infty \frac{\sin \xi x}{x^2} dx d\xi = \\ &= 2 \int \varphi(\xi) \left[ \int_0^{|\xi|} \frac{\cos u - 1}{u} du + \frac{d}{d\xi} \int_1^\infty \frac{\sin \xi x}{x^2} dx \right] d\xi = \\ &\quad = -2 \int \varphi(\xi) (C + \ln |\xi|) d\xi, \end{aligned}$$

откуда и следует формула (34).

е) В § 2.2, п. 4, г) было установлено равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}. \quad (35)$$

Нетрудно проверить, что ряды слева и справа сходятся в  $\mathcal{S}'$ . С помощью формулы (11) перепишем равенство (35) в виде

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(\xi - k)](x).$$

Применяя это равенство к  $\varphi \in \mathcal{S}$ , получим

$$\begin{aligned} 2\pi \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k), \varphi(x) \right) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(x - 2\pi k), \varphi(x)) = \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\delta(\xi - k)](x), \varphi(x) \right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(\xi - k), F[\varphi](\xi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k), \end{aligned}$$

т. е.

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[\varphi](k). \quad (36)$$

Равенство (36) называется *формулой суммирования Пуассона*. Полагая в формуле (36)

$$\varphi(x) = \exp \left\{ -\frac{tx^2}{4\pi^2} \right\}, \quad F[\varphi](\xi) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2\pi^2}{t} \right\}, \quad t > 0,$$

получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-tk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{k^2\pi^2}{t} \right\}. \quad (37)$$

Формула (37) применяется в теории эллиптических функций.

## 7. Примеры, $n > 1$ .

а) Пусть квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = (Ax, x), \quad A = (a_{ij}),$$

вещественна и положительно определена:

$$(Ax, x) \geq \sigma|x|^2, \quad \sigma > 0.$$

Тогда

$$F[e^{-(Ax, x)}] = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} (\xi, A^{-1} \xi) \right\}. \quad (38)$$

Для доказательства формулы (38) с помощью неособенного вещественного преобразования  $x = By$  приведем квадратичную форму  $(Ax, x)$  к диагональному виду:

$$(Ax, x) = (ABy, By) = (B'ABy, y) = |y|^2,$$

так что

$$A^{-1} = BB', \quad \det A (\det B)^2 = 1.$$

Отсюда с помощью формулы (27) получаем

$$\begin{aligned} F[e^{-(Ax, x)}](\xi) &= \int e^{-(Ax, x) + i(\xi, x)} dx = |\det B| \int e^{-(ABy, By) + i(\xi, By)} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int e^{-|y|^2 + i(B'\xi, y)} dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{j=1}^n \int e^{-y_j^2 + i(B'\xi)_j y_j} dy_j = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} |B'\xi|^2 \right\} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} (\xi, BB'\xi) \right\} = \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} (\xi, A^{-1}\xi) \right\}. \end{aligned}$$

б) Аналогично, пользуясь формулой (30), получим

$$F[e^{i(Ax, x)}](\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp \left\{ i \frac{\pi n}{4} \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{4} (\xi, A^{-1}\xi) \right\}. \quad (39)$$

в) Пусть  $\delta_{S_R}(x)$  — простой слой на сфере  $S_R$  в  $\mathbb{R}^3$  (см. § 2.1, п. 6). Тогда

$$F[\delta_{S_R}](\xi) = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \quad (40)$$

Действительно, учитывая, что  $\delta_{S_R}$  — финитная обобщенная функция, и применяя формулу (23), получим

$$F[\delta_{S_R}](\xi) = (\delta_{S_R}(x), \eta(x)e^{i(\xi, x)}) = \int_{S_R} \eta(x)e^{i(\xi, x)} dS_R =$$

$$= R^2 \int_{S_1} e^{iR(\xi, s)} ds = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{iR|\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

г) Пусть  $n = 2$ . Введем обобщенную функцию  $\mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}$  из  $\mathcal{S}'$ , положив

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}, \varphi(x) \right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Тогда

$$F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|^2} \right] (\xi) = -2 \ln |\xi| - 2\pi C_0, \quad (41)$$

где постоянная —

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u} du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u} du,$$

$J_0$  — функция Бесселя (см. ниже § Д.1).

Действительно, при всех  $\varphi \in \mathcal{S}$  справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \left( F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|x|^2} \right] (\xi), \varphi(\xi) \right) &= \left( \mathcal{P} \frac{1}{|x|^2}, F[\varphi](x) \right) = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|^2} dx = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) [e^{i(x, \xi)} - 1] d\xi dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} [e^{ir|\xi| \cos \theta} - 1] d\theta d\xi dr + \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{1\pi} e^{ir|\xi| \cos \theta} d\theta d\xi dr = \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) [J_0(r|\xi|) - 1] d\xi dr + 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) J_0(r|\xi|) d\xi dr = \\ &= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[ \int_0^1 \frac{J_0(r|\xi|) - 1}{r} dr + \int_1^\infty \frac{J_0(r|\xi|)}{r} dr \right] d\xi = \\ &= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[ \int_0^{|\xi|} \frac{J_0(u) - 1}{u} du + \int_{|\xi|}^\infty \frac{J_0(u)}{u} du \right] d\xi = \end{aligned}$$

$$= -2\pi \int \varphi(\xi)(C_0 + \ln |\xi|) d\xi,$$

что и требовалось доказать.

д) Пусть опять  $n = 2$ , тогда

$$F \left[ \frac{\theta(R - |x|)}{\sqrt{R^2 - |x|^2}} \right] (\xi) = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}. \quad (42)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F \left[ \frac{\theta(R - |x|)}{\sqrt{R^2 - |x|^2}} \right] (\xi) &= \int_{|x| < R} \frac{e^{i(\xi, x)}}{\sqrt{R^2 - |x|^2}} dx = \\ &= \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} e^{ir \cos \theta} d\theta dr = 2\pi \int_0^R \frac{r J_0(r|\xi|)}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \\ &= 2\pi R \int_0^1 J_0(R|\xi|u) \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой 6.554, 2) из известного справочника И. С. Градштейна и И. М. Рыжика.

е) Пусть  $n = 3$ , тогда

$$F \left[ \frac{1}{|x|^2} \right] (\xi) = \frac{2\pi^2}{|\xi|}. \quad (43)$$

Действительно, поскольку функция  $|x|^{-2}$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^3$ , для всякой  $\varphi \in \mathcal{S}$  имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \left( F \left[ \frac{1}{|x|^2} \right] (\xi), \varphi(\xi) \right) &= \left( \frac{1}{|x|^2}, F[\varphi](x) \right) = \int \frac{1}{|x|^2} F[\varphi](x) dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| < R} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \int_{|x| < R} \frac{e^{i(\xi, x)}}{|x|^2} dx d\xi = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{i|\xi|\rho \cos \theta}}{\rho^2} d\phi \sin \theta d\theta \rho^2 d\rho d\xi = \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \varphi(\xi) \int_0^R \int_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho \mu} d\mu d\rho d\xi = \end{aligned}$$

$$= 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} \int_0^R \frac{\sin |\xi|\rho}{\rho} d\rho d\xi. \quad (44)$$

Так как

$$|\xi| \left| \int_R^\infty \frac{\sin |\xi|\rho}{\rho} d\rho \right| = \left| \frac{\cos |\xi|R}{R} - \int_R^\infty \frac{\cos |\xi|\rho}{\rho^2} d\rho \right| \leq \frac{1}{R} + \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R},$$

то возможен предельный переход при  $R \rightarrow \infty$  под знаком интеграла в последнем члене равенства (44). В результате, учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin |\xi|\rho}{\rho} d\rho = \frac{\pi}{2}, \quad |\xi| \neq 0,$$

получим

$$\left( F\left[\frac{1}{|x|^2}\right](\xi), \varphi(\xi) \right) = 4\pi \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2} |\xi| \int_0^\infty \frac{\sin |\xi|\rho}{\rho} d\rho d\xi = 2\pi^2 \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} d\xi,$$

откуда и следует формула (43).

### 8. Упражнения.

Используя (31), (31') и равенство  $\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2} = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi}\right)'$  (см. § 2.2, п. 6, а)), показать, что:

а)  $F[\operatorname{sgn} x] = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$ ,  $F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = i\pi \operatorname{sgn} \xi$ ;

б)  $F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi|\xi|$ ,  $F[|x|] = -2\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}$ ;

в)  $F[\theta(x)x] = -i\pi\delta'(\xi) - \mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}$ .

г) Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k), \quad |a_k| \leq (1+|k|)^m,$$

сходится в  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$  и

$$F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

д) Пользуясь теоремой из § 2.4, п. 4, доказать: если  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  сферически симметрична (т. е.  $f(Ax) = f(x)$  для всех вращений  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ ) или лоренц-инвариантна (см. § 2.1, п. 9) и  $\operatorname{spt} f = \{0\}$ , то  $f(x) = P(\Delta)\delta(x)$  или  $f(x) = P(\square)\delta(x)$  соответственно, где  $P$  — некоторый полином.

е) Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $\text{spt } f \subset [-a, a]$ , и пусть  $\eta$  — произвольная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ , равная 1 в окрестности носителя  $f$ . Доказать, что функция комплексного переменного  $z = x + iy$

$$\tilde{f}(z) = (f(\xi), \eta(\xi)e^{iz\xi}) \quad (45)$$

не зависит от  $\eta$ , целая и при некотором  $m \geq 0$  удовлетворяет оценке: для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $C_\varepsilon > 0$  такое, что

$$|\tilde{f}(x + iy)| \leq C_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)|y|} (1 + |x|)^m. \quad (46)$$

Обратно, если целая функция  $\tilde{f}(z)$  удовлетворяет оценке (46) с некоторым  $m \geq 0$ , то существует (единственная) функция  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ,  $\text{spt } f \subset [-a, a]$ , для которой имеет место представление (45) (*теорема Пейли–Винера–Шварца*).

## Г л а в а III

# ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ

В этой главе теория обобщенных функций применяется к построению фундаментальных решений и к решению задачи Коши для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности. При этом задача Коши рассматривается в обобщенной постановке, что позволяет включить начальные условия в мгновенно действующие источники (типа простого и двойного слоя на поверхности  $t = 0$ ). Таким путем задача Коши сводится к задаче о нахождении такого (обобщенного) решения данного уравнения (с измененной правой частью), которое обращается в нуль при  $t < 0$ . Последняя задача решается стандартным методом — методом суммирования возмущений, порождаемых каждой точкой источника, так что решение ее представляется в виде свертки фундаментального решения с правой частью.

### § 3.1. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов

Для построения фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами применяется метод преобразования Фурье. Этим методом, естественно, могут быть получены только фундаментальные решения медленного роста.

**1. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений.** Пусть

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \quad f \in \mathcal{D}', \quad (1)$$

— линейное дифференциальное уравнение порядка  $m$  с коэффициентами  $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Вводя линейный дифференциальный оператор

$$L(x, \partial) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

перепишем это уравнение в виде

$$L(x, \partial)u = f(x). \quad (1')$$

*Обобщенным решением* уравнения (1) в области  $G$  называется всякая обобщенная функция  $u \in \mathcal{D}'(G)$ , удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле, т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$  (см. § 2.1, п. 2)

$$(L(x, \partial)u, \varphi) = (f, \varphi). \quad (2)$$

Равенство (2) равносильно равенству

$$(u, L^*(x, \varphi)) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad (2')$$

где

$$L^*(x, \partial)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi). \quad (3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (L(x, \partial)u, \varphi) &= \left( \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \right) = \sum_{|\alpha|=0}^m (a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi) = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m (\partial^\alpha u, a_\alpha \varphi) = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha (a_\alpha \varphi)) = \\ &= \left( u, \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \right) = (u, L^*(x, \partial)\varphi). \end{aligned}$$

Ясно, что всякое классическое решение является и обобщенным решением. Обратное утверждение сформулируем в виде следующей леммы.

**ЛЕММА.** *Если  $f \in \mathcal{C}(G)$  и обобщенное решение  $u(x)$  уравнения (1) в области  $G$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^m(G)$ , то оно является и классическим решением этого уравнения в области  $G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $u \in \mathcal{D}'(G) \cap \mathcal{C}^m(G)$ , то классические и обобщенные производные функции  $u$  до порядка  $m$  включительно совпадают в области  $G$  (см. § 2.2, п. 1). Поскольку  $u$  — обобщенное решение уравнения (1) в области  $G$ , то непрерывная в  $G$  функция  $L(x, \partial)u - f$  обращается в нуль в области  $G$  в смысле обобщенных функций. По лемме Дюбуа-Реймона (см. § 2.1, п. 5)  $L(x, \partial)u - f = 0$  во всех точках области  $G$ , так что  $u$  удовлетворяет уравнению (1) в области  $G$  в классическом смысле. Лемма доказана.

**2. Фундаментальные решения.** Пусть  $L$  — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами,  $a_\alpha(x) = a_\alpha$ ,

$$L(\partial) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha, \quad L^*(\partial) = L(-\partial). \quad (4)$$

*Фундаментальным решением (функцией влияния)* оператора  $L(\partial)$  называется обобщенная функция  $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , удовлетворяющая в  $\mathbb{R}^n$  уравнению

$$L(\partial)\mathcal{E} = \delta(x). \quad (5)$$

Фундаментальное решение  $\mathcal{E}(x)$  оператора  $L(\partial)$ , вообще говоря, не единственно; оно определяется с точностью до слагаемого  $\mathcal{E}_0(x)$ , являющегося произвольным решением однородного уравнения  $L(\partial)\mathcal{E}_0 = 0$ .

Действительно, обобщенная функция  $\mathcal{E}(x) + \mathcal{E}_0(x)$  также является фундаментальным решением оператора  $L(\partial)$ :

$$L(\partial)(\mathcal{E} + \mathcal{E}_0) = L(\partial)\mathcal{E} + L(\partial)\mathcal{E}_0 = \delta(x).$$

**ЛЕММА.** Для того чтобы обобщенная функция  $\mathcal{E}$  из  $\mathcal{S}'$  была фундаментальным решением оператора  $L(\partial)$ , необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Фурье  $F[\mathcal{E}]$  удовлетворяло уравнению

$$L(-i\xi)F[\mathcal{E}] = 1, \quad (6)$$

где

$$L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\mathcal{E} \in \mathcal{S}'$  — фундаментальное решение оператора  $L(\partial)$ . Применяя преобразование Фурье к обеим частям равенства (5), получим

$$F[L(\partial)\mathcal{E}] = F[\delta] = 1. \quad (7)$$

В силу формулы (16) из § 2.5 имеем

$$\begin{aligned} F[L(\partial)\mathcal{E}] &= F\left[\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}\right] = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha F[\partial^\alpha \mathcal{E}] = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (-i\xi)^\alpha F[\mathcal{E}] = L(-i\xi)F[\mathcal{E}]; \quad (8) \end{aligned}$$

отсюда и из (7) вытекает, что  $F[\mathcal{E}]$  удовлетворяет уравнению (6).

Обратно, если  $\mathcal{E} \in \mathcal{S}'$  удовлетворяет уравнению (6), то в силу (8)  $\mathcal{E}$  удовлетворяет уравнению (7), откуда следует, что  $\mathcal{E}$  удовлетворяет уравнению (5), т. е. является фундаментальным решением оператора  $L(\partial)$ . Лемма доказана.

Доказанная лемма сводит задачу построения фундаментальных решений медленного роста линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами к решению в  $\mathcal{S}'$  алгебраических уравнений вида

$$P(\xi)X = 1, \quad (9)$$

где  $P$  — произвольный полином.

Как видно из уравнения (9), всякое его решение из  $\mathcal{D}'$  (если такое существует) должно совпадать с функцией  $\frac{1}{P(\xi)}$  вне множества  $N_P$  нулей полиномов  $P(\xi)$ ,

$$N_P = \{\xi: P(\xi) = 0\}.$$

Отсюда следует, что если  $N_P \neq \emptyset$ , то решение уравнения (9) не единственное: разные решения отличаются друг от друга на обобщенную функцию с носителем в  $N_P$ . Например, различными решениями уравнения  $\xi X = 1$  являются обобщенные функции

$$\frac{1}{\xi + i0}, \quad \frac{1}{\xi - i0}, \quad \mathcal{P}\frac{1}{\xi},$$

отличающиеся друг от друга на выражение вида  $\delta(\xi)$  (см. формулы Сохоцкого (7) и (7') из § 2.1).

Если функция  $\frac{1}{P(\xi)}$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^n$ , то она (точнее, определяемый ею регулярный функционал) является решением в  $\mathcal{S}'$  уравнения (9). Если же функция  $\frac{1}{P(\xi)}$  не является локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$ , то возникает нетривиальная задача о построении

в  $\mathcal{S}'$  решения уравнения (9). Л. Хёрмандер доказал, что уравнение (9) всегда разрешимо в  $\mathcal{S}'$ , если  $P(\xi) \not\equiv 0$ .

Обозначим через  $\text{reg } \frac{1}{P(\xi)}$  какое-либо решение из  $\mathcal{S}'$  уравнения (9). Построение этого решения существенно зависит от структуры нулей множества  $N_P$  и может быть проведено для каждого конкретного полинома  $P$ .

Таким образом, уравнение (6) всегда разрешимо в  $\mathcal{S}'$ ,

$$F[\mathcal{E}] = \text{reg} \frac{1}{L(-i\xi)}.$$

Следовательно, всякий линейный дифференциальный оператор  $L(\partial)$  с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение медленного роста, и это решение дается формулой

$$\mathcal{E} = F^{-1} \left[ \text{reg} \frac{1}{L(-i\xi)} \right] = \frac{1}{(2\pi)^n} F \left[ \text{reg} \frac{1}{L(i\xi)} \right]. \quad (10)$$

**3. Уравнения с правой частью.** С помощью фундаментального решения  $\mathcal{E}(x)$  оператора  $L(\partial)$  можно построить решение уравнения

$$L(\partial)u = f(x) \quad (11)$$

с произвольной правой частью  $f$ . Точнее, справедлива следующая

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'$  такова, что свертка  $\mathcal{E} * f$  существует в  $\mathcal{D}'$ . Тогда решение уравнения (11) существует в  $\mathcal{D}'$  и дается формулой

$$u = \mathcal{E} * f. \quad (12)$$

Это решение *единственно в классе тех обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$ , для которых существует свертка с  $\mathcal{E}$* .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пользуясь формулой дифференцирования свертки (см. (20) из § 2.3) и учитывая равенство (5), получим

$$\begin{aligned} L(\partial)(\mathcal{E} * f) &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha (\mathcal{E} * f) = \left( \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E} \right) * f = \\ &= (L(\partial)\mathcal{E}) * f = \delta * f = f. \end{aligned}$$

Поэтому формула  $u = \mathcal{E} * f$  действительно дает решение уравнения (11).

Докажем единственность решения уравнения (11) в классе тех обобщенных функций из  $\mathcal{D}'$ , для которых свертка с  $\mathcal{E}$  существует в  $\mathcal{D}'$ .

Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$L(\partial)u = 0$$

имеет только нулевое решение в этом классе (см. § 1.1, п. 9). Но это действительно так, поскольку

$$u = u * \delta = u * (L(\partial)\mathcal{E}) = (L(\partial)u) * \mathcal{E} = 0.$$

Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ.** *Если  $u \in \mathcal{D}'$  и свертка  $u * \mathcal{E}$  существует в  $\mathcal{D}'$ , то справедливо равенство*

$$u = (L(\partial)u) * \mathcal{E}. \quad (13)$$

Физический смысл решения  $u = \mathcal{E} * f$ . Представим источник  $f(x)$  в виде «суммы» точечных источников  $f(\xi)\delta(x - \xi)$  (см. замечание в конце § 2.3, п. 3):

$$f(x) = f * \delta = \int f(\xi)\delta(x - \xi) d\xi.$$

В силу равенства (5) каждый точечный источник  $f(\xi)\delta(x - \xi)$  определяет влияние  $f(\xi)\mathcal{E}(x - \xi)$ . Поэтому решение

$$u(x) = \mathcal{E} * f = \int f(\xi)\mathcal{E}(x - \xi) d\xi$$

есть наложение (суперпозиции) этих влияний.

**4. Метод спуска.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в пространстве переменных  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x) \cdot \delta(t), \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad (14)$$

где

$$L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{q=1}^p \frac{\partial^q}{\partial t^q} L_q(\partial) + L_0(\partial)$$

и  $L_q(\partial)$  — дифференциальные операторы по переменным  $x$ .

Пусть обобщенная функция  $u$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  допускает продолжение на функции вида  $\varphi(x) \cdot 1(t)$ , где  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , в следующем смысле: какова бы ни была последовательность основных функций  $\eta_k(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^1$  (см. § 2.3, п. 2), существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) = (u, \varphi(x)1(t)) \quad (15)$$

(этот предел не зависит от последовательности  $\{\eta_k\}$ ).

Обозначим функционал (15) через  $u_0$ ,

$$(u_0, \varphi) = (u, \varphi(x)1(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (16)$$

Очевидно, при всяком  $k$  функционал  $(u, \varphi(x)\eta_k(t))$  линейный и непрерывный на  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , т. е. принадлежит  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Поэтому по теореме о полноте пространства  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  (см. § 2.1, п. 3) и предельный функционал  $u_0$  принадлежит  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Приведем два примера на построение продолжения  $u_0$ .

а) Пусть  $u(x, t)$  — функция такая, что функция  $\int |u(x, t)| dt$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $u_0(x)$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^n$  и представляется интегралом

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dt. \quad (17)$$

Действительно, в этом случае функция  $u(x, t)$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и предел (15)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int u(x, t)\varphi(x)\eta_k(t) dx dt = \\ &= \int u(x, t)\varphi(x) dx dt = \int \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dt dx \end{aligned}$$

при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  существует. Отсюда в силу (16) и вытекает формула (17).

б) Пусть  $u = f(x) \cdot \delta(t)$ , где  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $u_0 = f$ , поскольку

$$\begin{aligned} (u_0, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x)\eta_k(0)) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА.** *Если решение  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  уравнения (14) допускает продолжение (16), то обобщенная функция  $u_0$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет уравнению*

$$L_0(\partial)u_0 = f(x). \quad (18)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\eta_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — последовательность функций из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^1$ . Тогда при  $q = 1, 2, \dots$

последовательности функций  $\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)$  также сходятся к 1 в  $\mathbb{R}^1$ , и, следовательно, при всех  $\varphi$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  (ср. § 2.3, п. 3, в)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k^{(q)}(t)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)[\eta_k(t) + \eta_k^{(q)}(t)]) - \\ &\quad - \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)) = (u_0, \varphi) - (u_0, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая (19), проверим, что обобщенная функция  $u_0$  удовлетворяет уравнению (18):

$$\begin{aligned} (L_0(\partial)u_0, \varphi) &= (u_0, L_0(-\partial)\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, L_0(-\partial)\varphi(x)\eta_k(t)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( u, L_0(-\partial)\varphi(x)\eta_k(t) + \sum_{q=1}^p (-1)^q L_q(-\partial)\varphi(x)\eta_k^{(q)}(t) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( u, L\left(-\partial, -\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(x)\eta_k(t) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right) u, \varphi(x)\eta_k(t) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot \delta(t), \varphi(x)\eta_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x), \varphi(x)\eta_k(0)) = (f, \varphi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Изложенный метод получения решения  $u_0(x)$  уравнения (18) с  $n$  переменными через решение  $u(x, t)$  уравнения (14) с  $n+1$  переменными называется *методом спуска по переменной  $t$* .

Метод спуска особенно удобно использовать для построения фундаментальных решений. Действительно, применяя доказанную теорему при  $f = \delta(x)$ , получим: если  $\mathcal{E}(x, t)$  — фундаментальное решение оператора  $L\left(\partial, \frac{\partial}{\partial t}\right)$  — допускает продолжение  $\mathcal{E}_0(x)$  вида (16), то обобщенная функция

$$(\mathcal{E}_0, \varphi) = (\mathcal{E}, \varphi(x) \cdot 1(t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (20)$$

есть фундаментальное решение оператора  $L_0(\partial)$ ; в частности, если  $\mathcal{E}(x, t)$  такова, что функция  $\int |\mathcal{E}(x, t)| dt$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^n$ , то

$$\mathcal{E}_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) dt. \quad (21)$$

Фундаментальные решения  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}$  удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{E}_0(x) \cdot 1(t) = \mathcal{E} * [\delta(x) \cdot 1(t)].$$

Физический смысл этой формулы состоит в том, что  $\mathcal{E}_0(x)$  есть (не зависящее от  $t$ ) возмущение от источника  $\delta(x) \cdot 1(t)$ , сосредоточенного на оси  $t$  (ср. п. 3).

**5. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора с обыкновенными производными.** Рассмотрим уравнение

$$L\mathcal{E} \equiv \frac{d^n\mathcal{E}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}\mathcal{E}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \mathcal{E} = \delta(t).$$

В § 2.2, п. 4, е) было показано, что фундаментальное решение этого оператора выражается формулой

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t)Z(t),$$

где  $Z(t)$  удовлетворяет однородному уравнению  $LZ = 0$  и начальным условиям

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(n-2)(0)} = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1.$$

В частности, функции

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t)e^{-at}, \tag{22}$$

$$\mathcal{E}(t) = \theta(t) \frac{\sin at}{a} \tag{23}$$

являются соответственно фундаментальными решениями операторов

$$\frac{d}{dt} + a, \quad \frac{d^2}{dt^2} + a^2.$$

**6. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(x, t). \tag{24}$$

В § 2.2, п. 5, е) было показано, что решение уравнения (24) выражается формулой

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\}, \tag{25}$$

и, следовательно, эта функция является фундаментальным решением оператора теплопроводности.

Выведем формулу (25) методом преобразования Фурье. Для этого применим преобразование Фурье  $F_x$  (см. § 2.5, п. 2) к равенству (24):

$$F_x \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right] - a^2 F_x[\Delta \mathcal{E}] = F_x[\delta(x, t)],$$

и воспользуемся формулами (21) и (22) из § 2.5:

$$F_x[\delta(x, t)] = F_x[\delta(x) \cdot \delta(t)] = F[\delta](\xi) \cdot \delta(t) = 1(\xi) \cdot \delta(t),$$

$$F_x \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} F_x[\mathcal{E}], \quad F_x[\Delta \mathcal{E}] = -|\xi|^2 F_x[\mathcal{E}].$$

В результате для обобщенной функции  $\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = F_x[\mathcal{E}](\xi, t)$  получаем уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}(\xi, t)}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \quad (26)$$

Пользуясь формулой (22) с заменой  $a$  на  $a^2 |\xi|^2$ , заключаем, что решением в  $S'$  уравнения (26) является функция

$$\tilde{\mathcal{E}}(\xi, t) = \theta(t) e^{-a^2 |\xi|^2 t}.$$

Отсюда, применяя обратное преобразование Фурье  $F_\xi^{-1}$  и пользуясь формулой (38) из § 2.5, получаем равенство (25):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= F_\xi^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}](x, t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n} \int e^{-a^2 |\xi|^2 t - i(\xi, x)} d\xi = \\ &= \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\}. \end{aligned}$$

**7. Фундаментальное решение волнового оператора.**  
Рассмотрим уравнение

$$\square_a \mathcal{E}_n = \delta(x, t). \quad (27)$$

Применяя к равенству (27) преобразование Фурье  $F_x$  и действуя, как в предыдущем пункте, вместо уравнения (26) для обобщенной функции  $F_x[\mathcal{E}_n] = \tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t)$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t) = 1(\xi) \cdot \delta(t). \quad (28)$$

Пользуясь формулой (23) с заменой  $a$  на  $a|\xi|$ , заключаем, что решением в  $S'$  уравнения (28) является функция

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_n(x, t) = F_\xi^{-1}[\tilde{\mathcal{E}}_n](x, t) = \theta(t) F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right]. \quad (29)$$

Пусть  $n = 3$ . Тогда из формулы (40) из § 2.5 выводим

$$F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right] = \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x).$$

Отсюда и из (29) получаем

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), \quad (30)$$

причем обобщенная функция  $\mathcal{E}_3$  действует по правилу

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_3, \varphi) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty (\delta_{S_{at}}, \varphi) \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS_x dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично, пользуясь формулами (26) и (42) из § 2.5, получим (ср. § 2.2, п. 5, ж.)

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \quad \mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}. \quad (32)$$

Для получения фундаментальных решений  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_1$  можно также воспользоваться методом спуска (см. § 3.2, п. 4).

**8. Фундаментальное решение оператора Лапласа.** Рассмотрим уравнение

$$\Delta \mathcal{E}_n = \delta(x). \quad (33)$$

В § 2.2, п. 5, г) было показано, что функции

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \quad \mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3, \quad (34)$$

являются фундаментальными решениями оператора Лапласа. Вычислим эти фундаментальные решения методом преобразования Фурье. Применяя преобразование Фурье к равенству (33), получим

$$-|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n] = 1. \quad (35)$$

Пусть  $n = 2$ . Проверим, что обобщенная функция  $-\mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}$  (см. § 2.5, п. 7, г)) удовлетворяет уравнения (35). Действительно,

$$\begin{aligned} \left( |\xi|^2 \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, \varphi \right) &= \left( \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}, |\xi|^2 \varphi \right) = \int_{|\xi|<1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi) - |\xi|^2 \varphi(\xi)|_{\xi=0}}{|\xi|^2} d\xi + \\ &\quad + \int_{|\xi|>1} \frac{|\xi|^2 \varphi(\xi)}{|\xi|^2} d\xi = \int \varphi(\xi) d\xi = (1, \varphi) \end{aligned}$$

для любой  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Следовательно, в соответствии со схемой из п. 2 можно положить

$$F[\mathcal{E}_2] = \operatorname{reg} \frac{1}{-|\xi|^2} = -\mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (41) из § 2.5, получаем

$$\mathcal{E}_2(x) = F^{-1} \left[ -\mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2} \right] = -\frac{1}{4\pi^2} F \left[ \mathcal{P} \frac{1}{|\xi|^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \ln |x| + \frac{C_0}{2\pi}. \quad (36)$$

Так как постоянная функция удовлетворяет однородному уравнению Лапласа, то, отбрасывая в (36) слагаемое  $\frac{C_0}{2\pi}$ , убеждаемся, что фундаментальное решение  $\mathcal{E}_2(x)$  можно выбрать равным  $\frac{1}{2\pi} \ln |x|$ .

Пусть теперь  $n \geq 3$ . В этом случае функция  $-|\xi|^{-2}$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^n$ , и потому в соответствии с п. 2

$$F[\mathcal{E}_n] = -\frac{1}{|\xi|^2}, \quad \mathcal{E}_n = -F^{-1} \left[ \frac{1}{|\xi|^2} \right].$$

Отсюда при  $n = 3$ , пользуясь формулой (43) из § 2.5, получаем

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \quad (37)$$

Аналогично вычисляется  $\mathcal{E}_n(x)$  и при  $n > 3$ .

Особенно просто  $\mathcal{E}_n(x)$  строится методом спуска по переменной  $t$  (см. п. 4) из фундаментальных решений оператора теплопроводности или волнового оператора. Например, пользуясь формулой (21), из (25) при  $a = 1$  получаем формулу (34):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) dt = - \int_0^{\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\} dt = \\ &= -\frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n/2-2} du = \\ &= -\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{|x|^{-n+2}}{4\pi^{n/2}} = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

## 9. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца.

Рассмотрим уравнение

$$(\Delta + k^2) \mathcal{E}_n = \delta(x). \quad (38)$$

В § 2.2, п. 5, д) было показано, что

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \quad \bar{\mathcal{E}}_3(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|} \quad (39)$$

— фундаментальные решения оператора Гельмгольца при  $n = 3$ . Формулы (39) справедливы и при комплексных  $k$ .

Метод преобразования Фурье сводит уравнение (38) к алгебраическому уравнению

$$(-|\xi|^2 + k^2) F[\mathcal{E}_n] = 1. \quad (40)$$

Прямые вычисления показывают, что в случае  $n = 2$  фундаментальные решения оператора Гельмгольца суть функции (см. § Д.1, п. 8)

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|), \quad \bar{\mathcal{E}}_2(x) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|). \quad (41)$$

Аналогично, в случае  $n = 1$  фундаментальными решениями оператора Гельмгольца являются функции

$$\mathcal{E}_1(x) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x|}, \quad \bar{\mathcal{E}}_1(x) = -\frac{1}{2ik} e^{-ik|x|}. \quad (42)$$

## 10. Упражнения.

а) Пользуясь формулой (29), показать, что обобщенные функции

$$\mathcal{E}_n(x, t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)}{2\pi a} \left( \frac{1}{\pi a^2} \frac{d}{d(t^2)} \right)^{(n-3)/2} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), & n \geq 3 \text{ нечетное}, \\ \frac{1}{2\pi a} \left( \frac{1}{\pi a^2} \frac{d}{d(t^2)} \right)^{(n-2)/2} \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, & n \geq 2 \text{ четное}, \end{cases}$$

являются фундаментальными решениями волнового оператора  $\square_a$ .

б) Доказать, что обобщенные функции

$$D^r(x_0, x) = \frac{\theta(x_0)}{2\pi} \delta(x_0^2 - |x|^2) - \frac{m_0}{4\pi} \theta(x_0 - |x|) \frac{J_1(m_0 \sqrt{x_0^2 - |x|^2})}{\sqrt{x_0^2 - |x|^2}}$$

и  $D^a(x_0, x) = D^r(-x_0, x)$  являются фундаментальными решениями оператора Клейна–Гордона–Фока  $\square_1 + m_0^2$ ; здесь  $n = 3$ ,  $x_0 = t$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $J_1$  — функция Бесселя (см. § Д.1, п. 1).

в) Доказать, что обобщенные функции

$$D^+(x_0, x) = \frac{1}{8\pi^3 i} F[\theta(\xi_0) \delta(\xi_0^2 - |\xi|^2 - m_0^2)],$$

$$D^-(x_0, x) = -\frac{1}{8\pi^3 i} F[\theta(-\xi_0) \delta(\xi_0^2 - |\xi|^2 - m_0^2)]$$

удовлетворяют уравнению Клейна–Гордона–Фока и соотношению

$$D^+ + D^- = D^r - D^a.$$

Обобщенные функции  $D^r$ ,  $D^a$ ,  $D^+$  и  $D^-$  играют важную роль в квантовой теории поля.

г) Пользуясь формулой (39) из § 2.5, показать, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = -\theta(t) \frac{e^{i\pi/4}}{\hbar} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi\hbar t}} \exp \left\{ \frac{im_0}{2\hbar t} x^2 \right\}$$

является фундаментальным решением одномерного оператора Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

д) Показать, что функция

$$\mathcal{E}_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k \Gamma(n/2 - k)}{2^{2k} \pi^{n/2} \Gamma(k)} |x|^{2k-n}$$

есть фундаментальное решение интегрированного оператора Лапласа  $\Delta^k$  при  $2k < n$ .

### § 3.2. Волновой потенциал

**1. Свойства фундаментального решения волнового оператора.** Фундаментальными решениями волнового оператора при  $n = 1, 2, 3$  являются (обобщенные) функции (см. формулы (32) и (30) из § 3.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(x, t) &= \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), & \mathcal{E}_2(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \\ \mathcal{E}_3 &= \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2).\end{aligned}$$

Функции  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  локально интегрируемы, а обобщенная функция  $\mathcal{E}_3$  действует на основные функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  по формуле (31) из § 3.1:

$$(\mathcal{E}_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, |x|/a)}{|x|} dx. \quad (1)$$

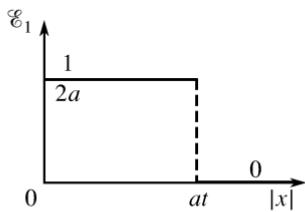


Рис. 26

Носители функций  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  совпадают с замыканием конуса будущего  $\bar{\Gamma}^+$  (см. рис. 22), а носитель обобщенной функции  $\mathcal{E}_3$  совпадает с границей  $\{at = |x|\}$  этого конуса.

На рис. 26–28 схематически изображены фундаментальные решения  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$  в момент времени  $t$ .

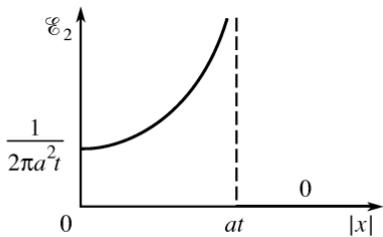


Рис. 27

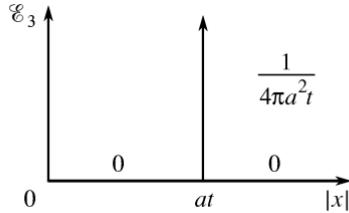


Рис. 28

Пусть  $f(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  и  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Введем обобщенную функцию  $(f(x, t), \varphi(x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ , действующую по формуле

$$((f(x, t), \varphi(x)), \psi(t)) = (f, \varphi\psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1). \quad (2)$$

Из этого определения вытекает следующая формула:

$$\left( \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right) = \frac{d^k}{dt^k} (f(x, t), \varphi(x)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Действительно, при всех  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial t^k}, \varphi(x) \right), \psi(t) \right) &= \left( \frac{\partial^k f}{\partial t^k}, \varphi \psi \right) = (-1)^k \left( f, \varphi \frac{d^k \psi}{dt^k} \right) = \\ &= (-1)^k \left( (f(x, t), \varphi(x)), \frac{d^k \psi}{dt^k} \right) = \left( \frac{d^k}{dt^k} (f(x, t), \varphi(x)), \psi(t) \right), \end{aligned}$$

откуда и следуют равенства (3).

Будем говорить, что обобщенная функция  $f(x, t)$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^p$ ,  $0 \leq p \leq \infty$ , по переменной  $t$  в  $(a, b)$  (соответственно на  $[a, b]$ ), если для любой основной функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  обобщенная функция  $(f(x, t), \varphi(x))$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^p(a, b)$  (соответственно  $\mathcal{C}^p([a, b])$ ) (см. § 2.1, п. 5).

**ЛЕММА.** *Фундаментальные решения  $\mathcal{E}_n(x, t)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , принадлежат классу  $\mathcal{C}^\infty$  по переменной  $t$  в  $[0, \infty)$  и при  $t \rightarrow +0$  удовлетворяют предельным соотношениям*

$$\mathcal{E}_n(x, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} \rightarrow \delta(x), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $n = 3$  и  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ . Из (1) вытекает, что

$$(\mathcal{E}_3(x, t), \varphi(x)) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} \varphi(x) ds = \frac{\theta(t)t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds. \quad (5)$$

Так как правая часть равенства (5) бесконечно дифференцируема по  $t$  в  $[0, \infty)$  в смысле § 1.1, п. 2, то, следовательно,  $\mathcal{E}_3$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$  по  $t$  в  $[0, \infty)$ . Кроме того, из (5) вытекает, что

$$(\mathcal{E}_3(x, t), \varphi(x)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +0. \quad (6)$$

Далее, пользуясь формулой (3) при  $f = \mathcal{E}_3$  и  $k = 1, 2$  из формулы (5) получим при  $t \rightarrow +0$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{E}_3(x, t)}{\partial t}, \varphi(x) \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int \varphi(atx) ds \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{E}_3(x, t)}{\partial t^2}, \varphi(x) \right) &= \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} \varphi(atx) ds + \frac{t}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{S_1} \varphi(atx) ds \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку функция

$$\int_{S_1} \varphi(atx) ds = \int_{S_1} \varphi(-atx) ds$$

четная бесконечно дифференцируемая по  $t$ , а поэтому ее первая производная при  $t = 0$  равна нулю. В силу произвольности  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  предельные соотношения (6)–(8) эквивалентны соотношениям (4) при  $n = 3$ .

Пусть теперь  $n = 2, 1$  и  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда при  $t > 0$

$$(\mathcal{E}_2(x, t), \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi a} \int_{U_{at}} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} = \frac{t}{2\pi} \int_{U_1} \frac{\varphi(atx) dx}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \quad (9)$$

$$(\mathcal{E}_1(x, t), \varphi(x)) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \varphi(x) dx = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 \varphi(atx) dx. \quad (10)$$

Отсюда, как и при  $n = 3$ , вытекают все утверждения леммы.

**2. Дополнительные сведения о свертках.** Установим еще один признак существования свертки.

**ТЕОРЕМА.** Пусть обобщенные функции  $f$  и  $g$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  таковы, что  $f(x, t) = 0$ ,  $t < 0$ , и  $\text{spt } g \subset \bar{\Gamma}^+$ . Тогда свертка  $f * g$  существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  и при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  представляется в виде

$$(f * g, \varphi) = (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau)), \quad (11)$$

где  $\eta(\tau)$  — любая функция класса  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$ , равная 0 при  $t < -\delta$  и 1 при  $t > -\varepsilon$  ( $\delta$  и  $\varepsilon$  — любые числа,  $\delta > \varepsilon > 0$ ). При этом свертка  $f * g$  обращается в нуль при  $t < 0$  и непрерывна относительно  $f$  и  $g$  в отдельности:

- 1) если  $f_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $f_k = 0$ ,  $t < 0$ , то  $f_k * g \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
- 2) если  $g_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\text{spt } g_k \subset \bar{\Gamma}^+$ , то  $f * g_k \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\varphi(x, t)$  — произвольная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ , причем  $\text{spt } \varphi \subset U_A$ , и  $\eta_k(\xi, t; y, \tau)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — последовательность функций из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$ , сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n+2}$  (см. § 2.3, п. 2). Тогда при всех достаточно больших  $k$

$$\begin{aligned}\psi_k &\equiv \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\eta_k(\xi, t; y, \tau)\varphi(\xi + y, t + \tau) = \\ &= \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau) \equiv \psi.\end{aligned}\quad (12)$$

Для доказательства равенства (12) достаточно установить, что функция  $\psi$  принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$ . Но это следует из того, что она бесконечно дифференцируема, а множество

$$\{(\xi, t, y, \tau) : t, \tau \geq -\delta; a^2\tau^2 - |y|^2 \geq -\delta; |y + \xi|^2 + (t + \tau)^2 \leq A^2\},$$

в котором содержится ее носитель, ограниченно, поскольку оно содержитя в ограниченном множестве

$$\begin{aligned}\{(\xi, t, y, \tau) : -\delta \leq t, \tau \leq A + \delta; |y| \leq \sqrt{a^2(A + \delta)^2 + \delta}; \\ |\xi| \leq \sqrt{a^2(A + \delta)^2 + \delta} + A\}.\end{aligned}$$

По построению  $\eta(t) = 1$  в окрестности носителя  $f(\xi, t)$  и  $\eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2) = 1$  в окрестности носителя  $g(y, \tau)$ . Следовательно (см. (10) из § 2.1),

$$f(\xi, t) = \eta(t)f(\xi, t), \quad g(y, \tau) = \eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)g(y, \tau).$$

Учитывая теперь эти равенства и равенство (12), убеждаемся в справедливости формулы (11):

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \eta_k(\xi, t; y, \tau)\varphi(\xi + y, t + \tau)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \psi_k) = (f(\xi, t) \cdot g(y, \tau), \psi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}).\end{aligned}$$

Докажем, что  $f * g = 0$  при  $t < 0$ . Пусть  $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\text{spt } \varphi \subset \{t < 0\}$ . Так как носитель  $\varphi$  — компакт в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то найдется такое число  $\delta_1 > 0$ , что  $\text{spt } \varphi \subset \{t \leq -\delta_1\}$ . А тогда, выбирая  $\delta < \delta_1/2$ , получим

$$\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau) \equiv 0, \quad (13)$$

откуда в силу (11) получим  $(f * g, \varphi) = 0$ , что и утверждалось.

Непрерывность свертки  $f * g$  относительно  $f$  и  $g$  следует из представления (11) и из непрерывности прямого произведения

$f(\xi, t) \cdot g(y, \tau)$  относительно  $f$  и  $g$  в отдельности (см. § 2.3, п. 1, а)). При этом вспомогательную функцию  $\eta$  можно выбрать не зависящей от  $k$ . Теорема доказана.

Докажем следующее: если  $g(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\text{spt } g \subset \bar{\Gamma}^+$ , а  $u(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , то

$$g * [u(x) \cdot \delta(t)] = g(x, t) * u(x), \quad (14)$$

причем обобщенная функция  $g(x, t) * u(x)$  действует по правилу

$$\begin{aligned} (g(x, t) * u(x), \varphi) &= \\ &= (g(y, t) \cdot u(\xi), \eta(a^2 t^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, t)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}). \end{aligned} \quad (15)$$

Действительно, полагая в формуле (11)  $f = u(x) \cdot \delta(t)$ , при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  получим

$$\begin{aligned} (g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) &= \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi) \cdot \delta(t), \eta(\tau) \eta(t) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau + t)) = \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(\tau) \eta(t) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) (\delta(t), \eta(t) \varphi(y + \xi, \tau + t))) = \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau)). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку носитель  $g(y, \tau)$  содержится в полупространстве  $\tau \geq 0$ , то в силу (10) из § 2.1  $g = \eta(\tau)g$ . Далее,

$$\eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Поэтому, продолжая равенства (16) и учитывая (15), получим равенство (14):

$$\begin{aligned} (g * [u(x) \cdot \delta(t)], \varphi) &= (\eta(\tau)g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau)) = \\ &= (g(y, \tau) \cdot u(\xi), \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \varphi(y + \xi, \tau)) = (g(x, t) * u(x), \varphi). \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство получено в силу теоремы 1 из § 2.3.

Пользуясь теперь формулой (14) и правилами дифференцирования прямого произведения (см. § 2.3, п. 1, г)) и свертки (см. § 2.3, п. 3, в)), при всех  $k = 1, 2, \dots$  получаем равенства

$$g * [u(x) \cdot \delta^{(k)}(t)] = \frac{\partial^k}{\partial t^k} [g(x, t) * u(x)] = \frac{\partial^k g(x, t)}{\partial t^k} * u(x). \quad (17)$$

**3. Волновой потенциал.** Пусть обобщенная функция  $f(x, t)$  из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  обращается в нуль в полупространстве  $t < 0$ . Обобщенная функция

$$V_n = \mathcal{E}_n * f,$$

где  $\mathcal{E}_n$  — фундаментальное решение волнового оператора, называется *волновым потенциалом с плотностью*  $f$ .

Так как  $\text{spt } \mathcal{E}_n \subset \bar{\Gamma}^+$ , то по теореме из п. 2 волновой потенциал  $V_n$  существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  и представляется в виде

$$(V_n, \varphi) = (\mathcal{E}_n(y, \tau) \cdot f(\xi, \tau'), \eta(\tau)\eta(\tau')\eta(a^2\tau^2 - |y|^2)\varphi(y + \xi, \tau + \tau')), \quad (18)$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

где  $\eta(\tau)$  — любая функция класса  $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ , равная 0 при  $\tau < -\delta$  и 1 при  $\tau > -\varepsilon$ ;  $\delta$  и  $\varepsilon$  любые,  $\delta > \varepsilon > 0$ . Кроме того, по той же теореме волновой потенциал  $V_n(x, t)$  обращается в нуль при  $t < 0$  и непрерывно зависит от плотности  $f$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ . Наконец, по теореме из § 3.1, п. 3 этот потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\square_a V_n = f. \quad (19)$$

Дальнейшие свойства волнового потенциала  $V_n$  существенно зависят от вида плотности  $f$ .

Если  $f$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то  $V_n$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , причем

$$V_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x; at)} \frac{f(\xi, t - |x - \xi|/a)}{|x - \xi|} d\xi, \quad (20)$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{U(x; a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x - \xi|^2}}, \quad (20')$$

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (20'')$$

Докажем формулу (20). Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ . Так как  $f$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^4$ , то, учитывая, что  $f = 0$  при  $t < 0$ , и принимая во внимание формулу (1), из представления (18) получаем

$$(V_3, \varphi) =$$

$$= \left( \mathcal{E}_3(y, \tau), \eta(\tau)\eta(a^2\tau^2 - |y|^2) \int f(\xi, \tau')\eta(\tau')\varphi(y + \xi, \tau + \tau') d\xi d\tau' \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \mathcal{E}_3(y, \tau), \eta(\tau) \eta(a^2 \tau^2 - |y|^2) \int f(x-y, t-\tau) \varphi(x, t) dx dt \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\eta(|y|/a)\eta(0)}{|y|} \left[ \int f \left( x-y, t - \frac{|y|}{a} \right) \varphi(x, t) dx dt \right] dy = \\
 &= \frac{1}{4\pi a^2} \int \varphi(x, t) \int_{U_{at}} \frac{f(x-y, t - |y|/a)}{|y|} dy dx dt.
 \end{aligned}$$

Это значит, что потенциал  $V_3$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^4$  и представляется в виде

$$V_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U_{at}} \frac{f(x-y, t - |y|/a)}{|y|} dy. \quad (21)$$

Совершая в этом интеграле замену переменных  $x-y = \xi$ , получаем формулу (20).

Аналогично, с соответствующими упрощениями, выводятся формулы (20') и (20'') для потенциалов  $V_2$  и  $V_1$ .

Сопоставим каждой точке  $(x, t)$ ,  $t > 0$ , открытый конус

$$\Gamma_0^-(x, t) = \Gamma^-(x, t) \cap \{0 < \tau < t\}$$

с вершиной  $(x, t)$ , основанием  $U(x; at)$  и боковой поверхностью  $B(x, t)$  (рис. 29); здесь  $\Gamma^-(x, t)$  — конус прошлого (см. § 1.3, п. 3).

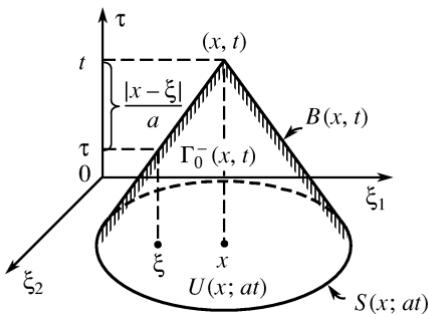


Рис. 29

**ТЕОРЕМА.** Если  $f \in \mathcal{C}^2(t \geq 0)$  в случае  $n = 2, 3$  и  $f \in \mathcal{C}^1(t \geq 0)$  в случае  $n = 1$ , то потенциал  $V_n$  принадлежит  $\mathcal{C}^2(t \geq 0)$  и удовлетво-

представляет оценку

$$\begin{aligned} |V_3(x, t)| &\leq \frac{t^2}{2} \max_{B(x, t)} |f(\xi, \tau)|, \\ |V_n(x, t)| &\leq \frac{t^2}{2} \max_{\bar{\Gamma}_0^-(x, t)} |f(\xi, \tau)|, \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (22)$$

и начальными условиям

$$V_n|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем теорему для  $n = 3$ . Замена переменных  $y = at\eta$ ,  $t > 0$ , преобразует формулу (21) к виду

$$V_3(x, t) = \frac{t^2}{4\pi} \int_{U_1} \frac{f(x + at\eta, t(1 - |\eta|))}{|\eta|} d\eta. \quad (24)$$

Так как  $f \in C^2(t \geq 0)$  и подынтегральное выражение в (24) имеет интегрируемую особенность, то  $V_3 \in C^2(t \geq 0)$  (см. § 1.1, п. 4). Из представления (24) следует также оценка (22) для потенциала  $V_3$

$$|V_3(x, t)| \leq \frac{t^2}{4\pi} \max_{B(x, t)} |f(\xi, \tau)| \int_{U_1} \frac{d\eta}{|\eta|} = \frac{t^2}{2} \max_{B(x, t)} |f(\xi, \tau)|.$$

Так как  $V_3 \in C^2(t \geq 0)$ , то из оценки (22) вытекают начальные условия (23).

Пусть теперь  $n = 2$ . Замена переменных  $\xi = x + at\eta$ ,  $\tau = t - at$ ,  $t > 0$ , преобразует представление (20') для потенциала  $V_2$  к виду

$$V_2(x, t) = \frac{t^2}{2\pi} \int_0^1 \int_{U_\alpha} \frac{f(x + at\eta, t - \alpha t)}{\sqrt{\alpha^2 - |\eta|^2}} d\eta d\alpha, \quad (24')$$

из которого непосредственно и вытекают требуемые свойства этого потенциала.

Свойства потенциала  $V_1$  следуют из представления (20''). Теорема доказана.

**4. Поверхностные волновые потенциалы.** Если  $f = u_1(x) \cdot \delta(t)$  или  $f = u_0(x) \cdot \delta'(t)$ , где  $u_0$  и  $u_1$  — произвольные обобщенные функции из  $D'(\mathbb{R}^n)$ , то соответствующие волновые потенциалы

$$V_n^{(0)} = \mathcal{E}_n * [u_1(x) \cdot \delta(t)], \quad V_n^{(1)} = \mathcal{E}_n * [u_0(x) \cdot \delta'(t)], \quad n = 1, 2, 3,$$

называются *поверхностными волновыми потенциалами* (простого и двойного слоя с плотностями  $u_1$  и  $u_0$  соответственно).

В силу формул (14) и (17) из п. 2 волновые потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  представляются в виде

$$V_n^{(0)} = \mathcal{E}(x, t) * u_1(x), \quad (25)$$

$$V_n^{(1)} = \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} * u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_0(x)], \quad (26)$$

причем обобщенная функция  $\mathcal{E}_n(x, t) * u(x)$  действует в соответствии с формулой (15).

**ЛЕММА.** *Поверхностные волновые потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  принадлежат классу  $\mathcal{C}^\infty$  по переменной  $t$  в  $[0, \infty)$  и при  $t \rightarrow +0$  удовлетворяют начальным условиям*

$$V_n^{(0)}(x, t) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} \rightarrow u_1(x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad (27)$$

$$V_n^{(1)}(x, t) \rightarrow u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}(x, t)}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (28)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По лемме из п. 1 обобщенная функция  $\mathcal{E}_n(x, t)$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$  по переменной  $t$  в  $[0, \infty)$ . Далее, при каждом  $t > 0$  носитель  $\mathcal{E}_n(x, t)$  содержится в шаре  $\overline{U}_{at}$  и, следовательно, равномерно ограничен в  $\mathbb{R}^n$  при  $t \rightarrow t_0 \geq 0$ . Поэтому, пользуясь теоремой из § 2.3, п. 4 о непрерывности свертки в  $\mathcal{D}'$ , заключаем, что при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\left( \frac{\partial^k \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi \right) \in \mathcal{C}[0, \infty), \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда в силу равенств (3) и (17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x), \varphi) &= \left( \frac{\partial^k}{\partial t^k} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)], \varphi \right) = \\ &= \left( \frac{\partial^k \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t^k} * u_1(x), \varphi \right), \end{aligned}$$

выводим, что  $(\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x), \varphi) \in \mathcal{C}^\infty[0, \infty)$ . Это и значит в силу (25), что потенциал  $\mathcal{C}^\infty$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$  по  $t$  в  $[0, \infty)$ . Заменяя  $u_1$  на  $u_0$ , выводим из (26), что таким же свойством обладает и потенциал  $V_n^{(1)}$ .

Докажем предельные соотношения (27). Учитывая предельные соотношения (4) и пользуясь непрерывностью свертки  $\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , получаем

$$V_n^{(0)}(x, t) = \mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x) \rightarrow 0 * u_1(x) = 0,$$

$$\frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{E}_n(x, t) * u_1(x)] = \frac{\partial \mathcal{E}_n(x, t)}{\partial t} * u_1(x) \rightarrow \delta * u_1 = u_1(x)$$

при  $t \rightarrow +0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Аналогично устанавливаются и предельные соотношения (28). Лемма доказана.

Дальнейшие свойства поверхностных волновых потенциалов  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  существенно зависят от вида плотностей  $u_1$  и  $u_0$ .

Если  $u_1$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^n$ , то поверхностный потенциал  $V_n^{(0)}$  — локально интегрируемая функция в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , выражаящаяся формулами

$$V_3^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{S(x; at)} u_1(\xi) ds, \quad (29)$$

$$V_2^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \int_{U(x; at)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}}, \quad (29')$$

$$V_1^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (29'')$$

Установим формулу (29). Так как функция  $u_1$  локально интегрируемая в  $\mathbb{R}^3$ , то, пользуясь формулами (25), (15) и (1), при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  получаем

$$\begin{aligned} (V_3^{(0)}, \varphi) &= (\mathcal{E}_3(x, t) * u_1(x), \varphi) = \\ &= \left( \mathcal{E}_3(y, t), \eta(a^2 t^2 - |y|^2) \int u_1(\xi) \varphi(y + \xi, t) d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{\eta(0)}{t} \int_{S_{at}} \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x - y) \varphi(x, t) dx ds_y dt = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, t)}{t} \int_{S_{at}} u_1(x - y) ds_y, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $V_3^{(0)}$  локально интегрируема в  $\mathbb{R}^4$  и представляется в виде (ср. с формулой (34) из § 2.3)

$$V_3^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} u_1(x - y) ds_y.$$

Совершая в этом интеграле замену переменных  $x - y = \xi$ , получим формулу (29). Аналогично, с соответствующими упрощениями, выводятся формулы (29') и (29'') для потенциалов  $V_2^{(0)}$  и  $V_1^{(0)}$ .

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  при  $n = 3, 2$  и  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1)$ ,  $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1)$  при  $n = 1$ , то потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  принадлежат классу  $\mathcal{C}^2(t \geq 0)$  и удовлетворяют оценкам*

$$|V_3^{(0)}(x, t)| \leq t \max_{S(x; at)} |u_1(\xi)|, \quad (30)$$

$$|V_n^{(0)}(x, t)| \leq t \max_{\overline{U}(x; at)} |u_1(\xi)|, \quad n = 2, 1, \quad (30')$$

$$|V_3^{(1)}(x, t)| \leq \max_{S(x; at)} |u_0(\xi)| + at \max_{S(x; at)} |\operatorname{grad} u_0(\xi)|, \quad (31)$$

$$|V_2^{(1)}(x, t)| \leq \max_{\overline{U}(x; at)} |u_0(\xi)| + at \max_{\overline{U}(x; at)} |\operatorname{grad} u_0(\xi)|, \quad (31')$$

$$|V_1^{(1)}(x, t)| \leq \max_{\overline{U}(x; at)} |u_0(\xi)| \quad (31'')$$

и начальными условиями

$$V_n^{(0)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial V_n^{(0)}}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad (32)$$

$$V_n^{(1)}|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial V_n^{(1)}}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (33)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $n = 3$ . Совершая в формуле (29) замену переменных  $x - \xi = ats$ ,  $t > 0$ , получим представление

$$V_3^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)t}{4\pi} \int_{S_1} u_1(x - ats) ds, \quad (34)$$

из которого следует, что  $V_3^{(0)}$  удовлетворяет оценке (30) и принадлежит классу  $\mathcal{C}^2(t \geq 0)$ , поскольку  $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ . Дифференцируя формулу (34) по  $t$  и пользуясь формулой (26), получим представление для потенциала  $V_3^{(1)}$ :

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi} \int_{S_1} u_0(x - ats) ds - \frac{at\theta(t)}{4\pi} \int_{S_1} (\operatorname{grad}_x u_0(x - ats), s) ds.$$

Отсюда вытекает, что  $V_3^{(1)}$  удовлетворяет оценке (31):

$$\begin{aligned} |V_3^{(1)}(x, t)| &\leq \max_{|s|=1} |u_0(x - ats)| + at \max_{|s|=1} |(\operatorname{grad}_x u_0(x - ats), s)| \leq \\ &\leq \max_{S(x; at)} |u_0(\xi)| + at \max_{S(x; at)} |\operatorname{grad} u_0(\xi)|, \end{aligned}$$

и принадлежит классу  $\mathcal{C}^2(t \geq 0)$  (поскольку  $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ ).

При  $n = 2$  замена переменных  $\xi = x - at\eta$ ,  $t > 0$ , преобразует представления (29') и (26) для потенциалов  $V_2^{(0)}$  и  $V_2^{(1)}$  к виду

$$\begin{aligned} V_2^{(0)}(x, t) &= \frac{\theta(t)t}{2\pi} \int_{U_1} \frac{u_1(x - at\eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} d\eta, \\ V_2^{(1)}(x, t) &= \frac{\theta(t)}{2\pi} \int_{U_1} \frac{u_0(x - at\eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} d\eta - \\ &\quad - \frac{at\theta(t)}{2\pi} \int_{U_1} \frac{(\operatorname{grad}_x u_0(x - at\eta), \eta)}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} d\eta, \end{aligned}$$

откуда и вытекают требуемые свойства гладкости и оценки (30') и (31') для потенциалов  $V_2^{(0)}$  и  $V_2^{(1)}$ , например,

$$\begin{aligned} |V_2^{(0)}(x, t)| &\leq \frac{t}{2\pi} \max_{\eta \in \overline{U}_1} |u_1(x - at\eta)| \int_{U_1} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - |\eta|^2}} = \\ &= t \max_{\overline{U}(x; at)} |u_1(\xi)| \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

Соответствующие свойства потенциалов  $V_1^{(0)}$  и  $V_1^{(1)}$  следуют из представлений (29'') и (26), например,

$$V_1^{(1)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)].$$

Теперь установим справедливость начальных условий (32) и (33). В силу (27) и (28) эти условия выполнены в смысле сходимости в пространстве  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Но по доказанному функции  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  принадлежат классу  $\mathcal{C}^2(t \geq 0)$ . Следовательно, эти функции удовлетворяют условиям (32) и (33) в обычном смысле. Теорема доказана.

### § 3.3. Задача Коши для волнового уравнения

В этом параграфе мы будем применять теорию обобщенных функций к решению (обобщенной) задачи Коши для волнового уравнения.

**1. Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.** Прежде всего решим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

где  $f \in \mathcal{C}(t \geq 0)$ .

Пусть  $u(t)$  — решение задачи Коши (1), (2). Продолжим функции  $u(t)$  и  $f(t)$  нулем на  $t < 0$ . Обозначая продолженные функции через  $\tilde{u}$  и  $\tilde{f}$  соответственно и пользуясь формулами (14) из § 2.2 и начальными условиями (2), получим

$$\tilde{u}^{(k)} = \{u^{(k)}(t)\} + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-j-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда из уравнения (1) заключаем, что

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= \{L\tilde{u}(t)\} + u_0 \delta^{(n-1)}(t) + (a_1 u_0 + u_1) \delta^{(n-2)}(t) + \dots \\ &\dots + (a_{n-1} u_0 + \dots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}) \delta(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t), \end{aligned}$$

где

$$c_0 = a_{n-1} u_0 + \dots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}, \dots, c_{n-2} = a_1 u_0 + u_1, c_{n-1} = u_0.$$

Таким образом, функция  $\tilde{u}$  в обобщенном смысле удовлетворяет в  $\mathbb{R}^1$  дифференциальному уравнению

$$L\tilde{u} = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t). \quad (3)$$

Построим решение уравнения (3). Функция  $\mathcal{E}(t) = \theta(t)Z(t)$ , где  $LZ = 0$  и

$$Z(0) = Z'(0) = \dots = Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1, \quad (4)$$

есть фундаментальное решение оператора  $L$  (см. § 3.1, п. 5). Поскольку  $\mathcal{E}$  и правая часть уравнения (3) принадлежат сверточной алгебре обобщенных функций  $\mathcal{D}'_+$  (см. § 2.3, п. 5), то по теореме из § 3.1, п. 3

решение уравнения (3) существует и единственno в  $\mathcal{D}'_+$  и выражается сверткой

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \mathcal{E} * \left( \tilde{f} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)} \right) = \mathcal{E} * \tilde{f} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathcal{E}^{(k)}(t) = \\ &= \theta(t) \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) d\tau + \theta(t) \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t).\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь мы учли равенства

$$\mathcal{E}^{(k)} = [\theta(t)Z(t)]^{(k)} = \theta(t)Z^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

справедливые в силу (4) (см. § 2.2, п. 4, е)).

Таким образом, решение  $u(t)$  задачи Коши (1), (2), будучи продолжено нулем на  $t < 0$ , удовлетворяет уравнению (3), решение которого единственно в алгебре  $\mathcal{D}'_+$ . Поэтому формула (5) при  $t > 0$  дает искомое решение задачи Коши (1), (2)

$$u(t) = \int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t).\quad (6)$$

В частности, формула (6) для задач Коши

$$u' + au = f(t), \quad u(0) = u_0,\quad (7)$$

$$u'' + a^2 u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,\quad (8)$$

принимает соответственно вид

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau + u_0 e^{-at},\quad (9)$$

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau) f(\tau) d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}.\quad (10)$$

**2. Постановка обобщенной задачи Коши для волнового уравнения.** Схема для задачи Коши, изложенная в предыдущем пункте для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, применяется для решения задачи Коши для волнового уравнения

$$\square_a u = f(x, t),\quad (11)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x). \quad (12)$$

Считаем, что  $f \in \mathcal{C}(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  и  $u_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .

Предположим, что существует классическое решение  $u(x, t)$  задачи Коши (11), (12). Это значит, что функция  $u$  класса  $\mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$  удовлетворяет уравнению (11) при  $t > 0$  и начальными условиям (12) при  $t \rightarrow +0$  (см. § 1.4, п. 2).

Продолжим функции  $u$  и  $f$  нулем при  $t < 0$ , положив

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Покажем, что функция  $\tilde{u}(x, t)$  удовлетворяет в  $\mathbb{R}^{n+1}$  волновому уравнению

$$\square_a \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \quad (13)$$

Действительно, при всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\square_a \tilde{u}, \varphi) &= (\tilde{u}, \square_a \varphi) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \square_a \varphi \, dx \, dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi \right) \, dx \, dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) \varphi \, dx \, dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi(x, \varepsilon)}{\partial t} u(x, \varepsilon) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, \varepsilon) \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial t} \, dx \right] = \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} u(x, 0) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, 0) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi \tilde{f} \, dx \, dt - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x) \varphi(x, 0) \, dx = \\ &= (\tilde{f} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \varphi), \end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (13).

Равенство (13) показывает, что начальные возмущения  $u_0$  и  $u_1$  для функции  $\tilde{u}(x, t)$  играют роль источника  $u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$ ,

действующего мгновенно при  $t = 0$ ; при этом начальному возмущению  $u_0$  соответствует двойной слой  $u_0(x) \cdot \delta'(t)$ , а начальному возмущению  $u_1$  — простой слой  $u_1(x) \cdot \delta(t)$  на плоскости  $t = 0$ . Далее классические решения задачи Коши (11), (12) содержатся среди тех решений уравнения (13), которые обращаются в нуль при  $t < 0$ . Это дает основание называть задачу об отыскании (обобщенных) решений уравнения (13), обращающихся в нуль при  $t < 0$ , *обобщенной задачей Коши для волнового уравнения*. Но в таком случае в уравнении (13) правую часть можно считать обобщенной функцией.

Итак, введем следующее определение. *Обобщенной задачей Коши* для волнового уравнения с источником  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  назовем задачу о нахождении обобщенной функции  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , обращающейся в нуль при  $t < 0$  и удовлетворяющей волновому уравнению

$$\square_a u = F(x, t). \quad (14)$$

Уравнение (14) эквивалентно следующему (см. § 3.1): для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  справедливо равенство

$$(u, \square_a \varphi) = (F, \varphi). \quad (14')$$

Из уравнения (14) следует, что необходимым условием разрешимости обобщенной задачи Коши является обращение в нуль  $F$  при  $t < 0$ . Сейчас будет показано, что это условие является и достаточным.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При выводе уравнения (13) мы фактически доказали равенство

$$\square_a u = \{\square_a u(x, t)\} + u(x, +0) \cdot \delta'(t) + u_1(x, +0) \cdot \delta(t), \quad (15)$$

справедливое для любой функции  $u \in \mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ , обращающейся в нуль при  $t < 0$  и такой, что  $\square_a u \in \mathcal{C}(t \geq 0)$ .

### 3. Решение обобщенной задачи Коши.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , причем  $F = 0$  при  $t < 0$ . Тогда решение соответствующей обобщенной задачи Коши существует, единственно и представляется в виде волнового потенциала

$$u = \mathcal{E}_n * F. \quad (16)$$

Это решение непрерывно зависит от  $F$  в  $\mathcal{D}'$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По условию правая часть  $F$  уравнения (14) обращается в нуль при  $t < 0$ . Поэтому по теореме из § 3.2, п. 2 свертка  $F$  с фундаментальным решением  $\mathcal{E}_n$  волнового оператора существует в  $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^{n+1})$  и обращается в нуль при  $t < 0$ . По теореме из

§ 3.1, п. 3 решение уравнения (14) существует и единственno в классе обобщенных функций из  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , обращающихся в нуль при  $t < 0$ , причем это решение выражается сверткой (16).

Непрерывная зависимость построенного решения  $u = \mathcal{E}_n * F$  от  $F$  в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  вытекает из непрерывности свертки (см. теорему из § 3.2, п. 2). Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Всякая функция  $u(x, t)$  класса  $\mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ , обращающаяся в нуль при  $t < 0$  и такая, что  $\square_a u \in \mathcal{C}(t \geq 0)$ , представляется в виде*

$$u(x, t) = V_n(x, t) + V_n^{(0)}(x, t) + V_n^{(1)}(x, t), \quad (17)$$

где  $V_n$  — волновой потенциал с плотностью  $\{\square_a u\}$ ,  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  — поверхностные волновые потенциалы простого и двойного слоя с плотностями  $u_t(x, 0)$  и  $u(x, 0)$  соответственно.

Действительно, функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (15) и, следовательно, по теореме из п. 3 представляется в виде суммы (17) трех волновых потенциалов с указанными плотностями.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *При  $F = u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$  решение  $u(x, t)$  обобщенной задачи Коши принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$  по переменной  $t$  в  $[0, \infty)$  и удовлетворяет начальным условиям (12) в смысле слабой сходимости:*

$$u(x, t) \rightarrow u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \rightarrow u_1(x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad t \rightarrow +0. \quad (18)$$

Действительно, по лемме из § 3.2, п. 4 потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  принадлежат классу  $\mathcal{C}^\infty$  по  $t$  в  $[0, \infty)$  и удовлетворяют начальным условиям (27) и (28) из § 3.2. Следовательно, их сумма  $V_n^{(0)} + V_n^{(1)}$ , являющаяся в силу (16) решением обобщенной задачи Коши при  $F = u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$ , принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$  по  $t$  в  $[0, \infty)$  и удовлетворяет начальным условиям (18).

**ПРИМЕР.** Обобщенное решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \theta(x) \cdot \delta'(t)$$

дается формулой

$$u(x, t) = \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial t} * \theta(x) = \frac{1}{2} \theta(x - at) + \frac{1}{2} \theta(x + at).$$

На этом примере видно, что разрывы у начальных данных (или у их производных) распространяются вдоль характеристик. Это явление наблюдается у всех уравнений гиперболического типа (см., например, формулы (19), (19'), (19'') далее).

**4. Решение классической задачи Коши.** Из теорем из § 3.2, пп. 3, 4 и из теоремы п. 3 при  $F(x, t) = f(x, t) + u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t)$  вытекают следующие утверждения о разрешимости классической задачи Коши для волнового уравнения.

Пусть  $f \in \mathcal{C}^2(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  при  $n = 3, 2$  и  $f \in \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1)$ ,  $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1)$  при  $n = 1$ . Тогда классическое решение задачи Коши (11), (12) существует, единственно и выражается:

при  $n = 3$  формулой Кирхгофа

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x; at)} \frac{f(\xi, t - |\frac{x-\xi|}{a}|)}{|x-\xi|} d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x; at)} u_1(\xi) ds + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \int_{S(x; at)} u_0(\xi) ds \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

при  $n = 2$  формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{U(x; a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_{U(x; at)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{U(x; at)} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - |x-\xi|^2}}; \end{aligned} \quad (19')$$

при  $n = 1$  формулой Даламбера

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]. \end{aligned} \quad (19'')$$

Это решение непрерывно зависит от данных  $f$ ,  $u_0$  и  $u_1$  задачи Коши в следующем смысле: если эти данные изменяются так, что

$$|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leq \varepsilon_0, \quad |u_1 - \tilde{u}_1| \leq \varepsilon_1, \quad |\text{grad}(u_0 - \tilde{u}_0)| \leq \varepsilon'_0$$

(последнее неравенство нужно только при  $n = 3, 2$ ), то соответствующие решения  $u$  и  $\tilde{u}$  в любой полосе  $0 \leq t \leq T$  удовлетворяют оценкам:

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0 + aT\varepsilon'_0, \quad n = 3, 2;$$

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0, \quad n = 1.$$

Резюмируя, можно сказать, что задача Коши для волнового уравнения поставлена корректно (см. § 1.4, п. 8), причем  $\mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$  — класс корректности классической задачи Коши и  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  — класс корректности обобщенной задачи Коши (см. теорему из п. 3).

### 5. Упражнения.

а) Пользуясь фундаментальным решением оператора Клейна–Гордона–Фока (см. § 3.1, п. 10, б)), показать, что решение задачи Коши для уравнения Клейна–Гордона–Фока выражается формулой

$$u = D^r(x_0, x) * u_1(x) + \frac{\partial D^r(x_0, x)}{\partial x_0} * u_0(x).$$

б) Показать, что решения смешанных задач

$$\square_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x, \quad t < \infty,$$

с граничными условиями:

$$1) \quad u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad 2) \quad u_x|_{x=0} = \psi_1(t)$$

(где функции  $\psi_0$  и  $\psi_1$  непрерывны в  $[0, \infty)$  и обращаются в нуль при  $t < 0$ ), задаются соответственно формулами:

$$1) \quad u(x, t) = -2a^2 \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial x} * \psi_0(t) = \psi_0\left(t - \frac{x}{a}\right);$$

$$2) \quad u(x, t) = -2a^2 \mathcal{E}_1(x, t) * \psi_1(t) = -a \int_0^{t-x/a} \psi_1(\tau) d\tau.$$

в) Пользуясь фундаментальными решениями (22) и (23) из § 3.1, установить, что задачи Коши

$$u' + au = \rho u, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \rho \in \mathcal{C}(t \geq 0);$$

$$u'' + a^2 u = \rho u, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = u_1,$$

эквивалентны соответственно следующим интегральным уравнениям:

$$u(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \rho(\tau) u(\tau) d\tau + u_0 e^{-at};$$

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau) \rho(\tau) u(\tau) d\tau + u_0 \cos at + u_1 \frac{\sin at}{a}.$$

г) Пусть обобщенная функция  $F$  финитна. Доказать, что решение  $u(x, t)$  соответствующей обобщенной задачи Коши для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^4$  обладает свойством: для любой ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^3$  существует такое число  $T = T(G)$ , что  $u(x, t) = 0$  при  $x \in G, t > T$ .

д) Пусть  $f = 0$  и функции  $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$  и  $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$  финитны. Доказать, что соответствующее решение  $u(x, t)$  задачи Коши для волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$  обладает свойством: для любой ограниченной области  $G \subset \mathbb{R}^2$  существует постоянная  $K = K(G)$  такая, что

$$|u(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad x \in G, \quad t > 0.$$

е) Показать, что частные решения  $n$ -мерного волнового уравнения  $\square_1 u = 0$  (см. § 1.2, п. 1) вида  $f\left(\frac{t}{|x|}\right)$  определяются дифференциальным уравнением

$$(\xi^2 + 1)f''(\xi) + (3 - n)\xi f'(\xi) = 0, \quad \xi^2 \neq 1.$$

В частности:

$$u(x, t) = c_1 \ln \left| \frac{t - |x|}{1 + |x|} \right| + c_2, \quad \frac{t}{|x|} \neq \pm 1, \quad n = 1;$$

$$u(x, t) = \begin{cases} c_1 \ln \left( \frac{|t|}{|x|} + \sqrt{\frac{t^2}{|x|^2} - 1} \right) + c_2, & \frac{|t|}{|x|} > 1, \\ c_1 \arcsin \frac{|t|}{|x|} + c_2, & \frac{|t|}{|x|} < 1, \end{cases} \quad n = 2;$$

$$u(x, t) = c_1 \frac{t}{|x|} + c_2, \quad x \neq 0, \quad n = 3.$$

ж) Доказать, что задача Гурса (см. § 1.4, п. 5, а))

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad 0 \leq y \leq y_0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad u|_{x=0} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq y_0,$$

где  $f$  — непрерывная функция и  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ ,

эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} u(x, y) = \varphi_1(x) + \int_0^y w(x, u') dy', \\ v(x, y) = \varphi'_1(x) + \int_0^y (f - av - bw - cu)(x, y') dy', \\ w(x, y) = \varphi'_2(y) + \int_0^x (f - av - bw - cu)(x', y) dx'. \end{cases}$$

з) Показать, что уравнение Лиувилля

$$u_{tt} - u_{xx} = ge^u, \quad g > 0,$$

имеет решение

$$u(x, t) = \ln \frac{8\varphi'(x+t)\psi'(x-t)}{g[\varphi(x+t) - \psi(x-t)]^2},$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные функции класса  $C^3$ , удовлетворяющие условиям  $\varphi' > 0$ ,  $\psi' > 0$ .

и) Показать, что уравнение Син-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u, \quad g > 0,$$

имеет решение

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \pm \sqrt{g} \frac{x - at}{\sqrt{1 - a^2}} \right\}, \quad |a| < 1.$$

к) Доказать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2|x|} \theta(at - |x|)$$

есть решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + \theta(x) \cdot \delta(t), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad u_t(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0 \quad \text{для всех } x \neq 0.$$

### § 3.4. Распространение волн

В этом параграфе будет дана физическая интерпретация решений волнового уравнения, полученных в § 3.3.

**1. Наложение волн и области влияния.** Пусть задан источник  $F(x, t)$ , обращающийся в нуль при  $t < 0$ . Решение  $u(x, t)$  обобщенной задачи Коши для волнового уравнения с источником  $F(x, t)$  согласно формуле (16) из § 3.3 имеет вид  $u = \mathcal{E}_n * F$ .

Физический смысл этой формулы (см. § 3.1, п. 3) состоит в том, что возмущение  $u(x, t)$  в точке  $x$  в момент времени  $t$  представляет собой наложение (суперпозицию суммы) элементарных возмущений

$$F(\xi, \tau)\mathcal{E}_n(x - \xi, t - \tau),$$

порождаемых точечными источниками

$$F(\xi, \tau)\delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau),$$

когда точки  $(\xi, \tau)$  пробегают множество, где сосредоточено возмущение  $F$ . В этом состоит принцип *наложения волн* (см. § 3.1, п. 3).

Из принципа наложения волн следует, что возмущение  $u$  от источника  $F$ , сосредоточенного в множестве  $T$  (т. е.  $\text{spt } F \subset T$ ), может достичь лишь тех точек полупространства  $t \geq 0$ , которые состоят из объединения носителей  $\mathcal{E}_n(x - \xi, t - \tau)$ , когда точка  $(\xi, \tau)$  пробегает множество  $T$ . Полученное таким путем множество  $M(T)$  называется *областью влияния множества  $T$* ,

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau \in T)} \text{spt } \mathcal{E}_n(x - \xi, t - \tau) = \text{spt } \mathcal{E}_n + T.$$

Ясно, что вне множества  $M(T)$  будет покой, другими словами,  $\text{spt } u \subset M(T)$ , если  $\text{spt } F \subset T$ . Конкретная реализация принципа суперпозиции существенно зависит от структуры носителя фундаментального решения  $\mathcal{E}_n(x, t)$  и, стало быть, от числа  $n$  пространственных переменных (см. § 3.2, п. 1). Это в свою очередь определяет особенности в характере распространения волн в пространстве, на плоскости и на прямой.

**2. Распространение волн в пространстве.** Из выражения для фундаментального решения трехмерного волнового оператора

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \equiv \frac{\theta(t)}{2\pi a^2} \delta(a^2 t^2 - |x|^2), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

вытекает, что возмущение  $\mathcal{E}_3(x, t)$  от точечного, мгновенно действующего источника  $\delta(x) \cdot \delta(t)$  к моменту времени  $t > 0$  будет сосредоточено на сфере радиуса  $at$  с центром в точке  $x = 0$  (рис. 30 и рис. 28). Это значит, что такое возмущение распространяется в виде *сферической волны*  $|x| = at$ , движущейся со скоростью  $a$ , причем после прохождения этой волны опять наступает покой. В этом случае говорят, что в пространстве имеет место *принцип Гюйгенса*.

Отсюда в силу принципа наложения волн (см. п. 1) вытекает, что возмущение  $u$  от произвольного источника  $F$ , сосредоточенного в  $T$ , может достичь лишь тех точек, которые состоят из объединения границ  $a(t - \tau) = |x - \xi|$  конусов будущего  $\Gamma^+(\xi, \tau)$ , когда их верши-

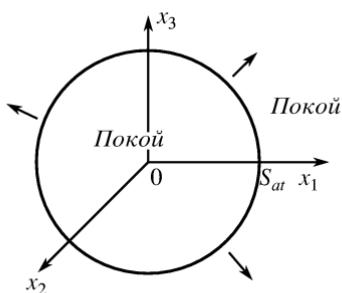


Рис. 30

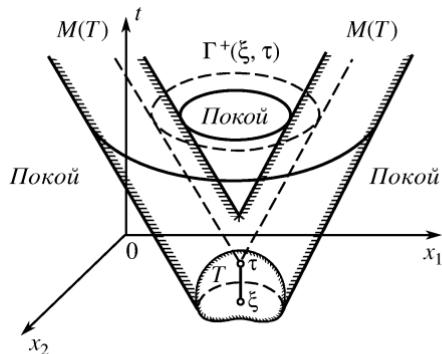


Рис. 31

ны  $(\xi, \tau)$  пробегают множество  $T$  (рис. 31), так что

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \text{гр } \Gamma^+(\xi, \tau).$$

При этом возмущение  $u(x, t)$  при  $t > 0$  полностью определяется значениями источника  $F(\xi, \tau)$  на боковой поверхности  $B(x, t)$  конуса  $\Gamma_0^-(x, t)$  (см. § 3.2, п. 3 и рис. 29). В этом состоит *математическая формулировка принципа Гюйгенса*.

В частности, если возмущение  $F$  сводится к начальному возмущению вида

$$F(x, t) = u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \quad (1)$$

то  $u(x, t)$  при  $t > 0$  полностью определяется значениями  $u_0(\xi)$  и  $u_1(\xi)$  на сфере  $S(x; at)$ , т. е. в точках границы основания конуса  $\Gamma^-(x, t)$ .

Пусть теперь возмущение (1) сосредоточено в компакте  $K$  плоскости  $t = 0$ , т. е.  $\text{spt } u_0, \text{spt } u_1 \subset K$ . В силу сказанного в точку  $x \notin K$  возмущение придет в момент времени  $t_0 = d/a$  и будет действовать в этой точке в течение времени  $(D-d)/a$ , где  $d$  и  $D$  — минимальное и максимальное расстояния от точки  $x$  до точек множества  $K$  (рис. 32).

При  $t > D/a = t_1$  в точке  $x$  снова наступает покой. Таким образом, в момент времени  $t_0$  через точку  $x$  проходит *передний фронт волны*, а в момент времени  $t_1$  через эту точку проходит *задний фронт волны*. При этом в момент времени  $t$  передний фронт будет внешней огибающей сфер  $S(\xi; at)$ , когда  $\xi$  пробегает  $K$ , а задний фронт — внутренней огибающей этих сфер (рис. 33).

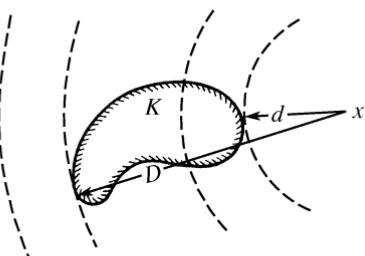


Рис. 32

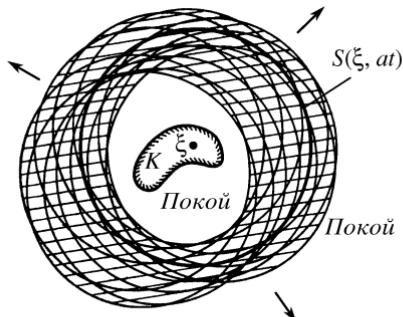


Рис. 33

Другими словами, к моменту времени  $t > 0$  возмущение распространяется на область, заключенную между передним и задним фронтами. Рассматривая эту картину при всех  $t \geq 0$ , заключаем, что в пространстве  $\mathbb{R}^4$  переменных  $(x, t)$  это возмущение будет сосредоточено на объединении границ  $|x - \xi| = at$  конусов будущего  $\Gamma^+(\xi, 0)$ , когда их вершины  $(\xi, 0)$  пробегают компакт  $K$  (в плоскости  $\tau = 0$ ), т. е. на  $M(K)$ .

**3. Распространение волн на плоскости.** Из формулы для фундаментального решения двумерного волнового оператора

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad x = (x_1, x_2),$$

вытекает, что возмущение  $\mathcal{E}_2(x, t)$  от точечного, мгновенно действующего источника  $\delta(x) \cdot \delta(t)$  к моменту времени  $t > 0$  будет сосредоточено в замкнутом круге радиуса  $at$  с центром в точке  $x = 0$

(рис. 34). Таким образом, наблюдается передний фронт волны  $|x| = at$ , движущийся на плоскости со скоростью  $a$ . Однако, в отличие от пространственного случая, за передним фронтом возмущение наблюдается во все последующие моменты времени, так что задний фронт волны отсутствует. В этом случае говорят, что на плоскости имеет место *диффузия волн*. При этом принцип Гюйгенса, очевидно, нарушается.

Чтобы понять, почему происходит диффузия волн на плоскости, заметим, что фундаментальное решение  $\mathcal{E}_2(x, t)$ , рассматриваемое как функция четырех переменных  $(x, x_3, t)$ , представляет собой возмущение от мгновенного источника  $\delta(x) \cdot 1(x_3) \cdot \delta(t)$ , сосредоточенного на оси  $x_3$  (см. § 3.1, п. 7),

$$\mathcal{E}_2(x, t) = \mathcal{E}_3 * [\delta(x) \cdot 1(x_3) \cdot \delta(t)].$$

От такого источника в  $\mathbb{R}^3$  возмущение распространяется в виде *цилиндрической волны*  $|x| \leq at$ , передний фронт которой  $|x| = at$  движется со скоростью  $a$  перпендикулярно оси  $x_3$  (рис. 35). После прохождения переднего фронта возмущение сохраняется бесконечно долго.

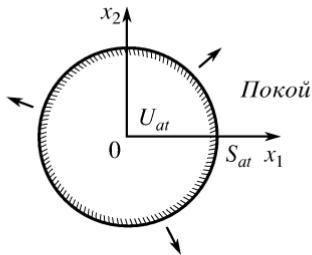


Рис. 34

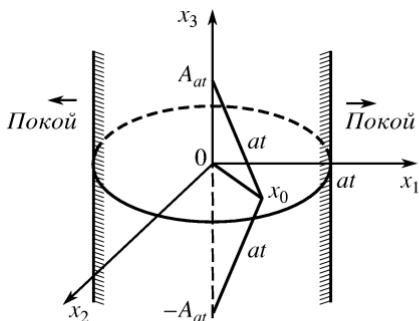


Рис. 35

Действительно, в силу принципа Гюйгенса (см. п. 2) в точку  $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^3$  в момент времени  $t > 0$  возмущение от источника  $\delta(x) \cdot 1(x_3) \cdot \delta(t)$  будет приходить из тех точек сферы  $|x - x_0|^2 + x_3^2 = a^2 t^2$ , которые лежат на оси  $x_3$ , т. е. из точек (рис. 35)

$$\pm A_{at} = \{0, \pm \sqrt{a^2 t^2 - |x - x_0|^2}\}.$$

Отсюда следует, что при  $t < |x_0|/a = t_0$  в точке  $(x_0, 0)$  будет покой; в момент времени  $t_0$  через эту точку пройдет передний фронт

волн (возмущение придет из точки  $x = 0$ ); во все последующие моменты времени  $t > t_0$  в эту точку будут приходить одинаковые возмущения из точек  $\pm A_{at}$ , и, стало быть, в ней будет наблюдаться отличное от нуля суммарное возмущение (задний фронт волны отсутствует).

Из наличия диффузии волн на плоскости в случае точечного начального возмущения  $\delta(x) \cdot \delta(t)$  следует, что диффузия волн наблюдается и для произвольного возмущения  $F(x, t)$ ,  $F = 0$  при  $t < 0$ .

Действительно, в силу принципа наложения волн (п. 1) возмущение  $u$  от источника  $F$ , сосредоточенного в  $T$ , может достичь лишь тех точек, которые лежат в объединении замыканий  $\bar{\Gamma}^+(\xi, \tau)$  конусов будущего  $\Gamma^+(\xi, \tau)$ , когда их вершины  $(\xi, \tau)$  пробегают множество  $T$  (рис. 36), так что

$$M(T) = \bigcup_{(\xi, \tau) \in T} \bar{\Gamma}^+(\xi, \tau).$$

Здесь при  $t > 0$  возмущение  $u(x, t)$  полностью определяется значениями источника  $F(\xi, \tau)$  на замыкании конуса  $\bar{\Gamma}^-(x, t)$  (см. рис. 29).

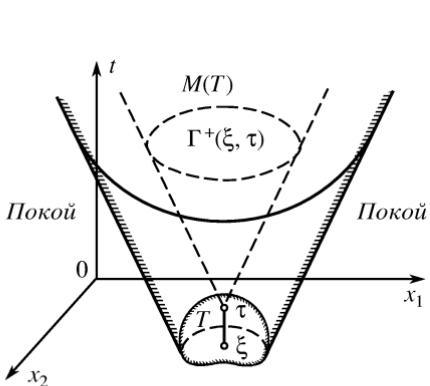


Рис. 36

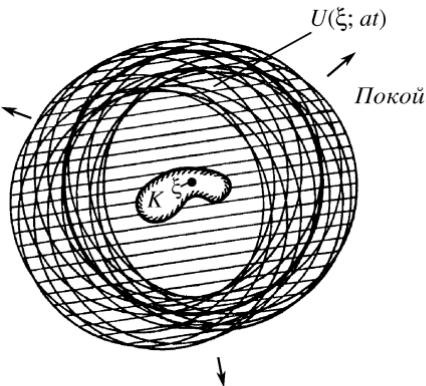


Рис. 37

В этом состоит *математическое содержание понятия «диффузия волн».*

В частности, если  $F$  — начальное возмущение вида (1), то  $u(x, t)$  при  $t > 0$  полностью определяется значениями  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  в круге  $U(x; at)$ , т. е. на основании конуса  $\bar{\Gamma}_0^-(x, t)$ . Поэтому если начальное возмущение сосредоточено на  $K$ , то к моменту времени  $t > 0$  возмущение  $u(x, t)$  распространится на область, представляющую собой объединение кругов  $U(x; at)$ , когда их центры  $\xi$  пробегают  $K$ .

(рис. 37). Таким образом здесь наблюдается передний фронт и отсутствует задний фронт волны.

В соответствии со сказанным областью влияния  $M(K)$  компакта  $K$  является объединение замкнутых будущих световых конусов  $\bar{\Gamma}^+(\xi, 0)$ , когда их вершины  $(\xi, 0)$  пробегают  $K$  в плоскости  $\tau = 0$  (см. § 3.2, п. 3 и рис. 36).

**4. Распространение волн на прямой.** Из вида фундаментального решения одномерного волнового оператора

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \quad x = x_1,$$

вытекает, что возмущение  $\mathcal{E}_1(x, t)$  от точечного, мгновенно действующего источника  $\delta(x) \cdot \delta(t)$  к моменту времени  $t > 0$  будет сосредоточено на отрезке  $-at \leq x \leq at$  (рис. 26). В этом случае наблюдаются два передних фронта  $x = at$  и  $x = -at$ , движущихся со скоростью  $a$  направо и налево соответственно. Как и в плоском случае, за фронтом волны наблюдается возмущение (здесь оно постоянно и равно  $\frac{1}{2a}$ ), т. е. имеет место диффузия волн.

Чтобы понять это явление, дадим трехмерную интерпретацию фундаментальному решению  $\mathcal{E}_1(x, t)$ . Это решение представляет собой возмущение от мгновенного источника  $\delta(x) \cdot 1(x_2, x_3) \cdot \delta(t)$ , сосредоточенного на плоскости  $x = 0$ :

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \mathcal{E}_3 * [\delta(x) \cdot 1(x_2, x_3) \cdot \delta(t)].$$

От такого источника в  $\mathbb{R}^3$  возмущение распространяется в виде *плоской волны*  $|x| \leq at$ , передний фронт которой  $|x| = at$  движется со скоростью  $a$ , перпендикулярной плоскости  $x = 0$ . Отметим, что здесь передний фронт состоит из двух плоскостей,  $x = at$  и  $x = -at$ , движущихся со скоростью  $a$  направо и налево соответственно относительно плоскости  $x = 0$  (рис. 38). После прохождения переднего фронта волны возмущение сохранится навсегда.

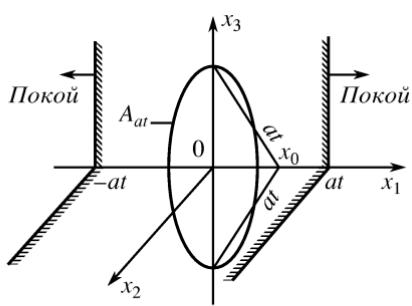


Рис. 38

Действительно, в силу принципа Гюйгенса (см. п. 2) в данную точку  $(x_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  в момент времени  $t > 0$  возмущение от ис-

точника  $\delta(x) \cdot 1(x_2, x_3) \cdot \delta(t)$  будет приходить из тех точек сферы  $|x - x_0|^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 t^2$ , которые лежат на плоскости  $x = 0$ , т. е. из точек окружности (рис. 38)

$$A_{at} = \{x_2^2 + x_3^2 = a^2 t^2 - x_0^2, x = 0\}.$$

Отсюда следует, что при  $t < |x_0|/a = t_0$  в точке  $(x_0, 0, 0)$  будет покой; в момент времени  $t_0$  через эту точку пройдет передний фронт волны (возмущение придет из точки 0); во все последующие моменты времени  $t > t_0$  в эту точку будут приходить одинаковые возмущения из точек окружности  $A_{at}$ , и, стало быть, в ней будет наблюдаться отличное от нуля суммарное возмущение (задний фронт отсутствует).

Из наличия диффузии волн на прямой в случае точечного начального возмущения  $\delta(x) \cdot \delta(t)$  следует, что диффузия волн наблюдается и для произвольного начального возмущения  $u_1(x) \cdot \delta(t)$ .

Рассмотрим теперь мгновенный точечный источник вида  $\delta(x) \cdot \delta'(t)$ . По теореме из § 3.3, п. 3 этот источник порождает возмущение

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_1(x, t) &= \mathcal{E}_1(x, t) * [\delta(x) \cdot \delta'(t)] = \\ &= \frac{\partial \mathcal{E}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \theta(at - |x|) = \frac{1}{2} \delta(at - |x|).\end{aligned}\quad (2)$$

Отсюда видно, что возмущение  $\tilde{\mathcal{E}}_1(x, t)$  в момент времени  $t > 0$  будет сосредоточено только в двух точках  $x = \pm at$ , так что после прохождения фронта волны  $|x| = at$  снова наступает покой. В этом случае имеет место принцип Гюйгенса.

Для произвольного начального возмущения вида  $u_0(x) \cdot \delta'(t)$  возмущение  $u(x, t)$  при  $t > 0$  полностью определяется значениями  $u_0(\xi)$  в точках  $x \pm at$ , т. е. в точках границы основания конуса  $\Gamma_0^-(x, t)$  (см. рис. 29). Это возмущение дается формулой

$$u = \mathcal{E}_1(x, t) * [u_0(x) \cdot \delta'(t)] = \tilde{\mathcal{E}}_1(x, t) * u_0(x).$$

Отсюда, учитывая равенства (2), при  $t > 0$  получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \delta(at - |x|) * u_0(x) = \frac{1}{2} u_0(x + at) + \frac{1}{2} u_0(x - at).\quad (3)$$

Физический смысл формулы (3) состоит в том, что начальное возмущение  $u_0(x) \cdot \delta'(t)$  при  $t > 0$  как бы распадается на два подобных

возмущения  $u_0(x \pm at)$ , каждое половинной интенсивности (рис. 39).

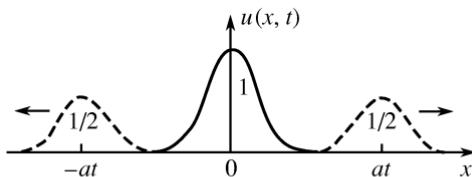


Рис. 39

В соответствии со сказанным области влияния отрезка  $K = [a, b]$  для начальных возмущений  $u_1(x) \cdot \delta(t)$  и  $u_0(x) \cdot \delta'(t)$  имеют вид, указанный на рис. 40 и рис. 41.

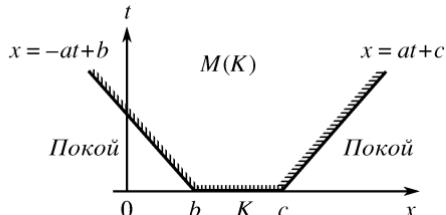


Рис. 40

Таким образом, на прямой для начального возмущения  $u_1(x) \cdot \delta(t)$  имеет место диффузия волн, а для начального возмущения  $u_0(x) \cdot \delta'(t)$  — принцип Гюйгенса. Для произвольного возмущения  $F$ ,  $F(x, t) = 0$ ,  $t < 0$ , могут иметь место либо принцип Гюйгенса, либо диффузия волн, либо их наложение. Физические интерпретации и геометрические построения аналогичны рассмотренным в п. 2 и п. 3 соответственно.

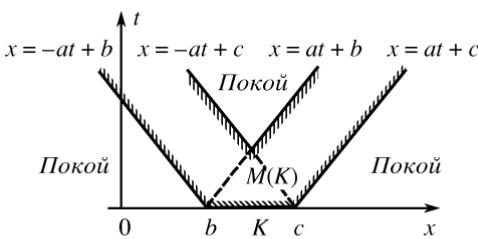


Рис. 41

тации и геометрические построения аналогичны рассмотренным в п. 2 и п. 3 соответственно.

**5. Метод распространяющихся волн.** Изложим другой метод — метод распространяющихся волн решения классической задачи Коши для одномерного однородного волнового уравнения

$$\square_a u = 0, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (5)$$

Прежде всего докажем следующую лемму.

**ЛЕММА.** Для того чтобы функция  $u(x, t)$  класса  $C^2$  была решением волнового уравнения (4) в некоторой области, необходимо и достаточно, чтобы в этой области она имела представление

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (6)$$

где  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  — функции класса  $C^2$  в соответствующих интервалах изменения переменных  $\xi$  и  $\eta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функция (6) удовлетворяет уравнению (4), так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x - at) + a^2 g''(x + at) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обратно, пусть функция  $u(x, t)$  класса  $C^2$  удовлетворяет уравнению (4) в некоторой области. Представим уравнение (4) в каноническом виде. В соответствии со сказанным в § 1.3, п. 4 его дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{dx}{dt} = a,$$

и, следовательно, замена переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (7)$$

приводит уравнение (4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по  $\xi$ , получим

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \chi(\eta),$$

где  $\chi$  — некоторая функция класса  $C^1$ . Интегрируя теперь полученное уравнение по  $\eta$ , запишем функцию  $\tilde{u}$  в виде

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int^{\eta} \chi(\eta') d\eta' + f(\xi) = f(\xi) + g(\eta), \quad (8)$$

где  $f$  и  $g$  — некоторые функции класса  $C^2$ . Переходя к старым переменным  $x$  и  $t$  по формулам (7), выводим из (8) представление (6) для решения  $u(x, t)$ . Лемма доказана.

*Физическая интерпретация решения (6).* Функция  $f(x-at)$  описывает возмущение, которое из точки  $x_0$  в момент времени  $t=0$  приходит в точку  $x = x_0 + at$  в момент времени  $t$  (рис. 42). Поэтому эта

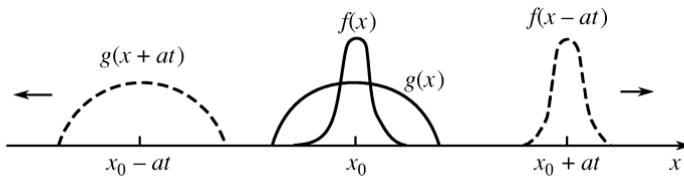


Рис. 42

функция представляет собой волну, двигающуюся направо со скоростью  $a$ . Аналогично, функция  $g(x+at)$  представляет собой волну, двигающуюся налево со скоростью  $a$ .

Общее решение (6) волнового уравнения (4) есть наложение этих двух волн.

С помощью представления (6) общего решения волнового уравнения (4) классическое решение задачи Коши (4), (5) строится следующим образом.

Предположим, что решение  $u(x, t)$  этой задачи существует. Тогда по лемме из п. 5 это решение представляется в виде (6) с функциями  $f$  и  $g$  класса  $C^2(\mathbb{R}^1)$ . Для того чтобы решение  $u(x, t)$  удовлетворяло начальным условиям (5), необходимо, чтобы функции  $f$  и  $g$  удовлетворяли соотношениям

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad -af'(x) + ag'(x) = u_1(x),$$

т. е.

$$f(\xi) + g(\xi) = u_0(\xi), \quad g(\xi) - f(\xi) = \frac{1}{a} \int_0^\xi u_1(\xi') d\xi' + C, \quad (9)$$

где  $C$  — некоторая постоянная. Решая уравнения (9) относительно неизвестных функций  $f$  и  $g$ , найдем

$$f(\xi) = \frac{1}{2} u_0(\xi) - \frac{1}{2a} \int_0^\xi u_1(\xi') d\xi' - \frac{C}{2},$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2} u_0(\eta) + \frac{1}{2a} \int_0^\eta u_1(\xi') d\xi' + \frac{C}{2}.$$

Подставляя полученные выражения для  $f$  и  $g$  в формулу (6), получаем формулу Даламбера (см. § 3.3, п. 4)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + at) + u_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что формула Даламбера (10) действительно дает классическое решение задачи Коши (4), (5), если  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$  и  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$ . Это решение единственno (см. § 3.3, п. 4).

**6. Метод отражений. Полубесконечная струна.** Изложенный в предыдущем пункте метод распространяющихся волн решения задачи Коши для уравнения (4) позволяет решать некоторые смешанные задачи для этого уравнения. Для определенности рассмотрим смешанную задачу (см. § 1.4, п. 4), описывающую колебание полубесконечной струны  $x > 0$  с закрепленным левым концом

$$u|_{x=0} = 0. \quad (11)$$

Предварительно докажем, что всякое классическое решение  $u(x, t)$  уравнения (4) в квадрате  $x > 0, t > 0$ , удовлетворяющее условию (11), представляется в виде

$$u(x, t) = g(x + at) - g(-x + at), \quad g \in C^2(\mathbb{R}^1). \quad (12)$$

Действительно, по лемме из п. 5 решение  $u(x, t)$  представляется в виде (6), где  $f(\xi) \in C^2(\mathbb{R}^1)$  и  $g(\eta) \in C^2(\eta > 0)$ . Отсюда, учитывая условие (11), получим

$$0 = f(-at) + g(at),$$

откуда и вытекает представление (12).

*Физическая интерпретация решения (12).* Это решение представляет собой наложение двух волн: волны  $g(x + at)$ , движущейся со скоростью  $a$  налево, и волны  $-g(-x + at)$ , движущейся с той же скоростью направо. Пусть волна  $g(x + at)$  движется по полубесконечной струне  $x > 0$ , закрепленной в точке  $x = 0$ . Тогда волна  $-g(-x + at)$  будет двигаться по полуоси  $x < 0$  навстречу волне  $g(x + at)$  (рис. 43). В некоторый момент времени эти волны встретятся в точке  $x = 0$  и, накладываясь друг на друга, дадут нулевое возмущение в этой точке. При дальнейшем движении волна  $g(x + at)$  окажется за пределами струны, в то время как волна  $-g(-x + at)$  перейдет на струну. В результате на струне будет наблюдаться отражение волны  $g(x + at)$  от конца струны  $x = 0$  с изменением знака (рис. 44).

Построим теперь решение смешанной задачи (4), (5), (11). Всякое классическое решение  $u(x, t)$  этой задачи в силу (12) допускает

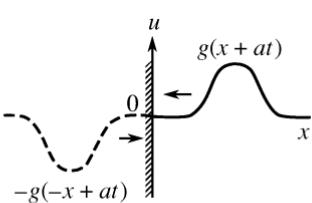


Рис. 43

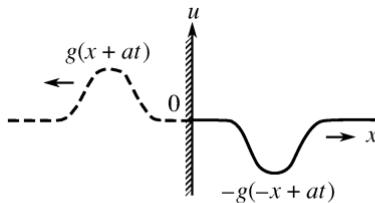


Рис. 44

нечетное продолжение  $\tilde{u}(x, t)$  по  $x$  класса  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , и это продолжение удовлетворяет уравнению (4) в  $\mathbb{R}^2$ . Отсюда и из условий (5) вытекает, что решение  $\tilde{u}(x, t)$  удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{u}_1(x), \quad (13)$$

где  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_1$  — нечетные продолжения функций  $u_0$  и  $u_1$  соответственно. Но решение такой задачи Коши единственны и представляется формулой Даламбера (10) с заменой  $u_0$  на  $\tilde{u}_0$  и  $u_1$  на  $\tilde{u}_1$ , если  $\tilde{u}_0 \in C^2(\mathbb{R}^1)$  и  $\tilde{u}_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$ . Последние условия будут выполнены, если

$$u_0 \in C^2(x \geq 0), \quad u_1 \in C^1(x \geq 0), \quad u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0. \quad (14)$$

Итак, если выполнены условия (14), то решение задачи (4), (5), (11) существует, единственны и задается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}_0(x + at) + \tilde{u}_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi, \quad x \geq 0. \quad (15)$$

Пусть  $x - at \geq 0$ . Тогда

$$\tilde{u}_0(x - at) = u_0(x - at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = u_1(\xi), \quad \xi \geq x - at \geq 0,$$

и формула (15) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + at) + u_0(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, \quad x \geq at. \quad (16)$$

Пусть теперь  $x - at \leq 0$ . В этом случае

$$\tilde{u}_0(x - at) = -u_0(-x + at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = -u_1(-\xi), \quad x - at \leq \xi \leq 0,$$

и формула (15) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + at) - u_0(-x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{-x+at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq at. \quad (17)$$

Как видно из формулы (17), в точку  $(x, t)$ ,  $0 \leq x \leq at$ , приходят две волны: прямая волна из точки  $(x + at, 0)$  и один раз отраженная волна из точки  $(at - x, 0)$  (совпадающая с прямой волной из фиктивной точки  $(x - at, 0)$ ; рис. 45).

Аналогично рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны  $x > 0$  со свободным концом:

$$u_x|_{x=0} = 0.$$

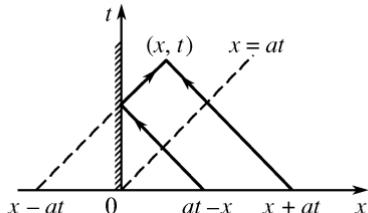


Рис. 45

Здесь также имеет место отражение волн от конца струны  $x = 0$ , но уже без изменения знака.

**7. Метод отражений. Конечная струна.** Применим метод отражений, изложенный в предыдущем пункте, для решения смешанной задачи для конечной струны  $0 \leq x \leq l$  с закрепленными концами

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (18)$$

Сначала докажем, что всякое классическое решение  $u(x, t)$  волнового уравнения (4) в полуполосе  $0 < x < l$ ,  $t > 0$ , удовлетворяющее условиям (18), представляется в виде

$$u(x, t) = g(x + at) - g(-x + at), \quad g(\xi + 2l) = g(\xi), \quad g \in C^2(\mathbb{R}^1). \quad (19)$$

Действительно, по лемме из п. 5 решение  $u(x, t)$  представляется в виде (6), где  $f(\xi) \in C^2(\xi < l)$  и  $g(\eta) \in C^2(\eta > 0)$ . Отсюда, учитывая условия (18), получим

$$g(\xi) = -f(-\xi), \quad f(l - \xi) = -g(l + \xi). \quad (20)$$

Эти соотношения дают продолжения функций  $f$  и  $g$  на всю ось с сохранением класса  $\mathcal{C}^2$ . В самом деле, равенство  $g(\xi) = -f(-\xi)$  распространяет функцию  $g$  на интервал  $(-l, \infty)$ . А тогда второе из равенств (20), записанное в виде  $f(\eta) = -g(2l - \eta)$ , распространяет функцию  $f$  на интервал  $(-\infty, 3l)$ , и т. д. В результате такого продолжения функции  $f$  и  $g$  будут принадлежать классу  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1)$  и удовлетворять соотношениям (20). Отсюда вытекает представление (19) и  $2l$ -периодичность функции  $g$ :

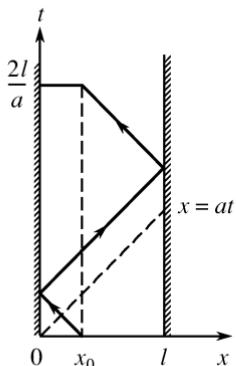


Рис. 46

$$-g(l + \xi) = f(l - \xi) = -g(-l + \xi).$$

Решение (19) показывает, что имеет место отражение от обоих концов  $x = 0$  и  $x = l$  с изменением знака. Отсюда следует, что движение струны периодическое по времени с периодом  $2l/a$  (рис. 46).

Построим теперь решение смешанной задачи (4), (5), (18). Если классическое решение  $u(x, t)$  этой задачи существует, то в силу (19) оно допускает  $2l$ -периодическое нечетное продолжение  $\tilde{u}(x, t)$  по  $x$  относительно точек  $x = 0$  и  $x = l$ , и это продолжение принадлежит классу  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$  и удовлетворяет уравнению (4) в  $\mathbb{R}^2$ . Отсюда и из условий (5) вытекает, что функция  $\tilde{u}(x, t)$  удовлетворяет начальным условиям (13), в которых функции  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_1$  — соответственно  $2l$ -периодические нечетные продолжения функций  $u_0$  и  $u_1$  относительно точек  $x = 0$  и  $x = l$ .

Рассуждая теперь, как в предыдущем пункте, заключаем, что если функции  $u_0$  и  $u_1$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u_0 &\in \mathcal{C}^2([0, l]), & u_0(0) = u_0''(0) = u_0(l) = u_0''(l) = 0, \\ u_1 &\in \mathcal{C}^1([0, l]), & u_1(0) = u_1(l) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

то решение смешанной задачи (4), (5), (18) существует, единственно и дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{u}(x + at) + \tilde{u}(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (22)$$

Пусть точка  $(x, t)$  расположена так, как показано на рис. 47. Тогда формула (22) в этой точке принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(\gamma) - u_0(\beta)] - \frac{1}{2a} \int_{\beta}^{\gamma} u_1(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Действительно, согласно правилу отражений  $\tilde{u}_0(b) = u_0(\gamma)$ ,  $\tilde{u}_0(c) = -u_0(\beta)$  и

$$\begin{aligned} \int_b^c \tilde{u}_1(\xi) d\xi &= \int_b^{-l} \tilde{u}_1(\xi) d\xi + \int_l^c \tilde{u}_1(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\gamma}^l u_1(\xi) d\xi + \int_l^{\beta} u_1(\xi) d\xi = \int_{\gamma}^{\beta} u_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (22) вытекает формула (23). Она показывает, что в точку  $(x, t)$  приходят две волны: одна волна из точки  $\beta$  (один раз

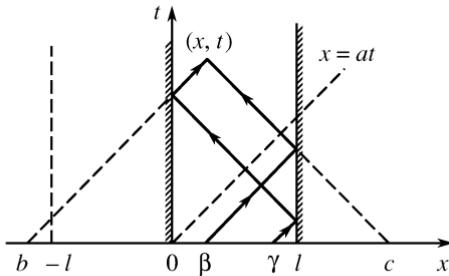


Рис. 47

отраженная от конца  $x = l$ ), другая из точки  $\gamma$  (по одному разу отраженная от концов  $x = l$  и  $x = 0$ ) (см. рис. 47).

### § 3.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности строится методом, аналогичным методу, изложенному в § 3.3 для решения подобной задачи для волнового уравнения.

**1. Тепловой потенциал.** В § 3.1, п. 6 было показано, что функция

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2} t \right\}$$

является фундаментальным решением оператора теплопроводности. Эта функция неотрицательна, обращается в нуль при  $t < 0$ , бесконечно дифференцируема при  $(x, t) \neq (0, 0)$  и локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Более того, (см. § 2.2, п. 5, е)),

$$\int \mathcal{E}(x, t) dx = 1, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\mathcal{E}(x, t) \rightarrow \delta(x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad t \rightarrow +0. \quad (2)$$

График функции  $\mathcal{E}(x, t)$  при различных  $t > 0$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ) построен на рис. 48.

Фундаментальное решение  $\mathcal{E}(x, t)$  дает распределение температуры от точечного мгновенного источника  $\delta(x) \cdot \delta(t)$ . Поскольку  $\mathcal{E}(x, t) > 0$  при всех  $t > 0$

и  $x \in \mathbb{R}^n$ , то, стало быть, тепло распространяется с бесконечной скоростью. Но это противоречит опыту. Следовательно, уравнение теплопроводности недостаточно точно качественно описывает механизм передачи тепла. Тем не менее это уравнение дает хорошее количественное согласие с опытом (например, при больших  $x$  и малых  $t$  величина  $\mathcal{E}(x, t)$  чрезвычайно мала, и ею можно пренебречь).

Более точное описание процессов переноса (тепла, частиц) дает уравнение переноса.

Пусть обобщенная функция  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  обращается в нуль при  $t < 0$ . Обобщенная функция  $V = \mathcal{E} * f$ , где  $\mathcal{E}$  — фундаментальное решение оператора теплопроводности, называется *тепловым потенциалом с плотностью*  $f$ .

Если тепловой потенциал  $V$  существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , то в силу теоремы из § 3.1, п. 3 он удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V + f(x, t). \quad (3)$$

Из теоремы 1 из § 2.3, п. 4 следует, что если  $f$  — финитная обобщенная функция и обращается в нуль при  $t < 0$ , то тепловой потенциал заведомо существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ . Выделим еще один класс

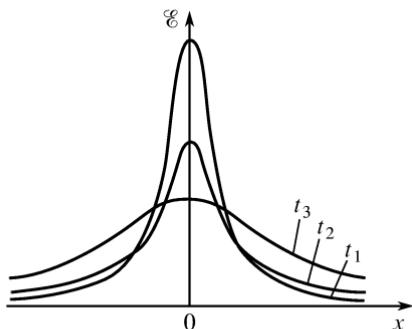


Рис. 48

плотностей  $f$ , для которых тепловой потенциал существует. Пусть  $\mathcal{M}$  — класс функций, обращающихся в нуль при  $t < 0$  и ограниченных в каждой полосе  $0 \leq t \leq T$ .

**Теорема.** *Если  $f \in \mathcal{M}$ , то тепловой потенциал  $V$  с плотностью  $f$  существует в классе  $\mathcal{M}$  и выражается формулой*

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\xi d\tau. \quad (4)$$

Потенциал  $V$  удовлетворяет оценке

$$|V(x, t)| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t, \xi \in \mathbb{R}^n} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0, \quad (5)$$

и начальному условию

$$V(x, t) \Rightarrow 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \rightarrow +0. \quad (6)$$

Если же функция  $f \in \mathcal{C}^2(t \geq 0)$  и все ее производные до второго порядка включительно ограничены в каждой полосе, то  $V \in \mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ .

**Доказательство.** Так как функции  $\mathcal{E}$  и  $f$  локально интегрируемы в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то их свертка

$$\mathcal{E} * f = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

существует и локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , если функция

$$h(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi, \tau)| \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$

локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$  (см. § 2.3, п. 2). Проверим, что это условие выполнено. Так как  $h = 0$  при  $t < 0$ , то достаточно установить, что  $h$  удовлетворяет оценке (5) при  $t > 0$ . Это следует из равенства (1):

$$\begin{aligned} h(x, t) &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t, \xi \in \mathbb{R}^n} |f(\xi, \tau)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= t \sup_{0 \leq \tau \leq t, \xi \in \mathbb{R}^n} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, тепловой потенциал  $V = \mathcal{E} * f$  представляется формулой (4). Так как  $|V| \leq h$ , то этот потенциал обращается в нуль при  $t < 0$  и в силу (7) удовлетворяет оценке (5). Это значит, что  $V \in \mathcal{M}$ . Из оценки (5) следует, что  $V$  удовлетворяет начальному условию (6).

Совершая в формуле (4) замену переменных интегрирования  $\xi = x - 2a\sqrt{s}y$ ,  $\tau = t - s$ , представим ее в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2a\sqrt{s}y, t - s) e^{-|y|^2} dy ds. \quad (4')$$

Пусть функция  $f \in C^2(t \geq 0)$  и все ее производные до второго порядка включительно содержатся в классе  $\mathcal{M}$ . Тогда, пользуясь теоремами о непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра (см. § 1.1, п. 5), из формулы (4') и из равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x - 2a\sqrt{s}y, t - s) e^{-|y|^2} dy ds + \\ &\quad + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - 2a\sqrt{t}y, +0) e^{-|y|^2} dy \end{aligned}$$

выводим, что функции  $V$ ,  $V_{x_i}$ ,  $V_t$ ,  $V_{x_i x_j}$ ,  $V_{x_i t}$  непрерывны при  $t \geq 0$ , а функция  $V_{tt}$  непрерывна при  $t > 0$ . Теорема доказана.

**2. Поверхностный тепловой потенциал.** Тепловой потенциал  $V^{(0)}$  с плотностью  $f = u_0(x) \cdot \delta(t)$  называется *поверхностным тепловым потенциалом* (простого слоя с плотностью  $u_0$ ),

$$V^{(0)} = \mathcal{E} * [u_0(x) \cdot \delta(t)] = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x).$$

Если  $u_0$  финитна в  $\mathbb{R}^n$ , то поверхственный тепловой потенциал  $V^{(0)}$  заведомо существует в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  (см. § 2.3, п. 4).

Следующая теорема описывает важный класс тепловых потенциалов и его свойства.

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u_0(x)$  — ограниченная функция в  $\mathbb{R}^n$ , то поверхственный тепловой потенциал  $V^{(0)}$  существует в  $\mathcal{M}$ , принадлежит классу  $C^\infty(t > 0)$ , представляется интегралом Пуассона*

$$V^{(0)}(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi \quad (8)$$

и удовлетворяет неравенству

$$|V^{(0)}(x, t)| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u_0(\xi)|, \quad t > 0. \quad (9)$$

*Если к тому же функция  $u_0(x)$  непрерывна в  $\mathbb{R}^n$ , то потенциал  $V^{(0)}$  принадлежит  $\mathcal{C}(t \geq 0)$  и удовлетворяет начальному условию*

$$V^{(0)}|_{t=0} = u_0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция

$$h(x, t) = \int |u_0(\xi)| \mathcal{E}(x - \xi, t) d\xi$$

обращается в нуль при  $t < 0$ , а при  $t > 0$  в силу (1) удовлетворяет оценке (9):

$$h(x, t) \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u_0(\xi)| \int \mathcal{E}(x - \xi, t) d\xi = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u_0(\xi)|,$$

то эта функция локально интегрируема в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Следовательно, поверхностный тепловой потенциал  $V^{(0)} = \mathcal{E}(x, t) * u_0(x)$  представляется формулой (8) (см. § 2.3, п. 2):

$$V^{(0)}(x, t) = \int u_0(\xi) \mathcal{E}(x - \xi, t) d\xi, \quad (8')$$

обращается в нуль при  $t < 0$  и в силу неравенства  $|V^{(0)}| \leq h$  удовлетворяет оценке (9). Значит,  $V^{(0)} \in \mathcal{M}$ .

Далее, из формулы (8) следует, что  $V^{(0)} \in \mathcal{C}^\infty(t > 0)$  (см. § 1.1, п. 4).

Пусть теперь  $u_0$  — непрерывная ограниченная функция в  $\mathbb{R}^n$ . Докажем, что потенциал  $V^{(0)}$  принадлежит  $\mathcal{C}(t \geq 0)$  и удовлетворяет условию (10).

Пусть  $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$ ,  $t > 0$  и  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. В силу непрерывности  $u_0(x)$  существует такое число  $\delta > 0$ , что  $|u_0(\xi) - u_0(x_0)| < \varepsilon$  при  $|\xi - x_0| < 2\delta$ . Поэтому если  $|x - x_0| < \delta$  и  $|y| < \delta$ , так что  $|x - y - x_0| < 2\delta$ , то в силу (1) и (8') при  $t > 0$  имеем

$$\begin{aligned} |V^{(0)}(x, t) - u_0(x_0)| &\leq \int |u_0(\xi) - u_0(x_0)| \mathcal{E}(x - \xi, t) d\xi = \\ &= \int_{|y|<\delta} |u_0(x-y) - u_0(x_0)| \mathcal{E}(y, t) dy + \int_{|y|>\delta} |u_0(x-y) - u_0(x_0)| \mathcal{E}(y, t) dy \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{2}{\pi^{n/2}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |u_0(\xi)| \int_{|\xi|>\delta/(2a\sqrt{t})} e^{-|\xi|^2} d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Второе слагаемое в (11) также можно сделать  $< \varepsilon$  за счет  $t \rightarrow 0$ , так что при некотором  $\delta_1 \leq \delta$

$$|V^{(0)}(x, t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon, \quad |x - x_0| < \delta, \quad |t| < \delta_1.$$

Теорема доказана.

**3. Постановка обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности.** Схема решения задачи Коши, изложенная в § 3.3, п. 1 для обыкновенного линейного дифференциального уравнения, применяется и для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta + f(x, t), \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = u_0. \quad (13)$$

Считаем  $f \in \mathcal{C}(t \geq 0)$  и  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ . Предположим, что существует классическое решение  $u(x, t)$  этой задачи. Это значит, что  $u \in \mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}(t \geq 0)$  удовлетворяет уравнению (12) при  $t > 0$  и начальному условию (13) при  $t \rightarrow +0$  (см. § 1.4, п. 2).

Продолжая функции  $u$  и  $f$  нулем при  $t < 0$ , как и в § 3.3, п. 2, заключаем, что продолженные функции  $\tilde{u}$  и  $\tilde{f}$  удовлетворяют в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{u} + \tilde{f}(x, t) + u_0 \cdot \delta(t). \quad (14)$$

Равенство (14) показывает, что начальное возмущение  $u_0$  для функции  $\tilde{u}(x, t)$  играет роль мгновенно действующего источника  $u_0(x) \cdot \delta(t)$  (типа простого слоя на плоскости  $t = 0$ ) и классические решения задачи Коши (12), (13) содержатся среди тех решений уравнения (14), которые обращаются в нуль при  $t < 0$ . Это дает основание ввести следующее обобщение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

*Обобщенной задачей Коши* для уравнения теплопроводности с источником  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  назовем задачу о нахождении обобщенной функции  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , обращающейся в нуль при  $t < 0$  и удовлетворяющей уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x, t). \quad (15)$$

Уравнение (15) эквивалентно следующему (см. § 3.1, п. 1): для любой основной функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  справедливо равенство

$$-\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = a^2(u, \Delta \varphi) + (F, \varphi). \quad (15')$$

Из уравнения (15) следует, что необходимым условием разрешимости обобщенной задачи Коши является обращение в нуль  $F$  при  $t < 0$ .

#### 4. Решение задачи Коши.

ТЕОРЕМА. Пусть  $F(x, t) = f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)$ , где  $f \in \mathcal{M}$ ,  $u_0$  — ограниченная функция в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда решение соответствующей обобщенной задачи Коши существует и единствено в классе  $\mathcal{M}$  и представляется формулой Пуассона

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} \exp \left\{ -\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\xi d\tau + \\ & + \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \exp \left\{ -\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t} \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение и непрерывно зависит от  $f$  и  $u_0$  в следующем смысле: если

$$|f - \tilde{f}| \leq \varepsilon, \quad |u_0 - \tilde{u}_0| \leq \varepsilon_0,$$

то соответствующие решения  $u$  и  $\tilde{u}$  в любой полосе  $0 \leq t \leq T$  удовлетворяют оценке

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq T\varepsilon + \varepsilon_0. \quad (17)$$

Если к тому же  $f \in \mathcal{C}^2(t \geq 0)$ , все ее производные до второго порядка включительно принадлежат классу  $\mathcal{M}$  и  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1)$ , то решение  $u(x, t)$  классическое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий теоремы свертка  $\mathcal{E}$  с правой частью  $F$  уравнения (15) существует в  $\mathcal{M}$  и представляется в виде суммы (16) двух тепловых потенциалов  $V$  и  $V^{(0)}$ , и эти потенциалы выражаются формулами (4) и (8) соответственно (см. теоремы из пп. 1, 2). Таким образом, по теореме из § 3.1, п. 3 формула (16) дает решение обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности, и это решение единствено в классе  $\mathcal{M}$ . Непрерывная зависимость решения  $u$  от данных задачи  $f$  и  $u_0$  вытекает из оценок (5) и (9).

Если функции  $f$  и  $u_0$  удовлетворяют дополнительным условиям гладкости, приведенным в теореме, то по теоремам из пп. 1, 2 построенное обобщенное решение  $u$  принадлежит  $\mathcal{C}^2(t > 0) \cap \mathcal{C}(t \geq 0)$  и удовлетворяет начальному условию (13). По лемме из § 3.1, п. 1  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (12) в области  $t > 0$ . Поэтому  $u$  — классическое решение задачи Коши (12), (13). Теорема доказана.

Подводя итоги, можно сказать, что задача Коши для уравнения теплопроводности поставлена корректно (см. § 1.4, п. 6), причем  $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ ,  $\partial^\alpha u \in \mathcal{M}$ ,  $|\alpha| \leq 2$ , — класс корректности классической задачи Коши и  $\mathcal{M}$  — класс корректности обобщенной задачи Коши.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности можно установить в более широком классе, а именно в классе функций, удовлетворяющих в каждой полосе  $0 \leq t \leq T$  оценке

$$|u(x, t)| \leq C e^{a|x|^2}, \quad C = C(T), \quad a = a(T).$$

## 5. Упражнения.

а) Показать, что решениями смешанных задач

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x)$$

с граничными условиями:

$$1) \quad u|_{x=0} = \psi(t), \quad 2) \quad u_x|_{x=0} = \psi(t),$$

являются соответственно функции:

$$\begin{aligned} 1) \quad u(x, t) &= \mathcal{E}(x, t) * \tilde{u}_0(x) - 2a^2 \frac{\partial \mathcal{E}(x, t)}{\partial x} * \psi(t) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left[ \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \right] d\xi + \\ &\quad + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau; \\ 2) \quad u(x, t) &= \mathcal{E}(x, t) * \tilde{\tilde{u}}_0(x) - 2a^2 \mathcal{E}(x, t) * \psi(t) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi) \left[ \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right\} \right] d\xi - \\ &\quad - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Здесь  $u_0 \in \mathcal{C}([0, \infty))$  ограничена,  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{\tilde{u}}_0$  — ее нечетное и четное продолжения соответственно и  $\psi \in \mathcal{C}([0, \infty))$ ,  $\psi = 0$ ,  $t < 0$ .

б) Пусть функция  $u_0(x)$  ограничена в  $\mathbb{R}^n$  и обладает шаровым предельным средним

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n R^n} \int_{|x| \leq R} u_0(x) dx = a.$$

Доказать, что решение  $u(x, t)$  соответствующей задачи Коши для уравнения теплопроводности стабилизируется к  $a$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.

$$u(x, t) \rightharpoonup a, \quad |x| \leq R, \quad t \rightarrow \infty, \quad R \text{ любое.}$$

в) Пользуясь фундаментальным решением оператора Шрёдингера (см. § 3.1, п. 10, г)) показать, что задача Коши для одномерного уравнения Шрёдингера (см. формулу (33) из § 1.2) сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \lambda \int_0^t \int \exp \left\{ i \frac{m_0 |x - \xi|^2}{2\hbar(t - \tau)} \right\} \frac{V(\xi)}{\sqrt{t - \tau}} \psi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \\ & + \lambda \frac{i\hbar}{\sqrt{t}} \int \exp \left\{ i \frac{m_0 |x - \xi|^2}{2\hbar t} \right\} \psi_0(\xi) d\xi, \quad \lambda = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi\hbar}} \exp \left\{ i \frac{5\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

г) Показать, что задача Коши для (нелинейного) уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

с помощью замены  $u = -2a^2 \varphi_x / \varphi$  сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$\varphi_t = a^2 \varphi_{xx}, \quad \varphi|_{t=0} = \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right\}.$$

д) Показать, что нелинейное уравнение Шрёдингера

$$iu_t + u_{xx} + \nu |u|^2 u = 0, \quad \nu > 0,$$

имеет решение

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}} \frac{\exp \left\{ i \left[ \frac{a}{2}x - \left( \frac{a^2}{4} - \alpha \right)t \right] \right\}}{\operatorname{ch} \sqrt{\alpha}(x - at)}$$

при любых вещественных  $a$  и  $\alpha > 0$ .

е) Показать, что уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

имеет решение

$$u(x, t) = \frac{a}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{\sqrt{a}}{2}(x - at) \right], \quad a > 0.$$

## Г л а в а IV

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Интегральными уравнениями* называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла.

Многие задачи математической физики сводятся к линейным интегральным уравнениям вида

$$\int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy + f(x) \quad (2)$$

относительно неизвестной функции  $\varphi(x)$  в области  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Уравнения (1) и (2) называются *интегральными уравнениями Фредгольма* первого и второго родов соответственно. Известные функции  $\mathcal{K}(x, y)$  и  $f(x)$  называются соответственно *ядром* и *свободным членом* интегрального уравнения;  $\lambda$  — комплексный параметр.

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода здесь рассматриваются не будут.

Интегральное уравнение (2) при  $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy \quad (3)$$

называются *однородным* интегральным уравнением Фредгольма второго рода, соответствующим уравнению (2). Интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y)\psi(y) dy + g(x), \quad (2')$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x, y)\psi(y) dy, \quad (3')$$

где  $\mathcal{K}^*(x, y) = \bar{\mathcal{K}}(y, x)$ , называются *союзными* к уравнениям (2) и (3) соответственно. Ядро  $\mathcal{K}^*(x, y)$  называются *эрмитово сопряженным (союзным)* ядром к ядру  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Мы будем записывать интегральные уравнения (2), (3), (2') и (3') сокращенно, в операторной форме:

$$\begin{aligned}\varphi &= \lambda K\varphi + f, & \varphi &= \lambda K\varphi, \\ \psi &= \bar{\lambda} K^* + g, & \psi &= \bar{\lambda} K^*\psi,\end{aligned}$$

где интегральные операторы  $K$  и  $K^*$  определяются ядрами  $\mathcal{K}(x, y)$  и  $\mathcal{K}^*(x, y)$  соответственно (см. § 1.1, п. 8):

$$(Kf)(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y)f(y) dy, \quad (K^*f)(x) = \int_G \mathcal{K}^*(x, y)f(y) dy.$$

К интегральным операторам и уравнениям применимы все определения и факты, изложенные в § 1.1, пп. 8–10. Кроме того, оказывается полезным следующее определение: комплексное значение  $\lambda$ , при котором однородное интегральное уравнение (3) имеет ненулевые решения из  $\mathcal{L}_2(G)$ , называется *характеристическим числом ядра*  $\mathcal{K}(x, y)$ , а соответствующие решения — *собственными функциями* этого ядра, отвечающими этому характеристическому числу. Таким образом, характеристические числа ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и собственные значения оператора  $K$  взаимно обратны, а их собственные функции совпадают.

## § 4.1. Метод последовательных приближений

**1. Интегральные уравнения с непрерывным ядром.** Для простоты изложения ограничимся случаем одной переменной. В качестве области  $G$  в интегральном уравнении (2) возьмем интервал  $(0, a)$ . Предположим, что функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[0, a]$  и ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  непрерывно при  $0 \leq x, y \leq a$ . (Такие ядра будем называть *непрерывными*.)

Напомним определением норм в пространствах  $\mathcal{L}_2(0, a)$  и  $\mathcal{C}([0, a])$  и скалярного произведения в  $\mathcal{L}_2(0, a)$  (см. § 1.1, п. 3 и п. 5):

$$(f, g) = \int_0^a f(x)\bar{g}(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(0, a),$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^a |f(x)|^2 dx} = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a),$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{0 \leq x \leq a} |f|, \quad f \in \mathcal{C}([0, a]).$$

**ЛЕММА.** *Интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  переводит  $\mathcal{L}_2(0, a)$  в  $\mathcal{C}([0, a])$  (следовательно,  $\mathcal{C}([0, a])$  в  $\mathcal{C}([0, a])$  и  $\mathcal{L}_2(0, a)$  в  $\mathcal{L}_2(0, a)$ ) и ограничен, причем*

$$\|Kf\|_{\mathcal{C}} \leq M\sqrt{a}\|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a), \quad (4)$$

$$\|Kf\|_{\mathcal{C}} \leq Ma\|f\|_{\mathcal{C}}, \quad f \in \mathcal{C}([0, a]), \quad (5)$$

$$\|Kf\| \leq Ma\|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a), \quad (6)$$

где

$$M = \max_{0 \leq x, y \leq a} |\mathcal{K}(x, y)|.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f \in \mathcal{L}_2(0, a)$ . Тогда  $f$  — абсолютно интегрируемая функция на  $(0, a)$  (см. § 1.1, п. 5), и поскольку ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  непрерывно на  $[0, a] \times [0, a]$ , функция  $Kf$  непрерывна на  $[0, a]$ . Поэтому оператор  $K$  переводит  $\mathcal{L}_2(0, a)$  в  $\mathcal{C}([0, a])$  и в силу неравенства Коши–Буняковского ограничен:

$$\begin{aligned} \|Kf\|_{\mathcal{C}} &= \max_{0 \leq x \leq a} |(Kf)(x)| = \max_{0 \leq x \leq a} \left| \int_0^a \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq a} \sqrt{\int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy} \sqrt{\int_0^a |f(y)|^2 dy} \leq M\sqrt{a}\|f\|. \end{aligned}$$

Аналогично, и даже проще, доказываются неравенства (5) и (6). Лемма доказана.

Для того чтобы интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  был нулевым в  $\mathcal{L}_2(0, a)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathcal{K}(x, y) \equiv 0$ ,  $0 \leq x, y \leq a$ .

Достаточность условия очевидна, а необходимость вытекает из леммы Диобуа–Реймона (см. § 2.1, п. 5).

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между непрерывными ядрами и соответствующими им интегральными операторами.

Аналогично доказывается такое утверждение: если  $(Kf, g) = 0$  при всех  $f, g \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , то  $K = 0$  и, стало быть,  $\mathcal{K}(x, y) \equiv 0$ .

Будем искать решение уравнения (2) методом последовательных приближений, положив  $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$ ,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) \equiv \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Докажем, что

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где  $K^k$  — степени оператора  $K$  (см. § 1.1, п. 8).

Действительно, при  $p = 0$  формула (8) верна:  $\varphi^{(0)} = f$ . Предполагая эту формулу верной при  $p$  и заменяя в рекуррентной последовательности (7)  $p$  на  $p + 1$ , получаем формулу (8) при  $p + 1$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(p+1)} &= \lambda K \varphi^{(p)} + f = \lambda K \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f + f = \\ &= f + \sum_{k=0}^p \lambda^{k+1} K^{k+1} f = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda^k K^k f. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (8) верна при всех  $p$ .

Функции  $(K^p f)(x)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , называются *итерациями* функции  $f$ .

По лемме итерации  $f$  непрерывны на  $[0, a]$  и в силу (5) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \|K^p f\|_C &= \|K(K^{p-1} f)\|_C \leq Ma \|K^{p-1} f\|_C \leq \\ &\leq (Ma)^2 \|K^{p-2} f\|_C \leq \dots \leq (Ma)^p \|f\|_C, \quad p = 0, 1, \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad x \in [0, a], \quad (10)$$

называемый *рядом Неймана*, мажорируется числовым рядом

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (Ma)^k = \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| Ma}, \quad (11)$$

сходящимся в круге  $|\lambda| < 1/(Ma)$ . Поэтому при таких  $\lambda$  ряд (10) сходится регулярно (см. § 1.1, п. 3) по  $x \in [0, a]$ , определяя тем самым непрерывную на  $[0, a]$  функцию  $\varphi(x)$ . Это значит в силу (8), что последовательные приближения  $\varphi^{(p)}(x)$  при  $p \rightarrow \infty$  равномерно стремятся к функции  $\varphi(x)$ :

$$\varphi^{(p)}(x) \rightrightarrows \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad x \in [0, a], \quad p \rightarrow \infty, \quad (12)$$

причем в силу (11) справедлива оценка

$$\|\varphi\|_c \leq \frac{\|f\|_c}{1 - |\lambda| Ma}. \quad (13)$$

Докажем, что функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению (2). Действительно, переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в рекуррентном соотношении (7) и пользуясь равномерной сходимостью последовательности  $\varphi^{(p)}(x)$  к  $\varphi(x)$  на  $[0, a]$ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_0^a \mathcal{K}(x, y) \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \int_0^a \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \end{aligned}$$

Докажем единственность решения уравнения (2) в классе  $\mathcal{L}_2(0, a)$ , если  $|\lambda| < 1/(Ma)$ . Для этого достаточно показать, что однородное уравнение (3) имеет только нулевое решение в этом классе (см. § 1.1). Действительно, если  $\varphi_0 \in \mathcal{L}_2(0, a)$  — решение уравнения (3),  $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$ , то по лемме

$$\|\varphi_0\| \leq |\lambda| Ma \|\varphi_0\|,$$

откуда в силу неравенства  $|\lambda| Ma < 1$  следует  $\|\varphi_0\| = 0$ , т. е.  $\varphi_0 = 0$ , что и требовалось установить.

Резюмируем полученные результаты в следующей теореме.

**ТЕОРЕМА.** *Всякое интегральное уравнение Фредгольма (2) с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  при  $|\lambda| < 1/(Ma)$  имеет единственное решение  $\varphi$  в классе  $\mathcal{C}([0, a])$  для любого свободного члена  $f \in \mathcal{C}([0, a])$ . Это решение представляется в виде регулярно сходящегося на  $[0, a]$  ряда Неймана (12) и удовлетворяет оценке (13). Другими словами, в круге  $|\lambda| < 1/(Ma)$  существует и ограничен обратный оператор  $(I - \lambda K)^{-1}$ .*

Отметим, что методом последовательных приближений можно пользоваться для приближенного решения интегрального уравнения (2) лишь при достаточно малых  $|\lambda|$ .

**2. Повторные ядра. Резольвента.** Предварительно убедимся в справедливости равенства

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f, g \in \mathcal{L}_2(0, a). \quad (14)$$

Действительно, если  $f, g \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , то по лемме из п. 1  $Kf, K^*g \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , и поэтому

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_0^a (Kf)\bar{g} dx = \int \left[ \int_0^a \mathcal{K}(x, y)f(y) dy \right] \bar{g}(x) dx = \\ &= \int_0^a f(y) \left[ \int_0^a \mathcal{K}(x, y)\bar{g}(x) dx \right] dy = \int_0^a f(\overline{K^*g}) dy = (f, K^*g). \end{aligned}$$

**ЛЕММА.** Если  $K_i, i = 1, 2$ , — интегральные операторы с непрерывными ядрами  $\mathcal{K}_i(x, y)$ , то оператор  $K_3 = K_2K_1$  интегральный с непрерывным ядром

$$\mathcal{K}_3(x, y) = \int_0^a \mathcal{K}_2(x, y')\mathcal{K}_1(y', y) dy'. \quad (15)$$

При этом справедлива формула

$$(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*. \quad (16)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При всех  $f \in \mathcal{L}_2(0, a)$  имеем

$$\begin{aligned} (K_3f)(x) &= (K_2K_1f)(x) = \int_0^a \mathcal{K}_2(x, y') \int_0^a \mathcal{K}_1(y', y)f(y) dy dy' = \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^a \mathcal{K}_2(x, y')\mathcal{K}_1(y', y) dy' \right] f(y) dy, \end{aligned}$$

откуда и вытекает формула (15). Очевидно, ядро  $\mathcal{K}_3(x, y)$  непрерывно при  $0 \leq x, y \leq a$ .

Принимая во внимание равенство (14), при всех  $f, g \in \mathcal{L}_2(0, a)$  получаем

$$(f, K_3^*g) = (K_3f, g) = (K_2K_1f, g) = (K_1f, K_2^*g) = (f, K_1^*K_2^*g),$$

т. е.

$$(f, K_3^*g - K_1^*K_2^*g) = 0,$$

и, следовательно,  $K_3^* = K_1^*K_2^*$ , что и эквивалентно равенству (16). Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что операторы  $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$ ,  $p = 2, 3, \dots$ , интегральные и их ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$  непрерывны и удовлетворяют рекуррентным соотношениям  $\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$ ,

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \int_0^a \mathcal{K}(x, y') \mathcal{K}_{p-1}(y', y) dy' = \int_0^a \mathcal{K}_{p-1}(x, y') \mathcal{K}(y', y) dy'. \quad (17)$$

Ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$  называются *повторными ядрами* ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Из рекуррентных соотношений (17) вытекает, что повторные ядра удовлетворяют неравенству

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq M^p a^{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Из оценки (18) следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq a, \quad (19)$$

мажорируется числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} a^k,$$

сходящимся в круге  $|\lambda| < 1/(Ma)$ . Поэтому ряд (19) сходится регулярно при  $x, y \in [0, a]$ ,  $|\lambda| \leq 1/(Ma) - \varepsilon$  при любом  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, его сумма непрерывна при  $0 \leq x, y \leq a$ ,  $|\lambda| < 1/(Ma)$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < 1/(Ma)$ . Обозначим сумму ряда (19) через  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ :

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y).$$

Функция  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  называется *резольвентой* ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

**ТЕОРЕМА.** *Решение  $\varphi$  интегрального уравнения (2) с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  единствено в классе  $\mathcal{C}([0, a])$  при  $|\lambda| < 1/(Ma)$  и для любого  $f \in \mathcal{C}([0, a])$  представляется через резольвенту  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  по формуле*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^a \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y) dy. \quad (20)$$

*Другими словами, справедливо операторное равенство*

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R, \quad |\lambda| < \frac{1}{Ma}, \quad (21)$$

где  $R$  — интегральный оператор с ядром  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме из п. 1 решение  $\varphi$  уравнения (2) единственно в классе  $C([0, a])$  при  $|\lambda| < 1/(Ma)$  и для любой  $f \in C([0, a])$  представляется в виде равномерно сходящегося ряда Неймана (12). Подставляя в этот ряд выражения итераций  $K^k f$  через повторные ядра  $\mathcal{K}_k(x, y)$  и пользуясь равномерной сходимостью ряда (19) для резольвенты  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ , получаем формулу (20):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^a \left[ \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y) \right] f(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \int_0^a \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y) dy + f(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Докажем, что повторные ядра  $(\mathcal{K}^*)_p(x, y)$  и резольвента  $\mathcal{R}_*(x, y; \lambda)$  эрмитово сопряженного ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$  выражаются через повторные ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$  и резольвенту исходного ядра  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  по формулам

$$(\mathcal{K}^*)_p(x, y) = \mathcal{K}_p^*(x, y), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$\mathcal{R}_*(x, y; \lambda) = \overline{\mathcal{R}(y, x; \bar{\lambda})}, \quad |\lambda| < \frac{1}{Ma}. \quad (23)$$

Равенство (22) следует из формулы (16), согласно которой

$$(\mathcal{K}^*)_p = (\mathcal{K}_p)^*, \quad p = 1, 2, \dots$$

Так как  $|\mathcal{K}^*(x, y)| = |\mathcal{K}(y, x)| \leq M$ , то по доказанному ряд (19) для резольвенты  $\mathcal{R}_*(x, y; \lambda)$  ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$  сходится при  $0 \leq x, y \leq a$ ,  $|\lambda| < 1/(Ma)$ . Отсюда, пользуясь равенством (22), получаем формулу (23):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_*(x, y; \lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathcal{K}^*)_{k+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}^*(x, y) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overline{\mathcal{K}_{k+1}(y, x)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}^k \mathcal{K}_{k+1}(y, x)} = \overline{\mathcal{R}(y, x; \bar{\lambda})}. \end{aligned}$$

Из (23) получаем

$$\mathcal{R}_*(x, y; \bar{\lambda}) = \overline{\mathcal{R}(y, x; \lambda)} = \mathcal{R}^*(x, y; \lambda), \quad |\lambda| < \frac{1}{Ma},$$

и, следовательно, в силу (21) справедлива формула

$$(I - \bar{\lambda}K^*)^{-1} = I + \bar{\lambda}R^*, \quad |\lambda| < \frac{1}{Ma}. \quad (21')$$

**3. Интегральные уравнения Вольтерра.** Пусть ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  обращается в нуль в треугольнике  $0 \leq y < x \leq a$  (рис. 49). Такое ядро называется *ядром Вольтерра*. Интегральные уравнения (1) и (2) с ядром Вольтерра принимают вид

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy &= f(x), \\ \varphi(x) &= \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy + f(x) \end{aligned} \quad (24)$$

и называются *интегральными уравнениями Вольтерра* первого и второго рода соответственно.

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода дифференцированием сводятся к уравнениям второго рода

$$\mathcal{K}(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial \mathcal{K}(x, y)}{\partial x} \varphi(y) dy = f'(x),$$

если  $\mathcal{K}(x, y)$  и  $\mathcal{K}_x(x, y)$  непрерывны при  $0 \leq y \leq x \leq a$ ,  $\mathcal{K}(x, x) \neq 0$ ,  $x \in [0, a]$ ,  $f \in \mathcal{C}^1([0, a])$  и  $f(0) = 0$ .

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода здесь рассматриваться не будут.

Предположим, что в интегральном уравнении (24)  $f \in \mathcal{C}([0, a])$  и ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  непрерывно в замкнутом треугольнике  $0 \leq y \leq x \leq a$  (см. рис. 49). В таком случае  $|\mathcal{K}(x, y)| \leq M$  и интегральный оператор

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x, y)f(y) dy$$

переводит  $\mathcal{C}([0, a])$  в  $\mathcal{C}([0, a])$ .

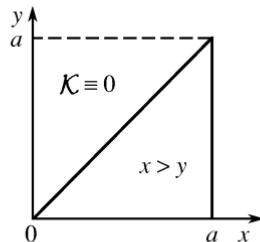


Рис. 49

Как и для уравнения Фредгольма (см. п. 1), определим последовательные приближения  $\varphi^{(p)}$  по формулам

$$\varphi^{(0)} = f, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Итерация  $K^p f$  принадлежит  $\mathcal{C}([0, a])$  и удовлетворяет оценке

$$|(K^p f)(x)| \leq \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad x \in [0, a], \quad p = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Докажем оценку (26) по индукции по  $p$ . Для  $p = 0$  оценка (26) верна. Предполагая ее верной при  $p - 1$ , докажем ее для  $p$ :

$$\begin{aligned} |(K^p f)(x)| &= |K(K^{p-1} f)(x)| = \left| \int_0^x \mathcal{K}(x, y)(K^{p-1} f)(y) dy \right| \leq \\ &\leq M \|f\|_C M^{p-1} \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!} dy = \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}. \end{aligned}$$

Из оценки (26) вытекает, что ряд Неймана (10) мажорируется на  $[0, a]$  сходящимся числом рядом

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda| Ma}, \quad (27)$$

и потому сходится регулярно по  $x$  на  $[0, a]$  при любом  $\lambda$ , определяя непрерывную функцию  $\varphi(x)$ . Таким образом, в силу (25) последовательные приближения  $\varphi^{(p)}$  при  $p \rightarrow \infty$  равномерно стремятся к функции  $\varphi$ :

$$\varphi^{(p)}(x) \rightrightarrows \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad x \in [0, a], \quad p \rightarrow \infty. \quad (28)$$

При этом в силу (27) справедлива оценка

$$\|\varphi\|_C \leq \|f\|_C e^{|\lambda| Ma}. \quad (29)$$

Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в рекуррентном соотношении (25) и пользуясь равномерной сходимостью последовательности  $\varphi^{(p)}$  к  $\varphi$  на  $[0, a]$ , заключаем, что построенная функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению (24).

Докажем единственность решения уравнения (24) в классе  $\mathcal{C}([0, a])$  при любом  $\lambda$ . Для этого достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение имеет в этом классе только нулевое решение (см. § 1.1, п. 9). Действительно, если  $\varphi_0$  — решение однородного уравнения (24)  $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$ , то

$$\varphi_0 = \lambda K(\lambda\varphi_0) = \lambda^2 K^2\varphi_0 = \dots = \lambda^p K^p\varphi_0, \quad p = 1, 2, \dots$$

Применяя к этим равенствам оценку (26):

$$|\varphi_0(x)| = \|\lambda^p K^p\varphi_0\| \leq |\lambda|^p \|\varphi_0\|_{\mathcal{C}} \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

и устремляя  $p$  к  $\infty$ , получаем  $\varphi_0(x) = 0$ ,  $x \in [0, a]$ , что и утверждалось.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА.** *Всякое интегральное уравнение Вольтерра (24) с непрерывным ядром  $K(x, y)$  при любом  $\lambda$  имеет единственное решение  $\varphi$  в классе  $\mathcal{C}([0, a])$  для любого свободного члена  $f \in \mathcal{C}([0, a])$ . Это решение представляется регулярно сходящимся рядом Неймана (28) и удовлетворяет оценке (29).*

**СЛЕДСТВИЕ.** *Непрерывное ядро Вольтерра не имеет характеристических чисел.*

#### 4. Упражнения.

а) Доказать, что резольвента  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  непрерывного ядра  $K(x, y)$  удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма при  $|\lambda|Ma < 1$ :

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \lambda \int_0^a K(x, y') \mathcal{R}(y', y; \lambda) dy' + K(x, y).$$

б) Пусть ядро  $K(x, y)$  интегрального уравнения Фредгольма (2) принадлежит  $\mathcal{L}_2((0, a) \times (0, a))$ . Пользуясь оценкой  $\|Kf\| \leq C\|f\|$  (см. § 1.1, п. 8), доказать сходимость в  $\mathcal{L}_2(0, a)$  метода последовательных приближений для любой  $f \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , если  $|\lambda|C < 1$ .

в) Доказать, что резольвента ядра Вольтерра аналитична во всей плоскости комплексного переменного  $\lambda$  (целая функция).

г) Пусть  $K \in \mathcal{C}(x \geq 0)$ ,  $K(x) = 0$ ,  $x < 0$ . Доказать, что обобщенная функция

$$\mathcal{E}(x) = \delta(x) + \mathcal{R}(x), \quad \mathcal{R} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{K * K * \dots * K}_{k \text{ раз}}$$

есть фундаментальное решение оператора  $(\delta - \mathcal{K})^*$  в алгебре  $\mathcal{D}'_+$  (см. § 2.3, пп. 4, 5). При этом ряд для  $\mathcal{R}(x)$  сходится равномерно в каждом конечном промежутке и удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$\mathcal{R}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-y)\mathcal{R}(y) dy + \mathcal{K}(x), \quad x \geq 0.$$

Функция  $\mathcal{R}(x-y)$  является резольвентой ядра  $\mathcal{K}(x-y)$  при  $\lambda = 1$ .

д) Доказать, что при  $|\lambda| < 1$  интегральное уравнение Милна

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty \mathcal{K}(x-y)\varphi(y) dy, \quad \mathcal{K}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{|\xi|}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

имеет единственное решение  $\varphi = 0$  в классе ограниченных функций на  $[0, \infty)$ .

е) Доказать, что при  $\lambda < 1/2$  решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-|x-y|} \varphi(y) dy + f(x)$$

единственno в классе ограниченных функций и выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y) dy.$$

## § 4.2. Теоремы Фредгольма

В этом параграфе для интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{1}$$

с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  и союзного к нему уравнения

$$\psi = \bar{\lambda} K^* \psi + g \tag{1'}$$

будут доказаны теоремы разрешимости Фредгольма.

**1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.**  
Ядро

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x)g_i(y), \tag{2}$$

где  $f_i, g_i \in \mathcal{C}([0, a])$ , называется *вырожденным ядром*.

Можно считать, что системы функций  $\{f_i, 1 \leq i \leq N\}$  и  $\{g_i, 1 \leq i \leq N\}$  линейно независимы. Действительно, если это не так, например,

$$f_N(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_{N-1} f_{N-1}(x),$$

то ядро (2) принимает вид

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)g_i(y) + \sum_{i=1}^{N-1} c_i f_i(x)g_N(y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)g^*(y).$$

Действуя подобным образом, через конечное число шагов добьемся того, что в представлении (2) системы функций  $\{f_i\}$  и  $\{g_i\}$  окажутся линейно независимыми.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром (2)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_0^a g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (3)$$

и союзное к нему уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \bar{g}_i(x) \int_0^a \bar{f}_i(y) \psi(y) dy + g(x). \quad (3')$$

Решения  $\varphi$  и  $\psi$  интегральных уравнений (3) и (3') будем искать в классе  $\mathcal{C}([0, a])$ .

Покажем, что эти уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и поэтому могут быть исследованы и решены известными методами линейной алгебры (см. [4])

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x), \quad (4)$$

где

$$c_i = \int_0^a \varphi(y) g_i(y) dy = (\varphi, \bar{g}_i) \quad (5)$$

— неизвестные числа. Умножая равенство (4) на  $g_k(x)$ , интегрируя по отрезку  $[0, a]$  и пользуясь (5), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных чисел  $c_i$ :

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int_0^a g_k(x) f_i(x) dx + \int_0^a g_k(x) f(x) dx. \quad (6)$$

Полагая

$$\alpha_{ki} = \int_0^a g_k(x) f_i(x) dx = (g_k, \bar{f}_i), \quad a_k = \int_0^a g_k(x) f(x) dx = (g_k, \bar{f}), \quad (7)$$

перепишем систему (6):

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} c_i + a_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (8)$$

Вводя матрицу  $A$  и векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}$ :

$$A = (\alpha_{ki}), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N), \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N),$$

представим систему (8) в матричной форме:

$$\mathbf{c} = \lambda A \mathbf{c} + \mathbf{a}. \quad (9)$$

Докажем, что интегральное уравнение (3) и алгебраическое уравнение (9) эквивалентны.

Действительно, если  $\varphi \in \mathcal{C}([0, a])$  — решение уравнения (3), то, как мы только что показали, числа  $c_i = (\varphi, \bar{g}_i)$ , удовлетворяют системе (8). Обратно, если числа  $c_i, i = 1, \dots, N$ , удовлетворяют системе (8), то функция  $\varphi(x)$ , построенная по формуле (4), непрерывна на  $[0, a]$  и в силу (7) удовлетворяет уравнению (3):

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_0^a g_i(y) \varphi(y) dy - f(x) &= \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x) - \\ &- \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_0^a g_i(y) \left[ \lambda \sum_{k=1}^N c_k f_k(y) + f(y) \right] dy - f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^N \left( c_i - \lambda \sum_{k=1}^N c_k \alpha_{ik} - a_i \right) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $D(\lambda)$  определитель системы (9):

$$D(\lambda) = \det(I - \lambda A), \quad (10)$$

и через  $M_{ki}(\lambda)$  — алгебраические дополнения матрицы  $I - \lambda A$ . Ясно, что  $D(\lambda)$  и  $M_{ki}(\lambda)$  — полиномы по  $\lambda$ , причем  $D(\lambda) \not\equiv 0$ , ибо  $D(0) = \det(I) = 1$ .

Пусть (комплексное) число  $\lambda$  таково, что  $D(\lambda) \neq 0$ . По теореме Крамера решение алгебраической системы (9) единствено и выражается формулой

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N M_{ki}(\lambda) a_i, \quad k = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Подставляя найденное решение (11) в формулу (4) и вспоминая определение чисел  $a_i$ , получим решение интегрального уравнения (3) при  $D(\lambda) \neq 0$  в виде

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\lambda) f_i(x) \int_0^a g_k(y) f(y) dy + f(x). \quad (12)$$

С другой стороны, по теореме из § 4.1, п. 2 при достаточно малых  $\lambda$  (тогда  $D(\lambda) \neq 0$ ) это решение выражается через резольвенту  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  по формуле (20) из § 4.1. Следовательно,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\lambda) f_i(x) g_k(y). \quad (13)$$

Таким образом, резольвента  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  вырожденного ядра есть рациональная функция  $\lambda$  и, стало быть, допускает мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного  $\lambda$ .

**2. Теорема Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром.** В предыдущем пункте мы построили в явном виде решение интегрального уравнения с выраженным ядром. Здесь мы продолжим исследование таких уравнений и установим условия их разрешимости.

Как и уравнение (3), приведем союзное к нему уравнение (3') к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Имеем

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x), \quad (4')$$

где  $d_i = (\psi, f_i)$  — неизвестные числа. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная уравнению (3'), имеет вид

$$d_k = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \beta_{ki} d_i + b_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (8')$$

где

$$\beta_{ki} = \int_0^a \bar{f}_k(x) \bar{g}_i(x) dx = \bar{\alpha}_{ik}, \quad b_k = (g, f_k). \quad (7')$$

Таким образом, система (8') союзная к системе (8):

$$\mathbf{d} = \bar{\lambda} A^* \mathbf{d} + \mathbf{b}, \quad (9')$$

где

$$A^* = (\beta_{ki}) = (\bar{\alpha}_{ik}) = \bar{A}', \quad \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N), \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N).$$

Из курса линейной алгебры известно (см. [4]), что определители и ранги матрицы и ее транспонированной совпадают. Поэтому в силу (10)

$$\begin{aligned} \det(I - \bar{\lambda} A^*) &= \det(I - \bar{\lambda} \bar{A}') = \overline{\det(I - \lambda A')} = \overline{D(\lambda)}, \\ \text{rang}(I - \bar{\lambda} A^*) &= \text{rang}(\overline{I - \lambda A'}) = \text{rang}(I - \lambda A) = q. \end{aligned} \quad (14)$$

Могут представиться два случая.

1.  $D(\lambda) \neq 0$ . Тогда  $q = N$ , и системы (9) и (9') однозначно разрешимы при любых **a** и **b**. Следовательно, уравнения (3) и (3') также однозначно разрешимы при любых  $f$  и  $g$ , и эти решения даются формулами (4) и (4') соответственно.

2.  $D(\lambda) = 0$ . Тогда  $q < N$ , и в силу (14) однородные системы (9) и (9') имеют ровно по  $N - q$  линейно независимых решений

$$\mathbf{c}^{(s)} = (c_1^{(s)}, \dots, c_N^{(s)}), \quad \mathbf{d}^{(s)} = (d_1^{(s)}, \dots, d_N^{(s)}), \quad s = 1, \dots, N - q.$$

Однородные интегральные уравнения (3) и (3') будут также иметь ровно по  $N - q$  линейно независимых решений, определяемых формулами (4) и (4') соответственно,

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i^{(s)} f_i(x), \quad \psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i^{(s)} \bar{g}_i(x), \quad s = 1, \dots, N - q. \quad (15)$$

Докажем линейную независимость полученных систем решений  $\{\varphi_s, 1 \leq s \leq N - q\}$  и  $\{\psi_s, 1 \leq s \leq N - q\}$ . Пусть найдутся такие числа  $p_s, s = 1, \dots, N - q$ , что

$$\sum_{s=1}^{N-q} p_s \varphi_s(x) = 0, \quad x \in [0, a],$$

т. е. в силу (15)

$$\sum_{i=1}^N f_i(x) \sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad x \in [0, a].$$

Отсюда в силу линейной независимости системы функций  $\{f_i, 1 \leq i \leq N\}$  вытекают равенства

$$\sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Поскольку система векторов  $\{\mathbf{c}^{(s)}, 1 \leq s \leq N - q\}$  линейно независима в  $\mathbb{R}^N$ , то из последних равенств вытекает  $p_s = 0, s = 1, \dots, N - q$ , что и доказывает линейную независимость системы решений  $\{\varphi_s\}$ . Аналогично устанавливается линейная независимость системы решений  $\{\psi_s\}$ .

Далее, для разрешимости системы (9) при  $D(\lambda) = 0$  необходимо и достаточно выполнение следующих условий ортогональности\*):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{d}^{(s)}) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_i^{(s)} = 0, \quad s = 1, \dots, N - q. \quad (16)$$

Условия (16) эквивалентны условиям

$$(f, \psi_s) = \int_0^a f(x) \bar{\psi}_s(x) dx = 0, \quad s = 1, \dots, N - q,$$

поскольку в силу (15) и (7)

$$\int_0^a f(x) \bar{\psi}_s(x) dx = \lambda \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^a f(x) g_i(x) dx \right] \bar{d}_i^{(s)} =$$

---

\*). Это есть геометрическая форма теоремы Кронекера–Капелли (см. [4]).

$$= \lambda \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_i^{(s)} = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{d}^{(s)}).$$

Итак, доказаны следующие теоремы, называемые *теоремами Фредгольма*.

**ТЕОРЕМА 1.** *Если  $D(\lambda) \neq 0$ , то уравнение (3) и соузное к нему уравнение (3') однозначно разрешимы при любых свободных членах  $f$  и  $g$ .*

**ТЕОРЕМА 2.** *Если  $D(\lambda) = 0$ , то однородные уравнения (3) и (3') имеют одинаковое число линейно независимых решений, равное  $N - q$ , где  $q$  — ранг матрицы  $I - \lambda A$ .*

**ТЕОРЕМА 3.** *Если  $D(\lambda) = 0$ , то для разрешимости уравнения (3) необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям  $\psi_s$ ,  $s = 1, \dots, N - q$ , соузного однородного уравнения (3').*

Из теорем 1 и 2 следует, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с корнями полинома  $D(\lambda)$  и, следовательно, их *конечное число*. Далее, из формулы (13) для резольвенты вытекает, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с полюсами его резольвенты.

Может оказаться, что функции  $f_i$  и  $g_i$  в представлении (2) вырожденного ядра зависят от комплексного параметра  $\lambda$ , а именно: пусть  $f_i(x; \lambda)$  и  $g_i(x; \lambda)$  непрерывны по  $(x, \lambda)$  в  $[0, a] \times U_\omega$ ,  $U_\omega = \{|\lambda| < \omega\}$ , и аналитичны по  $\lambda$  в круге  $U_\omega$ .

В этом случае теоремы Фредгольма 1–3 остаются справедливыми при условии, что  $\lambda \in U_\omega$ , причем определитель  $D(\lambda)$  — аналитическая функция в круге  $U_\omega$ , отличная от тождественного нуля.

Действительно, элементы матрицы  $A$ , вычисляемые по формуле (7),

$$\alpha_{ki}(\lambda) = \int_0^a g_k(x; \lambda) f_i(x; \lambda) dx$$

— аналитические функции в круге  $U_\omega$ . Поэтому в силу (10)  $D(\lambda)$  — аналитическая функция в этом круге, причем  $D(\lambda) \neq 0$ .

**3. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром.** Доказанные в предыдущем пункте теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром допускают распространение на интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Идея доказательства состоит в том, что непрерывное ядро представляется в виде суммы вырожденного ядра и достаточно малого непрерывного ядра. Это дает возможность,

пользуясь результатами § 4.1 о разрешимости интегральных уравнений с малым ядром, свести соответствующее интегральное уравнение к интегральному уравнению с вырожденным ядром, для которого теоремы Фредгольма уже установлены. Отсюда будет следовать вывод о справедливости теорем Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывными ядром на отрезке.

Итак, пусть ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  непрерывно при  $0 \leq x \leq a$ . По теореме Вейерштрасса (см. § 1.1, п. 3) его можно приблизить сколько угодно точно полиномами, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой полином

$$\mathcal{P}(x, y) = \sum_{i,k=0}^N a_{ik} x^i y^k, \quad (17)$$

что

$$|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)| < \varepsilon, \quad 0 \leq x, y \leq a.$$

Таким образом, ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  представляется в виде

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{Q}(x, y), \quad (18)$$

где  $\mathcal{P}(x, y)$  — вырожденное ядро (полином) и  $\mathcal{Q}(x, y)$  — малое непрерывное ядро,  $|\mathcal{Q}(x, y)| < \varepsilon$ ,  $0 \leq x, y \leq a$ .

В силу (18) интегральное уравнение Фредгольма принимает вид

$$\varphi = \lambda P\varphi + \lambda Q\varphi + f, \quad (19)$$

где  $P$  и  $Q$  — интегральные операторы с ядрами  $\mathcal{P}(x, y)$  и  $\mathcal{Q}(x, y)$  соответственно, причем  $P + Q = K$ .

Покажем, что при  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$  в классе  $\mathcal{C}([0, a])$  интегральное уравнение (19) эквивалентно интегральному уравнению с вырожденным ядром. Для этого введем новую неизвестную функцию  $\Phi(x)$  по формуле

$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi. \quad (20)$$

По теореме из § 4.1, п. 2 функция  $\varphi$  однозначно выражается через  $\Phi$  по формуле

$$\varphi = (I - \lambda Q)^{-1}\Phi = (I + \lambda R)\Phi, \quad (21)$$

где  $R$  — интегральный оператор с ядром  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  — резольвентой ядра  $\mathcal{Q}(x, y)$ . В силу (20) и (21) уравнение (19) принимает следующий эквивалентный вид:

$$\Phi = \lambda P(I + \lambda R)\Phi + f = \lambda T\Phi + f, \quad (22)$$

где

$$T = P + \lambda PR. \quad (23)$$

Вспомним, что резольвента  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  непрерывна по  $(x, y; \lambda)$  при  $0 \leq x, y \leq a$ ,  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$ , и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$  (см. § 4.1, п. 2). Отсюда, принимая во внимание лемму из § 4.1, п. 2, заключаем, что оператор  $T$  интегральный с непрерывным ядром

$$\mathcal{T}(x, y; \lambda) = \mathcal{P}(x, y) + \lambda \int_0^a \mathcal{P}(x, y') \mathcal{R}(y', y; \lambda) dy'.$$

Далее, из (17) вытекает, что ядро  $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$  вырожденное и аналитическое по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$ .

Теперь преобразуем союзное интегральное уравнение (1'). В силу (18)  $K^* = P^* + Q^*$ , и поэтому уравнение (1') принимает вид

$$(I - \bar{\lambda}Q^*)\psi = \bar{\lambda}P^*\psi + g. \quad (19')$$

Применяя оператор  $(I - \bar{\lambda}Q^*)^{-1}$  к уравнению (19') и пользуясь равенством (21') из § 4.1, п. 2,

$$(I - \bar{\lambda}Q^*)^{-1} = I + \bar{\lambda}R^*, \quad |\lambda| < \frac{1}{\varepsilon a},$$

приведем его к эквивалентному уравнению

$$\begin{aligned} \psi &= (I - \bar{\lambda}Q^*)^{-1}(\bar{\lambda}P^*\psi + g) = (I + \bar{\lambda}R^*)(\bar{\lambda}P^*\psi + g) = \\ &= \bar{\lambda}(P^* + \bar{\lambda}R^*P^*)\psi + (I + \bar{\lambda}R^*)g. \end{aligned} \quad (24)$$

Полагая

$$g_1 = (I + \bar{\lambda}R^*)g, \quad g = (I - \bar{\lambda}Q^*)g_1, \quad (25)$$

и учитывая, что согласно формулам (16) из § 4.1 и (23),

$$P^* + \bar{\lambda}R^*P^* = (P + \lambda PR)^* = T^*,$$

перепишем уравнение (24) в виде

$$\psi = \bar{\lambda}T^*\psi + g_1. \quad (22')$$

Таким образом, при  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$  в классе  $\mathcal{C}([0, a])$  интегральное уравнение (1) эквивалентно интегральному уравнению (22) с вырожденным ядром  $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ , аналитическим в круге  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$ , а союзное к нему уравнение (1') эквивалентно уравнению (22'), союзному

к уравнению (22). Но для уравнений (22) и (22') справедливы теоремы Фредгольма 1–3, и определитель  $D(\lambda)$  — аналитическая функция в круге  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$  (см. п. 2). Отсюда, пользуясь эквивалентностью этих уравнений исходным уравнениям (1) и (1'), получаем следующие *теоремы Фредгольма* для интегральных уравнений с непрерывным ядром. Совокупность этих теорем называется *альтернативой Фредгольма*.

**АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА.** *Если интегральное уравнение (1) с непрерывным ядром разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  при любом свободном члене  $f \in \mathcal{C}([0, a])$ , то и союзное к нему уравнение (1') разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  при любом свободном члене  $g \in \mathcal{C}([0, a])$ , причем эти решения единственны* (первая теорема Фредгольма).

*Если интегральное уравнение (1) разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  не при любом свободном члене  $f$ , то:*

1) *однородные уравнения (1) и (1') имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений* (вторая теорема Фредгольма);

2) *для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения (1')* (третья теорема Фредгольма).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При  $\lambda = 0$  альтернатива Фредгольма, очевидно, справедлива. Поэтому считаем  $\lambda \neq 0$  и в предыдущих построениях выберем  $\varepsilon < 1/(|\lambda|a)$ .

Пусть уравнение (1) разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  при любом  $f \in \mathcal{C}([0, a])$ . Тогда эквивалентное ему уравнение (22) с вырожденным ядром также будет разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  при любом  $f$ . Отсюда, применяя теорему 3 из п. 2, заключаем, что  $D(\lambda) \neq 0$ . А тогда, по теореме 1 из п. 2, уравнение (22) и союзное к нему уравнение (22') однозначно разрешимы при любом  $f$  и  $g_1 \in \mathcal{C}([0, a])$ . Но функции  $g_1$  и  $g$  взаимно однозначно выражаются по формулам (25). Следовательно, эквивалентные уравнения (1) и (1') однозначно разрешимы в  $\mathcal{C}([0, a])$  при любых  $f$  и  $g$ . Первая теорема Фредгольма доказана.

Если уравнение (1) разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  не при любом  $f$ , то и эквивалентное ему уравнение (22) с вырожденным ядром также разрешимо в  $\mathcal{C}([0, a])$  не при любом  $f$ . Отсюда по теореме 1 из п. 2, заключаем, что  $D(\lambda) = 0$ . Но тогда, по теореме 2 из п. 2, однородные уравнения (22) и (22') имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений в  $\mathcal{C}([0, a])$ . Поскольку функции  $\Phi$  и  $\varphi$  связаны соотношениями (20), то и эквивалентные им однородные уравнения (1) и (1') имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений в  $\mathcal{C}([0, a])$  (см. § 1.1, п. 9). Вторая теорема Фредгольма

доказана.

Далее, по теореме 3 из п. 2, для разрешимости уравнения (22) при  $D(\lambda) = 0$  необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения (22'). Но решения  $\psi$  эквивалентных однородных уравнений (1') и (22'), равно как и правые части  $f$  эквивалентных уравнений (1) и (22), одни и те же. Следовательно, для разрешимости уравнения (1) в рассматриваемом случае необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения (1'). Третья теорема Фредгольма доказана.

Справедлива еще одна теорема.

**ЧЕТВЕРТАЯ ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА.** В каждом круге  $|\lambda| \leq R$  может находиться лишь конечное число характеристических чисел ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выберем  $\varepsilon = a/(R+1)$ . Тогда при  $|\lambda| < R+1$  будет  $|\lambda| < 1/(\varepsilon a)$ . Поэтому при  $|\lambda| < R+1$  однородные уравнения (1) и (22) эквивалентны. Следовательно, в круге  $|\lambda| < R+1$  характеристические числа ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  совпадают с корнями уравнения  $D(\lambda) = 0$  (см. п. 2). Поскольку ядро  $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$  аналитично по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < R+1$ , то  $D(\lambda)$  — аналитическая функция в этом круге. Отсюда по свойству единственности аналитических функций (см. [3]) заключаем, что в круге  $|\lambda| \leq R$  может находиться лишь конечное число корней уравнения  $D(\lambda) = 0$ , а значит, и ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  может иметь только конечное число характеристических чисел. Теорема доказана.

**4. Следствия из теорем Фредгольма.** Из четвертой теоремы Фредгольма следует, что множество характеристических чисел непрерывного ядра не имеет конечных предельных точек и, значит, не более чем счетно. (Это множество может быть и пустым, как, например, для ядра Вольтерра; см. § 4.1, п. 3.)

Далее, из второй теоремы Фредгольма вытекает, что кратность каждого характеристического числа конечна.

Следовательно, все характеристические числа ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  можно перенумеровать в порядке возрастания их модуля:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots, \quad (26)$$

повторяя в этом ряде  $\lambda_k$  столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , и каждому характеристическому числу  $\lambda_k$  из (26) сопоставим собственную функцию  $\varphi_k$ :

$$\varphi_k = \lambda_k K \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

По второй теореме Фредгольма  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots$  — все характеристические числа ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$ , причем кратности  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$  одинаковы. Соответствующие собственные функции обозначим через  $\psi_k$ :

$$\psi_k = \bar{\lambda}_k K^* \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27')$$

Собственные функции  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  непрерывны на  $[0, a]$ .

Докажем, что если  $\lambda_k \neq \lambda_i$ , то

$$(\varphi_k, \psi_i) = 0. \quad (28)$$

Принимая во внимание равенство (14) из § 4.1, из (27) и (27') получаем

$$(\varphi_k, \psi_i) = (\varphi_k, \bar{\lambda}_i K^* \psi_i) = \lambda_i (K \varphi_k, \psi_i) = \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}_k} (\varphi_k, \psi_i),$$

откуда в силу  $\lambda_k \neq \lambda_i$  и следует равенства (28).

Отметим, что  $\lambda_k^p$  и  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — характеристические числа и соответствующие собственные функции повторного ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$ .

Это утверждение вытекает из равенств (27), согласно которым

$$\varphi_k = \lambda_k^p K^p \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Можно доказать и обратное утверждение: если  $\mu$  и  $\varphi$  — характеристическое число и соответствующая собственная функция повторного ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$ , то по крайней мере один из корней  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , уравнения  $\lambda^p = \mu$  является характеристическим числом ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Переформулируем теперь альтернативу Фредгольма в терминах характеристических чисел и собственных функций.

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то интегральные уравнения (1) и (1') однозначно разрешимы при любых свободных членах.

Если  $\lambda = \lambda_k$ , то однородные уравнения

$$\varphi = \lambda_k K \varphi, \quad \psi = \bar{\lambda}_k K^* \psi$$

имеют одинаковое (конечное) число  $r_k \geq 1$  линейно независимых решений — собственных функций  $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$  ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и собственных функций  $\psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_{k+r_k-1}$  ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$ , соответствующих характеристическим числам  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$  ( $r_k$  — кратность  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$ ).

Если  $\lambda = \lambda_k$ , то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \psi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1. \quad (30)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Изложенный процесс сведения интегрального уравнения (1) к интегральному уравнению (22) с вырожденным ядром указывает на следующий способ приближенного решения уравнения (1) при любых  $\lambda$ :

- 1) ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  приближается полиномом  $\mathcal{P}(x, y)$  (или другим каким-либо вырожденным ядром);
- 2) для малого ядра  $\mathcal{Q}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \mathcal{P}(x, y)$  методом из § 4.1, п. 2 приближенно строится резольвента  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ ;
- 3) составляется интегральное уравнение (22) с вырожденным ядром  $\mathcal{T}(x, y)$ ;
- 4) методом из п. 1 строится решение  $\Phi$  уравнения (22);
- 5) по формуле (21) находится решение  $\varphi$  уравнения (1).

### 5. Упражнения.

- а) Доказать, что если  $\mathcal{K}(t)$  — непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(t) e^{ikt} dt \neq 0, \quad k \text{ целое},$$

то

$$\lambda_k = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(t) e^{ikt} dt}, \quad \varphi_k(x) = e^{-ikx},$$

— характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра  $\mathcal{K}(x - y)$ ,  $-\pi \leq x, y \leq \pi$ .

- б) Доказать, что если  $\mathcal{K}(t)$  — (абсолютно) интегрируемая функция на  $\mathbb{R}^1$  и ее преобразование Фурье  $\tilde{\mathcal{K}}(\mu) \neq 0$ , то

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\mathcal{K}}(\mu)}, \quad \varphi(x) = e^{-i\mu x},$$

— характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра  $\mathcal{K}(x - y)$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ .

- в) Доказать, что  $\lambda = \sqrt{2/\pi}$  — характеристическое число ядра  $\cos(xy)$ ,  $0 < x, y < \infty$ , и ему соответствуют собственные функции

$$\varphi(x) = f(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy) f(y) dy,$$

где  $f(x)$  — любая функция из  $L_2(0, \infty)$ .

Отметим, что для интегральных уравнений с ядрами примеров б) и в) теоремы Фредгольма не справедливы (области интегрирования в них неограничены).

### § 4.3. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром

Ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  называется *эрмитовым*, если оно совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром,  $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$ . Соответствующее интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^a \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (1)$$

при вещественных  $\lambda$  совпадает со своим союзным, ибо  $K^* = K$ . Это уравнение удобно рассматривать в пространстве  $\mathcal{L}_2(0, a)$ .

**1. Интегральные операторы с эрмитовым непрерывным ядром.** Пусть  $K$  — интегральный оператор с эрмитовым непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$ . Этот оператор переводит  $\mathcal{L}_2(0, a)$  в  $\mathcal{L}_2(0, a)$  (см. § 4.1, п. 1) и эрмитов (см. § 4.1, п. 2 и § 1.1, п. 10):

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in \mathcal{L}_2(0, a) = \mathcal{M}_K. \quad (2)$$

Обратно, если интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  эрмитов, то это ядро эрмитово.

Действительно, равенство (2) влечет эрмитовость ядра  $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$  (см. § 4.1, п. 1).

Из формулы (22) из § 4.1 следует, что все повторные ядра  $\mathcal{K}_p(x, y)$  эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  эрмитовы:

$$\mathcal{K}_p^*(x, y) = (\mathcal{K}^*)_p(x, y) = \mathcal{K}_p(x, y).$$

**ЛЕММА.** *Интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  переводит всякое ограниченное множество из  $\mathcal{L}_2(0, a)$  во множество, ограниченное в  $\mathcal{C}([0, a])$  и состоящее из равностепенно непрерывных\*) функций на  $[0, a]$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $B$  — ограниченное множество из  $\mathcal{L}_2(0, a)$ :  $\|f\| \leq A$ ,  $f \in B$ . По лемме из § 4.1, п. 1 оператор  $K$  переводит множество  $B$  во множество, ограниченное в  $\mathcal{C}([0, a])$ :  $\|Kf\|_{\mathcal{C}} \leq M\sqrt{a}A$ ,  $f \in B$ . Далее, так как ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  равномерно непрерывно на  $[0, a]$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что

$$|\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}A}, \quad |x' - x''| < \delta, \quad 0 \leq x', x'', y \leq a.$$

\*) Определение множества равностепенно непрерывных функций см. в § 1.1, п. 3.

Отсюда с помощью неравенства (4) из § 4.1 с заменой  $\mathcal{K}(x, y)$  на  $\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)$  при всех  $f \in B$  получаем

$$\begin{aligned} |(Kf)(x') - (Kf)(x'')| &= \left| \int_0^a [\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)] f(y) dy \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{aA}} \sqrt{a} \|f\| \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

как только  $|x' - x''| < \delta$ ,  $0 \leqslant x', x'' \leqslant a$ . Это и значит, что множество  $\{(Kf)(x), f \in B\}$  состоит из равностепенно непрерывных функций на  $[0, a]$ . Лемма доказана.

**2. Лемма Арчела–Асколи.** *Если бесконечное множество  $B$  ограничено в  $C(K)$ , где  $K$  — ограниченное замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ , и состоит из равностепенно непрерывных функций на  $K$ , то из него можно выбрать сходящуюся в  $C(K)$  последовательность.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как известно, множество точек с рациональными координатами счетно. Поэтому все такие точки множества  $K$  можно перенумеровать:  $x_1, x_2, \dots$ . По условию множество чисел  $\{f(x_1), f \in B\}$  ограничено. Могут представиться два случая.

1. Это множество бесконечно. Пользуясь теоремой Больцано–Вейерштрасса (см. § 1.1, п. 1), из него выберем сходящуюся последовательность  $f_k^{(1)}(x_1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

2. Это множество конечно. В этом случае найдется последовательность функций  $f_k^{(1)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , принимающих в точке  $x_1$  одинаковые значения.

Далее, поскольку множество чисел  $\{f_k^{(1)}(x_2), k = 1, 2, \dots\}$  ограничено, то из него выберем описанным выше способом сходящуюся подпоследовательность  $f_k^{(2)}(x_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и т. д.

Рассмотрим теперь диагональную последовательность  $f_k(x) = f_k^{(k)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , функций множества  $B$ . Для любой точки  $x_i$  числовая последовательность  $f_k(x_i)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится, ибо по построению при  $k \geq i$  эта последовательность содержится в сходящейся последовательности  $f_k^{(i)}(x_i)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Докажем теперь, что последовательность  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится равномерно на  $K$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Поскольку последовательность состоит из равностепенно непрерывных функций на  $K$ , то найдется такое число  $\delta > 0$ , что при  $k = 1, 2, \dots$

$$|f_k(x) - f_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |x - x'| < \delta, \quad x, x' \in K. \quad (3)$$

Так как  $K$  — ограниченное множество, то из множества точек  $x_1, x_2, \dots$ , можно выбрать конечное число их  $x_1, x_2, \dots, x_l$ ,  $l = l(\varepsilon)$ , так, чтобы для любой точки  $x \in K$  нашлась точка  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , такая, что  $|x - x_i| < \delta$ . Вспоминая, что последовательность  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится на точках  $x_1, \dots, x_l$ , заключаем, что найдется такое число  $N = N(\varepsilon)$ , что

$$|f_k(x_i) - f_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k, p \geq N, \quad i = 1, \dots, l. \quad (4)$$

Пусть теперь  $x$  — произвольная точка множества  $K$ . Выбирая точку  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , такую, что  $|x - x_i| < \delta$ , в силу (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_p(x)| &\leq \\ &\leq |f_k(x) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_p(x_i)| + |f_p(x_i) - f_p(x)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad k, p \geq N, \end{aligned}$$

причем  $N$  не зависит от  $x$ . Это значит, что последовательность  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится в себе в  $\mathcal{C}(K)$ . По теореме Коши (см. § 1.1, п. 3) эта последовательность сходится в  $\mathcal{C}(K)$  к некоторой функции из  $\mathcal{C}(K)$ . Лемма доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Лемма Арчела–Асколи выражает свойство *компактности* любого ограниченного в  $\mathcal{C}(K)$  множества, состоящего из равнотепенно непрерывных на  $K$  функций. Лемма из п. 1 утверждает, что интегральный оператор с непрерывным ядром переводит всякое ограниченное множество из  $\mathcal{L}_2(0, a)$  во множество, компактное в  $\mathcal{C}([0, a])$ . Всякий оператор, обладающий таким свойством, называется *вполне непрерывным* из  $\mathcal{L}_2(0, a)$  в  $\mathcal{C}([0, a])$ .

**3. Интегральные уравнения с эрмитовым непрерывным ядром.** Не всякое ядро, отличное от тождественного нуля, имеет характеристические числа; например, как было показано в § 4.1, п. 3, ядра Вольтерра не имеют таковых. Тем не менее справедлива следующая

**ТЕОРЕМА.** *Всякое эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$  имеет по крайней мере одно характеристическое число, и наименьшее по модулю характеристическое число  $\lambda_1$  удовлетворяет вариационному принципу*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(0, a)} \frac{\|Kf\|}{\|f\|}. \quad (5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим через  $\nu$  точную верхнюю грань функционала  $\|Kf\|$  на множестве функций  $f$  из  $\mathcal{L}_2(0, a)$  с единичной нормой:

$$\nu = \sup_{\|f\|=1} \|Kf\|. \quad (6)$$

Из оценки (6) из § 4.1 вытекает, что на функциях этого множества  $\|Kf\| \leq Ma$ , а потому  $\nu \leq Ma$ . Кроме того, очевидно,  $\nu \geq 0$ . Докажем, что  $\nu > 0$ . Действительно, если  $\nu = 0$ , то в силу (6) мы имели бы  $\|Kf\| = 0$ , т. е.  $Kf = 0$  при всех  $f \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , и потому  $\mathcal{K}(x, y) \equiv 0$  (см. § 4.1, п. 1), вопреки предположению.

Из определения точной верхней грани  $\nu$  вытекает существование последовательности  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такой что

$$\|Kf_k\| \rightarrow \nu, \quad k \rightarrow \infty; \quad (7)$$

кроме того, справедливо неравенство

$$\|K^2 f\| = \left\| K \left( \frac{Kf}{\|Kf\|} \right) \right\| \|Kf\| \leq \nu \|Kf\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a). \quad (8)$$

Докажем теперь, что

$$K^2 f_k - \nu^2 f_k \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{L}_2(0, a), \quad k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Действительно, пользуясь (2), (8) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2 &= (K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k) = \\ &= (K^2 f_k, K^2 f_k) + \nu^4 (f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k, f_k) = \\ &= \|K^2 f_k\|^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (K f_k, K f_k) \leq \nu^2 \|K f_k\|^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|K f_k\|^2 = \\ &= \nu^4 - \nu^2 \|K f_k\|^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и эквивалентно предельному соотношению (9).

По лемме из п. 1 последовательность функций  $K f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ограничена в  $\mathcal{C}([0, a])$  и состоит из равностепенно непрерывных функций на  $[0, a]$ . А тогда по лемме Арчела–Асколи (см. п. 2) существует подпоследовательность  $\psi_i = K f_{k_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , сходящаяся в  $\mathcal{C}([0, a])$  к функции  $\psi \in \mathcal{C}([0, a])$ . Отсюда, пользуясь оценками (4) и (5) из § 4.1 и соотношением (9), получаем

$$\|K^2 \psi - \nu^2 \psi\|_C \leq \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2 \|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2 \psi_i - \nu^2 \psi_i\|_C \leq$$

$$\begin{aligned} &\leqslant Ma \|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2 \|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i})\| \leqslant \\ &\leqslant (M^2 a^2 + \nu^2) \|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{a} \|K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\| \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$K^2 \psi = \nu^2 \psi.$$

Докажем, что  $\psi \neq 0$ . Из предельного соотношения (9) следует, что

$$K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{L}_2(0, a), \quad i \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,  $\|K\psi_i\| \rightarrow \nu^2$ ,  $i \rightarrow \infty$ . С другой стороны, из леммы § 4.1, п. 1 вытекает, что  $\|K\psi_i\| \rightarrow \|K\psi\|$ ,  $i \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\|K\psi\| = \nu^2 > 0$ , откуда и следует, что  $\psi \neq 0$ .

Итак, построенная функция  $\psi$  является собственной функцией ядра  $\mathcal{K}_2(x, y)$ , соответствующей характеристическому числу  $1/\nu^2$ . А тогда по крайней мере одно из чисел  $\pm 1/\nu$  является характеристическим числом ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  (см. § 4.2, п. 4). Таким образом, построенное характеристическое число  $\lambda_1$  по модулю равно  $1/\nu$  и, стало быть, в силу (6) удовлетворяет вариационному принципу (5).

Осталось установить, что  $\lambda_1$  — наименьшее по модулю характеристическое число ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Действительно, если  $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  — характеристическое число и соответствующая собственная функция  $\lambda_0 K \varphi_0$  равна  $\varphi_0$ , то в силу (5)

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(0, a)} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} \geqslant \frac{\|K\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

и потому  $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_0|$ . Теорема доказана.

Как было установлено в п. 1, интегральный оператор  $K$  с эрмитовым непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$  эрмитов. По теореме из § 1.1, п. 10 характеристические числа ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  вещественны, а собственные функции, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны. Кроме того, по четвертой теореме Фредгольма множество характеристических чисел не более чем счетно, а по второй теореме Фредгольма кратность каждого характеристического числа конечна. Поэтому система собственных функций оператора  $K$  не более чем счетна, и эту систему можно выбрать ортонормальной (см. § 1.1, п. 10).

Принимая еще во внимание доказанную теорему и теоремы Фредгольма (см. § 4.2, п. 3), для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$  получаем следующие утверждения.

Множество характеристических чисел  $\{\lambda_k\}$  не пусто, лежит на вещественной оси, не имеет конечных предельных точек; каждое характеристическое число имеет конечную кратность, система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  может быть выбрана ортогональной,

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}. \quad (10)$$

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то уравнение (1) однозначно разрешимо при любом свободном члене  $f \in C([0, a])$ . Если  $\lambda = \lambda_k$ , то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1, \quad (11)$$

где  $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$  — собственные функции, соответствующие характеристическому числу  $\lambda_k$ , и  $r_k$  — кратность  $\lambda_k$ .

Многие задачи математической физики сводятся к интегральным уравнениям с вещественным эрмитовым ядром  $\mathcal{K}(x, y)$ . Такие ядра называются *симметричными*; они удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x).$$

Собственные функции симметричного ядра можно выбрать вещественными.

Действительно, если  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ ,  $\varphi_1 \neq 0$ ,  $\varphi_2 \neq 0$ , — собственная функция симметричного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ , соответствующая собственному числу  $\lambda_0$ :

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 = \lambda_0 K\varphi = \lambda_0 + iK\varphi_1 + i\lambda_0 K\varphi_2,$$

то в силу вещественности ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и числа  $\lambda_0$  заключаем, что вещественная  $\varphi_1$  и мнимая  $\varphi_2$  части функции  $\varphi$  также являются собственными функциями, соответствующими  $\lambda_0$ :

$$\varphi_1 = \lambda_0 K\varphi_1, \quad \varphi_2 = \lambda_0 K\varphi_2.$$

#### § 4.4. Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствия

**1. Теорема Гильберта–Шмидта для эрмитова непрерывного ядра.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  — характеристические числа эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ , расположенные в порядке возрастания их модуля,  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$  и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — соответствующие ортонормальные собственные функции,  $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$ .

Как мы знаем, характеристические числа  $\lambda_k$  вещественны, а собственные функции  $\varphi_k(x)$  непрерывны на  $[0, a]$ ; при этом множество  $\{\lambda_k\}$  либо конечно, либо счетно; в последнем случае  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Далее, в силу теоремы из § 4.3, п. 3 справедливо неравенство

$$\|Kf\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|f\|, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a). \quad (1)$$

Отметим еще неравенство \*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy, \quad x \in [0, a]. \quad (2)$$

(В п. 2, будет показано, что в неравенстве (2) фактически имеет место знак равенства.)

Неравенство (2) при фиксированном  $x \in [0, a]$  представляет собой неравенство Бесселя (см. § 1.1, п. 6) для функции  $\bar{\mathcal{K}}(x, y)$ , коэффициенты Фурье которой по ортонормальной системе  $\{\varphi_k(y)\}$  есть

$$(\bar{\mathcal{K}}, \varphi_k) = \int_0^a \bar{\mathcal{K}}(x, y) \bar{\varphi}_k(y) dy = \overline{K \varphi_k} = \frac{1}{\lambda_k} \bar{\varphi}_k(x).$$

Введем последовательность эрмитовых непрерывных ядер

$$\mathcal{K}^{(p)}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Соответствующие интегральные эрмитовы операторы  $K^{(p)}$  действуют по формуле

$$K^{(p)} f = Kf - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a). \quad (4)$$

Докажем, что  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$  и  $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots$  образуют все характеристические числа и собственные функции ядра  $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$ .

В самом деле, в силу (4) имеем

$$K^{(p)} \varphi_k = K \varphi_k - \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K \varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \quad k \geq p + 1,$$

---

\*) Если ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  имеет конечное число характеристических чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , то будем считать  $\lambda_k = \infty$ ,  $k > N$ .

так что  $\lambda_k$  и  $\varphi_k$ ,  $k \geq p+1$ , — действительно характеристические числа и собственные функции ядра  $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$ . Обратно, пусть  $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  — характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра  $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$ , т. е.

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)} \varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i. \quad (5)$$

Отсюда при  $k = 1, \dots, p$  получаем

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0 (K \varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} = \\ &= \lambda_0 (\varphi_0, K \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) = 0, \end{aligned}$$

а поэтому в силу (5)  $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$ . Таким образом,  $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  — характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Поскольку  $\varphi_0$  ортогональна ко всем собственным функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ , то  $\lambda_0$  совпадает с одним из характеристических чисел  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ , и  $\varphi_0$  можно считать равной  $\varphi_k$  при некотором  $k \geq p+1$ .

Таким образом,  $\lambda_{p+1}$  — наименьшее по модулю характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$ . Применяя неравенство (1) к этому ядру и учитывая (4), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|K^{(p)} f\| &= \left\| Kf - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda_{p+1}|}, \\ f \in \mathcal{L}_2(0, a), \quad p &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть эрмитово ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  имеет конечное число характеристических чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ . По доказанному эрмитово ядро  $\mathcal{K}^{(N)}$  не имеет характеристических чисел, а потому по теореме из § 4.3, п. 3  $\mathcal{K}^{(N)}(x, y) \equiv 0$ , так что

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}, \quad (7)$$

т. е. ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  вырожденное.

Отсюда, вспоминая, что вырожденное ядро всегда имеет конечное число характеристических чисел (см. § 4.2, п. 2), выводим такой

результат: для того чтобы эрмитово непрерывное ядро было вырожденным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело конечное число характеристических чисел.

Будем говорить, что функция  $f(x)$  истокообразно представима через ядро  $\mathcal{K}(x, y)$ , если существует функция  $h \in \mathcal{L}_2(0, a)$  такая, что

$$f(x) = \int_0^a \mathcal{K}(x, y) h(y) dy, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (8)$$

**ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА–ШМИДТА.** *Если функция  $f(x)$  истокообразно представима через эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y)$ ,  $f = Kh$ , то ее ряд Фурье по собственным функциям ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  сходится регулярно (и, значит, равномерно) на  $[0, a]$  к этой функции:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (9)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $f = Kh$ ,  $h \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , то по лемме из § 4.1, п. 1  $f \in \mathcal{C}([0, a])$  и коэффициенты Фурье функций  $f$  и  $h$  по собственным функциям  $\{\varphi_k\}$  ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  связаны соотношением

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \quad (10)$$

Если ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  имеет конечное число характеристических чисел, то в силу (7)

$$f(x) = Kh = \sum_{k=1}^N \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

и теорема Гильберта–Шмидта доказана.

Пусть теперь ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  имеет бесконечное число характеристических чисел. В этом случае  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому в силу (6) и (10) ряд (9) сходится к  $f$  в  $\mathcal{L}_2(0, a)$ :

$$\left\| f - \sum_{k=1}^p (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| = \left\| Kh - \sum_{k=1}^p \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k \right\| \leq \frac{\|h\|}{|\lambda_{p+1}|} \rightarrow 0.$$

Осталось доказать, что ряд (9) сходится регулярно на  $[0, a]$ . Пользуясь неравенством Коши–Буняковского и неравенством (2), при всех  $p$  и  $q$  получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| &\leqslant \left[ \sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant \left[ \sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[ \int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant M\sqrt{a} \left[ \sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \quad (11)
\end{aligned}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \leq \|h\|^2$$

правая часть неравенства (11) стремится к 0 при  $p, q \rightarrow \infty$ . Это и означает, что ряд (9) сходится регулярно на  $[0, a]$ . Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия из теоремы Гильберта–Шмидта.

**2. Билинейное разложение повторных ядер.** Докажем, что повторное ядро  $\mathcal{K}_p(x, y)$  эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  разлагается в билинейный ряд по собственным функциям этого ядра:

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (12)$$

регулярно сходящийся при  $0 \leq x, y \leq a$ .

В силу формулы (17) из § 4.1 при каждом  $y \in [0, a]$  ядро  $\mathcal{K}_p(x, y)$  истокообразно представимо через ядро  $\mathcal{K}(x, y)$ , а потому по теореме Гильберта–Шмидта оно разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям этого ядра:

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_p(x, y), \varphi_k) \varphi_k(x).$$

Так как ядро  $\mathcal{K}_p(x, y)$  эрмитово, то

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_p(x, y), \varphi_k) &= \int_0^a \mathcal{K}_p(x, y) \bar{\varphi}_k(x) dx = \int_0^a \bar{\mathcal{K}}_p(y, x) \bar{\varphi}_k(x) dx = \\
&= \overline{(\mathcal{K}^p \varphi_k)(y)} = \frac{\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p \geq 1. \quad (13)
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (12) доказано и ряд в (12) сходится регулярно по  $x \in [0, a]$  при каждом  $y \in [0, a]$ .

В частности, полагая в формуле (12)  $p = 2$ ,  $x = y$  и учитывая, что в силу (17) из § 4.1

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(x, x) &= \int_0^a \mathcal{K}(x, y') \mathcal{K}(y', x) dy' = \\ &= \int_0^a \mathcal{K}(x, y') \bar{\mathcal{K}}(x, y') dy' = \int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy, \end{aligned}$$

получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy. \quad (14)$$

Из леммы Дини (см. § 1.1, п. 3) следует, что ряд (14) сходится равномерно на  $[0, a]$ . Отсюда, используя неравенство Коши–Буняковского

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k^p} \leq \frac{1}{|\lambda_1|^{p-2}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2},$$

заключаем, что ряд (12) сходится регулярно на  $[0, a]$ .

Интегрируя равномерно сходящийся ряд (14) почленно и учитывая нормировку собственных функций, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_0^a \int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy. \quad (15)$$

**3. Билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра.** Изучим сходимость ряда (12) при  $p = 1$ , а именно докажем, что эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  разлагается в билинейный ряд по своим собственным функциям:

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k}, \quad (16)$$

сходящийся в  $L_2(0, a)$  равномерно по  $y \in [0, a]$ , т. е.

$$\left\| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right\| \rightrightarrows 0, \quad 0 \leq y \leq a, \quad p \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Равенство (13) при  $p = 1$  показывает, что при каждом  $y \in [0, a]$  коэффициенты Фурье ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  по ортонормальной системе  $\{\varphi_k(x)\}$  равны  $\overline{\varphi}_k(y)/\lambda_k$ . Поэтому, применяя формулу (6) из § 1.1, получаем равенство

$$\left\| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right\|^2 = \int_0^a |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx - \sum_{k=1}^p \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}, \quad y \in [0, a],$$

откуда в силу равномерной сходимости ряда (14) заключаем о сходимости билинейного ряда (16) к ядру  $\mathcal{K}(x, y)$  в смысле (17).

Для билинейной формы  $(Kf, g)$  докажем формулу

$$(Kf, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)(\overline{g, \varphi_k})}{\lambda_k}, \quad f, g \in \mathcal{L}_2(0, a). \quad (18)$$

Действительно, поскольку  $f \in \mathcal{L}_2(0, a)$ , то по теореме Гильберта–Шмидта

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

причем этот ряд сходится равномерно на  $[0, a]$ . Умножая этот ряд на функцию  $\overline{g}$  из  $\mathcal{L}_2(0, a)$  (и, следовательно, абсолютно интегрируемую на  $[0, a]$ ; см. § 1.1, п. 5) и почленно интегрируя его по  $[0, a]$ , получаем формулу (18):

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_0^a (Kf) \overline{g} dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \int_0^a \varphi_k(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)(\overline{g, \varphi_k})}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Полагая в формуле (18)  $f = g$ , получим представление квадратичной формы  $(Kf, f)$  в виде

$$(Kf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a). \quad (19)$$

Формула (19) представляет собой обобщение формулы приведения к главным осям квадратичной формы с конечным числом переменных.

**4. Решение неоднородного интегрального уравнения с эрмитовым непрерывным ядром.** Построим решение неоднородного интегрального уравнения

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \quad (20)$$

с эрмитовым непрерывным ядром  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $f \in \mathcal{C}([0, a])$ , то (единственное) решение  $\varphi$  интегрального уравнения (20) представляется в виде равномерно сходящегося на  $[0, a]$  ряда (формулой Шмидта)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x). \quad (21)$$

Действительно, при  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , решение интегрального уравнения (20) существует и единствено в  $\mathcal{C}([0, a])$  при любом свободном члене  $f \in \mathcal{C}([0, a])$  (см. § 4.2, п. 3). По теореме Гильберта–Шмидта функция  $K\varphi$  разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . Поэтому

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k + f. \quad (22)$$

Вычислим коэффициенты Фурье  $(\varphi, \varphi_k)$ . Из уравнения (20) имеем

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_k) &= \lambda(K\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \\ &= \lambda(\varphi, K\varphi_k) + (f, \varphi_k) = \frac{\lambda}{\lambda_k}(\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k), \end{aligned}$$

так что

$$(\varphi, \varphi_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}(f, \varphi_k),$$

откуда в силу (22) вытекает формула Шмидта (21).

По теореме Гильберта–Шмидта

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k,$$

причем ряд сходится равномерно на  $[0, a]$ . Поэтому формула Шмидта (21) принимает вид

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x) = \\ &= \lambda \int_0^a \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \varphi_k(x) + f(x). \quad (23)\end{aligned}$$

Далее, из регулярной сходимости билинейного ряда (12) при  $p = 2$  следует равномерная сходимость билинейного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)},$$

и его сумма есть непрерывная функция по  $(x, y)$  при  $0 \leq x, y \leq a$ , мероморфная по  $\lambda$  с простыми полюсами  $\lambda_k$ . Следовательно, при  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в формуле (23) можно поменять порядок суммирования и интегрирования, в результате чего получим

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^a \left[ \mathcal{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \right] f(y) dy + f(x). \quad (24)$$

С другой стороны, по теореме из § 4.1, п. 2 при малых  $\lambda$  решение уравнения (20) выражается через резольвенту  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  по формуле (20) из § 4.1. Следовательно,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \mathcal{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}. \quad (25)$$

Таким образом, резольвента  $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$  эрмитова непрерывного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  допускает мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного  $\lambda$  с простыми полюсами  $\lambda_k$  и вычетами

$$- \sum_{i=0}^{r_k-1} \varphi_{k+i}(x) \bar{\varphi}_{k+i}(y), \quad (26)$$

где  $\varphi_k, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$  — собственные функции ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ , соответствующие  $\lambda_k$ ,  $r_k$  — кратность  $\lambda_k$ .

С помощью равенства (16) перепишем формулу (25) в виде

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k - \lambda}, \quad (27)$$

причем билинейный ряд сходится в  $\mathcal{L}_2(0, a)$  равномерно по  $y \in [0, a]$  (см. п. 3).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Формула (21) остается справедливой и при  $\lambda = \lambda_j$ , если в соответствии с теоремой Фредгольма

$$(f, \varphi_{j+i}) = 0, \quad i = 0, \dots, r_j - 1.$$

В этом случае решение уравнения (20) не единственno, и его общее решение согласно формуле (13) из § 1.1 дается формулой

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{k=1, \lambda_k \neq \lambda_j}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda_j} \varphi(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j-1} c_i \varphi_{j+i}(x), \quad (28)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные.

**5. Положительно определенные ядра.** Ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  называется *положительно определенным*, если соответствующий оператор  $K$  положителен (см. § 1.1, п. 10), т. е.

$$(Kf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{L}_2(0, a).$$

Всякое положительно определенное ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  эрмитово.

Действительно, поскольку оператор  $K$  эрмитов (см. § 1.1, п. 10), то и его ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  эрмитово (см. § 4.3, п. 1).

Для того чтобы эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  было положительно определено, необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические числа  $\lambda_k$  были положительными.

Действительно, если все  $\lambda_k$  больше нуля, то в силу (19)  $(Kf, f) \geq 0$ , так что ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  положительно определенное. Обратно, если ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  положительно определенное, то

$$\frac{1}{\lambda_k} = (K\varphi_k, \varphi_k) \geq 0,$$

т. е.  $\lambda_k > 0$ .

Если  $\mathcal{K}(x, y)$  — положительно определенное непрерывное ядро, то справедлив следующий вариационный принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(0, a)} \left\{ \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2} : (f, \varphi_i) = 0, i = 1, \dots, k-1 \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

причем верхняя грань в (29) достигается на любой собственной функции, соответствующей характеристическому числу  $\lambda_k$ .

Действительно, пользуясь формулой (19) и учитывая неравенство  $\lambda_i \geq \lambda_k > 0$ ,  $i \geq k$ , получаем

$$\frac{(Kf, f)}{\|f\|^2} = \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_i)|^2}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\lambda_k \|f\|^2} \sum_{i=k}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2$$

при всех  $f \in \mathcal{L}_2(0, a)$  таких, что  $(f, \varphi_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . Стало быть, в силу неравенства Бесселя справедливо неравенство

$$\frac{(Kf, f)}{\|f\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k}. \quad (30)$$

С другой стороны, при  $f = \varphi_k$  имеем

$$\frac{(K\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}. \quad (31)$$

Неравенство (30) и равенство (31) влекут вариационный принцип (29).

Полагая в (29)  $k = 1$ , получаем

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in \mathcal{L}_2(0, a)} \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2}. \quad (32)$$

Нам еще понадобится

**ТЕОРЕМА МЕРСЕРА.** *Если эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  имеет конечное число отрицательных характеристических чисел, то его билинейный ряд сходится равномерно при  $0 \leq x, y \leq a$ . В частности,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} = \mathcal{K}(x, x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^a \mathcal{K}(x, x) dx.$$

Для доказательства следует воспользоваться результатами из пп. 2, 3 и леммой Дини (см. § 1.1, п. 3). Подробное доказательство приведено в [1].

**6. Развитие теории интегральных уравнений.** Вся предыдущая теория, изложенная в § 4.1–4.4, относилась к одномерным интегральным уравнениям с непрерывным ядром. Без существенных изменений эта теория переносится на многомерные интегральные уравнения (1) и (2) с непрерывным ядром при условии, что область  $G \subset \mathbb{R}^n$  ограничена. Все оценки остаются справедливыми, если в них число  $a$  заменить на объем  $V$  области  $G$ . Вся теория переносится и на

многомерные уравнения с более общими, чем непрерывные, ядрами.  
Ядро

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mathcal{H}(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad x, y \in G, \quad \alpha < n, \quad (33)$$

где  $\mathcal{H}(x, y)$  — непрерывное ядро на  $\overline{G} \times \overline{G}$ , называется *полярным*; если же  $\alpha < n/2$ , то оно называется *слабо полярным*.

Для полярных ядер в силу оценок § 1.1 все повторные ядра, начиная с некоторого, будут непрерывны. Поэтому вся теория, изложенная в § 4.1–4.3 для эрмитовых ядер сохраняется.

Что касается теории Гильберта–Шмидта, изложенной в § 4.4, то она переносится без существенных изменений на интегральные уравнения со слабо полярным эрмитовым ядром (для этого ядро  $\mathcal{H}(x, y)$  в (33) должно быть эрмитовым). Действительно, условие  $\alpha < n/2$  в (33) обеспечивает принадлежность ядра  $\mathcal{K}$  к пространству  $\mathcal{L}_2(G \times G)$ . Подробности изложены в [1].

Теория Фредгольма (§ 4.2) и результаты § 4.1 и § 4.3 остаются справедливыми и для интегральных уравнений с полярным ядром на ограниченной кусочно гладкой поверхности  $S$  (см. § 1.1, п. 1):

$$\varphi(x) = \lambda \int_S \frac{\mathcal{H}(x, y)}{|x - y|^\alpha} \varphi(y) dS_y + f(x), \quad \alpha < m, \quad (34)$$

где ядро  $\mathcal{H}(x, y)$  непрерывно на  $S$  и  $m$  — размерность поверхности  $S$ . Теория же Гильберта–Шмидта сохраняется для интегральных уравнений (34) со слабо полярным ( $\alpha < m/2$ ) эрмитовым ядром ( $\mathcal{H}(x, y) = \overline{\mathcal{H}(y, x)}$ ,  $x, y \in S$ ).

Теория Гильберта–Шмидта и результаты § 4.3 распространяются и на некоторые интегральные уравнения с неэрмитовыми ядрами. Например, интегральное уравнение с эрмитовым ядром  $\mathcal{K}(x, y)$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \rho(y) \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in G, \quad (35)$$

где  $\rho$  — положительная непрерывная функция на  $\overline{G}$ , с помощью замены  $\psi = \sqrt{\rho} \varphi$  неизвестной функции  $\varphi$  сводится к интегральному уравнению с эрмитовым ядром  $\sqrt{\rho(x)\rho(y)}\mathcal{K}(x, y)$

$$\psi(x) = \lambda \int_G \sqrt{\rho(x)\rho(y)} \mathcal{K}(x, y) \psi(y) dy + \sqrt{\rho(x)} f(x), \quad x \in G. \quad (36)$$

Многие задачи математической физики сводятся к интегральным уравнениям с *положительным* полярным ядром  $\mathcal{K}(x, y) > 0$ ,  $x \in G$ ,  $y \in G$ .

Справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА ЕНТЧА.** *Наименьшее по модулю характеристическое число положительного полярного ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  положительное и простое, а соответствующая собственная функция может быть выбрана положительной в  $G$ .*

Заметим, что аналогичная теорема справедлива и для матриц с положительными элементами; в этом случае она называется *теоремой Перрона*.

Доказательство теоремы Ентча в случае симметричного положительного ядра приведено в [1].

## Глава V

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе изучаются краевые задачи для уравнений эллиптического типа, в частности, теория потенциала для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве и на плоскости и для уравнения Гельмгольца в пространстве.

Если не оговорено особо, то область  $G$  предлагается ограниченной, а ее граница  $S$  — кусочно гладкой поверхностью. Обозначим через  $G_1$  внешность  $\overline{G}$ ,  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ ,  $G \cup G_1 = \mathbb{R}^n$ .

### § 5.1. Задача на собственные значения

**1. Постановка задачи на собственные значения.** Рассмотрим следующую линейную однородную краевую задачу для уравнения эллиптического типа (см. § 1.4, п. 3):

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (2)$$

Предполагаем (см. § 1.4, пп. 1, 3), что

$$\begin{aligned} p &\in \mathcal{C}^1(\overline{G}), & q &\in \mathcal{C}(\overline{G}), & p(x) &> 0, & q(x) &\geqslant 0, & x &\in G; \\ \alpha &\in \mathcal{C}(S), & \beta &\in \mathcal{C}(S), & \alpha(x) &\geqslant 0, & \beta(x) &\geqslant 0, & & \\ & & & & \alpha(x) + \beta(x) &> 0, & & x &\in S. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $S_0$  — та часть  $S$ , где  $\alpha(x) > 0$  и  $\beta(x) > 0$  одновременно.

Задача (1), (2) состоит в нахождении функции  $u(x)$  класса  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ , удовлетворяющей уравнению (1) в области  $G$  и граничным условиям (2) на границе  $S$ . Очевидно, задача (1), (2) всегда

имеет нулевое решение. Это решение не представляет интереса. Поэтому задачу (1), (2) необходимо рассматривать как задачу на собственные значения (см. § 1.1, п. 9) для оператора

$$L = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad}) + q.$$

К области определения  $\mathcal{M}_L$  оператора  $L$  (см. § 1.1, п. 8) отнесем все функции  $f(x)$  класса  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\bar{G})$ , удовлетворяющие граничному условию (2) и условию  $L(f) \in \mathcal{L}_2(G)$ . По лемме из § 2.1, п. 2  $\mathcal{D}(G)$  плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$ , а  $\mathcal{D}(G)$ , очевидно, содержится в  $\mathcal{M}_L$ . Поэтому  $\mathcal{M}_L$  плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$ .

Итак, задача (1), (2) состоит в нахождении тех значений  $\lambda$  (собственных значений оператора  $L$ ), при которых уравнение

$$Lu = \lambda u \quad (4)$$

имеет ненулевые решения  $u(x)$  из области определения  $\mathcal{M}_L$  (собственные функции, соответствующие этому собственному значению).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Собственные функции гладкости  $\mathcal{C}^1(\bar{G})$  существуют не всегда. Поэтому в некоторых задачах требование гладкости ослабляется. Это естественно для краевых задач I рода (не содержащих  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ ; см. § 1.4, п. 3). Для остальных краевых задач под  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  на  $S$  понимают так называемую *правильную нормальную производную* (см. § 1.4, п. 5, замечание и § 5.3, п. 2).

**2. Формулы Грина.** Если  $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\bar{G})$  и  $v \in \mathcal{C}^1(\bar{G})$ , то справедлива *первая формула Грина*

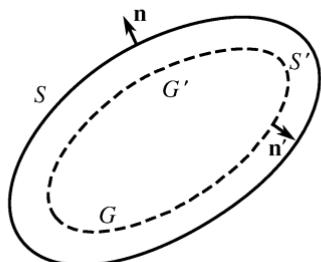


Рис. 50

$$\int_G v Lu dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_S p v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_G quv dx. \quad (5)$$

Для доказательства формулы (5) возьмем произвольную область  $G'$  с кусочно гладкой границей  $S'$ , строго лежащую в области  $G$  (рис. 50). Так как

$u \in \mathcal{C}^2(G)$ , то  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{G'})$ , и, следовательно,

$$\int_{G'} v Lu dx = \int_{G'} v [-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu] dx =$$

$$= - \int_{G'} \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{G'} quv dx.$$

Пользуясь теперь формулой Гаусса–Остроградского (см. § 1.2, п. 2), получаем

$$\int_{G'} vLu dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{S'} pv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS' + \int_{G'} quv dx.$$

Устремляя в полученном равенстве  $G'$  к  $G$  и пользуясь тем, что  $u$  и  $v$  принадлежат  $\mathcal{C}^1(\overline{G})$ , заключаем, что предел правой части существует, и, следовательно, существует предел левой части и справедливо равенство (5). При этом интеграл слева в (5)<sup>\*</sup> следует понимать как несобственный.

Если  $u$  и  $v$  принадлежат  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ , то справедлива *вторая формула Грина*

$$\int_G (vLu - uLv) dx = \int_S p \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (6)$$

Для доказательства формулы (6) в первой формуле Грина (5) поменяем местами  $u$  и  $v$ :

$$\int_G uLv dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S pu \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_G qvu dx,$$

и вычтем полученное равенство из равенства (5). В результате получим вторую формулу Грина (6).

В частности, при  $p = 1, q = 0$  формулы Грина (5) и (6) превращаются в следующие (ср. с формулой (29) из § 2.2):

$$\int_G v\Delta u dx = - \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_S v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (7)$$

$$\int_G (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_S \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (8)$$

<sup>\*</sup>) Здесь и ниже предполагается, что последовательность кусочно гладких поверхностей  $S' \rightarrow S$  выбрана так, чтобы выполнялось предельное соотношение  $\int_{S'} f \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}'} dS' \rightarrow \int_S f \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS$  для любых  $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$  и  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ .

### 3. Свойства оператора $L$ .

Оператор  $L$  эрмитов:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{M}_L. \quad (9)$$

Действительно, так как функции  $f$  и  $\bar{g}$  лежат в  $\mathcal{M}_L$ , то  $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$  и  $L\bar{g} = \overline{Lg} \in \mathcal{L}_2(G)$ , и вторая формула Грина (6) при  $u = f$  и  $v = \bar{g}$  принимает вид

$$\int_G (\bar{g}Lf - f\overline{Lg}) dx = (Lf, g) - (f, Lg) = \int_S p \left( f \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{n}} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (10)$$

Далее, функции  $f$  и  $\bar{g}$  удовлетворяют граничному условию (2):

$$\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } S. \quad (11)$$

По предположению (3)  $\alpha + \beta > 0$  на  $S$ . Поэтому однородная система линейных алгебраических уравнений (11) имеет ненулевое решение  $(\alpha, \beta)$ , и, значит, ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{n}} \end{vmatrix} = f \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{n}} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } S.$$

Учитывая полученное равенство, из формулы (10) получаем равенство (9), которое означает, что оператор  $L$  эрмитов (см. § 1.1, п. 10).

Пусть  $f \in \mathcal{M}_L$ . Полагая в первой формуле Грина (5)  $u = f$  и  $v = \bar{f}$  и учитывая, что  $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$ , получаем

$$(Lf, f) = \int_G |\operatorname{grad} f|^2 dx - \int_S p f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_G q |f|^2 dx. \quad (12)$$

Из граничного условия (2) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} &= -\frac{\alpha}{\beta} f, & \text{если} & \quad \beta(x) > 0, & \quad x \in S; \\ f &= 0, & \text{если} & \quad \beta(x) = 0, & \quad x \in S. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в равенство (12), получаем выражение для квадратичной формы

$$(Lf, f) = \int_G (p |\operatorname{grad} f|^2 + q |f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (13)$$

где  $S_0$  — та часть  $S$ , где  $\alpha(x) > 0$  и  $\beta(x) > 0$ .

Квадратичная формула  $(Lf, f)$ ,  $f \in \mathcal{M}_L$ , называется *интегралом энергии*.

В силу предположений (3) в правой части (13) все три слагаемых неотрицательны. Поэтому, отбрасывая второе и третье слагаемое и оценивая снизу первое слагаемое, получаем неравенство

$$(Lf, f) \geq \int_G p |\operatorname{grad} f|^2 dx \geq \min_{x \in \overline{G}} p(x) \int |\operatorname{grad} f|^2 dx,$$

т. е.

$$(Lf, f) \geq p_0 \| |\operatorname{grad} f| \|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (14)$$

где  $p_0 = \min_{x \in \overline{G}} p(x) > 0$  в силу непрерывности и положительности функции  $p(x)$  на  $\overline{G}$ .

Из неравенства (14) вытекает, что оператор  $L$  положительный (см. § 1.1, п. 10), т. е.

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L. \quad (15)$$

Отсюда, в частности, опять следует эрмитовость оператора  $L$  (см. § 1.1, п. 10).

**4. Свойства собственных значений и собственных функций оператора  $L$ .** Все собственные значения оператора  $L$  неотрицательны.

Это утверждение вытекает из положительности оператора (см. § 1.1, п. 10).

Собственные функции оператора  $L$ , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Это утверждение вытекает из эрмитовости оператора  $L$  (см. § 1.1, п. 10).

Собственные функции оператора  $L$  можно выбрать вещественными.

Это утверждение вытекает из вещественности оператора  $L$  (ср. § 4.3, п. 3). Действительно, пусть  $\lambda_0$  — (вещественное) собственное значение и  $u_0$  — соответствующая собственная функция оператора  $L$ ,

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0, \quad u_0 \in \mathcal{M}_L. \quad (16)$$

Отделив в равенстве (16) вещественную и мнимую части, убедимся, что отличные от нуля вещественная и мнимая части собственной функции  $u_0 = u_1 + iu_2$  также являются собственными функциями, соответствующими собственному значению  $\lambda_0$ ,  $Lu_j = \lambda_0 u_j$ ,  $j = 1, 2$ .

**ЛЕММА.** Для того чтобы  $\lambda = 0$  было собственным значением оператора  $L$ , необходимо и достаточно, чтобы  $q = 0$  и  $\alpha = 0$ . При этом  $\lambda = 0$  — простое собственное значение, а  $u_0 = \text{const}$  — соответствующая собственная функция.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть  $\lambda = 0$  — собственное значение оператора  $L$  и  $u_0$  — соответствующая собственная функция, так что  $Lu_0 = 0$ ,  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ . Применяя к функции  $u_0$  формулу (13), получаем

$$0 = (Lu_0, u_0) = \int_G (p |\operatorname{grad} u_0|^2 + q |u_0|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |u_0|^2 dS,$$

откуда, учитывая предположения (3), выводим

$$p \operatorname{grad} u_0 = 0, \quad qu_0 = 0, \quad x \in G,$$

т. е.  $u_0 = \text{const} \neq 0$  и  $q = 0$ . Из граничного условия (2) и равенства  $u_0 = \text{const}$  следует, что  $\alpha = 0$ . Необходимость условий доказана. При этом установлено, что  $u_0 = \text{const}$  — единственная собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda = 0$ , т. е. это собственное значение простое.

**ДОСТАТОЧНОСТЬ.** Если  $q = 0$  и  $\alpha = 0$ , то в силу (3)  $\beta > 0$  и задача (1), (2) превращается в следующую:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \lambda u, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0,$$

для которой  $u_0 = \text{const}$  есть собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda = 0$ . Лемма доказана.

При  $n \geq 2$  будем считать, что в граничном условии (2)  $\beta = 0$  либо  $\beta = 1$ , т. е. это условие имеет вид

$$u|_S = 0 \quad \text{либо} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \right|_S = 0. \quad (17)$$

Тогда если граница  $S$  области  $G$  — достаточно гладкая поверхность, а коэффициенты  $p > 0$ ,  $q \geq 0$  и  $\alpha \geq 0$  — достаточно гладкие функции, справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 1.** *Множество собственных значений оператора  $L$  не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из  $\mathcal{M}_L$  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора  $L$ .*

Эта теорема будет доказана для двух частных случаев: для задачи Штурма–Лиувилля (см. § 5.2) и для задачи Дирихле (см. § 5.7).

На основании приведенной теоремы и предыдущих утверждений все собственные значения оператора  $L$  можно перенумеровать в порядке возрастания их величины:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (18)$$

повторяя  $\lambda_k$  столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через  $X_1, X_2, \dots$ , так что в (18) каждому собственному значению  $\lambda_k$  соответствует собственная функция  $X_k$ ,

$$LX_k = \lambda_k X_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad X_k \in \mathcal{M}_L.$$

При этом собственные функции  $X_k$  можно выбрать вещественными и ортонормальными (см. § 1.1, п. 10), так что

$$(LX_k, X_j) = \lambda_k (X_k, X_j) = \lambda_k \delta_{kj}. \quad (19)$$

Далее, всякая функция  $f$  из  $\mathcal{M}_L$  разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе  $\{X_k\}$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k, \quad (20)$$

и этот ряд сходится регулярно на  $G$ . Поскольку  $\mathcal{M}_L$  плотно в  $\mathcal{L}_2(G)$  (см. п. 1), в силу теоремы из § 1.1, п. 7 справедлива

**ТЕОРЕМА 2.** *Система собственных функций оператора  $L$  полна в  $\mathcal{L}_2(G)$ .*

Пусть  $f \in \mathcal{M}_L$ . Умножая ряд (20) скалярно слева на  $Lf$  и учитывая, что  $Lf \in \mathcal{L}_2(G)$ , получаем формулу для интеграла энергии

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(f, X_k)} (Lf, X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, LX_k) \overline{(f, X_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f, \lambda_k X_k) \overline{(f, X_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(f, X_k)|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь установим следующий вариационный принцип (ср. § 4.4, п. 5):

$$\lambda_k = \inf_{f \in \mathcal{M}_L} \left\{ \frac{(Lf, f)}{\|f\|^2} : (f, X_i) = 0, i = 1, \dots, k-1 \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

причем нижняя грань в (22) достигается на любой собственной функции, соответствующей собственному значению  $\lambda_k$ .

Действительно, пользуясь формулой (21) для квадратичной формулы  $(Lf, f)$  и учитывая неравенства (18)  $\lambda_i \geq \lambda_k \geq 0$ ,  $i \geq k$ , при всех  $f \in \mathcal{M}_L$  таких, что  $(f, X_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , получаем

$$(Lf, f) = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_i |(f, X_i)|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} |(f, X_i)|^2.$$

Но в силу теоремы 2 справедливо равенство Парсеваля (см. § 1.1, п. 6)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, X_i)|^2 = \sum_{i=k}^{\infty} |(f, X_i)|^2 = \|f\|^2,$$

и потому

$$\lambda_k \leq \frac{(Lf, f)}{\|f\|^2}.$$

С другой стороны, при  $f = X_k$  в силу (19) имеем

$$\frac{(LX_k, X_k)}{\|X_k\|^2} = \lambda_k, \quad (X_k, X_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Этим установлена справедливость вариационного принципа (22).

Полагая в (22)  $k = 1$ , получаем, в частности,

$$\lambda_1 = \inf_{f \in \mathcal{M}_L} \frac{(Lf, f)}{\|f\|^2}.$$

Применяя формулу (21) к функциям

$$\eta_p = f - \sum_{i=1}^p (f, X_i) X_i, \quad p = 1, 2, \dots,$$

из  $\mathcal{M}_L$  и учитывая, что

$$(\eta_p, X_k) = \left( f - \sum_{i=1}^p (f, X_i) X_i, X_k \right) = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, p, \\ (f, X_k), & k = p+1, \dots, \end{cases}$$

получаем

$$(L\eta_p, \eta_p) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \lambda_k |(f, X_k)|^2.$$

Отсюда и из сходимости ряда (21) следует, что

$$(L\eta_p, \eta_p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Применяя неравенство (14) к функциям  $\eta_p$  и учитывая (23), получаем при  $p \rightarrow \infty$

$$\| |\operatorname{grad} \eta_p| \|^2 = \left\| \left| \operatorname{grad} f - \sum_{i=1}^p (f, X_i) \operatorname{grad} X_i \right| \right\|^2 \leq \frac{1}{p_0} (L\eta_p, \eta_p) \rightarrow 0.$$

Полученное соотношение означает, что

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) \operatorname{grad} X_k(x), \quad (24)$$

причем ряд (24) сходится к  $\operatorname{grad} f$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ .

Итак, установлена следующая

**ТЕОРЕМА 3.** *Если  $f \in \mathcal{M}_L$ , то ряд (20) можно дифференцировать почленно по  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , один раз, и полученные ряды (24) будут сходиться к  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ .*

**5. Физический смысл собственных значений и собственных функций.** При  $p = 1$  и  $\beta = 0$  задача на собственные значения (1), (2) принимает вид

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u, \quad u|_S = 0. \quad (25)$$

Собственные значения задачи (25) определяют уровни энергии квантовой частицы, движущейся во внешнем силовом поле с потенциалом

$$V(x) = \begin{cases} q(x), & x \in \overline{G}, \\ +\infty, & x \in G_1. \end{cases}$$

Соответствующие собственные функции являются волновыми функциями стационарного оператора Шрёдингера (см. § 1.2, п. 6).

Как будет показано в § 5.4, собственные значения оператора  $L$  определяют собственные частоты колебаний ограниченных областей (объемов, мембран, струн, стержней и т. д.), а соответствующие собственные функции — амплитуды гармонических колебаний.

## § 5.2. Задача Штурма–Лиувилля

При  $n = 1$  задача на собственные значения (1), (2) из § 5.1 называется *задачей Штурма–Лиувилля*,

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0. \quad (2)$$

В соответствии с условиями (3) из § 5.1 считаем

$$p \in C^1([0, l]), \quad q \in C([0, l]), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0,$$

$$h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0, \quad h_1 + h_2 > 0, \quad H_1 + H_2 > 0.$$

Напомним, что область определения  $\mathcal{M}_L$  оператора  $L$  состоит из функций  $u(x)$  класса  $C^2(0, l) \cap C^1([0, l])$ ,  $u'' \in L_2(0, l)$ , удовлетворяющих граничным условиям (2).

Выражение (13) из § 5.1 для квадратичной формы  $(Lf, f)$ ,  $f \in \mathcal{M}_L$ , принимает следующий вид:

$$(Lf, f) = \int_0^l (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(l)|f(l)|^2$$

(последние слагаемые выпадают при  $h_2 = 0$  или  $H_2 = 0$  соответственно).

**1. Функция Грина.** Предположим, что  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ ; это значит в силу леммы из § 5.1, п. 4, что либо  $q \not\equiv 0$ , либо  $h_1 \neq 0$ , либо  $H_1 \neq 0$ .

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad u \in \mathcal{M}_L, \quad (3)$$

где  $f \in C(0, 1) \cap L_2(0, l)$ . Так как  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ , то решение краевой задачи (3) в классе  $\mathcal{M}_L$  единствено (см. § 1.1, п. 9). Построим решение этой задачи.

Пусть  $v_1$  и  $v_2$  — ненулевые (вещественные) решения однородного уравнения  $Lv = 0$ , удовлетворяющие условиям

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \quad H_1 v_2(l) + H_2 v_2'(l) = 0. \quad (4)$$

Из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений следует (см. [5]), что такие решения всегда существуют и принадлежат классу  $C^2([0, l])$ . Решения  $v_1$  и  $v_2$  линейно независимы. Действительно, в противном случае  $v_1(x) = cv_2(x)$ , и, следовательно, в силу (4)

решение  $v_1$  удовлетворяет и второму граничному условию (2). Это значит, что  $v_1$  является собственной функцией оператора  $L$ , соответствующей собственному значению  $\lambda = 0$  вопреки предположению. Поэтому определитель Вронского

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v'_1(x) & v'_2(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, l].$$

Кроме того, имеет место  *тождество Остроградского–Лиувилля* (см. [5])

$$p(x)w(x) = p(0)w(0), \quad x \in [0, l]. \quad (5)$$

Будем искать решение задачи (3) методом вариации произвольных постоянных,

$$u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x). \quad (6)$$

В соответствии с этим методом функции  $C'_1(x)$  и  $C'_2(x)$  должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$C'_1v_1 + C'_2v_2 = 0, \quad C'_1v'_1 + C'_2v'_2 = -\frac{f}{p} \quad (7)$$

с определителем  $w(x) \neq 0$ . Решая эту систему и пользуясь тождеством (5), получим

$$\begin{aligned} C'_1 &= \frac{1}{w} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -f/p & v'_2 \end{vmatrix} = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \\ C'_2 &= \frac{1}{w} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v'_1 & -f/p \end{vmatrix} = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (2), положим  $C_2(0) = 0$ ,  $C_1(l) = 0$ ; тогда в силу (4) и (7)

$$\begin{aligned} h_1u(0) - h_2u'(0) &= h_1[C_1(0)v_1(0) + C_2(0)v_2(0)] - \\ &- h_2[C_1(0)v'_1(0) + C'_1(0)v_1(0) + C_2(0)v'_2(0) + C'_2(0)v_2(0)] = \\ &= C_1(0)[h_1v_1(0) - h_2v'_1(0)] + C_2(0)[h_1v_2(0) - h_2v'_2(0)] = 0, \end{aligned}$$

и аналогично для  $x = l$ . Интегрируя (8) при условиях  $C_1(l) = C_2(0) = 0$ , имеем

$$C_1(x) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \int_x^l f(y)v_2(y) dy,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y)v_1(y) dy.$$

Подставляя полученные выражения в (6), находим искомое решение задачи (3) в виде

$$u(x) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \left[ v_2(x) \int_0^x f(y)v_1(y) dy + v_1(x) \int_x^l f(y)v_2(y) dy \right],$$

или

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x,y) f(y) dy, \quad (9)$$

где

$$\mathcal{G}(x,y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 \leq x \leq y, \\ v_2(x)v_1(y), & y \leq x \leq l. \end{cases} \quad (10)$$

Функция  $\mathcal{G}(x,y)$  называется *функцией Грина* краевой задачи (3) или оператора  $L$ .

Итак, доказан следующий результат.

**ЛЕММА.** *Если  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ , то решение краевой задачи (3) существует, единственно и выражается формулой (9).*

Перечислим свойства функции Грина  $\mathcal{G}(x,y)$ , вытекающие непосредственно из формулы (10).

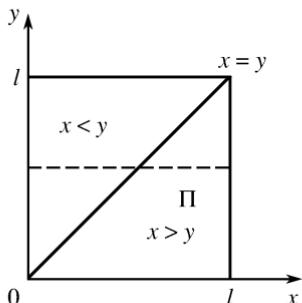


Рис. 51

1)  $\mathcal{G}$  вещественна и непрерывна в замкнутом квадрате  $\bar{\Pi} = [0,l] \times [0,l]$  и принадлежит классу  $C^2$  в замкнутых треугольниках (рис. 51)

$$\{0 \leq x \leq y \leq l\}, \quad \{0 \leq y \leq x \leq l\}.$$

2)  $\mathcal{G}$  симметрична:

$$\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x), \quad (x,y) \in \bar{\Pi}.$$

3) На диагонали  $x = y$  скачок производной  $\mathcal{G}_x$  равен  $-1/p(y)$ , т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0,y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y-0,y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0,l).$$

4) Вне диагонали  $x = y$   $\mathcal{G}$  удовлетворяет однородному уравнению

$$L_x \mathcal{G}(x, y) = 0, \quad x \neq y, \quad (x, y) \in \bar{\Pi}.$$

5) На боковых сторонах квадрата  $\Pi$   $\mathcal{G}$  удовлетворяет граничным условиям (2):

$$h_1 \mathcal{G}(0, y) - h_2 \frac{\partial \mathcal{G}(0, y)}{\partial x} = H_1 \mathcal{G}(l, y) + H_2 \frac{\partial \mathcal{G}(l, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in [0, l].$$

ПРИМЕР. Функция Грина краевой задачи

$$-u'' = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leq x \leq y, \\ (1-x)y, & y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФУНКЦИИ ГРИНА. Из свойств 1), 3) и 4) вытекает, что при каждом  $y \in (0, l)$  функция Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  удовлетворяет в обобщенном смысле (см. § 3.1, п. 1) уравнению

$$L_x \mathcal{G}(x, y) = \delta(x - y), \quad x \in (0, l).$$

Поэтому  $\mathcal{G}(x, y)$  есть возмущение, порождаемое точечным источником интенсивности 1, находящимся в точке  $y$ . Таким образом, функция Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  является естественным обобщением фундаментального решения (см. § 3.2, п. 2) на уравнения с переменными коэффициентами при наличии граничных условий (описывающих процессы в неоднородных ограниченных средах).

**2. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению.** Покажем, что задача Штурма–Лиувилля сводится к интегральному уравнению Фредгольма с вещественным, симметричным и непрерывным ядром  $\mathcal{G}(x, y)$ .

ТЕОРЕМА. *Краевая задача*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in \mathcal{M}_L, \quad f \in \mathcal{C}(0, l) \cap \mathcal{L}_2(0, l), \quad (11)$$

при условии, что  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ , эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^l \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in \mathcal{C}([0, l]), \quad (12)$$

где  $\mathcal{G}(x, y)$  — функция Грина оператора  $L$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $u(x)$  — решение краевой задачи (11), то, применяя лемму из п. 1 с заменой  $f$  на  $\lambda u + f$ , получим

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy,$$

т. е.  $u(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению (12).

Обратно, пусть функция  $u_0(x) \in \mathcal{C}([0, l])$  удовлетворяет интегральному уравнению (12). Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = \lambda u_0 + f, \quad u \in \mathcal{M}_L.$$

По лемме из п. 1 единственное решение этой задачи дается формулой

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x, y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy = u_0(x),$$

откуда следует, что  $u$  принадлежит  $\mathcal{M}_L$  и удовлетворяет уравнению

$$Lu_0 = \lambda u_0 + f,$$

т. е.  $u_0$  есть решение краевой задачи (11). Теорема доказана.

При  $f = 0$  краевая задача (11) превращается в задачу Штурма–Лиувилля, и, следовательно, задача Штурма–Лиувилля (1), (2) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x, y)u(y) dy, \quad u \in \mathcal{C}([0, l]), \quad (13)$$

при условии, что  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ .

Теперь освободимся от предположения, что  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L$ . Заметим, что, в силу леммы из § 5.1, п. 4  $\mu = 0$  не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q+1)u = \mu u, \quad (14)$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = H_1 u(l) + h_2 u'(l) = 0. \quad (15)$$

Но  $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ , и поэтому задача (14), (15) эквивалентна задаче (1), (2) при  $\mu = \lambda + 1$ .

Следовательно, задача Штурма–Лиувилля (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^l \mathcal{G}_1(x, y)u(y) dy, \quad (16)$$

где  $\mathcal{G}_1(x, y)$  — функция Грина оператора  $L_1$ .

**3. Свойства собственных значений и собственных функций.** Таким образом, установлена эквивалентность задачи Штурма–Лиувилля (1), (2) задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения (16) с симметричным (и, стало быть, эрмитовым) непрерывным ядром  $\mathcal{G}_1(x, y)$ . При этом собственные значения  $\lambda$  задачи (1), (2) связаны с характеристическими числами  $\mu$  ядра  $\mathcal{G}(x, y)$  соотношением  $\mu = \lambda + 1$ , а соответствующие им собственные функции совпадают. Поэтому для задачи Штурма–Лиувилля справедливы все положения теории интегральных уравнений с симметричным непрерывным ядром, развитые в § 4.3 и 4.4. В частности, множество собственных значений  $\{\lambda_k\}$  этой задачи не пусто и не имеет конечных предельных точек; собственные значения вещественны и конечной кратности; собственные функции  $\{X_k\}$  можно выбрать вещественными и ортонормальными;  $X_k \in C^2([0, l])$ .

Но задача Штурма–Лиувилля имеет ряд специфических свойств. Отметим некоторые из них.

1) Собственные значения неотрицательны.

Это утверждение доказано в § 5.1, п. 4.

2) Множество собственных значений счетно.

Действительно, если бы это множество было конечным  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ , то ядро  $\mathcal{G}_1(x, y)$  имело бы представление (см. § 4.4, п. 1)

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{X_k(x)X_k(y)}{\lambda_k + 1}. \quad (17)$$

Но  $X_k \in C^2([0, l])$ , и поэтому представление (17) противоречит свойству 3) функции Грина  $\mathcal{G}_1(x, y)$ . Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

3) Каждое собственное значение простое.

В самом деле, пусть  $X_1$  и  $X_2$  — собственные функции, соответствующие собственному значению  $\lambda_0$ . Это значит, что эти функции удовлетворяют уравнению (1) при  $\lambda = \lambda_0$  и граничным условиям (2). Из первого граничного условия (2)

$$h_1 X_1(0) - h_2 X'_1(0) = 0, \quad h_1 X_2(0) - h_2 X'_2(0) = 0$$

вытекает в силу предположения  $h_1 + h_2 > 0$ , что

$$\begin{vmatrix} X_1(0) & -X'_1(0) \\ X_2(0) & -X'_2(0) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1(0) & X'_1(0) \\ X_2(0) & X'_2(0) \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. определитель Вронского для решений  $X_1$  и  $X_2$  уравнения (1) при  $\lambda = \lambda_0$  в точке  $x = 0$  обращается в нуль. Поэтому эти решения линейно зависимы (см. [5]). Это и значит, что  $\lambda_0$  — простое собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (1), (2).

**ТЕОРЕМА** (В. А. Стеклов). *Всякая функция  $f$  из  $\mathcal{M}_L$  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям  $\{X_k\}$  задачи Штурма–Лиувилля:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k(x). \quad (18)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $f \in \mathcal{M}_L$ , то  $L_1 f = L f + f = h \in \mathcal{C}(0, l) \cap \mathcal{L}_2(0, l)$ . Но  $\mathcal{M}_{L_1} = \mathcal{M}_L$ , и потому  $f \in \mathcal{M}_{L_1}$ . Таким образом, функция  $f$  является решением краевой задачи

$$L_1 f = h, \quad f \in \mathcal{M}_{L_1},$$

причем по построению (см. п. 2)  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L_1$ . Обозначим через  $\mathcal{G}_1(x, y)$  функцию Грина оператора  $L_1$ . По лемме из п. 1 функция  $f$  выражается интегралом

$$f(x) = \int_0^l \mathcal{G}_1(x, y) h(y) dy,$$

т. е. истокообразно представляется через эрмитово непрерывное ядро  $\mathcal{G}_1(x, y)$ . По теореме Гильберта–Шмидта (см. § 4.4, п. 1) функция  $f$  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра  $\mathcal{G}_1(x, y)$ . Но собственные функции ядра  $\mathcal{G}_1(x, y)$  совпадают с собственными функциями оператора  $L_1$ , которые в свою очередь совпадают с собственными функциями  $\{X_k\}$  оператора  $L$ . Теорема доказана.

Таким образом, для задачи Штурма–Лиувилля верна теорема 1 из § 5.1, п. 4 и следствия из нее. В частности, система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля полна в  $\mathcal{L}_2(0, l)$ .

**4. Нахождение собственных значений и функций.** Изложим процесс вычисления собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1), (2). Пусть  $u_1(x; \lambda)$  и  $u_2(x; \lambda)$  — решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$u_1(0; \lambda) = 1, \quad u'_1(0; \lambda) = 0; \quad u_2(0; \lambda) = 0, \quad u'_2(0; \lambda) = 1.$$

Тогда функция

$$u(x; \lambda) = h_2 u_1(x; \lambda) + h_1 u_2(x; \lambda) \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению (1) и первому из граничных условий (2). Чтобы удовлетворить второму из граничных условий (2), необходимо положить

$$H_1 h_2 u_1(l; \lambda) + H_1 h_1 u_2(l; \lambda) + H_2 h_2 u'_1(l; \lambda) + H_2 h_1 u'_2(l; \lambda) = 0.$$

Корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  полученного трансцендентного уравнения и дадут все собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (1), (2). Соответствующие собственные функции  $X_k$  определяются по формуле (19) при  $\lambda = \lambda_k$ :

$$X_k(x) = u(x; \lambda_k) = h_2 u_1(x; \lambda_k) + h_1 u_2(x; \lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

**ПРИМЕР.** Вычислим собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля при  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $h_2 = H_2 = 0$ :

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(l) = 0. \quad (20)$$

Для этого выпишем общее решение дифференциального уравнения (20):

$$u(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x,$$

и подберем произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  и параметр  $\lambda$  так, чтобы удовлетворить граничным условиям (20) и условию нормировки  $\|u\| = 1$ . Условие  $u(0) = 0$  дает  $C_2 = 0$ , а условие  $u(l) = 0$  дает  $\sqrt{\lambda}l = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , так что

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad u(x) = C_1 \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Из условия нормировки

$$1 = \|u\|^2 = C_1^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} C_1^2$$

имеем  $C_1 = \sqrt{2/l}$ , и, следовательно,

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Из построения следует, что других собственных функций задача (20) не имеет. Система собственных функций (21) полна в  $L_2(0, l)$  (см. п. 3). Графики собственных функций  $X_k(x)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , изображены на рис. 52.

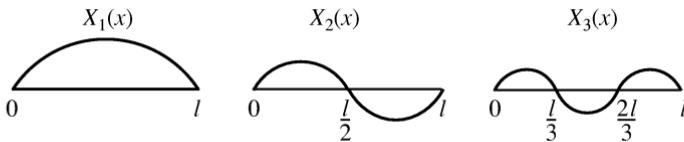


Рис. 52

**ЗАДАЧА.** Найти асимптотику при  $\lambda_k \rightarrow \infty$  собственных значений и собственных функций краевой задачи ( $\varkappa \neq 0$ )

$$-u'' + \varkappa \delta(x)u = \lambda u, \quad |x| < 1, \quad u(\pm 1) = 0, \quad u \in \mathcal{C}([-1, 1]). \quad (22)$$

**РЕШЕНИЕ.** Положим  $u(0) = c$  и перепишем уравнение (22) в виде

$$-u'' + \varkappa c = \lambda u;$$

тогда его общее решение при  $\lambda \neq 0$  запишется в виде

$$u(x) = a \cos \sqrt{\lambda}x + b \sin \sqrt{\lambda}x + \frac{\varkappa c}{\lambda}.$$

Условие  $u(0) = c$  дает  $a = (1 - \varkappa/\lambda)c$ , а условие  $u(\pm 1) = 0$  принимает вид

$$\begin{cases} c \left[ \left(1 - \frac{\varkappa}{\lambda}\right) \cos \sqrt{\lambda} + \frac{\varkappa}{\lambda} \right] = 0, \\ b \sin \sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1)  $c = 0$ . В этом случае остается условие  $b \sin \sqrt{\lambda} = 0$ , условие  $u \neq 0$  дает  $b \neq 0$ , так что  $\sin \sqrt{\lambda} = 0$ , и мы получаем

$$\sqrt{\lambda_k} = \pi k, \quad u_k(x) = \sin \pi kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

2)  $c \neq 0$ . Здесь  $(1 - \varkappa/\lambda) \cos \sqrt{\lambda} + \varkappa/\lambda = 0$ , и мы получаем трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений  $\lambda_k$

$$\cos \sqrt{\lambda} = \frac{\varkappa}{\varkappa - \lambda}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

В общем случае  $\sin \sqrt{\lambda_k} \neq 0$ , так что  $b = 0$ . Далее, при  $k \rightarrow \infty$   $\lambda_k \rightarrow \infty$ , и уравнение (23) принимает асимптотический вид  $\cos \sqrt{\lambda_k} \approx 0$ , откуда  $\sqrt{\lambda_k} \approx \pi/2 + \pi k$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Поправка  $\eta_k = \sqrt{\lambda_k} - \pi/2 - \pi k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , и удовлетворяет уравнению

$$\sin \eta_k = \frac{(-1)^k \varkappa}{(\pi/2 + \pi k + \eta_k)^2 - \varkappa}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Последнее уравнение имеет асимптотическое решение

$$\eta_k \approx \frac{(-1)^k \varkappa}{\pi^2 k^2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

так что

$$\sqrt{\lambda_k} \approx \frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{(-1)^k \varkappa}{\pi^2 k^2}, \quad u_k \approx \cos \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{(-1)^k \varkappa}{\pi^2 k^2} \right) x \right], \quad k \rightarrow \infty.$$

### § 5.3. Гармонические функции

В этом параграфе изучаются основные свойства гармонических функций.

Вещественное значение функция  $u(x)$  класса  $C^2(G)$  называется *гармонической в области  $G$* , если она удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  в этой области. При  $n = 1$  гармонические функции сводятся к линейным функциям, и потому их теория интереса не представляет. Поэтому в дальнейшем будем считать  $n \geq 2$ .

Нетривиальным примером гармонической функции при  $x \neq 0$  является фундаментальное решение оператора Лапласа (см. § 3.2, п. 8)

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad n = 2;$$

$$\mathcal{E}_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \quad n \geq 3.$$

График функции  $\mathcal{E}_n(x)$  изображен на рис. 53.

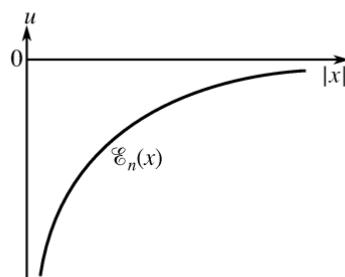


Рис. 53

**1. Формула Грина.** Пусть  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$  и  $u(x) = 0$ ,  $x \in G_1$ ; тогда при  $x \notin S$  справедлива следующая *формула Грина*:

$$\begin{aligned} u(x) = & -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}} dy + \\ & + \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \left[ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} - \right. \\ & \quad \left. - u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y, \quad n \geq 3, \\ u(x) = & -\frac{1}{2\pi} \int_G \Delta u(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} - u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad n = 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Другими словами, в области  $G$  функция  $u(x)$  представляется в виде суммы трех ньютоновых (логарифмических) потенциалов:

$$u(x) = V_n(x) + V_n^{(0)}(x) + V_n^{(1)}(x), \quad x \in G, \quad (2)$$

где (считаем для определенности  $n \geq 3$ )

- $V_n(x) = \mathcal{E}_n * \{\Delta u\} = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_G \frac{\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$   
— объемный потенциал с плотностью  $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \{\Delta u\}$ ;
- $V_n^{(0)}(x) = -\mathcal{E}_n * \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_S \right) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} dS_y$   
— потенциал простого слоя на  $S$  с поверхностной плотностью  $\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ ;
- $V_n^{(1)}(x) = -\mathcal{E}_n * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u \delta_S) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dS_y$   
— потенциал двойного слоя на  $S$  с поверхностной плотностью  $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n} u$ .

Докажем формулу Грина (1) при  $n = 3$ . Применяя формулу (27) из § 2.2 к функции  $u$  и учитывая, что  $[u_S] = -u|_S$ ,  $\left[ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_S = -\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S$ , получим

$$\Delta u = \{\Delta u\} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_S - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u \delta_S). \quad (3)$$

Так как функция  $u$  финитна, то ее свертка с фундаментальным решением  $\mathcal{E}_n$  оператора Лапласа существует (см. § 2.3, п. 4). Поэтому, применяя формулу (13) из § 3.1 и пользуясь равенством (3), для функции  $u$  получаем представление

$$\begin{aligned} u = \mathcal{E}_3 * \Delta u &= \mathcal{E}_3 * \{\Delta u\} - \mathcal{E}_3 * \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_S \right) - \mathcal{E}_3 * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (u \delta_S) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{|x|} * \{\Delta u\} + \frac{1}{|x|} * \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_S \right) + \frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (u \delta_S) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда, пользуясь определением ньютоновых потенциалов и формулами (34), (35) и (37) из § 2.3, получаем формулу Грина (1) при  $n = 3$ .

Случаи  $n = 2$  и  $n > 3$  рассматриваются аналогично.

Формула Грина (1) справедлива и для функций  $u$  класса  $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ , если в ней интеграл по области  $G$  понимать как несобственный (ср. § 5.1, п. 2). (Этот интеграл может сходиться не абсолютно.)

Для доказательства применим формулу Грина (1) ко всякой подобласти  $G' \Subset G$  с кусочно гладкой границей и перейдем к пределу при  $G' \rightarrow G$ . Пользуясь предположенной гладкостью функции  $u$ , убедимся в справедливости формулы Грина (1) и в этом случае.

Для гармонической в области  $G$  функции  $u$  класса  $C^1(\overline{G})$  формула Грина (1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_S \left[ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} - \right. \\ &\quad \left. - u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right] dS_y, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ \ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} - u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad n = 2.$$

Поверхностные потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  можно непрерывно дифференцировать вне  $S$  под знаком интеграла бесконечное число раз, и эти потенциалы — гармонические функции вне  $S$ . Отсюда и из формулы (5) вытекает, что всякая гармоническая функция бесконечно дифференцируема (и даже аналитическая; см. § 1.1, п. 1).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Формула Грина (5) выражает значение гармонической функции в области через ее значения и значения ее нормальной производной на границе этой области. Эта формула аналогична формуле Коши для аналитических функций. Легко заметить также аналогию между формулой Грина в форме (2) и формулой (17) из § 3.3 для волнового уравнения.

**2. Распространение формул Грина.** Пусть граница  $S$  области  $G$  — поверхность класса  $\mathcal{C}^1$  (см. § 1.1, п. 1) и функция  $u$  принадлежит  $\mathcal{C}^1(G)$ . Будем говорить, что функция  $u$  имеет *правильную нормальную производную*<sup>\*)</sup> на  $S$ , если равномерно по всем  $x \in S$  существует предел нормальной производной  $\frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_x}$  при  $x' \rightarrow x$ ,  $x' \in -\mathbf{n}_x$ ; этот предел обозначаем  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}$ , так что

$$\frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_x} \Rightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad x \in S, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in -\mathbf{n}_x.$$

Из этого определения следует, что если правильная нормальная производная существует, то она непрерывна на  $S$  и является обычной нормальной производной. Далее, равномерно по всем  $x \in S$  существует предел  $u(x')$  при  $x' \rightarrow x$ . Этот предел обозначим  $u(x)$ , так что  $u \in \mathcal{C}(S)$  и

$$u(x') \Rightarrow u(x), \quad x \in S, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in -\mathbf{n}_x.$$

Доопределенная таким образом функция  $u(x)$  будет непрерывной на  $G$ , т. е.  $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$ .

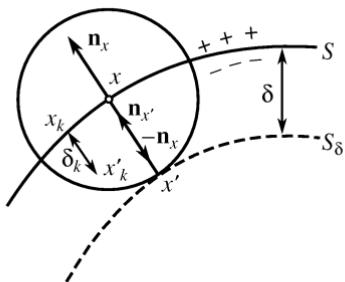


Рис. 54

Действительно, пусть  $x'_k \rightarrow x \in S$ ,  $x'_k \in G$ . Точка  $x'_k$  лежит на нормали  $-\mathbf{n}_{x_k}$  к некоторой точке  $x_k \in S$ , т. е.  $x'_k = x_k + \delta_k \mathbf{n}_{x_k}$  (рис. 54) и  $\delta_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Пользуясь непрерывностью функции  $u$  на  $S$  и равномерной ограниченностью

$$\left| \frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_{x_k}} \right| < C, \quad x' \in G, \quad k \rightarrow \infty,$$

получим

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x'_k)| &\leq |u(x) - u(x_k)| + |u(x_k) - u(x'_k)| \leq \\ &\leq |u(x) - u(x_k)| + C\delta_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Очевидно, для функции класса  $\mathcal{C}^1(\overline{G})$  правильная нормальная производная всегда существует.

<sup>\*)</sup> Этот термин введен А. М. Ляпуновым.

Пусть  $S$  — поверхность класса  $\mathcal{C}^2$ . В каждой точке  $x \in S$  отложим по внутренней нормали  $-\mathbf{n}_x$  отрезок постоянной длины  $\delta$ . Множество концов  $x'$  этих отрезков описывается уравнением

$$x' = x - \delta \mathbf{n}_x. \quad (6)$$

В силу леммы Гейне–Бореля (см. § 1.1, п. 1) при достаточно малом  $\delta$  это множество образует некоторую замкнутую поверхность класса  $\mathcal{C}^1$ , которую обозначим через  $S_\delta$  и назовем поверхностью, *параллельной поверхности*  $S$  (см. рис. 54).

Нормаль  $\mathbf{n}_{x'}$  в точке  $x' = x - \delta \mathbf{n}_x \in S_\delta$  направлена вдоль нормали  $\mathbf{n}_x$ ,  $x \in S$ , если  $S \in \mathcal{C}^2$ .

Действительно, пусть  $x$  — произвольная точка на  $S$  и  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$ , — произвольная кривая класса  $\mathcal{C}^1$  на  $S$ , проходящая через точку  $x = x(0)$ . Тогда  $x'(t) = x(t) - \delta \mathbf{n}_{x(t)}$ ,  $t \geq 0$ , — кривая класса  $\mathcal{C}^1$  на  $S_\delta$ , проходящая через точку  $x' = x'(0)$ . Дифференцируя по  $t$  очевидное тождество  $|x(t) - x'(t)|^2 = \delta^2$  (см. рис. 54), получим

$$\left( x - x', \frac{dx}{dt} \right) = \left( x - x', \frac{dx'}{dt} \right), \quad (7)$$

откуда, полагая  $t = 0$  и учитывая, что касательная к кривой в точке  $x$  ортогональна к нормали  $\mathbf{n}_x$ , выводим

$$\delta \left( \mathbf{n}_x, \frac{dx'(0)}{dt} \right) = \delta \left( \mathbf{n}_x, \frac{dx(0)}{dt} \right) = 0. \quad (8)$$

Это означает ввиду произвольности выбранной кривой, что нормаль  $\mathbf{n}_x$  ортогональна к касательной плоскости поверхности  $S_\delta$  в точке  $x'$ , т. е.  $\mathbf{n}_x = \mathbf{n}_{x'}$ , что и утверждалось.

**ЛЕММА.** Пусть граница  $S$  области  $G$  — поверхность класса  $\mathcal{C}^2$  и функция  $u \in \mathcal{C}^1(G)$  имеет правильную нормальную производную  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  на  $S$ . Тогда для любой  $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$  справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta} f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_{x'}} dS_{x'} = \int_S f(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} dS_x, \quad (9)$$

где  $S_\delta$  — поверхность, параллельная  $S$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как нормали  $\mathbf{n}_x$  и  $\mathbf{n}_{x'}$  в точках  $x \in S$  и  $x' = x - \delta \mathbf{n}_x \in S_\delta$  направлены одинаково, то

$$f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_{x'}} = f(x') \frac{\partial u(x')}{\partial \mathbf{n}_x} \Rightarrow f(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad (10)$$

$$x \in S, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in -\mathbf{n}_x,$$

в силу определения правильной нормальной производной и непрерывности функции  $f$  на  $\bar{G}$ . Из предельного соотношения (10) и вытекает равенство (9). Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что для поверхностей  $S$  класса  $C^2$  и для функций, имеющих правильную нормальную производную на  $S$ , остаются справедливыми следующие формулы Грина:

1) формула (5) из § 5.1, если  $u \in C^2(G)$ ,  $Lu \in L_2(G)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  существует и  $v \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ ;

2) формула (6) из § 5.1, если  $u, v \in C^2(G)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  и  $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$  существуют;

3) формула (1), если  $u \in C^2(G)$  и  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  существует.

Действительно, применим перечисленные формулы Грина к любой подобласти, ограниченной поверхностью  $S_\delta$ , параллельной  $S$ . Переходя в этих формулах к пределу при  $\delta \rightarrow 0$  и пользуясь предельным соотношением (9), убедимся в справедливости формул Грина при сформулированных предположениях.

**3. Теорема о среднем арифметическом.** Предварительно заметим, что из первой формулы Грина (7) из § 5.1 при  $v = 1$  вытекает следующее утверждение: если гармоническая в области  $G$  функция  $u \in C^1(\bar{G})$  (или если  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  существует на  $S$  и  $S \in C^2$ ), то

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \quad (11)$$

**ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ.** *Если функция  $u(x)$  гармоническая в шаре  $U_R$  и непрерывная в замыкании  $\bar{U}_R$ , то ее значение в центре шара равно среднему значению по сфере  $S_R$ :*

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(x) dS = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1} u(Rs) ds. \quad (12)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применяя формулу Грина (5) для  $x = 0$  к произвольному шару  $U_\rho$ ,  $\rho < R$ , и пользуясь формулой (11), при  $n \geq 3$  получим равенство (12):

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[ \frac{1}{\rho^{n-2}} \int_{S_\rho} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}} dS - \int_{S_\rho} u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|y|^{n-2}} dS \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{S_\rho} u(y) dS. \end{aligned}$$

Так как функция  $u(x)$  непрерывна на замкнутом шаре  $\bar{U}_R$ , то равенство (12) сохраняется и при  $\rho \rightarrow R$ . Случай  $n = 2$  рассматривается аналогично. Теорема доказана.

**4. Принцип максимума.** Пользуясь теоремой о среднем арифметическом, установим следующий *принцип максимума* для гармонических функций.

**ТЕОРЕМА.** *Если функция  $u(x) \neq \text{const}$  гармоническая в ограниченной области  $G$  и непрерывна на  $\bar{G}$ , то она не может принимать свои минимальное и максимальное значения внутри области  $G$ , т. е.*

$$\min_{\xi \in S} u(\xi) < u(x) < \max_{\xi \in S} u(\xi), \quad x \in G. \quad (13)$$

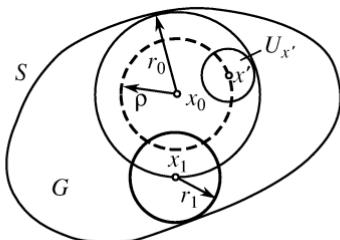


Рис. 55

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть, напротив, функция  $u(x)$  принимает свое максимальное значение  $M$  в некоторой точке  $x_0 \in G$ :

$$M = u(x_0) = \max_{x \in \bar{G}} u(x). \quad (14)$$

Так как  $x_0$  — внутренняя точка области  $G$ , то существует шар  $U(x_0; r_0)$  наибольшего радиуса  $r_0$ , содержащийся в  $G$  (рис. 55). Докажем, что

$$u(x) \equiv M, \quad x \in U(x_0; r_0). \quad (15)$$

Из (14) следует

$$u(x) \leq M = u(x_0), \quad x \in U(x_0; r_0). \quad (16)$$

Если бы в некоторой точке  $x' \in U(x_0; r_0)$  было  $u(x') < M$ , то по непрерывности неравенство  $u(x) < M$  имело бы место и в некоторой окрестности  $U_{x'}$  точки  $x'$ . Но тогда, применяя к сфере  $S_\rho$ , где  $\rho = |x' - x_0|$ , формулу среднего арифметического (12) и пользуясь неравенством (16) и неравенством  $u(x) < M$ ,  $x \in U_{x'}$ , получаем

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{S(x_0; \rho)} u(x) dS < \frac{M}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int_{S(x_0; \rho)} dS = M,$$

что противоречит (14). Итак, тождество (15) установлено.

Возьмем теперь произвольную точку  $x_1 \in G$ , лежащую на границе шара  $U(x_0; r_0)$  (см. рис. 55). По доказанному  $u(x_1) = M$ . Применяя предыдущие рассуждения к точке  $x_1$ , заключаем, что  $u(x) \equiv M$  в наибольшем шаре  $U(x_1; r_1) \subset \bar{G}$ , и т. д. В силу леммы Гейне–Бореля за

не более чем счетное число шагов таким путем исчерпывается вся область  $G$ , и, значит,  $u(x) \equiv M$ ,  $x \in G$ , вопреки предположению.

Полученное противоречие показывает, что первоначальное предположение неверно; поэтому функция  $u(x)$  не может принимать свое максимальное значение в области  $G$ . Отсюда, заменив  $u$  на  $-u$ , заключаем, что функция  $u(x)$  не может принимать свое минимальное значение в области  $G$ . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что гармоническая функция не может иметь внутри области ни локальных максимумов, ни локальных минимумов.

### 5. Следствия из принципа максимума.

а) Если функция  $u(x) \in \mathcal{C}(\overline{G})$  гармоническая в  $G$ , то

$$|u(x)| \leq \max_{\xi \in S} |u(\xi)|, \quad x \in \overline{G}. \quad (17)$$

В частности, если  $u|_S = 0$ , то  $u(x) \equiv 0$ ,  $x \in \overline{G}$ .

Это утверждение следует из неравенства (13):

$$\pm u(x) \leq \max_{\xi \in S} \pm u(\xi) \leq \max_{\xi \in S} |u(\xi)|, \quad x \in \overline{G}.$$

Будем говорить, что (обобщенная) функция  $u(x)$  *непрерывна на бесконечности* и *принимает там значение*  $a$ ,  $u(\infty) = a$ , если она непрерывна вне некоторого шара и  $u(x) \rightarrow a$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

б) Если функция  $u \in \mathcal{C}(\overline{G}_1)$  гармоническая в области  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$  и  $u(\infty) = 0$ , то

$$|u(x)| \leq \max_{\xi \in S} |u(\xi)|, \quad x \in \overline{G}_1. \quad (18)$$

В частности, если  $u|_S = 0$  и  $u(\infty) = 0$ , то

$$u(x) \equiv 0, \quad x \in G_1.$$

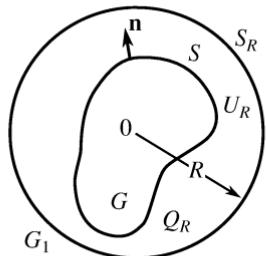
Рис. 56

Действительно, пусть шар  $U_R$  содержит  $\overline{G}$ . Тогда  $S \cup S_R$  есть граница области  $Q_R = G_1 \cap U_R$  (рис. 56). Применяя к этой области неравенство (17), получаем

$$|u(x)| \leq \max_{\xi \in S \cup S_R} |u(\xi)| \leq \max_{\xi \in S} |u(\xi)| + \max_{\xi \in S_R} |u(\xi)|, \quad x \in Q_R.$$

Так как  $u(\infty) = 0$ , то

$$\max_{\xi \in S_R} |u(\xi)| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$



Поэтому, переходя в полученном неравенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получим неравенство (18).

в) Если последовательность функций  $u_1, u_2, \dots$ , гармонических в области  $G$  и непрерывных на  $\overline{G}$ , равномерно сходится на границе  $S$ , то она равномерно сходится и на  $\overline{G}$ .

Это утверждение вытекает из неравенства (17):

$$|u_p(x) - u_q(x)| \leq \max_{\xi \in S} |u_p(\xi) - u_q(\xi)| \rightarrow 0, \quad x \in \overline{G}, \quad p, q \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для области  $G_1$  при условии, что  $u_k(\infty) \rightarrow 0$ .

### 6. Стирание особенностей гармонической функции.

Для гармонических функций справедлива следующая теорема о стирании особенностей, аналогичная соответствующей теореме для аналитических функций (см. [3]).

Пусть область  $G$  содержит точку 0.

**ТЕОРЕМА.** *Если функция  $u(x)$  гармоническая в области  $G \setminus \{0\}$  и удовлетворяет условию*

$$u(x) = o(|\mathcal{E}_n(x)|), \quad x \rightarrow 0, \quad (20)$$

где  $\mathcal{E}_n$  — фундаментальное решение оператора Лапласа, то она гармонически продолжается в точку  $x = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $U_R \Subset G$ . Введем функцию  $\tilde{u}(x)$ , равную  $u(x)$  в  $\overline{U}_R$  и нуль вне  $\overline{U}_R$ . Эта функция локально интегрируема, и в силу (3) из п. 1 функционал

$$\Delta \tilde{u} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_{S_R} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u \delta_{S_R}) \quad (21)$$

обращается в нуль на всех основных функциях, равных нулю в окрестности точки  $x = 0$ . Это значит, что обобщенная функция (21) либо равна нулю, либо ее носитель есть точка  $x = 0$ . Тогда по теореме из § 2.4, п. 4, эта обобщенная функция представляется в виде конечной комбинации производных от  $\delta(x)$ , т. е.

$$\Delta \tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_{S_R} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(u \delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha \partial^\alpha \delta. \quad (22)$$

Так как функция  $\tilde{u}$  финитна, то ее свертка с фундаментальным решением  $\mathcal{E}_n$  существует (см. § 2.3, п. 6). Поэтому, применяя формулу (13) из § 3.1, из (22) получаем представление

$$\begin{aligned}\tilde{u} = \mathcal{E}_n * \Delta \tilde{u} &= \mathcal{E}_n * \left( \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta_{S_R} \right) + \mathcal{E}_n * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (u \delta_{S_R}) + \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha (\mathcal{E}_n * \partial^\alpha \delta) = \\ &= V_n^{(0)}(x) - V_n^{(1)}(x) + \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}_n(x).\end{aligned}\quad (23)$$

Так как поверхностные потенциалы  $V_n^{(0)}$  и  $V_n^{(1)}$  — гармонические функции в шаре  $U_R$  (см. п. 1), то из (23) и из условия (20) вытекает, что все  $c_\alpha$  равны нулю, так что функция

$$u(x) = V_n^{(0)}(x) - V_n^{(1)}(x)$$

гармоническая в шаре  $U_R$ . Теорема доказана.

**7. Обобщенно-гармонические функции.** Вещественно-значная непрерывная функция  $u(x)$  называется *обобщенно-гармонической в области  $G$* , если она удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа, т. е.

$$(\Delta u, \varphi) = \int u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G). \quad (24)$$

Очевидно, всякая гармоническая функция является обобщенно-гармонической. Справедлива и обратная

**ТЕОРЕМА.** *Любая обобщенно-гармоническая функция  $u(x)$  в области  $G$  бесконечно дифференцируема и, следовательно, гармонична в этой области.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ввиду локального характера теоремы можно считать, что  $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$ . Продолжим функцию  $u$  нулем вне  $\overline{G}$ , и пусть  $\tilde{u}$  — продолженная функция. Применяя формулу (13) из § 3.1, получим представление

$$\tilde{u} = \Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n, \quad (25)$$

где  $\mathcal{E}_n$  — фундаментальное решение оператора Лапласа. Так как  $\Delta \tilde{u} = \Delta u = 0$ ,  $x \in G$ , и  $\Delta \tilde{u} = \Delta 0 = 0$ ,  $x \in G_1$ , то  $\text{spt } \Delta \tilde{u} \subset S$ . Поэтому по теореме из § 2.3, п. 6 для свертки  $\Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n$  имеет место представление

$$\begin{aligned}(\Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n, \varphi) &= (\Delta \tilde{u}(y) \cdot \mathcal{E}_n(\xi), \eta(y) \varphi(y + \xi)) = \\ &= \left( \Delta \tilde{u}(y), \eta(y) \int \mathcal{E}_n(\xi) \varphi(y + \xi) d\xi \right) = \\ &= \left( \Delta \tilde{u}(y), \eta(y) \int \mathcal{E}_n(x - y) \varphi(x) dx \right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\end{aligned}\quad (26)$$

где  $\eta$  — произвольная функция из  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , равная 1 в окрестности  $S$ .

Пусть  $G' \Subset G$ . Выберем в (26) вспомогательную функцию  $\eta$  такую, что  $\text{spt } \eta \cap \overline{G'} = \emptyset$  (рис. 57). Поскольку фундаментальное решение  $\mathcal{E}_n(x-y)$  — бесконечно дифференцируемая функция при  $x \neq y$ , то при выбранной  $\eta$  и всех  $\varphi \in \mathcal{D}(G')$

$$\eta(y)\mathcal{E}_n(x-y)\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Применяя теперь к правой части равенств (26) формулы (10) из § 2.3, получаем

$$(\Delta \tilde{u} * \mathcal{E}_n, \varphi) = \int \varphi(x)(\Delta \tilde{u}(y), \eta(y)\mathcal{E}_n(x-y)) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G'),$$

откуда в силу (25) следует равенство

$$u(x) = (\Delta \tilde{u}(y), \eta(y)\mathcal{E}_n(x-y)), \quad x \in G'.$$

В силу этого представления функция  $u$  принадлежит  $\mathcal{C}^\infty(G')$ . Отсюда ввиду произвольности области  $G' \Subset G$  вытекает, что  $u \in \mathcal{C}^\infty(G)$ . Поэтому функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $G$  в классическом смысле (см. § 1.4, п. 10), т. е. является гармонической в  $G$ . Теорема доказана.

**8. Дальнейшие свойства гармонических функций.** Установим два следствия, вытекающих из установленной в п. 7 эквивалентности понятий обычной гармоничности и обобщенной гармоничности.

а) Если последовательность  $u_1, u_2, \dots$  гармонических в области  $G$  функций слабо (в частности, равномерно на каждом компакте  $K \subset G$  или монотонно) сходится к функции  $u \in \mathcal{C}(G)$ , т. е.

$$\int u_k(x)\varphi(x) dx \rightarrow \int u(x)\varphi(x) dx, \quad k \rightarrow \infty, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G), \quad (27)$$

то  $u$  — гармоническая функция в  $G$ .

Действительно, каждая функция последовательности  $\{u_k\}$  удовлетворяет интегральному соотношению (24). Но тогда в силу (27) и предельная функция  $u(x)$  из  $\mathcal{C}(G)$  также будет удовлетворять равенству (24), т. е. является обобщенно-гармонической и, следовательно, гармонической функцией в области  $G$ .

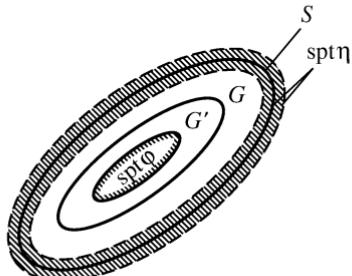


Рис. 57

б) Для того чтобы функция  $u \in (G)$  была гармоничной в области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой точки  $x_0 \in G$  существовали ее окрестность  $U_{x_0} \subset G$  и число  $r_0 = r_0(x_0) > 0$  такие, что при всех  $r < r_0$  выполняется условие среднего арифметического

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r} u(x-y) dS_y, \quad x \in U_{x_0}. \quad (28)$$

Необходимость приведенных условий уже доказана в п. 3. Докажем их достаточность. Без ограничения общности можно считать, что  $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$ . Пусть  $\tilde{u}$  — продолженная нулем вне  $\overline{G}$  функция  $u$ . Выберем произвольную точку  $x_0 \in G$  и составим свертку:

$$f_r(x) = \left( \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \delta_{S_r} - \frac{1}{r^2} \delta \right) * \tilde{u}, \quad r < r_0, \quad (29)$$

где  $\delta_{S_r}$  — простой слой на сфере  $S_r$  (см. § 2.1, п. 6). Используя формулу (37) из § 2.3, перепишем свертку (29) в виде

$$f_r(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n+1}} \int_{S_r} \tilde{u}(x-y) dS_y - \frac{\tilde{u}(x)}{r^2}, \quad r < r_0.$$

Отсюда в силу (28) следует  $f_r(x) = 0$  при всех  $x \in U_{x_0}$  и  $r < r_0$ . С другой стороны, пользуясь предельным соотношением (41) из § 2.2 и непрерывностью свертки (см. § 2.3, п. 4), из (29) получаем

$$f_r(x) \rightarrow \frac{1}{2n} \Delta \delta * \tilde{u} = \frac{1}{2n} \Delta \tilde{u} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad r \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$(\Delta \tilde{u}, \varphi) = (\Delta u, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(U_{x_0}),$$

так что функция  $u(x)$  обобщенно-гармоническая и, значит, гармоническая в  $U_{x_0}$  (см. п. 7). Ввиду произвольности окрестности  $U_{x_0} \subset G$ , функция  $u(x)$  гармоническая в  $G$ .

**9. Аналог теоремы Лиувилля.** Для гармонических функций во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$  справедлива следующая теорема, аналогичная теореме Лиувилля для аналитических функций (см. [3]).

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u(x) \in S'$  удовлетворяет уравнению Лапласа во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ , то  $u(x)$  — полином.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применяя к равенству  $\Delta u = 0$  преобразование Фурье (см. § 2.5, п. 3, б)), получим  $-|\xi|^2 F[u](\xi) = 0$ , откуда вытекает, что  $F[u] = 0$  при  $\xi \neq 0$ , т. е. либо  $F[u] = 0$ , либо носитель  $F[u]$

есть точка  $x = 0$ . По теореме из § 2.4, п. 4  $F[u]$  представляет в виде

$$F[u](\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha \partial^\alpha \delta(\xi),$$

откуда следует, что  $u(x)$  — полином. Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ.** Если функция  $u(x)$  гармоническая в  $\mathbb{R}^n$  и удовлетворяет неравенству

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \geq 0,$$

то  $u(x)$  — (гармонический) полином степени  $\leq m$ .

**10. Поведение гармонической функции на бесконечности.** Пусть точка  $x$  лежит вне шара  $U_R$ .

Совершим преобразование инверсии

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad x = \frac{R^2}{|x^*|^2} x^*. \quad (30)$$

Точки  $x$  и  $x^*$  называются *симметричными относительно сферы*  $S_R$ . Симметричные точки удовлетворяют соотношению

$$|x| |x^*| = R^2, \quad (31)$$

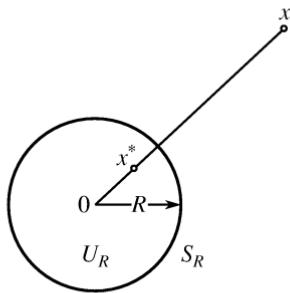


Рис. 58

и поэтому преобразование инверсии взаимно однозначно преобразует внешность шара  $U_R$  на  $\overline{U}_R \setminus \{0\}$  (рис. 58).

Пусть функция  $u(x)$  гармоническая вне шара  $U_R$ . Функция

$$u^*(x^*) = \left( \frac{R}{|x^*|} \right)^{n-2} u \left( \frac{R^2}{|x^*|^2} x^* \right) \quad (32)$$

называется *преобразованием Кельвина* функции  $u(x)$ .

Докажем, что при преобразовании Кельвина гармоничность сохраняется, т. е. функция  $u^*(x^*)$  гармонична в  $U_R \setminus \{0\}$ .

Докажем это для  $n = 3$  (для  $n \neq 3$  доказательство аналогично). Для этого перейдем к сферическим координатам (см. § 1.3, п. 2). Пусть  $x = (r, \theta, \varphi)$  и  $u(x) = \tilde{u}(r, \theta, \varphi)$ . Тогда в силу (30) и (31)  $x^* = (\rho, \theta, \varphi)$ ,  $\rho = R^2/r$ , и в силу (32)

$$u^*(x^*) = \tilde{u}^*(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{\rho} \tilde{u} \left( \frac{R^2}{\rho}, \theta, \varphi \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta u^*(x^*) &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}^*}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{r^5}{R^5} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} \right] = \\ &= \frac{r^5}{R^5} \Delta u(x),\end{aligned}$$

откуда и следует требуемое утверждение.

**ТЕОРЕМА.** Пусть функция  $u(x)$  гармоническая вне шара  $\bar{U}_R$  и при  $x \rightarrow \infty$   $u(x) = o(1)$  ( $n \geq 3$ ),  $u(x) = O(1)$  ( $n = 2$ ). Тогда

$$\partial^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-2+|\alpha|}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (33)$$

если  $n \geq 3$ . Если же  $n = 2$ , то

$$\lim u(x) = a, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (34)$$

$$\partial^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (|\alpha| \geq 1). \quad (35)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Совершая преобразование Кельвина (32), получим функцию  $u^*(x^*)$ , гармоническую в  $U_R \setminus \{0\}$  и удовлетворяющую при  $|x^*| \rightarrow 0$  условию

$$u^*(x^*) = \frac{1}{|x^*|^{n-2}} \begin{cases} o(1), & \text{если } n \geq 3, \\ O(1), & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

т. е. в обоих случаях

$$u^*(x^*) = o(|\mathcal{E}_n(x^*)|), \quad |x^*| \rightarrow 0.$$

По теореме о стирании особенностей гармонической функции (см. п. 6) заключаем, что функция  $u^*(x^*)$  гармоническая в шаре  $U_R$ . Совершая обратное преобразование Кельвина, для функции  $u(x)$  получим представление

$$u(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} u^*\left(\frac{R^2}{|x|^2} x\right),$$

из которого и вытекают результаты (33)–(35). Теорема доказана.

Аналогично для  $n = 2$  доказывается (ср. п. 5): если  $u(x)$  — гармоническая в области  $G_1$  функция, непрерывная на  $\overline{G}_1$ , и  $u(x) = O(1)$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ , то

$$|u(x)| \leq \max_{\xi \in S} |u(\xi)|, \quad x \in \overline{G}_1. \quad (36)$$

## 11. Упражнения.

а) Пользуясь теоремой о среднем арифметическом (см. п. 3), доказать следующую модификацию этой теоремы: если функция  $u(x)$  гармоническая в шаре  $U_R$  и непрерывна на  $\overline{U}_R$ , то

$$u(0) = \frac{n}{\sigma_n R^n} \int_{U_R} u(x) dx.$$

б) Пользуясь а), доказать теорему Лиувилля: если функция  $u(x)$  гармоническая в  $\mathbb{R}^n$  и ограничена сверху или снизу, то  $u(x) \equiv \text{const}$ .

в) Доказать следующий аналог *принципа симметрии Римана–Шварца*: пусть граница области  $G$  содержит открытое множество  $\Sigma$ , лежащее в плоскости  $x_n = 0$ , функция  $u(x)$  гармоническая в  $G$ , непрерывная в  $G \cup \Sigma$  и обращается в нуль на  $\Sigma$ ; тогда нечетное продолжение функции  $u(x)$  в область  $\tilde{G}$ , симметричную к  $G$  относительно плоскости  $x_n = 0$ , есть гармоническая функция в области  $G \cup \Sigma \cup \tilde{G}$  (рис. 59).

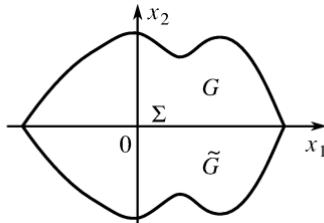


Рис. 59

г) Доказать теорему: если  $u$  — линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{D}(G)$  (см. § 2.1, п. 4) и удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $G$ , то  $u$  — гармоническая функция в  $G$ .

д) Пользуясь г), доказать: если обобщенная функция  $u$  удовлетворяет условию Коши–Римана  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$  в области  $G \subset \mathbb{R}^2$ , то она аналитична в  $G$  (см. [3]).

е) Пользуясь методом п. 9, доказать теорему Лиувилля для аналитических функций.

ж) Доказать формулу Грина (5) для функций, гармонических в  $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ , имеющих правильную нормальную производную на  $S \in \mathcal{C}^2$  и  $u(\infty) = 0$ .

## § 5.4. Метод Фурье для задачи на собственные значения

Для определения собственных значений и собственных функций многомерных эллиптических операторов, допускающих разделение переменных, применяется *метод Фурье*.

**1. Общая схема метода.** Разобьем независимые переменные на две группы:  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , и пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — область изменения  $x$  и  $D \subset \mathbb{R}^m$  — область изменения  $y$ . Обозначим через  $S$  и  $\Gamma$  границы областей  $G$  и  $D$  соответственно. Тогда  $(S \times \overline{D}) \cup \cup (\overline{G} \times \Gamma)$  — граница области  $G \times D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ .

В области  $G \times D$  рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения для уравнения эллиптического типа:

$$Lu + Mu = \lambda u, \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S \times \overline{D}} = 0, \quad \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\overline{G} \times \Gamma} = 0, \quad (2)$$

где  $L$  и  $M$  — эллиптические операторы, не зависящие от  $y$  и  $x$  соответственно; функции  $\alpha, \beta$  не зависят от  $y$ , а функции  $\gamma, \delta$  — от  $x$ .

Будем искать собственные функции задачи (1), (2) в виде произведения

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3)$$

Подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$Y(y)LX(x) + X(x)MY(y) = \lambda X(x)Y(y),$$

откуда

$$\frac{LX(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{MY(y)}{Y(y)}. \quad (4)$$

Левая часть равенства (4) не зависит от  $y$ , а правая — от  $x$ . Следовательно, эти выражения не зависят ни от  $x$ , ни от  $y$ , т.е. равны некоторой постоянной  $\mu$ . Положив  $\nu = \lambda - \mu$ , получим два уравнения:

$$LX = \mu X, \quad (5)$$

$$MY = \nu Y. \quad (6)$$

Таким образом, уравнение (1) расщепилось на два уравнения, (5) и (6), или, как говорят, *переменные разделились*; при этом дополнительно появился неизвестный параметр  $\mu$ .

Для вывода граничных условий для функций  $X(x)$  и  $Y(y)$  подставим произведение  $X(x)Y(y)$  в граничные условия (2). В результате после сокращений получим

$$\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad (7)$$

$$\gamma Y + \delta \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

Итак, краевая задача (1), (2) расщепилась на две краевые задачи, (5)–(7) и (6)–(8), с меньшим числом независимых переменных. Обозначим через  $\mu_k$ ,  $X_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $\nu_j$ ,  $Y_j(y)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , все собственные значения и собственные функции операторов  $L$  и  $M$  соответственно. В силу (3)

$$\lambda_{kj} = \mu_k + \nu_j, \quad u_{kj}(x, y) = X_k(x)Y_j(y), \quad k, j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

суть собственные значения и собственные функции исходной краевой задачи (1), (2).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Пусть ортонормальные системы собственных функций  $\{X_k\}$  и  $\{Y_j\}$  полны в  $\mathcal{L}_2(G)$  и  $\mathcal{L}_2(D)$  соответственно (см. § 5.1, п. 4). Тогда по лемме из § 1.1, п. 7 система собственных функций  $\{X_k Y_j\}$  ортонормальна и полна в  $\mathcal{L}_2(G \times D)$ . В этом случае формулы (9) дают все собственные значения и собственные функции задачи (1), (2).

## 2. Примеры.

а) Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для прямоугольника  $\Pi = (0, l) \times (0, m)$  с границей  $L$  (рис. 60)

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u, \quad u|_L = 0. \quad (10)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье эта задача распадается на две одномерные краевые задачи:

$$-X'' = \mu X, \quad X(0) = X(l) = 0; \quad (11)$$

$$-Y'' = \nu Y, \quad Y(0) = Y(m) = 0. \quad (12)$$

Собственные значения и собственные функции этих краевых задач вычислены в § 5.2, п. 4:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$\nu_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2, \quad Y_j(y) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Из (13) и (14) в соответствии с формулами (9) получаем собственные значения и собственные функции задачи (10):

$$\lambda_{kj} = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right), \quad X_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Так как построенные ортонормальные системы собственных функций  $\{X_k\}$  и  $\{Y_j\}$  полны (см. § 5.2, п. 3), то в силу замечания из п. 1, других собственных значений и собственных функций за-

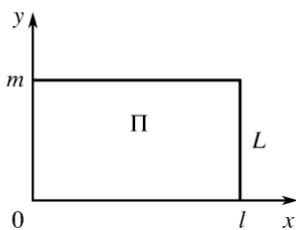


Рис. 60

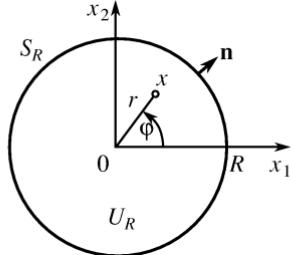


Рис. 61

дача (10) не имеет. Отметим, что собственные значения  $\lambda_{kj}$  могут повторяться, т. е.  $\lambda_{kj} = \lambda_{k_0j_0}$  при некотором наборе номеров  $(k, j)$ . Количество таких повторений, равное числу решений в натуральных числах диофанта уравнения

$$\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} = \frac{k_0^2}{l^2} + \frac{j_0^2}{m^2},$$

дает кратность собственного значения  $\lambda_{k_0j_0}$ . Например, при  $l = m = 1$  кратность  $\lambda = \lambda_{47} = \lambda_{74} = \lambda_{18} = \lambda_{81}$  равна 4 ( $4^2 + 7^2 = 7^2 + 4^2 = 1^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2 = 65$ ).

б) Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для круга  $U_R$  (рис. 61)

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{S_R} = 0. \quad (16)$$

Эту задачу будем решать в полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . В этих координатах задача (16) для функции  $\tilde{u}(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  принимает вид

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u}, \quad \tilde{u}(R, \varphi) = 0. \quad (17)$$

К граничному условию при  $r = R$  необходимо добавить граничное условие при  $r = 0$ . Это условие состоит в том, что функция  $\tilde{u}$  должна быть ограниченной в окрестности точки  $r = 0$ . Далее, функция  $\tilde{u}$ , очевидно, должна быть  $2\pi$ -периодической по переменной  $\varphi$ .

Применяя к задаче (17) метод Фурье, для функции  $\tilde{u} = \mathcal{R}(r)\Phi(\varphi)$  получаем две одномерные краевые задачи:

$$-\Phi'' = \mu \Phi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi); \quad (18)$$

$$r(r\mathcal{R}')' + (\lambda r^2 - \mu)\mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty, \quad \mathcal{R}(R) = 0. \quad (19)$$

Собственные значения и собственные функции задачи (18) легко вычисляются (это тригонометрические функции):

$$\mu_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\varphi}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Далее, уравнение (19) есть уравнение Бесселя (см. § Д.1). Ограниченнное в нуле решение  $\mathcal{R}(r)$  этого уравнения при  $\mu = k^2$  выражается функцией Бесселя  $J_k(\sqrt{\lambda}r)$ . Чтобы найти собственные значения  $\lambda$ , воспользуемся вторым граничным условием (19),  $J_k(\sqrt{\lambda}R) = 0$ , т. е.  $\sqrt{\lambda}r = \mu_j^{(k)}$ , где  $\mu_j^{(k)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — положительные корни функции Бесселя  $J_k(\mu)$ . Отсюда следует, что

$$\lambda_{kj} = \frac{[\mu_j^{(k)}]^2}{R^2}, \quad \mathcal{R}_{kj}(r) = c_{kj} J_k \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

— собственные значения и собственные функции краевой задачи (19) при  $\mu = k^2$ . Выбрав нормирующие множители  $c_{kj}$  так, чтобы

$$\frac{1}{c_{kj}} = \sqrt{\int_0^R J_k^2 \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) r dr} = \frac{R}{\sqrt{2}} \left| J'_k \left( \mu_j^{(k)} \right) \right|, \quad (22)$$

получим ортонормальную и полную систему  $\{\mathcal{R}_{kj}\}$  в  $\mathcal{L}_2[(0, R); r]$  (см. § Д.1, п. 7).

Из (20), (21) и (22) получаем, что

$$\lambda_{kj} = \frac{[\mu_j^{(k)}]^2}{R^2}, \quad X_{kj}(x) = \frac{J_k(\mu_j^{(k)} r/R) e^{ik\varphi}}{\sqrt{\pi} R |J'_k(\mu_j^{(k)})|}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

суть собственные значения и собственные функции задачи (17), а значит, и задачи (16).

По лемме из § 1.1, п. 7 система собственных функций  $\{X_{kj}\}$  ортонормальна и полна в  $\mathcal{L}_2(U_R)$ , и поэтому других собственных значений и собственных функций задача (16) не имеет.

в) Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для трехмерного шара  $U_R$

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{S_R} = 0. \quad (24)$$

Эту задачу будем решать в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . В этих координатах задача (24) для функции  $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$  принимает вид (см. § 1.3, п. 2)

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u}, \quad (25)$$

$$|\tilde{u}(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad \tilde{u}(R, \theta, \varphi) = 0, \quad \tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \tilde{u}(r, \theta, \varphi + 2\pi). \quad (26)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье собственные функции задачи (25), (26) ищем в виде произведения  $\mathcal{R}(r)Y(\theta, \varphi)$ . Разделяя переменные, для функций  $Y$  и  $\mathcal{R}$  получим краевые задачи

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = 0, \quad Y \in \mathcal{C}^\infty(S_1), \quad (27)$$

$$(r^2 \mathcal{R}')' + (\lambda r^2 - \mu) \mathcal{R} = 0, \quad |\mathcal{R}(0)| < \infty, \quad \mathcal{R}(R) = 0. \quad (28)$$

При  $\mu = l(l+1)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , задача (27) имеет решения, и этими решениями являются сферические функции  $Y_l^m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$  (см.

§ Д.1, п. 6). При  $\mu = l(l+1)$  уравнение (28) для функции  $Q(r) = \sqrt{r}\mathcal{R}(r)$  превращается в уравнение Бесселя (см. § Д.1, п. 1)

$$r^2 Q'' + rQ' + \left[ \lambda r^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Q = 0.$$

В результате ограниченным в нуле решением уравнения (28) является функция

$$\mathcal{R}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(\sqrt{\lambda}r). \quad (29)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию  $\mathcal{R}(R) = 0$ , положим  $\sqrt{\lambda}R = \mu_j^{(l+1/2)}$ , где  $\mu_j^{(l+1/2)}$  — положительные корни функции Бесселя  $J_{l+1/2}(\mu)$ . Итак,

$$\lambda_{lj} = \frac{\left[ \mu_j^{(l+1/2)} \right]^2}{R^2}, \quad X_{ljm}(x) = \frac{c_{ljm}}{\sqrt{r}} J_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \frac{r}{R} \right) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$l = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l, \quad (30)$$

— собственные значения и собственные функции краевой задачи (24).

Положим (см. формулы (35) из § Д.1 и (33) из § Д.2)

$$\frac{1}{c_{ljm}} = \sqrt{\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} J_{l+1/2}^2 \left( \mu_j^{(l+1/2)} \frac{r}{R} \right) [Y_l^m(\theta, \varphi)]^2 r dr d\theta d\varphi} =$$

$$= R \left| J'_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \right) \right| \sqrt{\pi \frac{1 + \delta_{0m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}. \quad (31)$$

Учитывая ортогональность и полноту функций Бесселя в  $\mathcal{L}_2[(0, R); r]$  (см. § Д.1, п. 7) и сферических функций в  $\mathcal{L}_2(S_1)$  (см. § Д.2, п. 6), с помощью леммы из § 1.1, п. 7 убеждаемся, что система собственных функций (30) ортонормальна и полна в  $\mathcal{L}_2(U_R)$ . В частности, других собственных значений и собственных функций задача (24) не имеет.

Аналогичным образом рассматривается и краевая задача

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u|_{S_R} = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

### § 5.5. Ньютона потенциал

Этот параграф посвящен более детальному изучению свойств ньютона потенциала в трехмерном пространстве (см. § 2.3, п. 7). Этот потенциал определяется как свертка обобщенной функции  $\rho$  (плотности) с функцией  $|x|^{-1}$ :

$$V = \frac{1}{|x|} * \rho = -4\pi \mathcal{E}_3 * \rho. \quad (1)$$

Потенциал  $V$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho. \quad (2)$$

Основы классической теории потенциала заложены А. М. Ляпуновым в конце прошлого века.

**1. Объемный потенциал.** Если  $\rho$  — (абсолютно) интегрируемая функция на  $G$  и  $\rho(x) = 0$ ,  $x \in G_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ , то ньютона потенциал  $V$ , называемый *объемным потенциалом*, выражается интегралом

$$V(x) = \int_G \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy \quad (3)$$

и представляет собой локально интегрируемую функцию в  $\mathbb{R}^3$  (см. § 2.3, п. 7, б)).

Если  $\rho \in \mathcal{C}(\overline{G})$  и  $G$  — ограниченная область, то объемный потенциал  $V$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ , гармоничен в  $G_1$  и

$$V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Действительно, так как  $G$  — ограниченная область и  $\rho \in \mathcal{C}(\overline{G})$ ,

то по теореме из § 1.1, п. 4 интеграл (3) принадлежит  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$  и в силу формулы (3) из § 1.1 удовлетворяет приведенной оценке на бесконечности. При  $x \in G_1$  потенциал  $V(x)$  допускает непрерывное дифференцирование под знаком интеграла в (3) бесконечное число раз, так что  $V \in \mathcal{C}^\infty(G_1)$ . Отсюда и из уравнения (2) вытекает, что  $\Delta V = 0$ ,  $x \in G_1$ , т. е. потенциал  $V$  — гармоническая функция в области  $G_1$  (по лемме из § 2.1, п. 5).

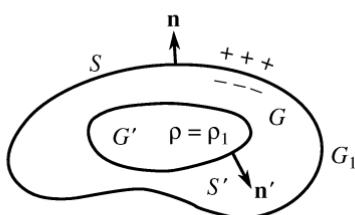


Рис. 62

Если  $\rho \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , то  $V \in \mathcal{C}^2(G)$ .

Для доказательства возьмем подобласть  $G' \Subset G$  с кусочно гладкой границей  $S'$  и внешней нормалью  $\mathbf{n}'$  (рис. 62). При этом потенциал  $V$  разобьется на сумму двух объемных потенциалов  $V_1$  и  $V_2$ ,  $V = V_1 + V_2$ , где

$$V_1(x) = \int_{G'} \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy, \quad V_2(x) = \int_{G \setminus G'} \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy.$$

По доказанному  $V_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $V_2 \in \mathcal{C}^\infty(G')$ . Дифференцируя потенциал  $V_1$  как свертку, получим (см. § 2.3, п. 3, в))

$$\operatorname{grad} V_1 = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{|x|} * \rho_1 \right) = \frac{1}{|x|} * \operatorname{grad} \rho_1, \quad \rho_1 = \rho \theta_{G'}. \quad (4)$$

Так как  $\rho_1 \in \mathcal{C}^1(\overline{G'})$ , то по формуле (22) из § 2.2

$$\operatorname{grad} \rho_1 = \{\operatorname{grad} \rho_1\} - \rho \mathbf{n}' \delta_{S'}.$$

Подставляя полученное выражение в (4) и пользуясь формулой (3) для объемного потенциала и формулой (37) из § 2.3 для потенциала простого слоя, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} V_1(x) &= \frac{1}{|x|} * \{\operatorname{grad} \rho_1\} - \frac{1}{|x|} * \rho \mathbf{n}' \delta_{S'} = \\ &= \int_{G'} \frac{\operatorname{grad} \rho(y)}{|x - y|} dy - \int_{S'} \frac{\rho(y) \mathbf{n}'}{|x - y|} dS_y. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое слагаемое в правой части (5) как объемный потенциал с плотностью  $\operatorname{grad} \rho \in \mathcal{C}(\overline{G'})$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ , а второе — классу  $\mathcal{C}^\infty(G')$ . Следовательно,  $\operatorname{grad} V_1 \in \mathcal{C}^1(G')$ , т. е.  $V_1 \in \mathcal{C}^2(G')$ . Но тогда  $V = V_1 + V_2 \in \mathcal{C}^2(G')$  и (ввиду произвольности  $G' \Subset G$ )  $V \in \mathcal{C}^2(G)$ , что и требовалось доказать.

**2. Потенциалы простого и двойного слоя.** Пусть  $S$  — ограниченная кусочно гладкая двухсторонняя поверхность \*),  $\mathbf{n}$  — выбранное направление нормали к ней,  $\mu$  и  $\nu$  — непрерывные функции на  $S$ . Ньютоны потенциалы

$$V^{(0)} = \frac{1}{|x|} * \mu \delta_S, \quad V^{(1)} = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu \delta_S),$$

\*) Та сторона поверхности  $S$ , к которой примыкает нормаль  $\mathbf{n}$ , считается положительной, а противоположная сторона — отрицательной (см. рис. 62 и рис. 63).

называемые *потенциалами простого и двойного слоя* соответственно, выражаются интегралами

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x - y|} dS_y, \quad (6)$$

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} dS_y \quad (7)$$

и представляют собой локально интегрируемые функции в  $R^3$  (см. § 2.3, п. 7, в)). Эти потенциалы удовлетворяют уравнению Пуассона:

$$\Delta V^{(0)} = -4\pi\mu\delta_S, \quad \Delta V^{(1)} = 4\pi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\nu\delta_S). \quad (8)$$

Фиксируем точку  $x_0$  на  $S$ , и пусть  $\mathbf{n}_0$  — нормаль к  $S$  в  $x_0$ . Дифференцируя формулу (6) при  $x \notin S$  по направлению  $\mathbf{n}_0$  и пользуясь равенством

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{|x - y|} = \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{n}_0 x_i) \frac{y_i - x_i}{|x - y|^3} = \frac{\cos \psi_{xy}}{|x - y|^2}, \quad (9)$$

где  $\psi_{xy}$  — угол между вектором  $y - x$  и нормалью  $\mathbf{n}_0$  (рис. 63), полу-

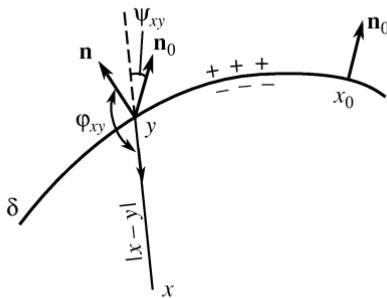


Рис. 63

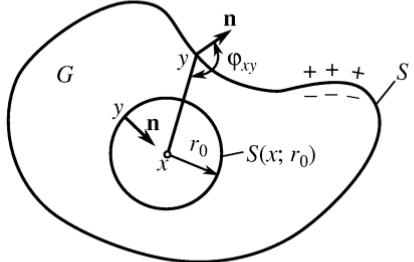


Рис. 64

чаем выражение для нормальной производной потенциала простого слоя

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}_0} = \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{|x - y|} dS_y = \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x - y|^3} dS_y, \quad x \notin S. \quad (10)$$

Аналогично, в силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} = \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{n}x_i) \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} = \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^3}, \quad (11)$$

где  $\varphi_{xy}$  — угол между вектором  $x - y$  и нормалью  $\mathbf{n}$  (см. рис. 63), формула (7) для потенциала двойного слоя  $V^{(1)}$  принимает вид

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^3} dS_y. \quad (12)$$

Потенциалы  $V^{(0)}$  и  $V^{(1)}$  — гармонические функции вне поверхности  $S$ ,  $V^{(0)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$  и

$$V^{(0)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad V^{(1)}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Эти свойства выводятся из представлений (6) и (12) и из уравнений (8) подобно тому, как это делалось для объемного потенциала (см. п. 1).

Теперь покажем, что потенциал двойного слоя  $V^{(1)}$  с плотностью  $\nu = 1$  равен

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ 0, & x \in G_1, \end{cases} \quad (13)$$

если  $S$  — граница области  $G$ .

Пусть  $x \in G$ , и шар  $U(x, r_0) \Subset G$ . Граница области  $G \setminus \overline{U}(x, r_0)$  состоит из поверхностей  $S$  и  $S(x, r_0)$  (рис. 64). Поскольку функция  $|x - y|^{-1}$  гармоническая при  $x \neq y$ , то, применяя к области  $G \setminus \overline{U}(x, r_0)$  формулу (11) из § 5.3, получим

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y + \int_{S(x, r_0)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y = 0. \quad (14)$$

Принимая во внимание (11) и учитывая, что  $\cos \varphi_{xy} = 1$  на сфере  $|x - y| = r_0$ , из (14) выводим первое из равенств (13):

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = - \int_{|x-y|=r_0} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = -\frac{1}{r_0^2} \int_{|x-y|=r_0} dS_y = -4\pi.$$

Пусть теперь  $x \in G_1$ . Так как функция  $|x - y|^{-1}$  гармоническая в  $\overline{G}$ , то, применяя формулу (11) из § 5.3, имеем

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} dS_y = 0, \quad (15)$$

что в силу (11) и доказывает вторую из формул (13).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Формулы (13) можно обобщить на случай произвольной поверхности  $S$ , не обязательно являющейся границей какой-либо области (Гаусс): если  $x \notin S$ , то потенциал  $V^{(1)}$  с плотностью  $\nu \equiv 1$  равен телесному углу, под которым поверхность  $S$  видна из точки  $x$  (с учетом знаков сторон поверхности).

**3. Физический смысл ньютоновых потенциалов.** Потенциал  $V = \frac{1}{|x|} * \rho$  с произвольной (финитной) плотностью  $\rho$  удовлетворяет уравнению Пуассона  $\Delta V = -4\pi\rho$ . Поэтому  $V$  есть ньютонов или кулонов потенциал, создаваемый массами или зарядами, распределенными в пространстве с плотностью  $\rho$ . В частности, непрерывное распределение масс или зарядов создает объемный потенциал; если же массы или заряды сосредоточены на поверхности, то они создают (ニュтонов или кулонов) потенциал простого слоя; если на поверхности сосредоточены диполи, то создаваемый ими кулонов потенциал есть потенциал двойного слоя.

Для примера вычислим (кулонов) потенциал  $V^{(1)}(x; \mathbf{l})$ , создаваемый диполем с моментом  $+1$  в точке  $0$ , ориентированным в на-

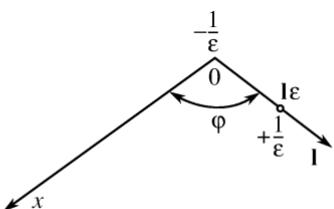


Рис. 65

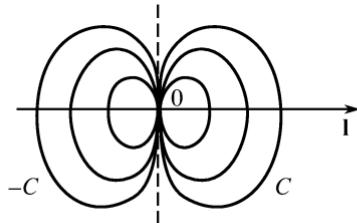


Рис. 66

правлении  $\mathbf{l}$ ,  $|\mathbf{l}| = 1$ . Этот потенциал создается распределением (см. § 2.2, п. 4, а))

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \delta(x - \mathbf{l}\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) \right] = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \delta(x)$$

(рис. 65), и поэтому

$$V^{(1)}(x; \mathbf{l}) = -\frac{1}{|x|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \delta = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \left( \frac{1}{|x|} * \delta \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} \frac{1}{|x|} = \frac{\cos \varphi}{|x|^2}, \quad (16)$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $\mathbf{l}$ . На рис. 66 изображены поверхности уровня потенциала  $V^{(1)}(x; \mathbf{l})$  (эквипотенциальные поверхности  $\frac{\cos \varphi}{|x|^2} = \pm c$ ).

Из формулы (12) и (16) следует, что потенциал двойного слоя представляет собой «сумму» элементарных потенциалов

$$\nu(y)V^{(1)}(x-y; \mathbf{n}) = \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2},$$

создаваемых диполями на поверхности  $S$  с плотностью момента  $\nu(y)$  и ориентированных по нормали  $\mathbf{n}$ .

**4. Поверхности Ляпунова.** Дальнейшие свойства потенциалов простого и двойного слоя устанавливаются в предположении, что  $S$  — поверхность Ляпунова. Замкнутая ограниченная поверхность  $S$  класса  $C^1$  называется *поверхностью Ляпунова*, если в каждой точке  $x \in S$  существует нормаль  $\mathbf{n}_x$ , непрерывная по Гёльдеру на  $S$ , т. е. существуют числа  $C > 0$  и  $0 < \alpha \leq 1$  такие, что

$$|\mathbf{n}_x - \mathbf{n}_y| \leq C|x-y|^\alpha, \quad x, y \in S. \quad (17)$$

Из этого определения вытекает, что поверхности Ляпунова принадлежат классу  $C^1$ ; с другой стороны, всякая ограниченная замкнутая поверхность класса  $C^2$  есть поверхность Ляпунова (при  $\alpha = 1$ ).

Перечислим без доказательства некоторые свойства поверхностей Ляпунова, используемые в дальнейшем. (Углы  $\varphi_{xy}$ ,  $\psi_{xy}$ ,  $\varphi_{x'y}$  и  $\psi_{x'y}$  изображены на рис. 63 и рис. 67.)

1) Существует постоянная  $K$  такая, что

$$\int_S \frac{|\cos \varphi_{xy}|}{|x-y|^2} dS_y \leq K, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (18)$$

2) Справедливо равенство

$$\varphi_{xy} = \psi_{yx}, \quad x, y \in S. \quad (19)$$

3) Существует постоянная  $C_0$  такая, что

$$|\cos \varphi_{xy}| = |\cos \psi_{yx}| \leq C_0|x-y|^\alpha, \quad x, y \in S, \quad (20)$$

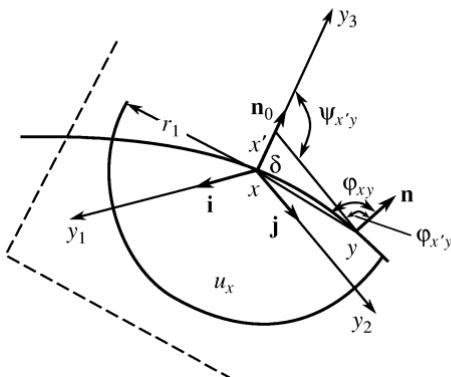


Рис. 67

$$|\cos \varphi_{x'y} + \cos \psi_{x'y}| \leq C_0 |x' - y|^\alpha, \quad x, y \in S, \quad x' \in \pm \mathbf{n}_x, \quad (21)$$

где  $\alpha$  — число из неравенства (17).

**5. Свойства потенциалов простого и двойного слоя на поверхности  $S$ .** Предполагая границу  $S$  области  $G$  поверхностью Ляпунова, установим некоторые свойства потенциалов  $V^{(0)}$  и  $V^{(1)}$  на  $S$ . Имеют место равенства

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y = \begin{cases} -4\pi, & x \in G, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in G_1. \end{cases} \quad (22)$$

Для доказательства равенств (22) в силу (13) осталось рассмотреть случай  $x \in S$ . Выбрасывая из  $S$  окрестность  $\mathcal{U}_x = S \cap U(x; r_0)$  точки  $x$ , получим

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y = \int_{S \setminus \mathcal{U}_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y + \int_{\mathcal{U}_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y. \quad (23)$$

Так как  $x \notin G \setminus U(x; r_0)$  (рис. 68), то применяя формулу (11) из § 5.3 к области  $G \setminus \overline{U}(x; r_0)$  и функции  $|x - y|^{-1}$  и действуя, как и в п. 2, получим

$$\int_{S \setminus \mathcal{U}_x} \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y = -\frac{1}{r_0^2} \int_{G \cap S(x; r_0)} dS.$$

Поэтому при стягивании  $\mathcal{U}_x$  в точку  $x$  ( $r_0 \rightarrow 0$ ) первый интеграл справа в (23) стремится к  $-2\pi$  (см. рис. 68). Второй же интеграл

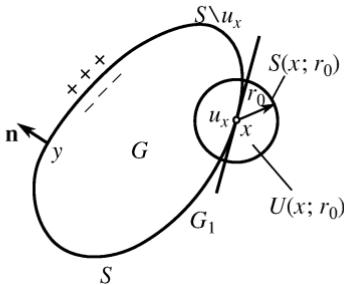


Рис. 68

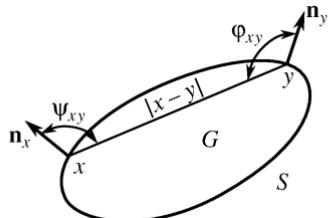


Рис. 69

справа в (23) в силу оценки (19) сходится абсолютно и поэтому стремится к нулю при  $\mathcal{U}_x \rightarrow x$  (см. § 1.1, п. 4). Поэтому, переходя в (31) к пределу при  $\mathcal{U}_x \rightarrow x$ , получим формулу (22) при  $x \in S$ .

Потенциал двойного слоя  $V^{(1)}$  — непрерывная функция на  $S$ .

Действительно, в силу неравенства (19), справедливого на поверхности Ляпунова  $S$ , потенциал  $V^{(1)}$ , определяемый формулой (12), есть интегральный оператор с полярным ядром

$$\frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2}, \quad x \in S, \quad y \in S,$$

а поэтому переводит всякую функцию  $\nu \in \mathcal{C}(S)$  в функцию  $V^{(1)} \in \mathcal{C}(S)$  (см. § 1.1, п. 4).

Докажем теперь, что интеграл

$$\int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y \quad (24)$$

есть непрерывная функция от  $x$  на  $S$  ( $\psi_{xy}$  — угол между вектором  $y-x$  и нормалью  $\mathbf{n}_x$ ).

Действительно, из оценки (19), как и для потенциала  $V^{(1)}$ , следует непрерывность интеграла (24) на  $S$ .

В соответствии с формулой (10) обозначим интеграл (24) через  $\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}}$ :

$$\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}} = \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-y|} dS_y, \quad x \in S. \quad (25)$$

Функция  $\frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}}$  называется *прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя на поверхности  $S$* ; по доказанному она непрерывна на  $S$ .

Отметим еще, что потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  — непрерывная функция на  $S$ , поскольку  $V^{(0)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$  (см. п. 2).

## 6. Разрыв потенциала двойного слоя.

**ТЕОРЕМА.** *Если  $S$  — поверхность Ляпунова и  $\nu \in \mathcal{C}(S)$ , то потенциал двойного слоя  $V^{(1)}$  принадлежит  $\mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{C}(\overline{G_1})$  и его предельные значения  $V_+^{(1)}$  и  $V_-^{(1)}$  на  $S$  выражаются формулами*

$$V_+^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x) = 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad (26)$$

$$V_-^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x) = -2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y. \quad (26')$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Введем функцию

$$W(x', x) = \int_S [\nu(y) - \nu(x)] \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} dS_y, \quad x' \in \mathbb{R}^3, \quad x \in S.$$

Функция  $W(x', x)$  при  $x' = x \in S$  в силу (22) равна

$$W(x, x) = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y + 2\pi\nu(x) = 2\pi\nu(x) + V^{(1)}(x). \quad (27)$$

Функция  $W(x, x)$  непрерывна на  $S$  в силу непрерывности плотности  $\nu$  и потенциала  $V^{(1)}$  на  $S$  (см. п. 5). Докажем, что

$$W(x', x) \rightrightarrows W(x, x), \quad x \in S, \quad x' \rightarrow x. \quad (28)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $\nu$  равномерно непрерывна на  $S$ , то существует число  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  такое, что при всех  $x \in S$  справедливо неравенство

$$|\nu(y) - \nu(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad y \in \mathcal{U}_x = S \cap U(x; \delta), \quad (29)$$

где  $K$  — постоянная из неравенства (18). Оценим разность

$$\begin{aligned} |W(x', x) - W(x, x)| &\leqslant \\ &\leqslant \left( \int_{\mathcal{U}_x} + \int_{S \setminus \mathcal{U}_x} \right) |\nu(y) - \nu(x)| \left| \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} \right| dS_y. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу неравенств (29) и (18) первый интеграл справа в (30) не пре- восходит  $\varepsilon/2$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}_x} |\nu(y) - \nu(x)| \left| \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} - \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} \right| dS_y &< \\ &< \frac{\varepsilon}{4K} \int_S \left( \frac{|\cos \varphi_{x'y}|}{|x' - y|^2} + \frac{|\cos \varphi_{xy}|}{|x - y|^2} \right) dS_y \leqslant \frac{\varepsilon}{4K} 2K = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Далее, подынтегральная функция в (30) как функция пере- менных  $(x, x', y)$  равномерно непрерывна при  $|x - x'| \leqslant \delta/2$ ,  $x \in S$ ,  $y \in S \setminus \mathcal{U}_x$ , и обращается в нуль при  $x' = x$ . Поэтому найдется такое  $\delta' \leqslant \delta/2$ , что при всех  $x' \in U(x; \delta')$  второй интеграл справа в (40) будет меньше  $\varepsilon/2$ . Следовательно,

$$|W(x', x) - W(x, x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad x' \in U(x; \delta'), \quad x \in S,$$

что и доказывает предельное соотношение (27).

Считая  $x' \in G_1$  и пользуясь формулой (22), представим потенциал  $V^{(1)}(x')$  в виде

$$V^{(1)}(x') = \int_S [\nu(y) - \nu(x)] \frac{\cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} dS_y = W(x', x). \quad (31)$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $x' \rightarrow x \in S$ ,  $x' \in G_1$ , и учитывая предельное соотношение (28), получаем

$$V^{(1)} \rightrightarrows W(x, x) = V_+^{(1)}(x), \quad x \in S,$$

откуда следует, что  $V^{(1)} \in \mathcal{C}(\overline{G_1})$ , и в силу (27) справедливо равенство (26).

Равенство (26') рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Из формул (26) и (26') следует соотношение

$$4\pi\nu(x) = V_+^{(1)}(x) - V_-^{(1)}(x), \quad x \in S. \quad (32)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Формулы (26) и (26') аналогичны формулам Сохонского (7) и (7') из § 2.1.

### 7. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя.

**ТЕОРЕМА.** Если  $S$  — поверхность Ляпунова и  $\mu \in \mathcal{C}(S)$ , то потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  имеет правильные нормальные производные  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+$  и  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-$  извне и изнутри на  $S$ , причем

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+(x) = -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}} = -2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-(x) = 2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}} = 2\pi\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y. \quad (33')$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $V^{(1)}$  — потенциал двойного слоя на  $S$  с плотностью  $\mu$ . Введем функцию

$$W_1(x', x) = \frac{\partial V^{(0)}(x')}{\partial \mathbf{n}_x} + V^{(1)}(x'), \quad x' \notin S, \quad x \in S,$$

и докажем, что при  $x' \rightarrow x \in S$ ,  $x' \in \mathbf{n}_x$ ,

$$W_1(x', x) \Rightarrow W_1(x, x) = \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}} + V^{(1)}, \quad x \in S. \quad (34)$$

По доказанному (см. п. 5) функция  $W_1(x, x)$  непрерывна на  $S$ . Пользуясь формулами (10) и (12), представим функцию  $W_1$  в виде интеграла:

$$W_1(x', x) = \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} dS_y.$$

Зададим  $\varepsilon > 0$ . Оценим разность ( $\mathcal{U}_x = S \cap U(x; \delta)$ )

$$\begin{aligned} |W_1(x', x) - W_1(x, x)| &\leqslant \\ &\leqslant \left( \int_{\mathcal{U}_x} + \int_{S \setminus \mathcal{U}_x} \right) |\mu(y)| \left| \frac{\cos \psi_{x'y} + \cos \varphi_{x'y}}{|x' - y|^2} - \frac{\cos \psi_{xy} + \cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} \right| dS_y. \end{aligned} \quad (35)$$

В силу оценок (20) и (21) первый интеграл справа в (35) не превосходит (абсолютно) сходящегося интеграла

$$\int_{\mathcal{U}_x} |\mu(y)| \left( \frac{C_0}{|x' - y|^{2-\alpha}} + \frac{6C_0}{|x - y|^{2-\alpha}} \right) dS_y$$

и будет  $< \varepsilon/2$  при достаточно малом  $\delta = \delta_\varepsilon$ . Далее, подынтегральная функция в (35) как функция переменных  $(x, x', y)$  равномерно непрерывна при  $|x - x'| \leqslant \delta/3$ ,  $x \in S$ ,  $y \in S \setminus \mathcal{U}_x$ , и обращается в нуль при  $x' = x$ . Поэтому найдется такое число  $\delta' \leqslant \delta/3$ , что при всех  $x' \in U(x; \delta')$  второй интеграл справа в (35) будет  $< \varepsilon/2$ . Следовательно,

$$|W_1(x', x) - W_1(x, x)| < \varepsilon, \quad x' \in U(x; \delta'), \quad x' \in \mathbf{n}_x, \quad x \in S,$$

что и доказывает предельное соотношение (34).

По теореме из п. 6  $V^{(1)} \in \mathcal{C}(\overline{G})$  и

$$V_+^{(1)}(x) = 2\pi\mu(x) + V^{(1)}(x).$$

Поэтому предельное соотношение (34) при  $x' \rightarrow x \in S$ ,  $x' \in \mathbf{n}_x$ , принимает вид

$$\frac{\partial V^{(0)}(x')}{\partial \mathbf{n}_x} \Rightarrow -V_+^{(1)}(x) + W_1(x, x) = -2\pi\mu(x) + \frac{\partial V^{(0)}(x)}{\partial \mathbf{n}}, \quad x \in S,$$

откуда заключаем, что правильная нормальная производная  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+$  извне на  $S$  существует (см. § 5.3, п. 2), причем в силу формулы (25) справедливо представление (33).

Второй случай рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Из формул (33) и  $(33')$  следует соотношение

$$4\pi\mu(x) = \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-(x) - \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+(x), \quad x \in S.$$

## 8. Упражнения.

а) Показать, что потенциал простого слоя для сферы  $S_R$  с плотностью  $\mu = 1$  равен

$$V^{(0)}(x) = \begin{cases} \frac{4\pi R^2}{|x|}, & |x| \geq R, \\ 4\pi R, & |x| \leq R. \end{cases}$$

б) Пользуясь а), показать, что объемный потенциал для шара  $U_R$  с плотностью  $\mu = 1$  равен

$$V(x) = \begin{cases} \frac{4\pi R^3}{|x|}, & |x| \geq R, \\ 2\pi R^2 - \frac{2\pi}{3}|x|^2, & |x| \leq R. \end{cases}$$

в) Показать, что для шара  $U_R$  объемный потенциал с плотностью  $f(|x|)$  равен

$$V(x) = \frac{4\pi}{|x|} \int_0^R f(\rho)\rho^2 d\rho, \quad |x| \geq R.$$

г) Пользуясь в), показать: если  $\int_0^R f(\rho)\rho^2 d\rho = 0$ , то

$$V(x) = -\frac{8\pi^2}{3} \int_0^R f(\rho)\rho^4 d\rho.$$

д) Доказать, что если поверхность Ляпунова  $S$  ограничивает выпуклую область, то постоянную  $K$  в оценке (18) можно взять равной  $4\pi$ .

## § 5.6. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в пространстве

**1. Постановка основных краевых задач.** Будем изучать следующие краевые задачи I и II родов для трехмерного уравнения Лапласа (см. § 1.4, п. 3). Считаем область  $G$  такой, что  $G_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$  есть область.

*Внутренняя задача Дирихле:* найти гармоническую в области  $G$  функцию  $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$ , принимающую на границе  $S$  заданные (непрерывные) значения  $u_0^-$ .

*Внешняя задача Дирихле:* найти гармоническую в области  $G_1$  функцию  $u$ , принимающую на  $S$  заданные (непрерывные) значения  $u_0^+$  и обращающуюся в нуль на бесконечности.

*Внутренняя задача Неймана:* найти гармоническую в области  $G$  функцию  $u$ , имеющую на  $S$  заданную (непрерывную) правильную нормальную производную  $u_1^+$  и обращающуюся в нуль на бесконечности.

*Внешняя задача Неймана:* найти гармоническую в области  $G_1$  функцию  $u \in \mathcal{C}(\overline{G}_1)$ , имеющую на  $S$  заданную (непрерывную) правильную нормальную производную  $u_1^+$  и обращающуюся в нуль на бесконечности.

Аналогичные краевые задачи ставятся и для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad (1)$$

причем требуется, чтобы  $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$  для внутренних задач и  $u \in \mathcal{C}^2(G_1) \cap \mathcal{C}(\overline{G_1})$ ,  $u(\infty) = 0$ , для внешних задач.

Подстановка

$$u = v + V, \quad V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x-y|} dy, \quad (2)$$

сводит внутренние краевые задачи для уравнения Пуассона к соответствующим внутренним краевым задачам для уравнения Лапласа, если  $f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ .

Действительно, в этом случае объемный потенциал  $V$  принадлежит  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$  и удовлетворяет уравнению Пуассона (1) (см. § 5.5, п. 1). А тогда в силу (2) функция  $v$  должна удовлетворять уравнению Лапласа и соответствующему краевому условию.

Для внешних краевых задач поступаем аналогично (если объемный потенциал с плотностью  $f$  существует и обращается в нуль на бесконечности).

Отметим, что преобразование Кельвина (см. § 5.3, п. 10) позволяет сводить внешние краевые задачи для уравнения Лапласа к внутренним, и наоборот.

Наконец, обратим внимание на то, что для задач Неймана (внутренних и внешних) необходимо предположить, что  $S \in \mathcal{C}^1$ ; далее, существование у решения правильной нормальной производной на  $S$  влечет ее непрерывность на  $\overline{G}$  или  $\overline{G}_1$  соответственно (см. § 5.3, п. 2).

## 2. Теоремы единственности решения краевых задач.

Докажем теоремы единственности решения поставленных краевых задач.

**ТЕОРЕМА 1.** *Решение уравнения Пуассона во всем пространстве единственно в классе обобщенных функций, обращающихся в нуль на бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно установить, что уравнение Лапласа имеет только нулевое решение в классе обобщенных функций, обращающихся в нуль при  $|x| \rightarrow 0$ . Но это так в силу аналога теоремы Лиувилля (см. § 5.3, п. 9).

**ТЕОРЕМА 2.** *Решение внутренней или внешней задачи Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничного значения  $u_0^-$  или  $u_0^+$  соответственно в следующем смысле: если  $|u_0^\pm - \tilde{u}_0^\pm| \leq \varepsilon$  на  $S$ , то соответствующие решения  $u$  и  $\tilde{u}$  удовлетворяют оценке*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \overline{G} \quad (x \in \overline{G}_1). \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применяя неравенства (17) и (18) из § 5.3, п. 5 к гармонической функции  $u - \tilde{u}$ :

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \max_{\xi \in S} |u^\pm(\xi) - \tilde{u}^\pm(\xi)|, \quad x \in \overline{G} \quad (x \in \overline{G}_1),$$

получим утверждение теоремы.

Будем говорить, что поверхность Ляпунова  $S$  достаточно гладкая, если для нее справедлива формула Грина (7) из § 5.1 для функций  $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , имеющих правильную нормальную производную на  $S$  и  $\Delta u \in \mathcal{L}_2(G)$ , и для функций  $v \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ .

В силу сказанного в § 5.3, п. 2 и § 5.5, п. 4 ограниченные замкнутые поверхности класса  $\mathcal{C}^2$  — достаточно гладкие поверхности.

**ТЕОРЕМА 3.** *Если  $S$  — достаточно гладкая поверхность, то решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до*

произвольной аддитивной постоянной. Необходимым условием разрешимости этой задачи является равенство

$$\int_S u_1^-(x) dS + \int_G f(x) dx = 0. \quad (4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $u$  и  $\tilde{u}$  — два решения внутренней задачи Неймана, то их разность  $\eta = u - \tilde{u} \in \mathcal{C}(\bar{G})$  — гармоническая функция в  $G$  и имеет нулевую правильную нормальную производную на  $S$ . Применяя формулу Грина (7) из § 5.1 при  $u = v = \eta$ , получим

$$\int_G |\operatorname{grad} \eta|^2 dx = \int_S \eta \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} dS = 0,$$

откуда следует, что  $\operatorname{grad} \eta = 0$ ,  $x \in G$ , так что  $\eta = u - \tilde{u} = \text{const.}$

Необходимость условия (4) разрешимости внутренней задачи Неймана вытекает из формулы (8) из § 5.1 при  $v \equiv 1$ , согласно которой

$$\int_S u_1^- dS = \int_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_G \Delta u dx = - \int f dx,$$

если  $u$  — решение этой задачи. Теорема доказана.

Физический смысл условия (4) состоит в том, что стационарный поток тепла (несжимаемой жидкости, напряженности электрического и магнитного полей) через замкнутую поверхность  $S$  равен суммарной величине всех источников (зарядов), находящихся внутри  $S$  (закон сохранения).

**ТЕОРЕМА 4.** *Если  $S$  — достаточно гладкая поверхность, то решение внешней задачи Неймана единственно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u$  и  $\tilde{u}$  — два решения внешней задачи Неймана. Тогда их разность  $\eta \in \mathcal{C}(\bar{G}_1)$  — гармоническая функция в  $G_1$ , имеет нулевую правильную нормальную производную на  $S$  и  $\eta(\infty) = 0$ . По теореме из § 5.3, п. 10 функция  $\eta$  удовлетворяет неравенствам

$$|\eta(x)| < \frac{c}{|x|}, \quad |\operatorname{grad} \eta(x)| < \frac{c_1}{|x|^2}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Применяя формулу Грина (7) из § 5.3 при  $u = v = \eta$  к области  $Q_R$  (см. рис. 56), получим

$$\int_{G_R} |\operatorname{grad} \eta|^2 dx = \int_S \eta \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_{S_R} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_{S_R} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (6)$$

Из оценок (5) вытекает, что при  $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{S_R} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} dS \right| \leq \int_{S_R} |\eta| |\operatorname{grad} \eta| dS < \frac{cc_1}{R^3} \int_{S_R} dS = 4\pi \frac{cc_1}{R}.$$

Устремляя  $R$  к  $\infty$ , получаем

$$\int_{G_1} |\operatorname{grad} \eta|^2 dx = 0,$$

откуда следует  $\operatorname{grad} \eta = 0$ , т. е.  $\eta(x) = \operatorname{const}$ ,  $x \in G_1$ . Так как  $\eta(\infty) = 0$ , то  $\eta = u - \tilde{u} \equiv 0$ ,  $x \in G_1$ . Теорема доказана.

**3. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям.** Запишем формулу Грина (5) из § 5.3 при  $n = 3$ :

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right] dS_y, \quad x \in G. \quad (7)$$

Формула (7) справедлива для функций  $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$ , гармонических в  $G$  и имеющих правильную нормальную производную на  $S$ , если  $S$  — достаточно гладкая поверхность (см. п. 2).

Из теорем единственности для задач Дирихле и Неймана (см. п. 2) следует, что, вообще говоря, не существует гармонической функции  $u$  с произвольно заданными значениями  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  на  $S$ . Поэтому формулу Грина (7) нельзя непосредственно использовать для решения поставленных краевых задач, подобно тому как мы это делали для решения задачи Коши (см. § 3.4, п. 3 и § 4.2, п. 4). В этом состоит существенное различие между краевой задачей для эллиптических уравнений и задачей Коши.

Пользуясь теорией ньютона потенциала, сведем задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям Фредгольма с полярным ядром (§ 4.2 и § 4.4, п. 6). Затем, используя теорию интегральных уравнений, докажем разрешимость этих краевых задач.

Пусть  $S$  — достаточно гладкая поверхность. Ищем решение задач Дирихле (внутренней и внешней) в виде потенциала двойного слоя

$$V^{(1)}(x) = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y,$$

где  $\nu$  — неизвестная непрерывная плотность на  $S$ . Функция  $V^{(1)}$  гармоническая в  $G$  и  $G_1$ , принадлежит классам  $\mathcal{C}(\overline{G})$ ,  $\mathcal{C}(\overline{G}_1)$  и  $\mathcal{C}(S)$ .

и  $V^{(1)}(\infty) = 0$  (см. § 5.5, пп. 2, 5, 6). Поэтому, чтобы потенциал  $V^{(1)}$  давал решение внутренней или внешней задачи Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы соответственно были выполнены равенства

$$V_{\mp}^{(1)}(x) = u_0^{\mp}(x), \quad x \in S, \quad (8)$$

где  $V_{\mp}^{(1)}$  — предельные значения потенциала  $V^{(1)}$  на  $S$  изнутри и извне соответственно. По теореме о разрыве потенциала двойного слоя (см. § 5.5, п. 6) равенства (8) принимают вид

$$\mp 2\pi\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = u_0^{\mp}(x), \quad x \in S. \quad (9)$$

Равенства (9) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма относительно неизвестной плотности  $\nu$ .

Вводя вещественный параметр  $\lambda$  и ядро

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\cos \varphi_{xy}}{2\pi|x-y|^2}, \quad (10)$$

перепишем интегральные уравнения (9) в единой форме:

$$\nu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}(x, y) \nu(y) dS_y + f(x), \quad x \in S. \quad (11)$$

Здесь для внутренней задачи Дирихле  $\lambda = 1$  и  $f = -u_0^-/(2\pi)$ , а для внешней задачи Дирихле  $\lambda = -1$  и  $f = u_0^+/(2\pi)$ .

Аналогично, решение задач Неймана (внутренней и внешней) ищем в виде потенциала простого слоя

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|x-y|} dS_y,$$

где  $\mu$  — неизвестная непрерывная плотность на  $S$ . Функция  $V^{(0)}$  гармоническая в  $G$  и  $G_1$ , непрерывная в  $\mathbb{R}^3$ , имеет правильные нормальны производные  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\mp}$  изнутри и извне на  $S$  и  $V^{(0)}(\infty) = 0$  (см. § 5.5, пп. 2, 7). Поэтому чтобы потенциал  $V^{(0)}$  давал решение внутренней или внешней задачи Неймана, необходимо, чтобы соответственно были выполнены равенства

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\mp}(x) = u_1^{\mp}(x), \quad x \in S. \quad (12)$$

По теореме о разрыве нормальной производной потенциала простого слоя (см. § 5.5, п. 4) равенства (12) записываются как интегральные уравнения Фредгольма

$$\pm 2\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y = u_1^\mp(x), \quad x \in S, \quad (13)$$

относительно неизвестной плотности  $\mu$ .

Из равенства  $\psi_{xy} = \varphi_{yx}$ ,  $x, y \in S$  (см. (19) из § 5.5) и из (10) следует, что ядро интегральных уравнений (13) равно  $\mathcal{K}(y, x) = \mathcal{K}^*(x, y)$ , так что уравнения (9) и (13) союзные друг другу. Вводя параметр  $\lambda$ , перепишем интегральные уравнения (13) в единой форме:

$$\mu(x) = \lambda \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu(y) dS_y + g(x), \quad x \in S. \quad (11')$$

Здесь для внутренней задачи Неймана  $\lambda = -1$  и  $g = u_1^-/(2\pi)$ , а для внешней задачи Неймана  $\lambda = 1$  и  $g = -u_1^+/(2\pi)$ .

Для поверхности Ляпунова  $S$  функция  $\cos \varphi_{xy}$  непрерывна на  $S \times S$  и согласно оценке (20) из § 5.5 удовлетворяет оценке

$$|\cos \varphi_{xy}| \leq C_0 |x - y|^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Поэтому в силу (10) ядро  $\mathcal{K}(x, y)$  непрерывно при  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$ , и удовлетворяет оценке

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{C_0}{2\pi |x - y|^{2-\alpha}},$$

и, следовательно, является полярным ядром (см. § 4.4, п. 6). Таким образом, для интегрального уравнения (11) и союзного к нему уравнения (11') применимы все положения теории Фредгольма (см. § 4.2 и § 4.4, п. 6).

**4. Исследование интегральных уравнений.** Докажем сначала, что  $\lambda = 1$  не есть характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$ . Пусть, напротив,  $\lambda = 1$  — характеристическое число этого ядра и  $\mu^*$  — соответствующая собственная функция,

$$\mu^*(x) = \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu^*(y) dS_y = \frac{1}{2\pi} \int_S \mu^*(y) \frac{\cos \psi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y, \quad x \in S. \quad (14)$$

Собственная функция  $\mu^*$  принадлежит  $\mathcal{C}(S)$  (см. § 4.4, п. 6). Построим потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  с плотностью  $\mu^*$ . Функция  $V^{(0)}$

гармонична вне  $S$ , непрерывна в  $\mathbb{R}^3$  и  $V^{(0)}(\infty) = 0$  (см. § 5.5, п. 2). Далее, в силу формулы (33) из § 5.5 и уравнения (14) ее правильная нормальная производная на  $S$  извне равна нулю. Отсюда по теореме 4 из п. 2 о единственности решения внешней задачи Неймана следует, что  $V^{(0)}(x) \equiv 0$ ,  $x \in \overline{G}_1$ , и, в частности,  $V^{(0)}|_S = 0$ . Но тогда по теореме 2 из п. 2 о единственности решения внутренней задачи Дирихле  $V^{(0)}(x) \equiv 0$ ,  $x \in \overline{G}$ . Итак,  $V^{(0)}(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Отсюда, пользуясь формулой (36) из § 5.5, выводим, что  $\mu^*(x) \equiv 0$ ,  $x \in S$ .

Таким образом,  $\lambda = 1$  не есть характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$ . Отсюда по второй теореме Фредгольма  $\lambda = 1$  также не есть характеристическое число ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ . А тогда по третьей и первой теоремам Фредгольма интегральные уравнения (11) и (11') при  $\lambda = 1$  однозначно разрешимы при любых непрерывных  $f$  и  $g$ . Следовательно, справедлива

**ТЕОРЕМА 1.** *Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана разрешимы при любых непрерывных данных  $u_0^-$  и  $u_1^+$ , и их решения представляются потенциалами двойного и простого слоя соответственно.*

Теперь из формулы (22) из § 5.5

$$-\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x - y|^2} dS_y = - \int_S \mathcal{K}(x, y) dS_y = 1, \quad x \in S,$$

следует, что  $\lambda = -1$  есть характеристическое число ядра  $\mathcal{K}(x, y)$  и  $\nu \equiv \equiv 1$  — соответствующая собственная функция. Докажем, что это простое характеристическое число. Для этого в силу второй теоремы Фредгольма достаточно показать, что  $\lambda = -1$  — простое характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$ . Пусть  $\mu_0$  — соответствующая собственная функция,

$$\mu_0(x) = - \int_S \mathcal{K}^*(x, y) \mu_0(y) dS_y = - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{xy}}{|x - y|^2} \mu_0(y) dS_y. \quad (15)$$

Собственная функция  $\mu_0$  принадлежит  $\mathcal{C}(S)$  (см. § 4.4, п. 6). Рассмотрим потенциал простого слоя с плотностью  $\mu_0$

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu_0(y)}{|x - y|} dS_y. \quad (16)$$

Функция  $V^{(0)}$  гармонична вне  $S$ , непрерывна в  $\mathbb{R}^3$  и  $V^{(0)}(\infty) = 0$  (см. § 5.5, п. 2). Далее, в силу формулы (43') из § 5.5, п. 7 и уравнения (15) ее правильная нормальная производная на  $S$  изнутри равна нулю.

Отсюда по теореме 3 из п. 2 о единственности решения внутренней задачи Неймана  $V^{(0)}(x) \equiv C = \text{const}$ ,  $x \in \overline{G}$ .

Докажем, что  $C \neq 0$ . Пусть, напротив,  $V^{(0)} \equiv 0$ ,  $x \in \overline{G}$ . В частности,  $V^{(0)}|_S = 0$ . Тогда по теореме 2 из п. 2 о единственности решения внешней задачи Дирихле  $V^{(0)}(x) \equiv 0$ ,  $x \in \overline{G}_1$ . Итак,  $V^{(0)}(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Отсюда в силу формулы (46) из § 5.5 следует, что  $\mu_0(x) \equiv 0$ ,  $x \in S$ , что невозможно.

Пусть  $\tilde{\mu}_0$  — другая собственная функция ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$ , соответствующая собственному числу  $\lambda = -1$ . По доказанному потенциал простого слоя  $\tilde{V}^{(0)}$  с плотностью  $\tilde{\mu}_0$  равен постоянной  $\tilde{C} \neq 0$  на  $\overline{G}$ . Но тогда потенциал простого слоя  $\frac{\tilde{C}}{C} V^{(0)} - \tilde{V}^{(0)}$  с плотностью  $\frac{\tilde{C}}{C} \mu_0 - \tilde{\mu}_0$  равен нулю на  $\overline{G}$ , откуда следует, что эта плотность тождественно равна нулю, т. е.

$$\tilde{\mu}_0(x) = \frac{\tilde{C}}{C} \mu_0(x), \quad x \in S.$$

Поэтому  $\lambda = -1$  — простое характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^*(x, y)$  и, стало быть, ядра  $\mathcal{K}(x, y)$ .

Нормируем собственную функцию  $\mu_0$  так, чтобы

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu_0(y)}{|x - y|} dS_y \equiv 1, \quad x \in \overline{G}. \quad (17)$$

В этом случае потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  с плотностью  $\mu_0$  называется *потенциалом Робена*.

Физический смысл потенциала Робена: это есть потенциал, создаваемый зарядами на проводящей поверхности  $S$ , а его плотность

$$\mu_0(x) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_+$$

есть плотность зарядов, которая устанавливается на этой поверхности. При этом полный заряд

$$\int_S \mu_0(x) dS = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_+ dS$$

называется *емкостью* проводящей поверхности  $S$ .

Вернемся к уравнениям (11) и (11') при  $\lambda = -1$ . По третьей теореме Фредгольма интегральное уравнение (11') при  $\lambda = -1$  разрешимо тогда и только тогда, когда свободный член  $g$  ортогонален к 1.

Итак, справедлива

**ТЕОРЕМА 2.** Внутренняя задача Неймана разрешима при любой непрерывной функции  $u_1^-$ , удовлетворяющей условию ортогональности

$$\int_S u_0^-(x) dS = 0, \quad (18)$$

и ее решение представляется потенциалом простого слоя.

Далее, для разрешимости уравнения (11) при  $\lambda = -1$  необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален к  $\mu_0$ . Таким образом, внешняя задача Дирихле имеет решение, представляемое потенциалом двойного слоя при любой непрерывной функции  $u_0^+$ , ортогональной к плотности  $\mu_0$  потенциала Робена

$$\int_S u_0^+(x) \mu_0(x) dS = 0. \quad (19)$$

Условие разрешимости (19) возникло за счет того, что решение внешней задачи Дирихле мы искали в виде потенциала двойного слоя, и, следовательно, от решения требовалось убывание  $O(|x|^{-2})$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Однако в постановке этой задачи от решения требуется лишь обращение в нуль на бесконечности. Чтобы учесть и такие решения и тем самым избавиться от условия (19), поступим следующим образом.

Считаем  $0 \in G$ . Ищем решение внешней задачи Дирихле в виде суммы потенциала двойного слоя  $V^{(1)}$  с неизвестной плотностью  $\nu$  на  $S$  и ньютонова потенциала  $\alpha/|x|$  от заряда в точке  $x = 0$  неизвестной величины  $\alpha$ :

$$u(x) = V^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{|x|} = \int_S \nu(y) \frac{\cos \varphi_{xy}}{|x-y|^2} dS_y + \frac{\alpha}{|x|}. \quad (20)$$

Соответствующее интегральное уравнение (11) принимает вид

$$\nu(s) = - \int_S \mathcal{K}(x, y) \nu(y) dS_y + \frac{u_0^+(x)}{2\pi} - \frac{\alpha}{2\pi|x|}, \quad x \in S. \quad (21)$$

По доказанному для разрешимости интегрального уравнения (21) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \left[ u_0^+(x) - \frac{\alpha}{|x|} \right] \mu_0(x) dS = 0. \quad (22)$$

Так как  $0 \in G$ , то в силу (17)

$$\int_S \frac{\mu_0(y)}{|y|} dS = V^{(0)}(0) = 1,$$

и условие разрешимости (22) принимает вид

$$\alpha = \int_S u_0^+(x) \mu_0(x) dS. \quad (23)$$

Таким образом, справедлива

**ТЕОРЕМА 3.** *Внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной функции  $u_0^+$ , и ее решение представляется в виде суммы потенциала двойного слоя и потенциала*

$$\frac{1}{|x|} \int_S u_0^+(y) \mu_0(y) dS.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Пусть выполнены условия разрешимости (18) и (23). Тогда общие решения интегральных уравнений (21) и (11') при  $\lambda = -1$  содержат по одной произвольной постоянной  $C_1$  и  $C$  соответственно:  $\nu(x) + C_1$ ,  $\mu(x) + C\mu_0(x)$ . Отсюда в силу формул (22) из § 5.5 и (17) опять получаем, что решение внешней задачи Дирихле единственны (и, значит, не содержит произвольной постоянной  $C$ ), а решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной  $C_1$ .

**5. Решение задач Дирихле и Неймана для шара.** Построим решения задач Дирихле и Неймана (внутренних и внешних) для шара  $U_R$ .

Пусть  $f$  — заданная непрерывная функция на сфере  $S_R$ . Тогда  $f(Rs)$  разлагается в ряд Фурье по сферическим функциям

$$f(Rs) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s), \quad s \in S_1, \quad (24)$$

где в силу (41) из § Д.2

$$Y_l(s) = \frac{2l+1}{4\pi} \int_{S_1} f(Rs') \mathcal{P}_l((s, s')) ds'.$$

Ряд (24) сходится в  $L_2(S_R)$  (см. § Д.2, п. 6). Предположим, что этот ряд сходится в  $\mathcal{C}(S_R)$ . Тогда

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l(\theta, \varphi), \quad r < R, \quad (25)$$

— решение внутренней задачи Дирихле с  $u_0^- = f$ ;

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R}{l} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l(\theta, \varphi) + C, \quad r < R, \quad (26)$$

— решение внутренней задачи Неймана с  $u_1^- = f$  при условии, что

$$Y_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} f(Rs') ds' = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} f(x) dS = 0; \quad (27)$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_l(\theta, \varphi), \quad r > R, \quad (28)$$

— решение внешней задачи Дирихле с  $u_0^+ = f$ ;

$$u(r, \theta, \varphi) = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R}{l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_l(\theta, \varphi), \quad r > R, \quad (29)$$

— решение внешней задачи Неймана с  $u_1^+ = f$ .

Действительно, ряд (25) состоит из гармонических полиномов (см. § Д.2, п. 8) и по предположению сходится в  $\mathcal{C}(S_R)$ . Поэтому этот ряд сходится в  $\mathcal{C}(\bar{U}_R)$  (см. § 5.3, п. 5), определяя функцию  $u$ , гармоническую в  $U_R$  (см. § 5.3, п. 8), непрерывную на  $\bar{U}_R$  и принимающую в силу (24) значения  $f$  на  $S_R$ . Это и значит, что ряд (25) дает решение внутренней задачи Дирихле для шара  $U_R$  с  $u_0^- = f$ .

По признаку Абеля (см. [2]) ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} Y_l(s)$$

сходится вместе с рядом (24) в  $\mathcal{C}(S_R)$ . Отсюда, повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что ряд (26) сходится в  $\mathcal{C}(\bar{U}_R)$  и определяет функцию  $u$ , гармоническую в  $U_R$  и непрерывную на  $\bar{U}_R$ . Далее, этот ряд можно почленно дифференцировать по  $r$ ,

$$\frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{l-1} Y_l(\theta, \varphi), \quad (30)$$

поскольку ряд (30) в силу признака Абеля сходится в  $\mathcal{C}(\bar{U}_R)$ . Наконец, сумма ряда (30) на  $S_R$  согласно (24) совпадает с  $f$ , если функция  $f$  удовлетворяет условию (27) разрешимости внутренней задачи Неймана (см. п. 4). Это и значит, что ряд (26) дает решение внутренней задачи Неймана для шара  $U_R$  с  $u_1^- = f$  при выполнении условия разрешимости (27).

Аналогично доказывается, что ряды (28) и (29) определяют решения соответствующих внешних задач.

## § 5.7. Функция Грина задачи Дирихле

**1. Определение и свойства функции Грина.** *Функцией Грина (внутренней) задачи Дирихле для (ограниченной) области  $G$  называется функция  $\mathcal{G}(x, y)$ ,  $x \in \overline{G}$ ,  $y \in G$ , обладающая следующими свойствами:*

- 1) при каждом  $y \in G$  представляется в виде

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} + g(x, y), \quad (1)$$

где функция  $g(x, y)$  гармоническая в  $G$  и непрерывная на  $\overline{G}$  по  $x$ ;

- 2) при каждом  $y \in G$  удовлетворяет граничному условию

$$\mathcal{G}(x, y)|_{x \in S} = 0. \quad (2)$$

Из условий 1) и 2) вытекает, что функция  $\mathcal{G}(x, y)$  гармоническая по  $x$  в области  $G \setminus \{y\}$ , непрерывная в  $\overline{G} \setminus \{y\}$ , обращается в нуль на  $S$  и стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow y$ . Отсюда в силу принципа максимума (см. § 5.3, п. 4) следует, что  $\mathcal{G}(x, y) > 0$ ,  $x, y \in G$ . Далее, гармоническая функция  $g(x, y)$  удовлетворяет граничному условию

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x - y|}, \quad x \in S, \quad y \in G, \quad (3)$$

откуда следует, что  $g(x, y) < 0$ ,  $x \in S$ ,  $y \in G$ . Но тогда в силу принципа максимума это неравенство сохранится и в области  $G$ , т. е.  $g(x, y) < 0$ ,  $x \in \overline{G}$ ,  $y \in G$ . Итак в силу (1) функция Грина удовлетворяет неравенствам

$$0 < \mathcal{G}(x, y) < \frac{1}{4\pi|x - y|}, \\ x \in G, \quad y \in G, \quad x \neq y. \quad (4)$$

Из единственности решения задачи Дирихле (см. § 5.6, п. 2) вытекает, что функция Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  единственна (если она существует).

Физический смысл функции Грина: из определения функции Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  следует, что при каждом  $y \in G$  она удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению Пуассона

$$\Delta_x \mathcal{G}(x, y) = -\delta(x - y), \quad x \in G,$$

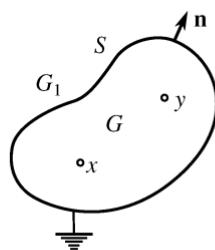


Рис. 70

и обращается в нуль на границе  $S$ ; поэтому функцию  $\mathcal{G}(x, y)$  можно интерпретировать как кулона потенциал (см. § 5.4, п. 3), порождаемый внутри заземленной поверхности  $S$  зарядом  $+\frac{1}{4\pi}$ , находящимся в точке  $y \in G$  (рис. 70).

Функция  $g(x, y)$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, y) \in \overline{G} \times G$ .

Пусть  $x_0 \in \overline{G}$ ,  $y_0 \in G$  и  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ,  $x \in \overline{G}$ ,  $y \in G$ . Пользуясь непрерывностью функции  $g(x, y)$  по  $x$ , принципом максимума и равенством (3), получаем

$$\begin{aligned} |g(x_0, y_0) - g(x, y)| &\leq |g(x_0, y_0) - g(x, y_0)| + |g(x, y_0) - g(x, y)| \leq \\ &\leq |g(x_0, y_0) - g(x, y_0)| + \max_{x' \in S} \frac{1}{4\pi} \left| \frac{1}{|x' - y_0|} - \frac{1}{|x' - y|} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что и доказывает непрерывность функции  $g$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

**Теорема.** Если  $S$  — достаточно гладкая поверхность, то функция Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  существует, имеет правильную нормальную производную  $\frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial \mathbf{n}}$  на  $S$  при всех  $y \in G$  и симметрична:

$$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x), \quad x \in G, \quad y \in G. \quad (5)$$

**Доказательство.** Достаточно установить существование симметричной функции  $g(x, y)$ , обладающей при каждом  $y \in G$  следующими свойствами по  $x$ : гармоническая в  $G$ , непрерывная на  $\overline{G}$ , удовлетворяет граничному условию (3) и имеет правильную нормальную производную на  $S$ .

Фиксируем  $y \in G$ . Функция  $-\frac{1}{4\pi}|x-y|^{-1}$ ,  $x \in G_1$ , есть, очевидно, решение внешней задачи Неймана с граничной функцией

$$u_1^+(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x-y|}, \quad x \in S. \quad (6)$$

С другой стороны, по теореме 1 из § 5.6, п. 4 это решение представляется в виде потенциала простого слоя

$$V^{(0)}(x) = \int_S \frac{\mu(y', y)}{|x-y'|} dS_{y'}, \quad x \in G_1,$$

с непрерывной плотностью  $\mu(y', y)$  по  $y' \in S$ . Поэтому в силу единственности решения внешней задачи Неймана (см. теорему 4 из § 5.6, п. 2),

$$V^{(0)}(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x \in G_1. \quad (7)$$

Потенциал  $V^{(0)}$  гармоничен в  $G$  и непрерывен в  $\mathbb{R}^3$  (см. § 5.5, п. 2) и в силу (7) удовлетворяет граничному условию (3); так что

$$g(x, y) = V^{(0)}(x, y) = \int_S \frac{\mu(y', y)}{|x - y'|} dS_{y'}, \quad x \in G. \quad (8)$$

Отсюда по теореме из § 5.5, п. 7 следует, что функция  $g(x, y)$  имеет правильную нормальную производную (изнутри) на  $S$ , которая в силу формул (36) из § 5.5 и (6) равна

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial \mathbf{n}_x} = 4\pi\mu(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x - y'|}, \quad x \in S. \quad (9)$$

Осталось доказать симметрию функции  $g(x, y)$ . Применяя формулу Грина (13) из § 5.6 к функции  $g(x, y)$  и пользуясь граничными условиями (3) и (9) и формулой (8), при всех  $x, y \in G$  получаем

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{|x - y'|} \frac{\partial g(y', y)}{\partial \mathbf{n}_{y'}} - g(y', y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{y'}} \frac{1}{|x - y'|} \right] dS_{y'} = \\ &= - \int_S g(y', x) \frac{\partial g(y', y)}{\partial \mathbf{n}_{y'}} dS_{y'} + \int_S g(y', y) \left[ \frac{\partial g(y', x)}{\partial \mathbf{n}_{y'}} - 4\pi\mu(y', x) \right] dS_{y'} = \\ &= \int_S \left[ g(y', y) \frac{\partial g(y', x)}{\partial \mathbf{n}_{y'}} - g(y', x) \frac{\partial g(y', y)}{\partial \mathbf{n}_{y'}} \right] dS_{y'} - \\ &\quad - 4\pi \int_S g(y', y) \mu(y', x) dS_{y'} = \\ &= \int_G [g(y', y) \Delta g(y', x) - g(y', x) \Delta g(y', y)] dy' + \int_S \frac{\mu(y', x)}{|y - y'|} dS_{y'} = g(y, x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из симметрии функции  $g(x, y)$  вытекают ее следующие дополнительные свойства: она непрерывная по  $(x, y)$  в  $G \times \overline{G}$ ; при каждом  $x \in G$  гармоническая по  $y$  в  $G$ ; принимает значение  $-\frac{1}{4\pi}|x - y|^{-1}$  при  $y \in S$ ; имеет правильную нормальную производную  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y}$  на  $S$ .

**2. Примеры построения функции Грина (метод отражений).** Для построения функции Грина для области с достаточно широкой симметрией весьма эффективным оказывается *метод отражений*. Продемонстрируем его на ряде примеров.

а) Шар  $U_R$ . Пусть  $y \in U_R$ ,  $y \neq 0$  и

$$y^* = y \frac{R^2}{|y|^2}, \quad |y| |y^*| = R^2, \quad (10)$$

— симметричная точка относительно сферы  $S_R$  при преобразовании инверсии (см. § 5.3, п. 10).

Ищем функцию Грина в виде

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{\alpha}{4\pi|x-y^*|}, \quad (11)$$

где  $-\alpha/(4\pi)$  — неизвестный заряд в симметричной точке  $y^*$ . Функция

$$g(x, y) = -\frac{\alpha}{4\pi|x-y^*|}$$

гармоническая в  $U_R$  и принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty(\overline{U}_R)$ . Подберем  $\alpha$  так, чтобы функция  $\mathcal{G}(x, y)$  обратилась в нуль на  $S_R$ . Для этого заметим,

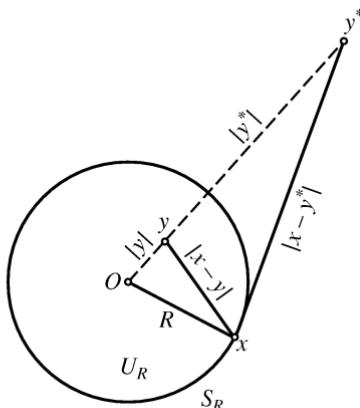


Рис. 71

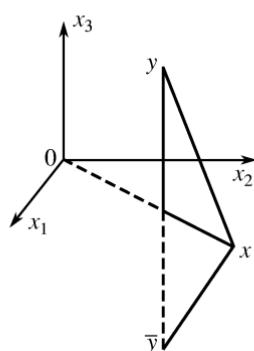


Рис. 72

что при  $|x| = R$  треугольники  $Oxy^*$  и  $Oxy$  подобны: один угол у них общий, а прилегающие стороны в силу (10) пропорциональны (рис. 71). Поэтому при  $|x| = R$  справедливо соотношение

$$\frac{R}{|y|} = \frac{|x-y^*|}{|x-y|},$$

и, следовательно, в силу (11) необходимо положить  $\alpha = R/|y|$ . Итак,

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y||x-y^*|} = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi|x||y|^2 - yR^2} \quad (12)$$

есть функция Грина для шара. Формула (12) справедлива и при  $y = 0$ :

$$\mathcal{G}(x, 0) = \frac{1}{4\pi|x|} - \frac{1}{4\pi R}.$$

б) Полупространство  $x_3 > 0$ <sup>\*)</sup>. Пусть точка  $y = (y_1, y_2, y_3)$  лежит в этом полупространстве,  $y_3 > 0$ . Точка  $\tilde{y} = (y_1, y_2, -y_3)$  называется *симметричной* с точкой  $y$  относительно плоскости  $x_3 = 0$  (рис. 72).

Нетрудно проверить, что функция Грина для полупространства  $x_3 > 0$  определяется формулой

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi|x-\tilde{y}|}. \quad (13)$$

в) Полушар  $|x| < R$ ,  $x_3 > 0$ . Пусть точка  $y$  лежит в этом полушаре;  $y^*$  — точка, симметричная с  $y$  относительно сферы  $S_R$ ,  $\tilde{y}$  и  $\tilde{y}^*$  —

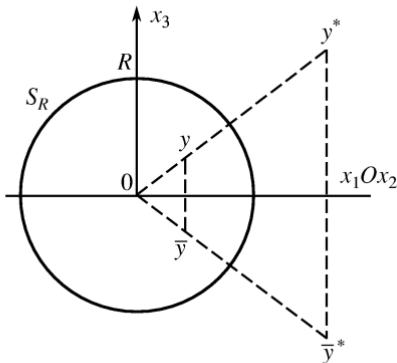


Рис. 73

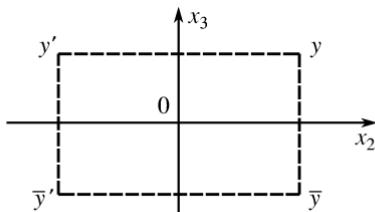


Рис. 74

точки, симметричные с  $y$  и  $y^*$  относительно плоскости  $x_3 = 0$  (рис. 73). Функция Грина дается формулой

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|y||x-y^*|} - \frac{1}{4\pi|x-\tilde{y}|} + \frac{R}{4\pi|y||x-\tilde{y}^*|}. \quad (14)$$

г) Двугранный угол  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ . Пусть точка  $y = (y_1, y_2, y_3)$  лежит в этом двугранном угле,  $y_2 > 0$ ,  $y_3 > 0$ ;  $\tilde{y}$  и  $y'$  — точки, симметричные с  $y$  относительно плоскостей  $x_3 = 0$  и  $x_2 = 0$  соответственно;  $\tilde{y}'$  — точка, симметричная с  $\tilde{y}$  относительно плоскости  $x_3 = 0$

<sup>\*)</sup> Эта область неограничена (см. также пример г)). Функция Грина в этом случае должна удовлетворять дополнительному условию  $\mathcal{G}(x, y) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $y \in G$ .

(рис. 74). Функция Грина имеет вид

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{1}{4\pi|x - \tilde{y}|} - \frac{1}{4\pi|x - y'|} + \frac{1}{4\pi|x - \tilde{y}'|}. \quad (15)$$

Аналогично строится функция Грина и для двугранного угла раствора  $\pi/n$ , где  $n$  — натуральное число  $\geq 3$ .

### 3. Решение краевой задачи с помощью функции Грина.

В этом пункте будем считать, что  $S$  — достаточно гладкая поверхность (см. § 5.6, п. 2). Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad u|_S = u_0, \quad u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}), \quad (16)$$

где  $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap \mathcal{C}(G)$  и  $u_0 \in \mathcal{C}(S)$ . Как доказано в § 5.6, п. 2, решение этой задачи единственно.

**ТЕОРЕМА.** *Если решение  $u(x)$  задачи (16) имеет правильную нормальную производную на  $S$ , то оно представляется формулой*

$$u(x) = - \int_S \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} u_0(y) dS_y + \int_G \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad x \in G. \quad (17)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По условию решение  $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$  имеет правильную нормальную производную на  $S$  и  $\Delta u = -f \in \mathcal{L}_2(G) \cap \mathcal{C}(G)$ . Применяя к функции  $u(x)$  формулу Грина (1) из § 5.3 при  $n = 3$  и учитывая (16), получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} - u_0(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x - y|} \right] dS_y + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{f(y)}{|x - y|} dy, \quad x \in G. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, при каждом  $x \in G$  функция  $g(x, y)$  гармоническая по  $y$  в  $G$ , непрерывная по  $y$  на  $\overline{G}$  и имеет правильную нормальную производную  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y}$  на  $S$  (см. п. 1). Применяя к функциям  $u(x)$  и  $g(x, y)$  формулу Грина (8) из § 5.1, получаем равенство

$$0 = \int_S \left[ \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} g(x, y) - u_0(y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right] dS_y + \int_G f(y) g(x, y) dy, \quad x \in G.$$

Прибавляя это равенство к равенству (18) и пользуясь (1) и (3), получаем (17). Теорема доказана.

**4. Формула Пуассона.** Вычислим теперь нормальную производную функции Грина для шара  $U_R$  на сфере  $S_R$ . Пользуясь представлением (12), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big|_{y \in S_R} &= \frac{\partial}{\partial |y|} \left[ \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R|y|}{4\pi|x||y|^2 - yR^2} \right] \Big|_{|y|=R} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho \cos \gamma}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{\sqrt{R^4 + |x|^2 \rho^2 - 2R^2|x|\rho \cos \gamma}} \right] \Big|_{\rho=R} = \\ &= \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R(R^2 + |x|^2 - 2R|x|\cos \gamma)^{3/2}} = \frac{|x|^2 - R^2}{4\pi R|x-y|^3} \Big|_{y \in S_R}. \end{aligned}$$

Формула (17) для шара  $U_R$  при  $f = 0$  принимает вид

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0(y) dS_y, \quad |x| < R. \quad (19)$$

Это и есть *формула (интеграл) Пуассона*. Она аналогична формуле Коши для аналитических функций.

Докажем, что формула Пуассона (19) дает решение внутренней задачи Дирихле для шара  $U_R$

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0, \quad (20)$$

для любой непрерывной на  $S_R$  функции  $u_0$ .

Действительно, решение  $u(x)$  этой задачи существует и единственно для любой непрерывной функции  $u_0$  (см. § 5.6). Во всяком меньшем шаре  $U_\rho$ ,  $\rho < R$ , функция  $u(x)$  является решением задачи Дирихле с граничным значением  $u|_{S_\rho}$  и принадлежит классу  $C^\infty(\overline{U}_\rho)$ . Поэтому по теореме из п. 3 это решение представляется интегралом Пуассона (19), т. е.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_{|y|=\rho} \frac{\rho^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0(y) dS_y, \quad |x| < \rho.$$

Переходя в этой формуле к пределу при  $\rho \rightarrow R$  и пользуясь непрерывностью  $u(x)$  на  $\overline{U}_R$  и граничным условием (20), получим представление (19), что и требовалось.

**5. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению.** Рассмотрим в области  $G$  краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad u|_S = 0, \quad u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}), \quad (21)$$

где  $f \in \mathcal{L}_2(G) \cap \mathcal{C}(G)$ .

Предварительно докажем следующую лемму.

**ЛЕММА.** *Если  $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$ , то функция*

$$\tilde{V}(x) = \int_G g(x, y) f(y) dy \quad (22)$$

*гармоническая в области  $G$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как функция  $g(x, y)$  непрерывна по  $(x, y)$  в  $G \times \overline{G}$  и гармонична по  $x$  в  $G$  (см. п. 1), то  $\tilde{V} \in \mathcal{C}(G)$  и для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int \tilde{V}(x) \Delta \varphi(x) dx &= \int \left[ \int g(x, y) f(y) dy \right] \Delta \varphi(x) dx = \\ &= \int f(y) \left[ \int g(x, y) \Delta \varphi(x) dx \right] dy = 0, \end{aligned}$$

так как  $g$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому функция  $\tilde{V}(x)$  обобщенно-гармоническая и, значит, гармоническая в области  $G$  (см. § 5.3, п. 7). Лемма доказана.

**ТЕОРЕМА.** *Если  $f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , то (единственное) решение задачи (21) выражается формулой*

$$u(x) = \int_G \mathcal{G}(x, y) f(y) dy \quad (23)$$

*и имеет правильную нормальную производную на  $S$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем, что формула (23) дает решение задачи (21). Пользуясь (1), перепишем (23) в виде суммы двух слагаемых:

$$u(x) = V(x) + \tilde{V}(x), \quad (24)$$

где  $V$  — объемный потенциал с плотностью  $f/(4\pi)$  и функция  $\tilde{V}$  определена равенством (22).

По предположению  $f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ . Поэтому объемный потенциал  $V$  принадлежит  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$  и удовлетворяет уравнению Пуассона (21) (см. § 5.5, п. 1). По лемме функция  $\tilde{V}(x)$  гармоническая в

области  $G$ . Итак, функция  $u$  принадлежит  $\mathcal{C}^2(G)$  и в области  $G$  удовлетворяет уравнению Пуассона (21).

Докажем, что  $u$  принадлежит  $\mathcal{C}(\overline{G})$  и обращается в нуль на  $S$ . Для этого достаточно показать, что

$$|u(x')| \rightarrow 0, \quad x \in S, \quad x' \rightarrow x, \quad x' \in G. \quad (25)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . В силу оценок (4) найдется подобласть  $G' \Subset G$  такая, что (см. § 1.1, п. 4 и рис. 75)

$$\left| \int_{G \setminus G'} \mathcal{G}(x', y) f(y) dy \right| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{G \setminus G'} \frac{|f(y)|}{|x' - y|} dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x' \in \overline{G}. \quad (26)$$

Функция  $g(x', y)$  равномерно непрерывна по  $(x', y)$  на  $\overline{G} \times \overline{G}'$  (см. п. 1). Поэтому в силу (1) функция Грина  $\mathcal{G}(x', y)$  равномерно непрерывна по  $(x', y)$  на  $(G \setminus G'') \times \overline{G}'$ , где  $G'' \Subset G'$  — любая подобласть такая, что  $G' \Subset G'' \Subset G$  (см. рис. 75). Учитывая, что функция  $\mathcal{G}(x', y)$  обращается в нуль при  $x' \in S$ ,  $y \in \overline{G}'$ , заключаем, что найдется достаточно близкая к  $G$  подобласть  $G'' \Subset G$  такая, что

$$\left| \int_{G'} \mathcal{G}(x', y) f(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x' \in G \setminus G''.$$

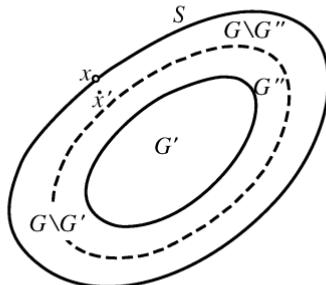


Рис. 75

Отсюда и из неравенства (26) вытекает следующее неравенство:

$$|u(x')| = \left| \int_G \mathcal{G}(x', y) f(y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

справедливое при всех  $x' \in G \setminus G''$ . Это и доказывает предельное соотношение (25).

Докажем, что функция  $u(x)$  имеет правильную нормальную производную на  $S$ . Так как  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$  (см. § 5.5, п. 1), то в силу (24) для этого достаточно установить, что функция  $\tilde{V}(x)$  имеет правильную нормальную производную на  $S$ . По доказанному  $\tilde{V} \in \mathcal{C}(\overline{G})$  гармоническая в  $G$  и удовлетворяет граничному условию  $\tilde{V}|_S = -V|_S$ .

Построим потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  с непрерывной плотностью, решающий внешнюю задачу Неймана с  $u_1^+ = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}|_S$  (см.

§ 5.6, п. 4). Объемный потенциал  $-V(x)$  также является решением этой задачи (см. § 5.5, п. 1). Поэтому в силу единственности решения внешней задачи Неймана (см. § 5.6, п. 2) заключаем, что  $V^{(0)}(x) = -V(x)$ ,  $x \in G_1$ . В частности,  $V^{(0)}|_S = -V|_S$ . Отсюда по теореме о единственности решения внутренней задачи Дирихле (см. § 5.6, п. 2) получаем, что  $\tilde{V}(x) = V^{(0)}(x)$ ,  $x \in G$ . Поскольку потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  имеет правильную нормальную производную (изнутри) на  $S$  (см. § 5.5, п. 7), то и  $\tilde{V}$  обладает этим свойством. Теорема доказана.

Теперь проверим, что краевая задача

$$-\Delta u = \lambda u + f(x), \quad u|_S = 0, \quad u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}), \quad (27)$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \int_G \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad u \in \mathcal{C}(\overline{G}), \quad (28)$$

если  $f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ .

Действительно, пусть функция  $u \in \mathcal{C}(\overline{G})$  есть решение интегрального уравнения (28), т. е. в силу (1)

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{\lambda u(y) + f(y)}{|x - y|} dy + \int_G g(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy. \quad (28')$$

Первое слагаемое справа в (28') есть объемный потенциал и потому принадлежит классу  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$  (см. § 5.5, п. 1), а второе слагаемое есть гармоническая функция в области  $G$  (см. лемму). Поэтому  $u \in \mathcal{C}^1(G)$  и, следовательно,  $\lambda u + f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ . По только что доказанной теореме функция  $u(x)$  есть решение краевой задачи (27).

Обратно, если функция  $u_1(x)$  есть решение задачи (27), то она является (единственным) решением краевой задачи (21) с заменой  $f$  на  $\lambda u_1 + f$ . Так как  $\lambda u_1 + f \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , то по теореме это решение выражается интегралом (23) с заменой  $f$  на  $\lambda u_1 + f$ , т. е. функция  $u_1$  удовлетворяет интегральному уравнению (28). Этим доказана эквивалентность задач (27) и (28).

**6. Свойства собственных значений и собственных функций.** Данна однородная краевая задача на собственные значения (внутренняя задача Дирихле)

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_S = 0, \quad u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}). \quad (29)$$

В п. 5 было показано, что задача (29) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_G \mathcal{G}(x, y)u(y) dy, \quad u \in \mathcal{C}(\overline{G}), \quad (30)$$

с симметричным (и, стало быть, эрмитовым) ядром  $\mathcal{G}(x, y)$  (см. п. 1).

Докажем, что ядро  $\mathcal{G}(x, y)$  слабо полярное (см. § 4.4, п. 6). Для этого функцию  $g(x, y)$ , заданную и непрерывную на  $(\overline{G} \times G) \cup (G \times \overline{G})$  (см. п. 1), продолжим на  $\overline{G} \times \overline{G}$ , полагая в соответствии с (3)

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x - y|}, \quad x \in S, \quad y \in S.$$

При таком продолжении функция  $g(x, y)$  непрерывна на  $\overline{G} \times \overline{G}$ , кроме точек  $x = y, y \in S$ . А тогда в силу (1) функция Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  непрерывна при  $x, y \in \overline{G}, x \neq y$ , и, стало быть, в силу (4) ядро  $\mathcal{G}(x, y)$  слабо полярное ( $\alpha = 1, n = 3$ ).

В частности, для уравнения (30) справедливы все положения теории интегральных уравнений с симметричным слабо полярным ядром (см. § 4.3, 4.4). Но собственные значения и собственные функции краевой задачи (29) совпадают с характеристическими числами и собственными функциями ядра  $\mathcal{G}(x, y)$ . Это позволяет для краевой задачи (29) полностью доказать теоремы из § 5.1, п. 4, а также установить и некоторые дополнительные свойства этой задачи.

**ТЕОРЕМА.** *Множество собственных значений  $\{\lambda_k\}$  краевой задачи (29) не имеет конечных предельных точек, причем все  $\lambda_k$  больше нуля; каждое собственное значение  $\lambda_k$  имеет конечную кратность. Наименьшее собственное значение  $\lambda_1$  простое, а собственная функция  $X_1$  может быть выбрана положительной в  $G$ . Собственные функции  $X_k$  принадлежат  $C^2(G) \cap C(\overline{G})$  и их можно выбрать вещественными и ортонормальными; они имеют правильную нормальную производную на  $S$ . Всякая функция  $f$  из  $\mathcal{M}_D$ ) разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям  $\{X_k\}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отсутствие конечных предельных точек у множества  $\{\lambda_k\}$  и конечная кратность каждого собственного значения  $\lambda_k$  следует из теорем Фредгольма (см. § 4.2). Из вещественности и эрмитовости ядра  $\mathcal{G}(x, y)$  вытекает, что собственные функции  $X_k$  можно выбрать вещественными и ортонормальными (см. § 4.3, п. 3 и § 4.4, п. 6).

Каждая собственная функция  $X_k \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$  и является решением краевой задачи (29) и интегрального уравнения (30). Поэтому по теореме из п. 5  $X_k(x)$  имеет правильную нормальную производную на  $S$ . Отсюда и из формулы Грина (7) из § 5.1 при  $u = v = X_k$

---

<sup>\*)</sup> То есть  $f \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ ,  $\Delta f \in L_2(G)$  и  $f|_S = 0$  (см. § 5.1, п. 1).

вытекает, что

$$\lambda_k = \lambda_k(X_k, X_k) = -(\Delta X_k, X_k) = \int_G |\operatorname{grad} X_k|^2 dx > 0.$$

Простота  $\lambda_1$  и положительность  $X_1$  вытекают из теоремы Ентча (см. § 4.4, п. 6), так как в силу (4) ядро  $\mathcal{G}(x, y)$  положительное.

Пусть  $f \in \mathcal{M}_\Delta$ . Тогда функция  $f(x)$  является (единственным) решением краевой задачи

$$\Delta f = -h, \quad f|_S = 0,$$

где  $h = -\Delta f \in \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{L}_2(G)$ . По теореме из п. 3 функция  $f(x)$  истоковообразно представима через ядро  $\mathcal{G}(x, y)$ , и, следовательно, по теореме Гильберта–Шмидта (см. § 4.4, п. 6) она разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям  $X_k$ . Теорема доказана.

Таким образом, для краевой задачи (29) верны теорема 1 из § 5.1, п. 4 и следствия из нее. В частности, система собственных функций  $\{X_k\}$  этой задачи полна в  $\mathcal{L}_2(G)$ .

## 7. Упражнения.

а) Пользуясь формулой Пуассона (19), доказать *неравенство Гарнака*

$$\frac{R(R - |x|)}{(R + |x|)^2} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R(R + |x|)}{(R - |x|)^2} u(0), \quad |x| < R,$$

справедливое для любой функции  $u(x) \geq 0$ , гармонической в шаре  $U_R$  и непрерывной на  $\overline{U}_R$ .

б) Пользуясь неравенством Гарнака, доказать теорему: всякая возрастающая последовательность гармонических функций в области  $G$  сходится (равномерно на каждом компакте  $K \subset G$ ) или к гармонической в  $G$  функции, или к  $+\infty$ .

в) Доказать равенство

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^3} dS_y = \begin{cases} 1, & |x| < R, \\ -\frac{R}{|x|}, & |x| > R. \end{cases}$$

г) Пользуясь в), доказать, что интеграл Пуассона

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^3} u_0(y) dS_y, \quad |x| > R,$$

дает решение внешней задачи Дирихле для шара  $U_R$ .

д) Показать, что  $n$ -мерный интеграл Пуассона

$$\frac{1}{\sigma_n R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} u_0(y) dS_y, \quad |x| < R,$$

дает решение внутренней задачи Дирихле для шара  $U_R \subset \mathbb{R}^n$ .

е) Показать, что решение задач Дирихле и Неймана для полу-пространства  $x_3 > 0$  представляется соответственно формулами

$$\frac{x_3}{2\pi} \int_{y_3=0} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3} dS_y, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{y_3=0} \frac{u_1(y)}{|x-y|} dS_y,$$

если  $u_0 = O(|y|^{1-\varepsilon})$ ,  $u_1(y) = O(|y|^{-1-\varepsilon})$ ,  $|y| \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $y = (y_1, y_2, 0)$ .

ж) Пусть  $G$  — выпуклая ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ . Доказать, что краевая задача для стационарного уравнения переноса

$$(s, \operatorname{grad} \psi) + \alpha \psi = \lambda h(x) \varphi(x) + f(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, s') ds', \quad \psi(x, s) = 0, \quad x \in S, \quad (s, \mathbf{n}_x) < 0,$$

эквивалентна интегральному уравнению Пайерлса

$$\varphi(x) = \int_G \mathcal{K}(|x-y|)[\lambda h(y) \varphi(y) + f(y)] dy, \quad \mathcal{K}(\xi) = \frac{e^{-\alpha\xi}}{4\pi\xi^2},$$

где  $h, f \in \mathcal{C}(\overline{G})$ ,  $h(x) > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

з) Пользуясь ж) и теоремой Ентча (см. § 4.4, п. 6) доказать: все характеристические числа  $\lambda_k$  однородного уравнения Пайерлса положительные,  $\lambda_1$  простое, соответствующая собственная функция  $\varphi_1$  положительная, система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  полна в  $\mathcal{L}_2(G; h)$ .

и) Доказать следующий принцип максимума: если функция  $u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$  удовлетворяет в ограниченной области  $G$  дифференциальному неравенству

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + q(x)u \leqslant 0, \quad p > 0, \quad q \geqslant 0,$$

то либо  $u \leqslant 0$  на  $\overline{G}$ , либо  $u$  принимает свой (положительный) максимум на  $\overline{G}$  на границе  $S$ .

к) Пользуясь и), доказать: если функция  $u(x) \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$  есть решение краевой задачи

$$-\Delta u + q(x)u = F(x), \quad u|_S = v(x), \tag{31}$$

то справедливо неравенство

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{q_0} \|F\|_{\mathcal{C}(\overline{G})} + \|v\|_{\mathcal{C}(S)}, \quad q_0 = \min_{x \in \overline{G}} q(x).$$

л) С помощью к) доказать единственность решения задачи (31) в классе  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$  и его непрерывную зависимость от  $F$  и  $v$  в норме  $\mathcal{C}$  (при условии  $q_0 > 0$ ).

м) Доказать, что решение краевой задачи

$$Lu = f, \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v,$$

единственны в  $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G})$ , если  $q \neq 0$  или  $\alpha \neq 0$ .

н) Пусть  $L$  — положительно определенный оператор, т. е.  $(Lu, u) > 0$ ,  $u \in \mathcal{M}_L$ ,  $u \neq 0$ . Доказать: для того чтобы функция  $u_0 \in \mathcal{M}_L$  была решением уравнения  $Lu_0 = f$ ,  $f \in \mathcal{L}_2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы она давала в  $\mathcal{M}_L$  минимум функционалу

$$(Lu, u) - 2 \operatorname{Re}(f, u);$$

решение  $u_0$  единственно в  $\mathcal{M}_L$ .

### § 5.8. Краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости

Для точки  $(x, y)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  будем применять обозначения  $z = x + iy$  или  $\bar{z} = x - iy$ . Считаем, что  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$  с кусочно гладкой границей  $S$ .

Большинство результатов, полученных в §5.5–5.7 для краевых задач в пространстве, переносится и на плоские краевые задачи с заменой фундаментального решения  $\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$  на фундаментальное решение  $\mathcal{E}_2(z) = \frac{1}{2\pi} \ln|z|$ . Однако в постановках и решениях этих задач возникают некоторые различия, связанные с поведением фундаментального решения  $\mathcal{E}_2$  на бесконечности.

**1. Постановка и единственность решения основных краевых задач.** Основные краевые задачи для уравнения Лапласа на плоскости ставятся так же, как и соответствующие задачи в пространстве (см. §5.6, п. 1), за исключением того, что для внешних задач требуется лишь ограниченность решения при  $|z| \rightarrow \infty$  (а не обращение в нуль). Предполагаем, что  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$  — область.

Из результатов § 5.3, пп. 5, 10 следует: *если функция  $u(z)$  гармоническая в  $G_1$ , непрерывная и ограниченная на  $\overline{G}_1$ , то*

$$\lim u(z) = \alpha, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (1)$$

$$\operatorname{grad} u(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$|u(z)| \leq \max_{z' \in S} |u(z')|, \quad z \in \overline{G}_1. \quad (3)$$

Линия Ляпунова и достаточно гладкая линия определяются также, как и соответствующая поверхность в пространстве (см. § 5.5, п. 4 и § 5.6, п. 2); неравенство (18) из § 5.5 в этом случае принимает вид

$$\int_S \frac{|\cos \varphi_z \zeta|}{|z - \zeta|} dS_\zeta \leq K, \quad z \in \mathbb{R}^2.$$

Справедливы следующие теоремы единственности для основных краевых задач для уравнения Лапласа.

Решение внутренней или внешней задач Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничных данных  $u_0^-$  или  $u_0^+$  соответственно.

Если  $S$  — достаточно гладкая линия, то решение внутренней или внешней задачи Неймана определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной, причем

$$\int_S u_1^-(z) dS \quad \text{или} \quad \int_S u_1^+(z) dS = 0 \quad (4)$$

— необходимое условие разрешимости соответствующей задачи.

Доказательство этих утверждений подобно доказательству теорем 2, 3 и 4 из § 5.6, п. 2. Некоторое отличие возникает в связи с появлением необходимого условия разрешимости внешней задачи Неймана. Докажем это.

Пусть  $u(z)$  — решение внешней задачи Неймана с граничной функцией  $u_1^+$  на  $S$ . Так как  $u$  гармонична в  $G_1$  и имеет на  $S$  правильную нормальную производную, равную  $-u_1^+$ , то, применяя формулу (8) из § 5.1 при  $v = 1$  к области  $Q_R$  (см. рис. 56), получим

$$-\int_S u_1^+(z) dS + \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и пользуясь оценкой (2), получим условие (4).

**2. Логарифмический потенциал.** Логарифмический потенциал определяется как свертка обобщенной функции  $\rho$  с функцией  $-\ln|z|$  (см. § 2.3, п. 7):

$$V = -\ln|z| * \rho = -2\pi\mathcal{E}_2 * \rho. \quad (5)$$

Логарифмический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -2\pi\rho. \quad (6)$$

Частными случаями логарифмического потенциала являются:  
потенциал площаadi

$$V(z) = \int_G \rho(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta; \quad (7)$$

потенциал простого слоя

$$V^{(0)}(z) = \ln \frac{1}{|z|} * \mu\delta_S = \int_S \mu(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} dS_\zeta; \quad (8)$$

потенциал двойного слоя

$$V^{(1)}(z) = -\ln \frac{1}{|z|} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu\delta_S) = \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (9)$$

Эти потенциалы обладают следующими свойствами.

Если  $\rho \in \mathcal{C}(\overline{G})$ , то потенциал  $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  гармоничен в  $G_1$  и

$$V(z) = \int_G \rho(\zeta) d\xi d\eta \ln \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Если, кроме того  $\rho \in \mathcal{C}^1(G)$ , то  $V \in \mathcal{C}^2(G)$ .

Если  $\mu \in \mathcal{C}(S)$ , то потенциал  $V^{(0)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  гармоничен вне  $S$  и

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu(\zeta) dS_\zeta \ln \frac{1}{|z|} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если  $S$  — линия Ляпунова, то потенциал  $V^{(0)}(z)$  имеет правильные нормальные производные  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+$  и  $\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_-$  извне и изнутри на  $S$ , причем

$$\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right)_+(z) = -\pi\mu(z) + \frac{\partial V^{(0)}(z)}{\partial \mathbf{n}} = -\pi\mu(z) + \int_S \mu(\zeta) \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta, \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \right)_-(z) = \pi \mu(z) + \frac{\partial V^{(0)}(z)}{\partial \mathbf{n}} = \pi \mu(z) + \int_S \mu(\zeta) \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (12')$$

Если  $\nu \in \mathcal{C}(S)$ , то потенциал  $V^{(1)}$  гармоничен вне  $S$  и

$$V^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Если  $S$  — линия Ляпунова, то

$$\int_S \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta = \begin{cases} -2\pi, & x \in G, \\ -\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in G_1. \end{cases} \quad (14)$$

Потенциал  $V^{(1)}$  принадлежит  $\mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{C}(S) \cap \mathcal{C}(\overline{G}_1)$ , и его предельные значения  $V_+^{(1)}$  и  $V_-^{(1)}$  извне и изнутри на  $S$  имеют представления

$$V_+^{(1)}(z) = \pi \nu(z) + V^{(1)}(z) = \pi \nu(z) + \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta, \quad (15)$$

$$V_-^{(1)}(z) = -\pi \nu(z) + V^{(1)}(z) = -\pi \nu(z) + \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (15')$$

Доказательства этих свойств аналогичны соответствующим доказательствам для трехмерного случая (см. § 5.5). Некоторые различия имеются лишь в доказательстве оценок (10) и (11). Докажем, например, оценку (10).

Согласно определению (7)

$$V(z) - \int_G \rho(\zeta) d\xi d\eta \ln \frac{1}{|z|} = \int_G \rho(\zeta) \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} d\xi d\eta. \quad (16)$$

Пусть  $G$  лежит в круге  $U_R$  и  $|z| > 2R$ . Тогда при всех  $\zeta \in \overline{G}$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |z| - R &\leq |z - \zeta| \leq |z| + R, \\ -\frac{2R}{|z|} &\leq \ln \frac{|z|}{|z| + R} \leq \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} \leq \ln \frac{|z|}{|z| - R} \leq \frac{2R}{|z|}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда и из (16) следует оценка (10):

$$\left| V(z) - \int_G \rho(\zeta) d\xi d\eta \ln \frac{1}{|z|} \right| \leq \int_G |\rho(\zeta)| \left| \ln \frac{|z|}{|z - \zeta|} \right| d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \frac{2R}{|z|} \int_G |\rho(\zeta)| d\xi d\eta = \frac{C}{|z|}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ  $\mathcal{E}_2(z)$ . Вычислим электростатический потенциал  $V(z, x_3)$ , создаваемый зарядами, лежащими на оси  $x_3$ , с линейной плотностью  $-\frac{1}{4\pi}$ , т. е. с распределением  $\rho(z, x_3) = -\frac{1}{4\pi}\delta(z) \cdot 1(x_3)$ . Метод спуска по переменной  $x_3$ , изложенный в § 3.1, п. 4, здесь не проходит. Несколько модифицируя этот метод, определим потенциал  $V(z, x_3)$  как предел при  $N \rightarrow \infty$  потенциалов  $V_N(z, x_3)$ , создаваемых зарядами, лежащими на отрезке  $|x_3| \leq N$  оси  $x_3$ , с линейной плотностью  $-\frac{1}{4\pi}$ , т. е. с распределением

$$\rho_N(z, x_3) = -\frac{1}{4\pi} \delta(z) \cdot \theta(N - |x_3|). \quad (18)$$

Этот потенциал есть свертка  $\rho_N$  с  $-4\pi\mathcal{E}_3$  (см. § 5.5) плюс произвольная постоянная  $c_N$ <sup>\*</sup>:

$$\begin{aligned} V_N(z, x_3) &= -\frac{1}{\sqrt{|z|^2 + x_3^2}} * \left[ \frac{\delta(z)}{4\pi} \cdot \theta(N - |x_3|) \right] + c_N = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-N}^N \frac{dx'_3}{\sqrt{|z|^2 + (x_3 - x'_3)^2}} + c_N = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left[ x_3 - x'_3 + \sqrt{|z|^2 + (x_3 - x'_3)^2} \right] \Big|_{-N}^N + c_N = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{x_3 - N + \sqrt{|z|^2 + (x_3 - N)^2}}{x_3 + N + \sqrt{|z|^2 + (x_3 + N)^2}} + c_N. \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы обеспечить существование конечного предела  $V_N$  при  $N \rightarrow \infty$ , положим в (19)  $c_N = \frac{1}{2\pi} \ln(2N)$ . В результате получим

$$V(z, x_3) = \lim_{N \rightarrow \infty} V_N(z, x_3) = \frac{1}{2\pi} \ln |z| \cdot 1(x_3).$$

Таким образом, фундаментальное решение  $\mathcal{E}_2(z) = \frac{1}{2\pi} \ln |z|$  есть электростатический потенциал, создаваемый зарядами, лежащими на оси  $x_3$ , с линейной плотностью  $-\frac{1}{4\pi}$  (ср. § 3.1, п. 4).

<sup>\*</sup>) В классе функций, обращающихся в нуль на бесконечности, потенциал  $V(z, x_3)$  не существует. Поэтому и потенциалы  $V_N(z, x_3)$  будем выбирать из более широкого класса функций (в данном случае — ограниченных на бесконечности).

**3. Разрешимость краевых задач.** Предположим, что граница  $S$  области  $G$  — достаточно гладкая линия и  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$  — область.

Как и § 5.6, п. 3, решение внутренней задачи Дирихле ищем в виде потенциала двойного слоя

$$V^{(1)}(z) = \int_S \nu(\zeta) \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} dS_\zeta, \quad \nu \in \mathcal{C}(S); \quad (20)$$

решение внешней задачи Дирихле — в виде суммы потенциала двойного слоя  $V^{(1)}$  и неизвестной постоянной  $\alpha$ ; решение задачи Неймана (внутренней или внешней) — в виде потенциала простого слоя

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} dS_\zeta, \quad \mu \in \mathcal{C}(S). \quad (21)$$

Для неизвестных плотностей  $\nu$  и  $\mu$  и числа  $\alpha$  в силу формул (12), (12'), (15) и (15') получаем интегральные уравнения

$$\nu(z) = \lambda \int_S K(z, \zeta) \nu(\zeta) dS_\zeta + f(z), \quad z \in S, \quad (22)$$

$$\mu(z) = \lambda \int_S K^*(z, \zeta) \mu(\zeta) dS_\zeta + g(z), \quad z \in S, \quad (22')$$

с полярными (союзными друг другу) ядрами

$$K(z, \zeta) = \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{\pi |z - \zeta|}, \quad K^*(z, \zeta) = \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{\pi |z - \zeta|}. \quad (23)$$

Здесь  $\lambda = 1$ ,  $f = -u_0^-/\pi$  соответствует внутренней и  $\lambda = -1$ ,  $f = (u_0^+ - \alpha)/\pi$  — внешней задачам Дирихле,  $\lambda = -1$ ,  $g = u_1^-/\pi$  — внутренней и  $\lambda = 1$ ,  $g = -u_1^+/\pi$  — внешней задачам Неймана.

Пусть  $\mu$  — непрерывное решение уравнения (22') при  $\lambda = 1$  и  $g = -u_1^+/\pi$ . Интегрируя его левую и правую части по кривой  $S$  и пользуясь (23) и (14), получаем

$$\begin{aligned} \int_S \mu(z) dS &= \frac{1}{\pi} \int_S \int_S \frac{\cos \varphi_{\zeta z}}{|\zeta - z|} \mu(\zeta) dS_\zeta dS_z - \frac{1}{\pi} \int_S u_1^+(z) dS = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_S \mu(\zeta) \int_S \frac{\cos \varphi_{\zeta z}}{|\zeta - z|} dS_z dS_\zeta - \frac{1}{\pi} \int_S u_1^+(z) dS = \\ &= - \int_S \mu(\zeta) dS - \frac{1}{\pi} \int_S u_1^+(z) dS, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_S \mu(z) dS = -\frac{1}{2\pi} \int_S u_1^+(z) dS. \quad (24)$$

Докажем, что  $\lambda = 1$  не есть характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^*(z, \zeta)$ . Пусть, напротив,  $\lambda = 1$  — характеристическое число этого ядра и  $\mu^*$  — соответствующая собственная функция,

$$\mu^*(z) = \int_S \mathcal{K}^*(z, \zeta) \mu^*(\zeta) dS_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} \mu^*(\zeta) dS_\zeta, \quad z \in S. \quad (25)$$

Тогда  $\mu^* \in \mathcal{C}(S)$  и, в соответствии с (24) (при  $u_1^+ = 0$ )

$$\int_S \mu^*(z) dS = 0. \quad (26)$$

Рассмотрим потенциал простого слоя  $V^{(0)}$  с плотностью  $\mu^*$ . Функция  $V^{(0)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  гармонична вне  $S$  и в силу (26) и (11)  $V^{(0)}(\infty) = 0$ . Далее в силу (12) и (25) ее правильная нормальная производная извне на  $S$  равна нулю. Отсюда, пользуясь единственностью решения внешней задачи Неймана и внутренней задачи Дирихле (см. п. 1), как и в § 5.6, п. 4, заключаем, что  $V^{(0)}(z) \equiv 0$ ,  $z \in \mathbb{R}^2$ , и, следовательно,  $\mu^*(z) \equiv 0$ ,  $z \in S$ , что противоречит определению собственной функции.

По теоремам Фредгольма уравнения (22) и (22') при  $\lambda = 1$  однозначно разрешимы в  $\mathcal{C}(S)$  при любых непрерывных  $f$  и  $g$ . При этом для решения  $\mu$  уравнения (22') при  $\lambda = 1$  и  $g = -u_1^+/\pi$  справедливо соотношение (24). Поэтому если выполнено условие (4), то в силу (11)  $V^{(0)}(\infty) = 0$ . Итак, доказана

**ТЕОРЕМА 1.** *Внутренняя задача Дирихле разрешима при любой  $u_0^- \in \mathcal{C}(S)$ . Внешняя задача Неймана разрешима при любой  $u_1^+ \in \mathcal{C}(S)$ , удовлетворяющей условию разрешимости (4).*

Из формулы (14) вытекает, что  $\lambda = -1$  есть характеристическое число ядра  $\mathcal{K}(x, \zeta)$  и  $\nu \equiv 1$  — соответствующая собственная функция. По второй теореме Фредгольма  $\lambda = -1$  — характеристическое число союзного ядра  $\mathcal{K}^*(z, \zeta)$ . Пусть  $\mu_0$  — соответствующая собственная функция,

$$\mu_0(z) = - \int_S \mathcal{K}^*(z, \zeta) \mu_0(\zeta) dS_\zeta = -\frac{1}{\pi} \int_S \frac{\cos \psi_{z\zeta}}{|z - \zeta|} \mu_0(\zeta) dS_\zeta, \quad z \in S. \quad (27)$$

Мы знаем, что  $\mu_0 \in \mathcal{C}(S)$  (см. § 4.4, п. 6). Докажем, что

$$\int_S \mu_0(z) dS = C \neq 0. \quad (28)$$

Пусть, напротив,  $C = 0$ . Рассмотрим потенциал простого слоя с плотностью  $\mu_0$  (потенциал Робена):

$$V^{(0)}(z) = \int_S \mu_0(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} dS_\zeta. \quad (29)$$

Функция  $V^{(0)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  гармонична вне  $S$  и в силу условия  $C = 0$   $V^{(0)}(\infty) = 0$  (см. п. 2). Далее, из (12') и (27) вытекает, что ее правильная нормальная производная изнутри на  $S$  равна нулю. Отсюда, так как решение внутренней задачи Неймана единствено с точностью до аддитивной постоянной, заключаем, что  $V^{(0)}(z) = \text{const} = C_1$ ,  $z \in \overline{G}$ . Но тогда в силу единственности решения внешней задачи Дирихле (см. п. 1)  $V^{(0)}(z) = C_1$ ,  $z \in \overline{G}_1$ , и, следовательно,  $\mu_0 = 0$ , что противоречит определению собственной функции.

Таким образом,  $C \neq 0$ . Отсюда, рассуждая, как и в § 5.6, п. 4, выводим, что  $\lambda = -1$  — простое характеристическое число ядра  $\mathcal{K}^*(z, \zeta)$  и, стало быть, ядра  $\mathcal{K}(z, \zeta)$ .

Нормируем собственную функцию  $\mu_0$  так, чтобы  $C = 1$ . По доказанному соответствующий потенциал Робена  $V^{(0)}(z) = \text{const}$ ,  $z \in \overline{G}$ .

По третьей теореме Фредгольма интегральные уравнения (22) и (22') при  $\lambda = -1$  разрешимы тогда и только тогда, когда их свободные члены  $f$  и  $g$  ортогональны к собственным функциям  $\mu_0$  и 1 соответственно. Для внешней задачи Дирихле это условие принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_S [u_0^+(z) - \alpha] \mu_0(z) dS = 0,$$

т. е. в силу (28) ( $C = 1$ ) оно всегда может быть удовлетворено за счет надлежащего выбора постоянной  $\alpha$ ,

$$\alpha = \int_S u_0^+(z) \mu_0(z) dS. \quad (30)$$

Итак, справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 2.** *Внешняя задача Дирихле разрешима при любой  $u_0^+ \in \mathcal{C}(S)$ . Внутренняя задача Неймана разрешима при любой  $u_1^- \in \mathcal{C}(S)$ , удовлетворяющей условию разрешимости (4).*

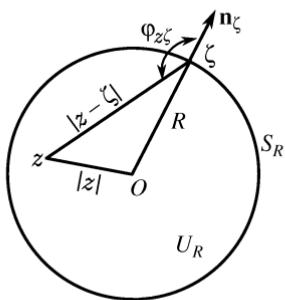


Рис. 76

**4. Решение краевых задач для круга.** Для окружности  $S_R$  интегральные уравнения (22) и (22') легко решаются и дают решения соответствующих краевых задач в явном виде.

Действительно, в силу соотношения (рис. 76)

$$|z|^2 = |z - \zeta|^2 + R^2 + 2R|z - \zeta| \cos \varphi_{z\zeta}, \quad |\zeta| = R, \quad (31)$$

получаем

$$\mathcal{K}(z, \zeta) = \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{\pi |z - \zeta|} = -\frac{1}{2\pi R} = \mathcal{K}^*(z, \zeta), \quad z, \zeta \in S_R.$$

Поэтому интегральные уравнения (22) и (22') принимают единый вид

$$\nu(z) = -\frac{\lambda}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} \nu(\zeta) dS + f(z), \quad |z| = R. \quad (32)$$

Решая это уравнение (см. § 4.2, п. 1), получаем:

$$\nu(z) = -\frac{1}{\pi} u_0^-(z) + \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) dS \quad (33)$$

при  $\lambda = 1$ ,  $f = -u_0^-/\pi$  (*внутренняя задача Дирихле*);

$$\nu(z) = \frac{1}{\pi} u_0^+(z) - \frac{1}{2\pi^2 R} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) dS, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) dS, \quad (34)$$

при  $\lambda = -1$ ,  $f = u_0^+/\pi - \alpha/\pi$  (*внешняя задача Дирихле*);

$$\mu(z) = \frac{1}{\pi} u_1^-(z), \quad \int_{|\zeta|=R} u_1^-(\zeta) dS = 0, \quad (35)$$

при  $\lambda = -1$ ,  $f = u_1^-/\pi$  (*внутренняя задача Неймана*);

$$\mu(z) = -\frac{1}{\pi} u_1^+(z), \quad \int_{|\zeta|=R} u_1^+(\zeta) dS = 0, \quad (36)$$

при  $\lambda = 1$ ,  $f = -u_1^+/\pi$  (*внешняя задача Неймана*).

Подставляя (33) в потенциал двойного слоя (20) и пользуясь формулами (14) и (31), получим решение внутренней задачи Дирихле

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{|\zeta|=R} \left[ -\frac{1}{\pi} u_0^-(\zeta) + \frac{1}{4\pi^2 R} \int_{|\zeta'|=R} u_0^-(\zeta') dS_{\zeta'} \right] \frac{\cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} dS_\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \left( -\frac{2R \cos \varphi_{z\zeta}}{|z-\zeta|} + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta'|=R} \frac{\cos \varphi_{z\zeta'}}{|z-\zeta'|} dS_{\zeta'} \right) dS_\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \frac{-2R|z-\zeta| \cos \varphi_{z\zeta} - |z-\zeta|^2}{|z-\zeta|^2} dS_\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^2} dS_\zeta, \end{aligned}$$

т. е. это решение представляется формулой (интегралом Пуассона)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^-(\zeta) \frac{R^2 - |z|^2}{|z-\zeta|^2} dS_\zeta, \quad |z| < R. \quad (37)$$

Аналогично, подставляя (34) в сумму  $V^{(1)}(z) + \alpha$ , получим решение внешней задачи Дирихле

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\zeta|=R} u_0^+(\zeta) \frac{|z|^2 - R^2}{|z-\zeta|^2} dS_\zeta, \quad |z| > R. \quad (38)$$

Наконец, подставляя (35) и (36) в потенциал простого слоя (21), получим соответственно решения внутренней и внешней задач Неймана

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=R} u_1^-(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|} dS_\zeta + C, \quad |z| < R, \quad (39)$$

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=R} u_1^+(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|} dS_\zeta + C, \quad |z| > R. \quad (40)$$

**5. Функция Грина задачи Дирихле.** *Функцией Грина* (внутренней) задачи Дирихле для (ограниченной) области  $G$  называется функция  $\mathcal{G}(z, \zeta)$ , обладающая свойствами (ср. § 5.7, п. 1): при каждом  $\zeta \in G$  она представляется в виде

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z-\zeta|} + g(z, \zeta), \quad (41)$$

где функция  $g(z, \zeta)$  гармоническая в  $G$  и непрерывная на  $\overline{G}$  по  $z$  и удовлетворяет граничному условию

$$\mathcal{G}(z, \zeta) \Big|_{z \in S} = 0. \quad (42)$$

Из принципа максимума вытекает, что функция Грина удовлетворяет оценке

$$0 < \mathcal{G}(z, \zeta) < \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D}{|z - \zeta|}, \quad z, \zeta \in G, \quad z \neq \zeta, \quad (43)$$

где  $D$  — диаметр области  $G$ . Функция Грина  $\mathcal{G}(z, \zeta)$  обладает и остальными свойствами, установленными в § 5.7, п. 1.

Пусть теперь  $G$  — односвязная область, ограниченная кусочно гладкой кривой  $S$ , и  $w = w(z)$  — функция, конформно отображающая область  $G$  на единичный круг  $|w| < 1$  (рис. 77). Тогда функция

$$\omega(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \bar{w}(\zeta)w(z)} \quad (44)$$

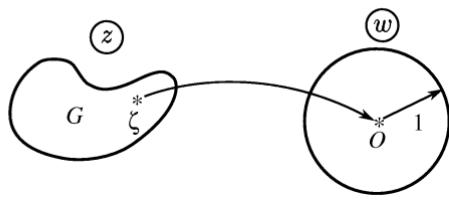


Рис. 77

конформно отображает область  $G$  на единичный круг  $|w| < 1$ , причем точка  $\zeta \in G$  переходит в нуль. Поэтому эта функция при каждом  $\zeta \in G$  представляется в виде

$$\omega(z, \zeta) = (z - \zeta)\psi(z, \zeta), \quad (45)$$

где функция  $\psi(z, \zeta)$  аналитическая по  $z$  в области  $G$ ,  $\psi(z, \zeta) \neq 0$ ,  $z \in \overline{G}$ , и  $\psi \in \mathcal{C}(\overline{G})$  (см. [3]).

Проверим, что функция

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\omega(z, \zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \omega(z, \zeta) \quad (46)$$

есть функция Грина задачи Дирихле для области  $G$ .

Действительно, из (45) вытекает, что функция (46) представляется в виде (41), причем функция

$$g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\psi(z, \zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \psi(z, \zeta)$$

гармонична в  $G$  как вещественная часть аналитической функции  $\ln \psi(z, \zeta)$ ,  $\psi(z, \zeta) \neq 0$ , и непрерывна на  $\overline{G}$ . Далее, в силу равенства  $|\omega| = 1$ ,  $z \in S$ , функция (46) удовлетворяет и условию (42).

Для примера построим функцию Грина для круга  $|z| < R$ . Функция

$$\omega(z, \zeta) = \frac{R(z - \zeta)}{R^2 - z\bar{\zeta}}$$

отображает круг  $|z| < R$  на единичный круг  $|\omega| < 1$ , причем точка  $\zeta$  переходит в нуль. Поэтому в силу (46)

$$\mathcal{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \zeta)} \right| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R(z - \zeta)} \quad (47)$$

есть функция Грина для круга  $|z| < R$ .

### 6. Решение задачи Дирихле для односвязной области.

Метод конформных отображений позволяет получить представление для решения задачи Дирихле для любой односвязной области. Это представление является обобщением формулы Пуассона.

Сначала, пользуясь равенством

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad |\zeta| = R,$$

запишем формулу Пуассона (37) в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (48)$$

Пусть функция  $u_0$  непрерывна на границе  $S$  односвязной области  $G$ . Пусть функция  $z = z(w)$  конформно отображает круг  $|w| < 1$  на область  $G$  и  $w = w(z)$  — обратное отображение (см. рис. 77). Тогда  $z \in \mathcal{C}(\overline{U}_1)$ ; предположим, что  $w \in C^1(G)$ . При этом отображении функция  $u_0(z)$  перейдет в функцию  $u_0[z(w)]$ , непрерывную на окружности  $|w| = 1$ . По формуле (48) построим решение задачи Дирихле для круга  $|w| < 1$  с граничной функцией  $u_0[z(w)]$ :

$$U(w) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} u_0[z(\omega)] \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Переходя в этой формуле к старым переменным  $z$  и  $\zeta$ ,  $w = w(z)$ ,  $\omega = w(\zeta)$ , получим искомое решение задачи Дирихле для области  $G$  с граничной функцией  $u_0$ :

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_S u_0(\zeta) \frac{w(\zeta) + w(z)}{w(\zeta) - w(z)} \frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)} d\zeta, \quad z \in G. \quad (49)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Читатель уже обратил внимание на то, что в этом пункте мы использовали элементы комплексного анализа. Это не случайно. Как известно (см. [3]), вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Обратно, если функция  $u(z)$  гармоническая, то, добавив сопряженную функцию

$$v(z) = \int_{z_0}^z \left[ -\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \xi} d\eta \right], \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

получим аналитическую функцию  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , у которой вещественная часть есть исходная функция  $u(z)$ . Это позволяет активно использовать мощный аппарат теории аналитических функций при решении и изучении краевых задач для гармонических функций на плоскости.

### 7. Упражнения.

а) Пользуясь формулой (22) из § 2.2 и фундаментальным решением  $\frac{1}{\pi z}$  оператора Коши–Римана  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , вывести формулу Коши–Грина: если  $u \in C^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ , то

$$\frac{1}{\pi} \int_G \frac{1}{z - \zeta} \frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} u(z), & z \in G, \\ 0, & z \in G_1. \end{cases}$$

б) Пользуясь а), доказать: если  $u$  принадлежит  $C^1(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$  и удовлетворяет условиям Коши–Римана,  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ ,  $z \in G$ , то  $u(z)$  — аналитическая функция в области  $G$  и справедлива формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} u(z), & z \in G, \\ 0, & z \in G_1. \end{cases}$$

в) Показать, что потенциал простого слоя для окружности  $|z| = R$  с плотностью  $\mu = 1$  равен

$$V^{(0)}(z) = - \int_{|\zeta|=R} \ln |z - \zeta| dS_\zeta = \begin{cases} -2\pi R \ln R, & |z| \leq R, \\ -2\pi R \ln |z|, & |z| \geq R. \end{cases}$$

г) Пользуясь в), показать, что логарифмический потенциал площади для круга  $|z| < R$  с плотностью  $\rho = 1$  равен

$$V(z) = \begin{cases} -\pi R^2 \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} |z|^2, & |z| \leq R, \\ -\pi R^2 \ln |z|, & |z| \geq R. \end{cases}$$

д) Проверить, что следующие функции являются функциями Грина задачи Дирихле \*):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{\zeta}}{z - \zeta} \right| & \quad \text{для полуплоскости } y > 0; \\ \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z - \zeta^*)(z - \bar{\zeta})}{(z - \zeta)(z - \bar{\zeta}^*)} \right| & \quad \text{для полукруга } |z| < R, y > 0; \\ \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - \bar{\zeta}^2}{z^2 - \zeta^2} \right| & \quad \text{для четверти плоскости } x > 0, y > 0; \\ \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^{z-\bar{\zeta}} - 1}{e^{z-\zeta} - 1} \right| & \quad \text{для полосы } 0 < y < \pi. \end{aligned}$$

е) Показать, что решения задач Дирихле и Неймана для полуплоскости  $y > 0$  имеют представления

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) \ln[(x - \xi)^2 + y^2] d\xi + C,$$

если  $u_0(\xi) = O(|\xi|^{1-\varepsilon})$ ,  $u_1(\xi) = O(|\xi|^{-1-\varepsilon})$ ,  $|\xi| \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ .

ж) Пусть функция  $\varphi(\theta)$  разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье на  $[0, 2\pi]$ ,

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Доказать, что:

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{|z|}{R} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

— решение внутренней задачи Дирихле для круга  $|z| < R$  с  $u_0^- = \varphi$ ;

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{R}{|z|} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

---

\* ) Напомним (см. § 5.7, п. 2, примечание), что в случае неограниченных областей мы добавляем условие убывания функции Грина на бесконечности.

— решение внешней задачи Дирихле с  $u_0^+ = \varphi$ ;

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{kR^{k-1}} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C$$

— решение внутренней задачи Неймана с  $u_1^- = \varphi$  при условии  $a_0 = 0$ ;

$$u(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{k+1}}{k|z|^k} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

— решение внешней задачи Неймана с  $u_1^+ = \varphi$  при условии  $a_0 = 0$ .

## Г л а в а VI

### СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

В этой главе будет рассмотрена смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов и дано обоснование метода Фурье (метода разделения переменных).

#### § 6.1. Метод Фурье

Одним из наиболее эффективных методов решения многомерных краевых задач является метод Фурье (разделения переменных). В § 5.4 этот метод был применен к краевым задачам на собственные значения. В этом параграфе метод Фурье формально применяется к решению краевых задач для уравнений различных типов. Обоснование метода Фурье для решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типов будет дано в следующих параграфах этой главы.

Пусть оператор  $L$  определяется дифференциальным выражением

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu, \quad x \in G,$$

и граничным условием

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0,$$

где функции  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  удовлетворяют условиям (3) из § 5.1. Пусть задан вес  $\rho \in C(\overline{G})$ ,  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in \overline{G}$ .

Предполагаем, что собственные значения  $\lambda_k$  оператора  $L$  положительны,  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , а соответствующие собственные функции  $X_k$  с весом  $\rho$ ,

$$LX_k = \lambda_k \rho X_k, \quad X_k \in \mathcal{M}_L, \quad k = 1, 2, \dots,$$

вещественны и образуют полную ортонормальную систему в пространстве  $\mathcal{L}_2(G; \rho)$  со скалярным произведением  $(f, g)_\rho$  с весом  $\rho$ .

**1. Однородное гиперболическое уравнение.** Рассмотрим в бесконечном цилиндре  $\mathcal{D}_\infty = G \times (0, \infty)$  смешанную задачу для однородного уравнения гиперболического типа (см. § 1.4, п. 4)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Сущность метода Фурье состоит в следующем: строится достаточно большое количество решений уравнения (1), представляемых произведением

$$T(t)X(x) \quad (4)$$

и удовлетворяющих граничному условию (3); из этих решений составляется линейная комбинация, удовлетворяющая начальным условиям (2); при некоторых условиях естественно ожидать, что полученная линейная комбинация будет удовлетворять уравнению (1) и граничному условию (3), т. е. будет построено решение задачи (1)–(3).

Итак, ищем решение уравнения (1) в виде произведения (4), причем от функции  $X(x)$  потребуем, чтобы она удовлетворяла граничному условию (3). Подставляя выражение (4) в уравнение (1) и деля его на  $\rho T X$ , получим

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\rho(x)X(x)}. \quad (5)$$

Левая часть равенства (5) не зависит от  $x$ , а правая от  $t$ . Следовательно, каждая из этих величин не зависит ни от  $x$ , ни от  $t$ , т. е. является постоянной величиной. Обозначая эту постоянную через  $-\lambda$  (ср. § 5.4, п. 1), из равенства (5) для неизвестных функций  $T$  и  $X$  и параметра  $\lambda$  получим уравнения

$$LX = \lambda \rho X, \quad (6)$$

$$T'' + \lambda T = 0. \quad (7)$$

Следовательно, уравнение (1) распалось на два уравнения, (6) и (7), с меньшим числом независимых переменных, т. е., как говорят, *переменные разделились*.

Решения  $X(x)$  уравнения (6) должны удовлетворять граничному условию (3). Поэтому в качестве  $X$  и  $\lambda$  можно взять собственные функции  $X_k$  и собственные значения  $\lambda_k$  оператора  $L$ . Общее решение уравнения (6) при  $\lambda = \lambda_k$  имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t, \quad (8)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — произвольные постоянные.

Таким образом, в силу (4) и (8) построено счетное число частных (линейно независимых) решений уравнения (1)

$$T_k(t)X_k(x) = (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t)X_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

удовлетворяющих граничному условию (3) и содержащих произвольные постоянные  $a_k$  и  $b_k$ . Всякая конечная сумма решений (9), естественно, также будет удовлетворять уравнению (1) и граничному условию (3).

Составим формальный ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t)X_k(x). \quad (10)$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  выберем такими, чтобы ряд (10) формально удовлетворял начальным условиям (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x) = u_0(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} b_k X_k(x) = u_1(x),$$

т. е. в силу полноты ортонормальной системы  $\{X_k\}$  в  $\mathcal{L}_2(G; \rho)$  \*)

$$a_k = (u_0, X_k)_{\rho} = \int_G \rho u_0 X_k dx, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (u_1, X_k)_{\rho}. \quad (11)$$

Итак, для решения  $u(x, t)$  смешанной задачи (1)–(3) получено формальное разложение по собственным функциям  $X_k$  оператора  $L$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t)X_k(x). \quad (12)$$

---

\*) Считаем  $X_k$  вещественными (см. § 5.1, п. 4).

Этот ряд назовем *формальным решением смешанной задачи* (1)–(3);  $k$ -й член ряда (12), равный

$$T_k(t)X_k(x) = N_k X_k(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}t + \alpha_k),$$

где

$$N_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \sin \alpha_k = \frac{a_k}{N_k}, \quad \cos \alpha_k = \frac{b_k}{N_k},$$

представляет собой так называемое *гармоническое колебание* с собственной частотой  $\sqrt{\lambda_k}$  и амплитудой  $N_k X_k(x)$ . Последовательность чисел  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots$  называется *спектром собственных частот колеблющейся системы*.

**2. Неоднородное гиперболическое уравнение.** Изложим другой, более общий вариант метода Фурье, пригодный для построения формального решения смешанной задачи также и для неоднородного уравнения гиперболического типа

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(x, t). \quad (13)$$

При каждом  $t > 0$  разложим решение  $u(x, t)$  задачи (13), (2), (3) в ряд Фурье по собственным функциям  $X_k$  оператора  $L$ :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x), \quad T_k(t) = (u, X_k)_{\rho}. \quad (14)$$

В силу (2), (14) и (11) неизвестные функции  $T_k(t)$  должны удовлетворять начальным условиям

$$\begin{cases} T_k(0) = \int_G \rho(x)u(x, 0)X_k(x) dx = (u_0, X_k)_{\rho} = a_k, \\ T'_k(0) = \int_G \rho(x)\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}X_k(x) dx = (u_1, X_k)_{\rho} = \sqrt{\lambda_k}b_k. \end{cases} \quad (15)$$

Составим дифференциальное уравнение для функций  $T_k(t)$ . Умножая скалярно уравнение (13) на  $X_k$  и производя формальные выкладки, получим

$$\begin{aligned} \int_G \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} X_k dx &= \frac{d^2}{dt^2} \int_G \rho u X_k dx = \frac{d^2}{dt^2} (u, X_k)_{\rho} = -(Lu, X_k) + (F, X_k) = \\ &= -(u, LX_k) + (F, X_k) = -\lambda_k(u, X_k)_{\rho} + (F, X_k), \end{aligned}$$

т. е. в силу (14) функции  $T_k$  удовлетворяют уравнениям

$$T_k'' + \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$c_k(t) = (F, X_k) = \int_G X_k(x, t) X_k(x) dx. \quad (17)$$

Решив задачу Коши для уравнения (16) с начальными условиями (15), получим (см. § 3.3, п. 1)

$$T_k(t) = a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau. \quad (18)$$

Подставляя выражение (18) в ряд (14), получим формальное решение смешанной задачи (13), (2), (3)

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} & \left[ a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t c_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau \right] X_k(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что первые два слагаемых в ряде (19) в силу (12) дают формальное решение смешанной задачи при  $F = 0$ ; третье слагаемое есть решение этой задачи при  $u_0 = u_1 = 0$ .

Пусть  $u_0 = u_1 = 0$  и

$$F(x, t) = C \sin \omega t \rho(x) X_i(x). \quad (20)$$

Тогда

$$a_k = b_k = 0, \quad c_k(t) = C \sin \omega t (X_i, X_k)_{\rho} = C \delta_{ik} \sin \omega t,$$

и, следовательно, в силу (18)

$$\begin{aligned} T_k(t) &= \frac{C \delta_{ik}}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin \omega t \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{C \delta_{ik}}{\omega^2 - \lambda_i} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_i}} \sin \sqrt{\lambda_i} t - \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Поэтому формальный ряд (19) сводится к единственному слагаемому

$$u(x, t) = \frac{C}{\omega^2 - \lambda_i} \left( \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_i}} \sin \sqrt{\lambda_i} t - \sin \omega t \right) X_i(x), \quad (21)$$

которое действительно является решением задачи. При  $\omega \rightarrow \sqrt{\lambda_i}$  решение (21) принимает вид

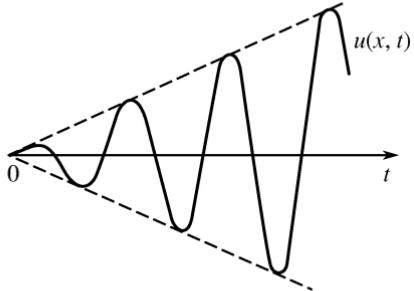


Рис. 78

$$u(x, t) = \frac{C}{2\sqrt{\lambda_i}} \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda_i} t}{\sqrt{\lambda_i}} - t \cos \sqrt{\lambda_i} t \right) X_i(x). \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что под действием периодического внешнего возмущения (20) с частотой, равной одной из собственных частот  $\sqrt{\lambda_i}$ , амплитуда колебаний неограниченно воз-

растает при  $t \rightarrow \infty$ , т. е., как говорят, имеет место явление *резонанса* (рис. 78).

**3. Параболическое уравнение.** Рассмотрим в цилиндре  $\Pi_\infty = G \times (0, \infty)$  смешанную задачу для уравнения параболического типа (см. § 1.4, п. 4)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(x, t), \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (24)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Для построения формального решения смешанной задачи (23)–(25) используем метод Фурье в форме, данной в п. 2. В соответствии с этим методом решение  $u(x, t)$  ищется в виде ряда (14). Для функций  $T_k(t)$  получим задачу Коши

$$T'_k + \lambda_k T_k = c_k(t), \quad T_k(0) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где  $c_k(t)$  и  $a_k$  определяются равенствами (17) и (15) соответственно. Решая задачу Коши (26), получим (см. § 3.3, п. 1)

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau, \quad (27)$$

и, следовательно, формальное решение смешанной задачи (23)–(25) дается рядом

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right] X_k(x). \quad (28)$$

**4. Уравнение Шрёдингера.** Смешанная задача для уравнения Шрёдингера (см. § 1.2, п. 6)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V(x)\psi, \quad (29)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (30)$$

$$\alpha\psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0, \quad (31)$$

рассматривается так же, как и смешанная задача (23)–(25). Для функций  $T_k(t)$  имеем следующую задачу Коши:

$$i\hbar T'_k - \lambda_k T_k = 0, \quad T_k(0) = a_k = (\psi_0, X_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (32)$$

откуда

$$T_k(t) = a_k \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \lambda_k t \right\}, \quad (33)$$

и, следовательно, формальное решение смешанной задачи (29)–(31) выражается рядом

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \lambda_k t \right\} X_k(x), \quad (34)$$

где  $X_k$  — собственные функции оператора  $L$  при  $p = \hbar^2/(2m_0)$ ,  $q = V$  и  $\rho = 1$ .

**5. Эллиптическое уравнение.** Рассмотрим в конечном цилиндре  $\Pi_l = G \times (0, l)$  краевую задачу для уравнения эллиптического типа

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + F(x, t), \quad (35)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{t=l} = u_l(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (36)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad 0 \leq t \leq l. \quad (37)$$

Формальное решение этой задачи ищем в виде ряда (14). Неизвестные функции  $T_k(t)$  должны удовлетворять уравнениям

$$T_k'' - \lambda_k T_k = c_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

и граничным условиям

$$T_k(0) = (u_0, X_k)_\rho = a_k, \quad T_k(l) = (u_l, X_k)_\rho = b_k; \quad (39)$$

функции  $c_k(t)$  определяются равенством (17).

Построим решение краевой задачи (38), (39). Функции

$$v_k(t) = T_k(t) - a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} - b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l}$$

удовлетворяет уравнению (38) и граничным условиям  $v_k(0) = v_k(l) = 0$ . Поэтому эта функция выражается формулой (см. § 5.2, п. 2)

$$v_k(t) = - \int_0^l \mathcal{G}_k(t, \tau) c_k(\tau) d\tau, \quad (40)$$

где

$$\mathcal{G}_k(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} \begin{cases} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}t \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}(l-\tau), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}(l-t) \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}\tau, & \tau \leq t \leq l, \end{cases}$$

— функция Грина краевой задачи (см. § 5.2, п. 1)

$$-v'' + \lambda_k v = -c_k(t), \quad v(0) = v(l) = 0.$$

Следовательно,

$$T_k(t) = a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} + b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} - \int_0^l \mathcal{G}_k(t, \tau) c_k(\tau) d\tau. \quad (41)$$

Таким образом, формальное решение граничной задачи (35)–(37) записывается рядом

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}(l-t)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} + b_k \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}t}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} - \int_0^l \mathcal{G}_k(t, \tau) c_k(\tau) d\tau \right] X_k(x). \quad (42)$$

## 6. Примеры.

а) Колебание закрепленной струны. Эта задача сводится к решению смешанной задачи в полуполосе  $(0, l) \times (0, \infty)$  для одномерного волнового уравнения (см. § 1.2, п. 1)

$$\square_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (43)$$

Соответствующая задача на собственные значения есть задача Штурма–Лиувилля

$$-a^2 X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Поэтому (см. § 5.2, п. 4)

$$\lambda_k = \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и формальное решение задачи (43) дается рядом

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (44)$$

где

$$a_k = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{l}{k\pi a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Каждое гармоническое колебание

$$T_k(t)X_k(x) = N_k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi a}{l} t + \alpha_k \right)$$

образует *стоячую волну* с собственной частотой  $\frac{k\pi a}{l}$  и амплитудой

$$N_k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Нули  $\frac{n}{k}l$ ,  $n = 0, \dots, k$ , амплитуды называются *узлами*, а ее точки экстремума  $\frac{2n+1}{2k}l$ ,  $n = 0, \dots, k-1$ , — *пучностями* этой стоячей волны (рис. 79).

Гармоническое колебание  $T_1 X_1$  с наименьшей собственной частотой  $\sqrt{\lambda_1}$  называется *основным тоном*; остальные колебания  $T_2 X_2$ ,

$T_3 X_3, \dots$  с частотами  $\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \dots$  образуют ряд последовательных обертонов.

Решение (44) складывается из отдельных тонов (основного тона и обертонов), и их суммарное действие приводит к созданию *тембра* звука, издаваемого струной.

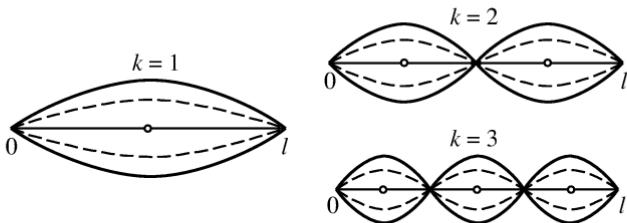


Рис. 79

б) Распространение тепла в ограниченном стержне. Рассмотрим смешанную задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (45)$$

Формальное решение задачи (45) выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp \left\{ -\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} t \right\} \sin \frac{k \pi x}{l}. \quad (46)$$

Ограничивааясь первым членом ряда (46), получаем приближенное решение задачи (45)

$$u(x, t) \approx \frac{2a_1}{l} \exp \left\{ -\frac{\pi^2 a^2}{l^2} t \right\} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

в) Колебания закрепленной мембранны. Задача сводится к решению смешанной задачи для двумерного волнового уравнения

$$\square_a u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad u|_S = 0. \quad (47)$$

Соответствующая задача на собственные значения имеет вид

$$-a^2 \Delta X = \lambda X, \quad X|_S = 0.$$

Для прямоугольника  $(0, l) \times (0, m)$  (см. § 5.4, п. 2)

$$\lambda_{kj} = \pi^2 a^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right), \quad X_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{lm}} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m},$$

$$k, j = 1, 2, \dots,$$

и формальное решение задачи (47) выражается двойным рядом

$$u(x, y, t) = \frac{4}{lm} \sum_{k,j=1}^{\infty} \left( a_{kj} \cos \pi a \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}} t + b_{kj} \sin \pi a \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2}} t \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad (48)$$

где

$$a_{kj} = \int_0^l \int_0^m u_0(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} dx dy,$$

$$b_{kj} = \frac{lm}{\pi a \sqrt{k^2 m^2 + j^2 l^2}} \int_0^l \int_0^m u_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} dx dy.$$

Для круга  $U_R$  (см. § 5.4, п. 2)

$$\lambda_{kj} = \left[ \mu_j^{(k)} \right]^2 \frac{a^2}{R^2}, \quad X_{kj}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R} \left| J'_k \left( \mu_j^{(k)} \right) \right|} J_k \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) e^{ik\varphi},$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $\mu_j^{(k)}$  — положительные корни уравнения  $J_k(\mu) = 0$  (см. § Д.1, п. 2).  
Формальное решение задачи (47) выражается двойным рядом

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ a_{kj} \cos \frac{\mu_j^{(k)} a}{R} t + b_{kj} \sin \frac{\mu_j^{(k)} a}{R} t \right] \frac{J_k \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right)}{\left[ J'_k \left( \mu_j^{(k)} \right) \right]^2} e^{ik\varphi}, \quad (49)$$

где

$$a_{kj} = \int_0^R \int_0^{2\pi} u_0(x, y) J_k \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) e^{-ik\varphi} r dr d\varphi,$$

$$b_{kj} = \frac{R}{a \mu_j^{(k)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} u_1(x, y) J_k \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right) e^{-ik\varphi} r dr d\varphi.$$

г) Формальное решение смешанной задачи для двумерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u|_S = 0 \quad (50)$$

имеет вид:

$$u(x, y, t) = \frac{4}{lm} \sum_{k,j=1}^{\infty} a_{kj} \exp \left\{ -\pi^2 a^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{j^2}{m^2} \right) t \right\} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} \quad (51)$$

для прямоугольника  $(0, l) \times (0, m)$ ;

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \exp \left\{ -\frac{\left[ \mu_j^{(k)} \right]^2 a^2}{R^2} t \right\} \frac{J_k \left( \mu_j^{(k)} \frac{r}{R} \right)}{\left[ J'_k \left( \mu_j^{(k)} \right) \right]^2} e^{ik\varphi} \quad (52)$$

для круга  $U_R$ .

д) Колебание шарового объема. Рассмотрим смешанную задачу (47) для трехмерного шара  $U_R$ . Соответствующие собственные значения и собственные функции вычислены в § 5.4, п. 2, в), формулы (30) и (31). Формальное решение задачи выражается рядом

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{\pi R^2 \sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ a_{ljm} \cos \mu_j^{(l+1/2)} \frac{at}{R} + \right. \\ & \left. + b_{ljm} \sin \mu_j^{(l+1/2)} \frac{at}{R} \right] \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(1+\delta_{0m})(l+|m|)!} \times \\ & \times \frac{1}{\left[ J'_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \right) \right]^2} J_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \frac{r}{R} \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$a_{ljm} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(x) J_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \frac{r}{R} \right) Y_l^m(\theta, \varphi) r^{3/2} dr \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$\begin{aligned} b_{ljm} = & \frac{R}{a \mu_j^{(l+1/2)}} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_1(x) J_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \frac{r}{R} \right) \times \\ & \times Y_l^m(\theta, \varphi) r^{3/2} dr \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

е) Формальное решение смешанной задачи (50) для трехмерного шара  $U_R$  выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi R^2 \sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{ljm} \exp \left\{ - \left[ \mu_j^{(l+1/2)} \right]^2 \frac{a^2}{R^2} t \right\} \times \\ \times \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(1+\delta_{0m})(l+|m|)!} \frac{1}{\left[ J'_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \right) \right]^2} J_{l+1/2} \left( \mu_j^{(l+1/2)} \frac{r}{R} \right) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (54)$$

ж) Смешанная задача для уравнения Шрёдингера в шаре  $U_R$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V(|x|)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \psi|_{S_R} = 0, \quad (55)$$

с потенциалом  $V$ , зависящим только от  $|x|$ . Соответствующая задача на собственные значения принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta X + V(|x|)X = \lambda X, \quad X|_{S_R} = 0,$$

или, в сферических координатах,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial X}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} \right] + \\ + V(r)X = \lambda X, \quad |X(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad X(R, \theta, \varphi) = 0. \quad (56)$$

Собственные значения и собственные функции краевой задачи (56) определяются методом разделения переменных. Полагая

$$X = \frac{\mathcal{R}(r)}{r} Y(\theta, \varphi)$$

и действуя по общей схеме, получим

$$\lambda_{lj}, \quad X_{ljm}(x) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{\pi(1+\delta_{0m})(l+|m|)!}} \frac{\mathcal{R}_{lj}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi), \\ l = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l,$$

где  $\lambda_{lj}$  и  $\mathcal{R}_{lj}(r)$  — собственные значения и собственные функции одномерной краевой задачи

$$-\mathcal{R}'' + \frac{l(l+1)}{r^2} \mathcal{R} + \frac{2m_0}{\hbar^2} (V - \lambda) \mathcal{R} = 0, \quad \mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(R) = 0.$$

Формальное решение задачи (55) дает ряд

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^m a_{ljm} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \lambda_{lj} t \right\} \times \\ \times \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{(1+\delta_{0m})(l+|m|)!} \mathcal{R}_{lj}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (57)$$

где

$$a_{ljm} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(x) \mathcal{R}_{lj}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) r dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Собственные значения  $\lambda_{lj}$  определяют уровни энергии квантовой частицы; индексы  $l$  и  $m$  называются соответственно *орбитальным* (азимутальным) и *магнитным квантовыми числами*.

з) Формальное решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=l} = u_l(x), \quad (58)$$

в прямоугольнике  $(0, a) \times (0, l)$  выражается рядом

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \operatorname{sh} k\pi \frac{l-y}{a} + b_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right) \frac{\sin \frac{k\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi l}{a}}, \quad (59)$$

где

$$a_k = \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \quad b_k = \int_0^l u_l(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx.$$

и) Задача Дирихле в трехмерном цилиндре  $U_R \times (0, h)$ :

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_R} = u_0(z), \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \quad (60)$$

В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  решение  $u(x, y, z) = \tilde{u}(r, z)$  не зависит от угла  $\varphi$ , и поэтому задача (60) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0, \quad \tilde{u}(R, z) = u_0(z), \quad \tilde{u}(r, 0) = \tilde{u}(r, h) = 0. \quad (61)$$

Решая краевую задачу (61) методом разделения переменных,  $\tilde{u}(r, z) = \mathcal{R}(r)Z(z)$ , для функций  $\mathcal{R}$  и  $Z$  получаем краевые задачи

$$\begin{aligned} Z'' + \lambda Z = 0, \quad & Z(0) = Z(h) = 0, \\ \mathcal{R}'' + \frac{1}{r}\mathcal{R}' - \lambda\mathcal{R} = 0, \quad & |\mathcal{R}(0)| < \infty. \end{aligned}$$

Решение этих краевых задач легко находится:

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{h^2}, \quad Z_k(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \frac{k\pi z}{h}, \quad \mathcal{R}_k(r) = c_k I_0 \left( k\pi \frac{r}{h} \right),$$

где  $I_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента (см. § Д.1, п. 8).

Формальное решение задачи (61) и, стало быть, задачи (60) выражается рядом

$$u(x, y, z) = \tilde{u}(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{I_0(k\pi r/h)}{I_0(k\pi R/h)} \sin \frac{k\pi z}{h}, \quad (62)$$

где

$$a_k = \int_0^h u_0(z) \sin \frac{k\pi z}{h} dz.$$

## 7. Упражнения.

а) Доказать: если  $u_0''' \in \mathcal{L}_2(0, l)$ ,  $u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = 0$ ,  $u_1'' \in \mathcal{L}_2(0, l)$ ,  $u_1(0) = u_1(l) = 0$ , то ряд (44) представляет классическое решение задачи (43).

б) Доказать: если  $u_0' \in \mathcal{L}_2(0, l)$ ,  $u_0(0) = u_0(l) = 0$ , то ряд (46) представляет классическое решение задачи (45).

в) Доказать: если  $u_0, u_l \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ ,  $u_0|_S = u_l|_S = 0$ , то ряд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (u_0, X_k) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}(l-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} + (u_l, X_k) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}y}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}l} \right] X_k(x)$$

дает решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре  $G \times (0, l)$

$$\Delta_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{y=0} = u_0(x), \quad u|_{y=l} = u_l(x), \quad u|_S = 0.$$

## § 6.2. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа

В этом параграфе будет рассмотрена смешанная задача для уравнения гиперболического типа (см. § 1.4, п. 4):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) \equiv -Lu + F, \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Pi_\infty = G \times (0, \infty);$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \overline{G}; \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Предполагаем, что функции  $\rho$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют условиям § 6.1;  $G$  — ограниченная область и ее граница  $S$  — кусочно гладкая поверхность,  $S_0$  — та часть  $S$ , где  $\alpha(x) > 0$  и  $\beta(x) > 0$  одновременно.

**1. Классическое решение. Интеграл энергии.** Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) называется функция  $u(x, t) \in \mathcal{C}^2(\Pi_\infty) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Pi}_\infty)$ , удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре  $\Pi_\infty$ , начальным условиям (2) на нижнем основании и граничному условию (3) на боковой поверхности этого цилиндра.

Для существования классического решения задачи (1)–(3) необходимо, чтобы выполнялись условия гладкости

$$F \in \mathcal{C}(\Pi_\infty), \quad u_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{G}), \quad u_1 \in \mathcal{C}(\overline{G}),$$

и условие согласованности

$$\left. \alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0.$$

При изучении краевых задач для гиперболических уравнений весьма эффективным оказывается метод интегралов энергии. Пусть  $u(x, t)$  — классическое решение задачи (1)–(3). *Интегралом энергии* называется величина

$$J^2(t) = \frac{1}{2} \int_G \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 dS,$$

представляющая собой сумму кинетической и потенциальной энергий колеблющейся системы в момент времени  $t$ .

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $u(x, t)$  — классическое решение задачи (1)–(3) и  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_\infty)$ . Тогда справедливо соотношение

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t \int_G F(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где

$$J^2(0) = \frac{1}{2} \int_G (\rho u_1^2 + p |\operatorname{grad} u_0|^2 + q u_0^2) dx + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u_0^2 dS.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства возьмем произвольные число  $\varepsilon > 0$  и область  $G' \Subset G$  с кусочно гладкой границей  $S'$ . Умножая уравнение (1) на  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , интегрируя по цилиндру  $G' \times (\varepsilon, T)$  и пользуясь первой формулой Грина (см. § 5.1, п. 2), получим

$$\begin{aligned} \int_{G' \times (\varepsilon, T)} F \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_{G' \times (\varepsilon, T)} \frac{\partial u}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu \right) dx dt = \\ &= \int_{G'} \rho \int_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt dx + \int_\varepsilon^T \int_{G'} \frac{\partial u}{\partial t} Lu dx dt = \frac{1}{2} \int_{G'} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_\varepsilon^T dx + \\ &+ \int_\varepsilon^T \left[ \int_{G'} p \left( \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx - \int_{S'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS + \int_{G'} qu \frac{\partial u}{\partial t} dx \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{G'} \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 \right]_\varepsilon^T dx - \int_\varepsilon^T \int_{S'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $G' \rightarrow G$  и пользуясь тем, что  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Pi}_T)$  и  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_T)$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p |\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 \right]_0^T dx - \int_0^T \int_S p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \\ = \int_{\Pi_T} F \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Из граничного условия (3) вытекают соотношения  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\alpha}{\beta} u$  на  $S$  там, где  $\beta > 0$ ;  $u = 0$  на  $S$  там, где  $\beta = 0$ . Поэтому

$$-\int_0^T \int_S p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \int_0^T \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u \frac{\partial u}{\partial t} dS dt = \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u^2 \Big|_0^T dS;$$

отсюда и из (5), заменяя  $T$  на  $t$ , получаем формулу (4). Теорема доказана.

**СЛЕДСТВИЕ.** При  $F = 0$  равенство (4) принимает вид

$$J^2(t) = J^2(0), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

*Физический смысл равенства (6) состоит в том, что полная энергия колеблющейся системы при отсутствии внешних возмущений не меняется со временем (закон сохранения энергии).*

**2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения.** Применим метод интегралов энергии для доказательства единственности и непрерывности зависимости классического решения смешанной задачи (1)–(3).

Дифференцируя равенство (4) по  $t$ , получим

$$2J(t)J'(t) = \int_G F(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Применяя к правой части равенства (7) неравенство Коши–Буняковского, выводим неравенство

$$2JJ' \leq \|F\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|. \quad (8)$$

Учитывая теперь, что  $\rho(x) > 0$ ,  $\rho \in \mathcal{C}(\overline{G})$ , и, стало быть,  $\rho(x) \geq \rho_0$ ,  $\rho_0 > 0$ , получаем цепочку неравенств

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \leq \frac{1}{\rho_0} \int_G \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{2}{\rho_0} J^2(t),$$

т. е.

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(t). \quad (9)$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости оценки

$$\| |\operatorname{grad} u| \| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(t), \quad (10)$$

где  $p_0 = \min_{x \in G} p(x)$ ,  $p_0 > 0$ .

Подставляя неравенство (9) в неравенство (8) и сокращая на  $J$ , выводим неравенство

$$J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \|F\|, \quad t \geq 0.$$

Интегрируя полученное дифференциальное неравенство, получим оценку

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \int_0^t \|F\| d\tau. \quad (11)$$

Из оценок (9), (10) и (11) выводим оценки

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| d\tau, \quad t \geq 0; \quad (12)$$

$$\|\operatorname{grad} u\| \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\sqrt{\rho_0 p_0}} \int_0^t \|F\| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Теперь оценим функцию  $\|u\|$ . Дифференцируя равенство

$$\|u\|^2 = \int u^2(x, t) dx$$

по  $t$ , пользуясь неравенством Коши–Буняковского и учитывая неравенство (12), получаем

$$\begin{aligned} 2\|u\|\|u\|' &= 2 \int_G u \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq 2\|u\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \\ &\leq 2\|u\| \left[ \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| d\tau \right], \end{aligned}$$

т. е., после сокращения на  $2\|u\|$ ,

$$\|u\|' \leq \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \|F\| d\tau, \quad t \geq 0.$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, имеем

$$\|u\| \leq \|u\|_0 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0)t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t \int_0^{t'} \|F\| d\tau dt',$$

где  $\|u\|_0$  — значение функции  $\|u\|$  в точке  $t = 0$ , т. е.

$$\|u\|_0^2 = \int_G u^2(x, 0) dx = \int_G u_0^2(x) dx = \|u_0\|^2.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим ис- комую оценку

$$\|u\| \leq \|u_0\| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J(0)t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t - \tau) \|F\|(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Теперь, пользуясь оценками (12), (13) и (14), докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Классическое решение задачи (1)–(3) единственно и непрерывно зависит от  $u_0$ ,  $u_1$  и  $F$  в следующем смысле: если  $F, \tilde{F} \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_T)$ ,*

$$\begin{cases} \|F - \tilde{F}\| \leq \varepsilon, & 0 \leq t \leq T, \\ \|\operatorname{grad} u_0 - \operatorname{grad} \tilde{u}_0\| \leq \varepsilon'_0, & \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{\mathcal{C}} \leq \varepsilon_0, \\ \|\operatorname{grad}_x u - \operatorname{grad}_x \tilde{u}\| \leq \varepsilon'_0, & \|u_1 - \tilde{u}_1\| \leq \varepsilon_1, \end{cases} \quad (15)$$

то соответствующие (классические) решения  $u(x, t)$  и  $\tilde{u}(x, t)$  удовлетворяют при  $0 \leq t \leq T$  неравенствам

$$\|u - \tilde{u}\| \leq C \left( \varepsilon_0 + T\varepsilon_0 + T\varepsilon'_0 + T\varepsilon_1 + \frac{1}{2} T^2 \varepsilon \right), \quad (16)$$

$$\|\operatorname{grad}_x u - \operatorname{grad}_x \tilde{u}\| \leq C(\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1 + T\varepsilon), \quad (17)$$

$$\|u_t - \tilde{u}_t\| \leq C(\varepsilon_1 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1 + T\varepsilon), \quad (18)$$

причем число  $C$  не зависит от  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $F$ ,  $t$  и  $T$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства единственности достаточно установить, что классическое решение  $u(x, t)$  однородной задачи (1)–(3) (при  $u_0 = u_1 = 0$  и  $F = 0$ ) единственно, т. е.  $u(x, t) = 0$ ,  $(x, t) \in \Pi_\infty$  (см. § 1.1, п. 9). Но это вытекает из неравенства (14), поскольку  $u_0 = 0$ ,  $J(0) = 0$  и  $F = 0$ .

Для доказательства непрерывной зависимости составим разность  $\eta = u - \tilde{u}$ . Функция  $\eta$  является классическим решением задачи (1)–(3) с заменой  $F$ ,  $u_0$  и  $u_1$  на  $K = F - \tilde{F}$ ,  $v_0 = u_0 - \tilde{u}_0$  и  $v_1 = u_1 - \tilde{u}_1$  соответственно. Пользуясь неравенствами (15) для решения  $\eta$ , оценим величину интеграла энергии  $\tilde{J}^2(0)$ :

$$\begin{aligned} 2\tilde{J}^2(0) &= \int_G [\rho v_1^2 + p |\operatorname{grad} v_0|^2 + q v_0^2] dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} v_0^2 dS \leq \\ &\leq V \max_{x \in \overline{G}} \rho(x) \varepsilon_1^2 + V \max_{x \in \overline{G}} p(x) (\varepsilon'_0)^2 + \left[ V \max_{x \in \overline{G}} q(x) + \sigma \max_{x \in S_0} p \frac{\alpha}{\beta}(x) \right] \varepsilon_0^2 \leq \\ &\leq C_1^2 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1)^2, \end{aligned}$$

где  $V$  — объем области  $G$ ,  $\sigma$  — площадь куска  $S_0$  и  $C_1^2$  — число, большее, чем числа  $V$ ,  $V \max \rho$ ,  $V \max p$  и  $V \max q + \sigma \max p \frac{\alpha}{\beta}$ . Таким образом, получена оценка

$$\sqrt{2} \tilde{J}(0) \leq C_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1). \quad (19)$$

Применяя теперь к решению  $\eta$  неравенство (14):

$$\|\eta\| \leq \|v_0\| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \tilde{J}(0)t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t-\tau) \|K\| d\tau,$$

и пользуясь неравенствами (15) и (19), получим при всех  $t \in [0, T]$  оценку (16)

$$\begin{aligned} \|\eta\| &\leq \sqrt{V} \|v_0\|_C + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} C_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1) t + \frac{\varepsilon}{\rho_0} \int_0^t (t-\tau) d\tau \leq \\ &\leq \varepsilon_0 \sqrt{V} + \frac{T}{\sqrt{\rho_0}} C_1 (\varepsilon_0 + \varepsilon'_0 + \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon}{2\rho_0} T^2 \leq \\ &\leq C \left( \varepsilon_0 + \varepsilon_0 T + \varepsilon'_0 T + \varepsilon_1 T + \frac{\varepsilon}{2} T^2 \right) \end{aligned}$$

при надлежащем выборе постоянной  $C$ .

Аналогично, с помощью неравенств (12), (13) и (19) устанавливаются и неравенства (17) и (18). Теорема доказана.

Доказательство существования классического решения задачи (1)–(3) наталкивается на значительные трудности. Чтобы обойти эти трудности, как и для задачи Коши введем понятие обобщенного решения этой задачи; существование же обобщенного решения устанавливается более простыми средствами. Прежде чем приступить к этой программе, изучим более подробно функции из  $\mathcal{L}_2(G)$ , зависящие от параметра.

**3. Функции, непрерывные в  $\mathcal{L}_2(G)$ .** Пусть при каждом  $t \in [a, b]$  функция  $u(x, t)$  принадлежит  $\mathcal{L}_2(G)$ . Функция  $u(x, t)$  называется *непрерывной в  $\mathcal{L}_2(G)$  по переменной  $t$  на  $[a, b]$* , если для любого  $t \in [a, b]$

$$u(x, t') \rightarrow u(x, t) \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t' \rightarrow t.$$

Из этого определения вытекает: если функция  $u(x, t)$  непрерывна в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[a, b]$ , то норма  $\|u(\cdot, t)\|$  непрерывна по  $t$  на  $[a, b]$ ; для любой  $f \in \mathcal{L}_2(G)$  скалярное произведение  $(u(\cdot, t), f)$  непрерывно по  $t$  на  $[a, b]$ ;  $u \in \mathcal{L}_2(G \times (a, b))$ , если интервал  $(a, b)$  конечен.

Действительно, непрерывность  $\|u\|$  следует из неравенства

$$|\|u(\cdot, t')\| - \|u(\cdot, t)\|| \leq \|u(\cdot, t') - u(\cdot, t)\|,$$

вытекающего из неравенства Минковского. Непрерывность  $(u, f)$  следует из неравенства Коши–Буняковского

$$|(u(\cdot, t'), f) - (u(\cdot, t), f)| \leq \|u(\cdot, t') - u(\cdot, t)\| \|f\|.$$

Принадлежность  $u$  к  $\mathcal{L}_2(G \times (a, b))$  следует из конечности  $(a, b)$ , непрерывности  $\|u\|$  и равенства

$$\int_a^b \int_G |u(x, t)|^2 dx dt = \int_a^b \|u(\cdot, t)\|^2 dt.$$

Последовательность функций  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называется *сходящейся к функции  $u(x, t)$  в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[a, b]$* , если

$$\|u_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \rightharpoonup 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad t \in [a, b];$$

в таком случае будем писать

$$u_k \rightharpoonup u, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [a, b].$$

Из этого определения следует, что

$$u_k \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G \times (a, b));$$

$$\|u_k(\cdot, t)\| \rightharpoonup \|u(\cdot, t)\|, \quad k \rightarrow \infty, \quad t \in [a, b].$$

**ЛЕММА 1.** *Если последовательность функций  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , непрерывных в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[a, b]$ , сходится к функции  $u(x, t)$  в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[a, b]$ , то  $u(x, t)$  — непрерывная в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[a, b]$  функция.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть задано произвольное  $\varepsilon > 0$ . Существует такое число  $m = m_\varepsilon$ , что

$$\|u_m(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in [a, b].$$

По условию функция  $u_m(x, t)$  непрерывна в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t \in [a, b]$ . Поэтому существует такое число  $\delta = \delta_\varepsilon$ , что

$$\|u_m(\cdot, t') - u_m(\cdot, t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t', t \in [a, b], \quad |t' - t| < \delta.$$

Следовательно, пользуясь неравенством Минковского, получаем

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t') - u(x, t)\| &\leqslant \\ &\leqslant \|u(\cdot, t') - u_m(\cdot, t')\| + \|u_m(\cdot, t') - u_m(\cdot, t)\| + \|u_m(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

при всех  $t', t \in [a, b]$ ,  $|t' - t| < \delta$ . Лемма доказана.

Последовательность функций  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , называется *сходящейся в себе в*  $\mathcal{L}_2(G)$  *равномерно по*  $t$  *на*  $[a, b]$ , если

$$u_k - u_p \rightharpoonup 0, \quad k, p \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [a, b].$$

**ЛЕММА 2.** *Если последовательность функций  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится в себе в*  $\mathcal{L}_2(G)$  *равномерно по*  $t$  *на*  $[a, b]$ , *то существует функция*  $u(x, t)$ , *непрерывная в*  $\mathcal{L}_2(G)$  *по*  $t$  *на*  $[a, b]$  *и такая, что*

$$u_k \rightharpoonup u, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [a, b].$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме Рисса–Фишера (см. § 1.1, п. 5) при каждом  $t \in [a, b]$  существует функция  $u(x, t) \in \mathcal{L}_2(G)$  такая, что

$$u_k \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G). \quad (20)$$

Далее, можно выбрать подпоследовательность  $u_{k_i}(x, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такую, что

$$\|u_{k_{i+1}}(\cdot, t) - u_{k_i}(\cdot, t)\| < \frac{1}{2^i}, \quad t \in [a, b]. \quad (21)$$

Но в силу (20) при каждом  $t \in [a, b]$

$$u = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{k_p} = u_{k_i} + (u_{k_{i+1}} - u_{k_i}) + (u_{k_{i+2}} - u_{k_{i+1}}) + \dots,$$

и потому в силу (21)

$$\begin{aligned} \|u - u_{k_i}\| &\leq \|u_{k_{i+1}} - u_{k_i}\| + \|u_{k_{i+2}} - u_{k_{i+1}}\| + \dots < \\ &< \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \dots = \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

отсюда следует, что подпоследовательность  $\{u_{k_i}\}$  сходится к  $u$  в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t \in [a, b]$ . А тогда из неравенства

$$\|u_k - u\| \leq \|u_k - u_{k_i}\| + \|u_{k_i} - u\|$$

заключаем, что последовательность  $\{u_k\}$  сходится к функции  $u$  в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[a, b]$ . По лемме 1 функция  $u(x, t)$  непрерывна в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[a, b]$ . Лемма доказана.

**4. Обобщенное решение.** Пусть существуют последовательности функций  $F_k \in \mathcal{C}(\overline{H}_\infty)$ ,  $u_{k0} \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$  и  $u_{k1} \in \mathcal{C}(\overline{G})$  такие, что:

1) при  $k \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} F_k \rightharpoonup F & \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [0, T], \quad \text{при любом } T > 0, \\ u_{k0} \rightarrow u_0 & \text{в } \mathcal{C}(\overline{G}), \quad \operatorname{grad} u_{k0} \rightarrow \operatorname{grad} u_0 \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \\ u_{k1} \rightarrow u_1 & \text{в } \mathcal{L}_2(G); \end{cases} \quad (22)$$

2) при каждом  $k = 1, 2, \dots$  существует классическое решение  $u_k(x, t)$  смешанной задачи

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = -Lu_k + F_k, \quad (1')$$

$$u_k|_{t=0} = u_{k0}(x), \quad \left. \frac{\partial u_k}{\partial t} \right|_{t=0} = u_{k1}(x), \quad (2')$$

$$\alpha u_k + \beta \left. \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = 0. \quad (3')$$

Докажем, что существует функция  $u(x, t)$ , непрерывная в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, \infty)$  и такая, что при любом  $T > 0$

$$u_k \rightharpoonup u, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [0, T]. \quad (23)$$

Функцию  $u(x, t)$  назовем *обобщенным решением задачи (1)–(3)*.

Действительно, применяя неравенство (16) теоремы из п. 2 к разности  $u_k - u_p$ , при всех  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \|u_k - u_p\| &\leq C \left[ (1+T) \|u_{k0} - u_{p0}\| + T \| |\operatorname{grad} u_{k0} - \operatorname{grad} u_{p0}| \| + \right. \\ &\quad \left. + T \|u_{k1} - u_{p1}\| + \frac{T^2}{2} \max_{0 \leq t \leq T} \|F_k - F_p\| \right], \end{aligned}$$

откуда в силу (22) следует, что последовательность  $\{u_k\}$  сходится в себе в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[0, T]$ . По лемме 2 из п. 3 существует функция  $u(x, t)$ , непрерывная в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, T]$  и такая, что при любом  $T > 0$  справедливо предельное соотношение (23).

Из определения обобщенного решения вытекает, что всякое классическое решение задачи (1)–(3) является и обобщенным решением ее, и для существования обобщенного решения необходимо выполнение условий:  $F$  непрерывна в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, \infty)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{G})$ ,  $\operatorname{grad} u_0 \in \mathcal{L}_2(G)$  и  $u_1 \in \mathcal{L}_2(G)$ .

Установим теперь дополнительные свойства обобщенных решений.

а) Обобщенное решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(3) удовлетворяет уравнению (1) в обобщенном смысле, т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\Pi_\infty)$  выполнено интегральное соотношение

$$\int u(x, t) \left( \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + L\varphi \right) dx dt = \int F(x, t)\varphi dx dt. \quad (24)$$

Действительно, пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\Pi_\infty)$ ; тогда  $\text{spt } \varphi \subset \Pi_T$  при некотором  $T > 0$ . Умножая уравнение (1') на функцию  $\varphi$  и интегрируя по цилинду  $\Pi_T$ , получим

$$\int_{\Pi_T} \left[ \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_k) + q u_k \right] \varphi dx dt = \int_{\Pi_T} F_k \varphi dx dt.$$

В интеграле, стоящем в левой части этого равенства, интегрированием по частям перебросим операцию дифференцирования на основную функцию  $\varphi$  (см. (6) из § 5.1). Поскольку  $\varphi$  обращается в нуль в окрестности границы цилиндра  $\Pi_T$ , внеинтегральные члены при этом исчезнут и в результате получим

$$\int_{\Pi_T} u_k \left[ \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} \varphi) + q \varphi \right] dx dt = \int_{\Pi_T} F_k \varphi dx dt.$$

Учитывая теперь, что в силу (23) и (22)

$$u_k \rightarrow u \quad \text{и} \quad F_k \rightarrow F, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в} \quad \mathcal{L}_2(\Pi_T),$$

и переходя в последнем равенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим интегральное соотношение (24).

б) Обобщенное решение  $u(x, t)$  обладает первыми (обобщенными) производными  $u_t$ ,  $\operatorname{grad} u$ , непрерывными в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, \infty)$ , причем при всех  $T > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} \rightrightarrows \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} u_k \rightrightarrows \operatorname{grad} u, \end{cases} \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в} \quad \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [0, T]. \quad (25)$$

Действительно, применяя неравенство (18) теоремы из п. 2 к разности  $u_k - u_p$  при всех  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u_p}{\partial t} \right\| \leq C(\|u_{k0} - u_{p0}\|_C + \| |\operatorname{grad} u_{k0} - \operatorname{grad} u_{p0}| \| + \\ + \|u_{k1} - u_{p1}\| + T \max_{0 \leq t \leq T} \|F_k - F_p\|), \end{aligned}$$

откуда в силу (22) следует, что последовательность производных  $\frac{\partial u_k}{\partial t}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится в себе в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[0, T]$  при всех  $T > 0$ . По лемме 2 из п. 3 существует функция  $\tilde{u}(x, t)$ , непрерывная в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, \infty)$  и такая, что при всех  $T > 0$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \Rightarrow \tilde{u}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{L}_2(G), \quad t \in [0, T]. \quad (26)$$

С другой стороны, из (23) следует, что  $u_k \rightarrow u$ ,  $k \rightarrow \infty$ , в  $\mathcal{D}'$  (функции  $u_k$  и  $u$  считаем продолженными нулем вне цилиндра  $\bar{\Pi}_\infty$ ). Отсюда, пользуясь непрерывностью в  $\mathcal{D}'$  операции обобщенного дифференцирования (см. § 2.2, п. 2, а)), заключаем, что

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{D}'.$$

На основных функциях  $\varphi$  из  $\mathcal{D}(\Pi_\infty)$  с учетом (26) имеем

$$\int \tilde{u} \varphi \, dx \, dt \leftarrow \int \frac{\partial u_k}{\partial t} \varphi \, dx \, dt \rightarrow \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right), \quad k \rightarrow \infty,$$

откуда вытекает равенство (см. § 2.1, п. 5)

$$u_t = \tilde{u}, \quad (x, t) \in \Pi_\infty.$$

Таким образом, в силу (26) доказано первое предельное соотношение (25). Второе соотношение (25) доказывается аналогично.

в) Обобщенное решение  $u(x, t)$  удовлетворяет начальным условиям (2) в следующем смысле:

$$\|u - u_0\| \rightarrow 0, \quad \| |\operatorname{grad}_x(u - u_0)| \| \rightarrow 0, \quad \|u_t - u_1\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \quad (27)$$

Для доказательства перейдем к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в неравенстве

$$\|u(x, 0) - u_0(x)\| \leq \|u(x, 0) - u_k(x, 0)\| + \|u_{k0}(x) - u_0(x)\|,$$

используя предельные соотношения  $u_k(x, 0) \rightarrow u(x, 0)$  и  $u_{k0}(x) \rightarrow u_0(x)$  в  $\mathcal{L}_2(G)$ . В результате получим  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Отсюда в силу непрерывности функции  $u(x, t)$  в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t \in [0, \infty)$  убеждаемся в справедливости первого соотношения (27). Аналогично, используя свойство б), получим и остальные соотношения (27).

Вопрос о том, в каком смысле обобщенное решение  $u(x, t)$  удовлетворяет граничному условию (3), подлежит дальнейшему выяснению.

**5. Единственность и непрерывная зависимость обобщенного решения.** Докажем, что оценки (12), (13) и (14) остаются справедливыми и для обобщенного решения  $u(x, t)$  задачи (1)–(3).

Действительно, пусть  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — последовательность классических решений задачи (1')–(3'), сходящаяся к обобщенному решению  $u(x, t)$  в смысле (23). Применяя к решениям  $u_k$  неравенство (14), получим

$$\|u_k\| \leq \|u_{k0}\| + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} J_k(0)t + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (t - \tau) \|F_k\| d\tau, \quad t \geq 0, \quad (28)$$

где

$$J_k^2(0) = \frac{1}{2} \int_G (\rho u_{k1}^2 + p |\operatorname{grad} u_{k0}|^2 + q u_{k0}^2) dx + \frac{1}{2} \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} u_{k0}^2 dS. \quad (29)$$

Пользуясь тем, что в силу (23) и (22) (см. п. 4) при  $k \rightarrow \infty$  для любого  $T > 0$  имеем

$$\|u_k\| \rightrightarrows \|u\|, \quad \|F_k\| \rightrightarrows \|F\|, \quad t \in [0, T],$$

$$\|u_{k0} - u_0\|_C \rightarrow 0, \quad \|\operatorname{grad} u_{k0}\| \rightarrow \|\operatorname{grad} u_0\|, \quad \|u_{k1}\| \rightarrow \|u_1\|,$$

и переходя к пределу в (28) и (29), убедимся в справедливости оценки (14).

Оценки (12) и (13) устанавливаются аналогично с помощью предельных соотношений (25).

Из оценок (12), (13) и (14), как и для классического решения, вытекают единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) и его непрерывная зависимость от  $u_0$ ,  $u_1$  и  $F$  в смысле теоремы из п. 2.

**6. Существование обобщенного решения.** В § 6.1, п. 2 было построено формальное решение задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье по собственным функциям  $X_j$  оператора  $L$

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_j(x), \quad (30)$$

где

$$T_j(t) = a_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + b_j \sin \sqrt{\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t c_j(\tau) \sin \sqrt{\lambda_j}(t - \tau) d\tau, \quad (31)$$

$$a_j = (u_0, X_j)_\rho, \quad b_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, X_j)_\rho, \quad c_j(t) = (F, X_j). \quad (32)$$

Возникает задача обоснования метода Фурье, т.е. выяснения условий, при которых ряд (30) сходится и дает обобщенное или классическое решение.

Предположим, что  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ ,  $u_1 \in \mathcal{L}_2(G)$  и  $F$  непрерывна в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, \infty)$ . Докажем, что при этих условиях ряд (30), представляющий формальное решение задачи (1)–(3), сходится в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[0, T]$  при всех  $T > 0$  и определяет обобщенное решение  $u(x, t)$  этой задачи.

Действительно, пользуясь теоремами разложения 1–3 из § 5.1, п. 4 (см. замечание), представим функции  $u_0$ ,  $\operatorname{grad} u_0$ ,  $u_1$  и  $F/\rho$  в виде рядов Фурье по собственным функциям  $X_j$  оператора  $L$ :

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x), \quad (33)$$

$$\operatorname{grad} u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \operatorname{grad} X_j(x), \quad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} b_j X_j(x), \quad (34)$$

$$F(x, t) = \rho(x) \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) X_j(x), \quad (35)$$

где  $a_j$ ,  $b_j$  и  $c_j(t)$  определены формулами (32), причем функции  $c_j(t)$  непрерывны на  $[0, \infty)$  (см. п. 3). При этом ряд (33) сходится в  $\mathcal{C}(\overline{G})$ , а ряды (34) сходятся в  $\mathcal{L}_2(G)$ .

Докажем, что ряд (35) сходится в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[0, T]$  при любом  $T > 0$ . Действительно, при каждом  $t \in [0, \infty)$  для функции  $F(x, t)/\rho(x)$  справедливо равенство Парсеваля–Стеклова (см. § 1.1, п. 8)

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(t) = \left\| \frac{F(\cdot, t)}{\rho} \right\|_\rho^2 = \int_G \frac{F^2(x, t)}{\rho(x)} dx. \quad (36)$$

Каждый член ряда (36) есть неотрицательная непрерывная функция  $c_j^2(t)$ , и этот ряд сходится к непрерывной функции (см. п. 3). По

лемме Дини (см. § 1.1, п. 3) ряд сходится равномерно на любом конечном промежутке  $[0, T]$ . Отсюда, оценивая остаток ряда (35) в  $\mathcal{L}_2(G)$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \rho \sum_{j=k}^{\infty} c_j(t) X_j \right\|^2 &\leq \max_{x \in G} \rho(x) \left\| \sum_{j=k}^{\infty} c_j(t) \sqrt{\rho} X_j \right\|^2 = \\ &= \tilde{C} \sum_{j,l=k}^{\infty} c_j(t) c_l(t) (X_j, X_l)_\rho = \tilde{C} \sum_{j=k}^{\infty} c_j^2(t), \end{aligned}$$

заключаем, что этот ряд сходится в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t \in [0, T]$  при любом  $T > 0$ .

Обозначим через  $u_k$ ,  $u_{k0}$ ,  $u_{k1}$  и  $F_k$  частные суммы рядов (30), (33), (34) и (35) соответственно, например,

$$u_k(x, t) = \sum_{j=1}^k T_j(t) X_j(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как

$$\begin{aligned} T_j''(t) &= -\lambda_j T_j(t) + c_j(t), \quad T_j \in \mathcal{C}^2([0, \infty)), \\ LX_j &= \lambda_j \rho X_j, \quad \alpha X_j + \beta \frac{\partial X_j}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad X_j \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G}), \end{aligned}$$

то функции  $u_k$  принадлежат  $\mathcal{C}^2(\Pi_\infty) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Pi}_\infty)$ , удовлетворяют уравнению (1'):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + L u_k &= \sum_{j=1}^k (\rho T_j'' X_j + T_j L X_j) = \\ &= \sum_{j=1}^k (-\lambda_j \rho T_j X_j + \rho c_j X_j + \lambda_j \rho T_j X_j) = \rho \sum_{j=1}^k c_j X_j = F_k(x, t), \end{aligned}$$

граничному условию (3') и начальным условиям (2'):

$$u_k|_{t=0} = \sum_{j=1}^k a_j X_j = u_{k0}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^k \sqrt{\lambda_j} b_j X_j = u_{k1}.$$

Таким образом, построена последовательность  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , классических решений задачи (1')–(3') таких, что справедливы предельные соотношения (22). В п. 4 было доказано, что такая

последовательность (и, стало быть, формальный ряд (30)) сходится в  $\mathcal{L}_2(G)$  равномерно по  $t$  на  $[0, T]$  при всех  $T > 0$  к обобщенному решению  $u(x, t)$  задачи (1)–(3). Построенное обобщенное решение  $u(x, t)$  обладает свойствами а), б) и в), установленными в п. 4.

Итак, доказана следующая

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ ,  $u_1 \in \mathcal{L}_2(G)$  и  $F$  непрерывна в  $\mathcal{L}_2(G)$  по  $t$  на  $[0, \infty)$ , то обобщенное решение задачи (1)–(3) существует и представляется рядом (30) — формальным решением этой задачи.*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При  $n = 1$  справедлива теорема вложения: если  $f' \in \mathcal{L}_2(0, l)$ , то  $f \in \mathcal{C}([0, l])$  и

$$\|f\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{\sqrt{l}} \|f\| + \sqrt{l} \|f'\|. \quad (*)$$

Действительно, из равенства

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(\xi) d\xi, \quad x_0 \in [0, l],$$

следует, что  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ . Выбирая точку  $x_0 \in [0, l]$  так, чтобы

$$|f(x_0)| = \frac{1}{l} \int_0^l |f(\xi)| d\xi,$$

и пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получим (\*):

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x_0)| + \int_{x_0}^x |f(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{l} \int_0^l |f'(\xi)| d\xi + \int_0^l |f'(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{l}} \|f\| + \sqrt{l} \|f'\|, \quad x \in [0, l]. \end{aligned}$$

Пользуясь этой теоремой и неравенствами (13) и (14), можно усилить результаты пп. 2, 4–6. В частности, последовательность  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится равномерно на любом  $\overline{\Pi}_T = [0, l] \times [0, T]$  к обобщенному решению  $u(x, t)$ , непрерывному на  $\overline{\Pi}_{\infty}$ .

**7. Существование классического решения.** Возникает задача: выяснить, при каких условиях обобщенное решение (30) задачи (1)–(3) является классическим решением. Нетрудно убедиться, что ряд (30) представляет классическое решение этой задачи, если он и ряды, полученные однократным дифференцированием по всем аргументам, сходятся равномерно в любом конечном цилиндре  $\overline{\Pi}_T$ , а ряды, полученные двукратным дифференцированием, сходятся равномерно на любом компакте из  $\overline{\Pi}_{\infty}$ . Доказательство же возможности

почленного дифференцирования ряда (30) в общем случае представляет значительные трудности. Поэтому мы ограничимся рассмотрением смешанной задачи с двумя переменными  $(x, t)$  в полуполосе  $\Pi_\infty = (0, l) \times (0, \infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu, \quad (37)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (38)$$

$$h_1 u - h_2 u_x|_{x=0} = H_1 u + H_2 u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (39)$$

(Считаем, что все  $\lambda_k$  больше нуля; см. условия из § 5.2.)

Собственные функции задачи  $X_k$  образуют полную ортонормальную систему в  $L_2(0, l)$  (см. § 5.2, п. 3) и удовлетворяют интегральному уравнению (см. § 5.2, п. 2)

$$X_k(x) = \lambda_k \int_0^l \mathcal{G}(x, y) X_k(y) dy, \quad (40)$$

где  $\mathcal{G}(x, y)$  — функция Грина оператора  $L$  (см. § 5.2, п. 1). По теореме Мерсера (см. § 4.4, п. 5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k} = \mathcal{G}(x, x), \quad (41)$$

причем ряд (41) сходится равномерно на  $[0, l]$ .

Докажем равномерную на  $[0, l]$  сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X'_k(x)|^2}{\lambda_k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X''_k(x)|^2}{\lambda_k^2}. \quad (42)$$

Равномерная сходимость первого ряда вытекает из интегрального уравнения (40)

$$\frac{X'_k(x)}{\lambda_k} = \int_0^l \mathcal{G}_x(x, y) X_k(y) dy = (\mathcal{G}_x, X_k),$$

равенства Парсеваля–Стеклова (см. § 1.1, п. 6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X'_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \|\mathcal{G}_x\|^2 = \int_0^l |\mathcal{G}_x(x, y)|^2 dy$$

и леммы Дини (см. § 1.1, п. 3). (В силу свойств функции Грина  $\mathcal{G}(x, y)$  последний интеграл есть непрерывная функция на  $[0, l]$ .) Равномерная сходимость второго ряда (42) вытекает из равномерной сходимости первого ряда (42), ряда (41) и дифференциального уравнения

$$X_k''(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} X_k'(x) + \frac{q(x) - \lambda_k}{p(x)} X_k(x).$$

Для задачи (37)–(39) выпишем ряд (30), представляющий обобщенное решение этой задачи (см. п. 6):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t), \quad (43)$$

$$a_k = (u_0, X_k), \quad b_k \sqrt{\lambda_k} = (u_1, X_k). \quad (44)$$

Сначала докажем: если  $u_0 \in \mathcal{M}_L$  и  $u_1 \in \mathcal{L}_2(0, l)$ , то ряд (30) сходится равномерно на  $\overline{\Pi}_{\infty}$  (к непрерывной на  $\overline{\Pi}_{\infty}$  функции  $u(x, t)$ ).

Действительно, так как  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ , то  $Lu_0 \in \mathcal{L}_2(0, l)$  и

$$\lambda_k(u_0, X_k) = (u_0, LX_k) = (Lu_0, X_k).$$

Отсюда, используя обозначения (44), в силу равенства Парсеваля–Стеклова (см. § 1.1, п. 6), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 = \|Lu_0\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k|^2 = \|u_1\|^2. \quad (45)$$

Применяя к ряду (43) неравенства Коши–Буняковского и учитывая равномерную сходимость ряда (41) и сходимость рядов (45), убедимся в регулярной сходимости ряда (43) на  $\overline{\Pi}_{\infty}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin \sqrt{\lambda_k} t| |X_k(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) |X_k(x)| \leq \\ &\leq \left[ \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |b_k|^2} \right] \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Теперь докажем теорему о существовании классического решения задачи (37)–(39).

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u_0$ ,  $Lu_0$ , и  $u_1$  принадлежат  $\mathcal{M}_L$ , то ряд (30) представляет классическое решение задачи (37)–(39), причем  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Pi}_{\infty})$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы, как и в (45), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 |a_k|^2 = \|L^2 u_0\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 |b_k|^2 = \|Lu_1\|^2. \quad (46)$$

Из сходимости рядов (46) и из равномерной сходимости рядов (41) и (42) следует регулярная сходимость на  $\overline{I}_\infty$  ряда (43) и всех рядов, полученных почленным дифференцированием его по  $x$  и  $t$  один и два раза. Теорема доказана.

Первое строгое обоснование метода Фурье для двух переменных было доказано В. А. Стекловым.

### § 6.3. Смешанная задача для уравнения параболического типа

В этом параграфе будет рассмотрена смешанная задача для уравнения параболического типа (см. § 1.4, п. 4)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t) = -Lu + F, \quad (x, t) \in I_\infty; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \overline{G}; \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v(x, t), \quad (x, t) \in S \times [0, \infty); \quad (3)$$

в условиях § 6.1 (здесь  $I_\infty = G \times (0, \infty)$ ).

**1. Классическое решение. Принцип максимума.** Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) называется функция  $u(x, t) \in \mathcal{C}^2(I_\infty) \cap \mathcal{C}(\overline{I}_\infty)$ ,  $\operatorname{grad}_x u \in \mathcal{C}(\overline{I}_\infty)$ , удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре  $I_\infty$ , начальному условию (2) и граничному условию (3).

Для существования классического решения задачи (1)–(3) необходимы следующие условия гладкости:

$$F \in (I_\infty), \quad u_0 \in \mathcal{C}(\overline{G}), \quad v \in \mathcal{C}(S \times [0, \infty)),$$

и условие согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v(x, 0).$$

При изучении краевых задач для уравнения параболического типа весьма полезным является следующий

**Принцип максимума.** Пусть функция  $u(x, t)$  класса  $C^2(G \times (0, T]) \cap C(\overline{\Pi}_T)$  удовлетворяет уравнению (1) в цилиндре  $\Pi_T$  и  $F(x, t) \leq 0$  в  $\Pi_T$ . Тогда либо  $u \leq 0$  на  $\overline{\Pi}_T$ , либо (положительный) максимум функции  $u(x, t)$  на цилиндре  $\overline{\Pi}_T$  достигается на нижнем основании  $\overline{G} \times \{0\}$  или на боковой поверхности  $S \times [0, T]$  его, т. е.

$$u(x, t) \leq \max [0, \max_{\xi \in \overline{G}, \tau=0} u(\xi, \tau), \max_{\xi \in S, 0 \leq \tau \leq T} u(\xi, \tau)], \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T. \quad (4)$$

**Доказательство.** Предположим противное, т. е. функция  $u(x, t)$  принимает положительные значения в некоторых точках цилиндра  $\overline{\Pi}_T$ , но не достигает своего (положительного) максимума ни на его нижнем основании  $\overline{G} \times \{0\}$ , ни на боковой поверхности  $S \times [0, T]$ . Это значит, что найдется точка  $(x_0, t_0)$ ,  $x_0 \in G$ ,  $0 < t_0 \leq T$ , такая, что

$$u(x_0, t_0) > \max [0, \max_{\xi \in \overline{G}, \tau=0} u(\xi, \tau), \max_{\xi \in S, 0 \leq \tau \leq T} u(\xi, \tau)] = M \geq 0. \quad (5)$$

Положим

$$\varepsilon = u(x_0, t_0) - M > 0 \quad (6)$$

и рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t}{T}.$$

Тогда

$$v(x, t) \leq u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T,$$

и в силу (6) при всех  $(x, t) \in \overline{G} \times \{0\} \cup S \times [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} v(x_0, t_0) &\geq u(x_0, t_0) = \varepsilon + M \geq \varepsilon + u(x, t) \geq \\ &\geq \varepsilon + v(x, t) - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + v(x, t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция  $v$  также принимает свое (положительное) максимальное значение на  $\overline{\Pi}_T$  в некоторой точке  $(x', t')$ ,  $x' \in G$ ,  $0 < t' \leq T$ , причем

$$v(x', t') \geq v(x_0, t_0) \geq \varepsilon + M. \quad (7)$$

Выпишем необходимые условия максимума функции  $v$  в точке  $(x', t')$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0, \quad \operatorname{grad} v = 0, \quad \Delta u \leqslant 0.$$

Из этих условий, а также из неравенства (7) вытекает, что в этой точке

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu - F &= \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} - p \Delta v - (\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} v) + qv - F + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\rho}{T} - q \frac{T - t'}{T} \right) \geqslant \\ &\geqslant qv + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\rho}{T} - q \frac{T - t'}{T} \right) = q\varepsilon \left( 1 - \frac{T - t'}{2T} \right) + \frac{\varepsilon\rho}{2T} > 0, \end{aligned}$$

что противоречит уравнению (1). Это значит, что неравенство (5) неверно и, следовательно, справедливо противоположное неравенство (4), что и требовалось установить.

Заменяя  $u$  на  $-u$  и  $F$  на  $-F$ , из принципа максимума получим

**ПРИНЦИП МИНИМУМА.** *Если функция  $u$  класса  $\mathcal{C}^2(G \times (0, T]) \cap \mathcal{C}(\overline{\Pi}_T)$  удовлетворяет уравнению (1) в  $\Pi_T$  и  $F \geqslant 0$  в  $\Pi_T$ , то справедливо неравенство*

$$u(x, t) \geqslant \min [0, \min_{\xi \in \overline{G}, \tau=0} u(\xi, \tau), \min_{\xi \in S, 0 \leqslant \tau \leqslant T} u(\xi, \tau)]. \quad (4')$$

**2. Единственность и непрерывная зависимость классического решения.** Применим принципы максимума и минимума для установления единственности и непрерывной зависимости классического решения смешанной задачи (1)–(3) I рода, т. е. когда в граничном условии (3)  $\alpha = 1$  и  $\beta = 0$ :

$$u|_S = v(x, t), \quad (x, t) \in S \times [0, \infty). \quad (31)$$

(Требование  $\operatorname{grad}_x u \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_T)$  для краевых задач I рода излишне; см. замечание из § 1.4.)

Пусть  $u(x, t)$  — классическое решение задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) и  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_\infty)$ . Фиксируем  $T > 0$  и положим

$$M = \|F\|_{\mathcal{C}(\overline{\Pi}_T)}, \quad M_1 = \|v\|_{\mathcal{C}(S \times [0, T])}, \quad M_0 = \|u_0\|_{\mathcal{C}(\overline{G})}.$$

Рассмотрим функцию

$$\chi(x, t) = u(x, t) - \frac{M}{\rho_0} t, \quad \rho_0 = \min_{x \in \overline{G}} \rho(x) > 0. \quad (8)$$

Функция  $\chi$  является классическим решением смешанной задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) с заменой  $F$  и  $v$  на  $F - \frac{\rho}{\rho_0}M - \frac{q}{\rho_0}Mt$  и  $v - \frac{M}{\rho_0}t$  соответственно. Учитывая, что

$$F - \frac{\rho}{\rho_0}M - \frac{q}{\rho_0}Mt \leq 0, \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T, \quad v - \frac{M}{\rho_0}t \leq M_1, \quad (x, t) \in S \times [0, T],$$

и пользуясь неравенством (4), получим оценку

$$\chi \leq \max(M_0, M_1),$$

т. е. в силу (8)

$$u(x, t) \leq \frac{M}{\rho_0}T + \max(M_0, M_1), \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T.$$

Аналогично, вводя функцию

$$\chi_1(x, t) = u(x, t) + \frac{M}{\rho_0}t$$

и пользуясь неравенством (4'), получим противоположную оценку

$$u(x, t) \geq -\frac{M}{\rho_0}T - \max(M_0, M_1), \quad (x, t) \in \overline{\Pi}_T.$$

Итак, если  $u(x, t)$  — классическое решение задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) и  $F \in C(\overline{\Pi}_\infty)$ , то при любом  $T > 0$  справедлива оценка

$$\|u\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leq \max[\|u_0\|_{C(\overline{G})}, \|v\|_{C(S \times [0, T])}] + \frac{T}{\rho_0} \|F\|_{C(\overline{\Pi}_T)}. \quad (9)$$

Пользуясь полученной оценкой, докажем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** *Классическое решение задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) единствено и непрерывно зависит от  $u_0$ ,  $v$  и  $F$  в том смысле, что если*

$$\|F - \tilde{F}\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leq \varepsilon, \quad \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{C(\overline{G})} \leq \varepsilon_0, \quad \|v - \tilde{v}\|_{C(S \times [0, T])} \leq \varepsilon_1, \quad (10)$$

*то соответствующие классические решения  $u(x, t)$  и  $\tilde{u}(x, t)$  удовлетворяют неравенству*

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leq \max(\varepsilon_0, \varepsilon_1) + \frac{T}{\rho_0} \varepsilon. \quad (11)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Единственность решения вытекает из того, что в силу оценки (9) однородная задача (1), (2), (3<sub>1</sub>) (при  $u_0 = 0, v = 0, F = 0$ ) имеет только нулевое классическое решение (см. § 1.1, п. 9).

Для доказательства непрерывной зависимости составим разность  $\eta = u - \tilde{u}$ . Функция  $\eta$  является классическим решением задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) с заменой  $F, u_0$  и  $v$  на  $F - \tilde{F}, u_0 - \tilde{u}_0$  и  $v - \tilde{v}$  соответственно. Применяя неравенство (9) к функции  $\eta$  и пользуясь оценками (10), получим оценку (11). Теорема доказана.

**3. Обобщенное решение.** Как и для уравнения гиперболического типа, введем понятие обобщенного решения краевой задачи (1)–(3).

Пусть существуют последовательности функций  $F_k \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_\infty)$ ,  $u_{k0} \in \mathcal{C}(\overline{G})$  и  $v_k \in \mathcal{C}(S \times [0, \infty))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такие, что:

1) при  $k \rightarrow \infty$  для любого  $T > 0$

$$F_k \rightarrow F \text{ в } \mathcal{C}(\overline{\Pi}_T), \quad v_k \rightarrow v \text{ в } \mathcal{C}(S \times [0, T]), \quad u_{k0} \rightarrow u_0 \text{ в } \mathcal{C}(\overline{G}); \quad (12)$$

2) при каждом  $k = 1, 2, \dots$  существует классическое решение смешанной задачи

$$\rho \frac{\partial u_k}{\partial t} = -Lu_k + F_k; \quad (1')$$

$$u_k|_{t=0} = u_{k0}; \quad (2')$$

$$\alpha u_k + \beta \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = v_k. \quad (3')$$

Предположим, что существует функция  $u(x, t)$  непрерывная на цилиндре  $\overline{\Pi}_\infty$  и такая, что при любом  $T > 0$

$$u_k \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{C}(\overline{\Pi}_T). \quad (13)$$

Функцию  $u(x, t)$  назовем *обобщенным решением* задачи (1)–(3).

Из определения обобщенного решения задачи (1)–(3) следует (ср. § 6.2, п. 4): всякое классическое решение этой задачи является обобщенным решением ее; для существования обобщенного решения необходимо выполнение условий  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_\infty)$ ,  $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{G})$ ,  $v \in \mathcal{C}(S \times [0, \infty))$ ; обобщенное решение удовлетворяет начальному условию (2); обобщенное решение удовлетворяет уравнению (1) в обобщенном смысле, т. е. для любой  $\varphi \in \mathcal{D}(\Pi_\infty)$  выполнено интегральное соотношение

$$\int u \left( -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi \right) dx dt = \int F\varphi dx dt. \quad (14)$$

Докажем, что для краевой задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) последовательность  $\{u_k\}$  равномерно сходится на любом  $\overline{\Pi}_T$ .

Действительно, применяя неравенство (9) к разности  $u_k - u_p$ , при всех  $T > 0$  получаем

$$\begin{aligned} \|u_k - u_p\|_{C(\overline{\Pi}_T)} &\leqslant \\ &\leqslant \max [\|u_{k0} - u_{p0}\|_{C(\overline{G})}, \|v_k - v_p\|_{C(S \times [0, T])}] + \frac{T}{\rho_0} \|F_k - F_p\|_{C(\overline{\Pi}_T)}, \end{aligned}$$

откуда в силу (12) следует, что последовательность  $\{u_k\}$  сходится в себе в  $C(\overline{\Pi}_T)$ . Поэтому существует функция  $u(x, t)$ , непрерывная на  $\overline{\Pi}_\infty$  и такая, что последовательность  $\{u_k\}$  сходится к  $u$  в  $C(\overline{\Pi}_T)$  при любом  $T > 0$  (см. § 1.1, п. 3).

Докажем, что оценка (9) остается справедливой и для обобщенного решения  $u(x, t)$  задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>).

Действительно, пусть  $u_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — последовательность классических решений задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>), равномерно сходящаяся к обобщенному решению  $u(x, t)$  на любом цилиндре  $\overline{\Pi}_T$ . Применяя к решениям  $u_k$  оценку (9), при всех  $T > 0$  получаем

$$\|u_k\|_{C(\overline{\Pi}_T)} \leqslant \max [\|u_{k0}\|_{C(\overline{G})}, \|v_k\|_{C(S \times [0, T])}] + \frac{T}{\rho_0} \|F_k\|_{C(\overline{\Pi}_T)}. \quad (15)$$

Учитывая предельные соотношения (12) и (13) и переходя к пределу в неравенстве (15) при  $k \rightarrow \infty$ , убедимся в справедливости оценки (9).

Из оценки (9) вытекают единственность обобщенного решения задачи (1), (2), (3<sub>1</sub>) и его непрерывная зависимость от  $u_0$ ,  $v$  и  $F$  в том же смысле, что и в теореме из п. 2.

**4. Существование обобщенного решения.** Существование обобщенного решения докажем для смешанной задачи (1)–(3) при  $F = 0$  и  $v = 0$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -Lu, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (16)$$

В § 6.1, п. 3 было построено формальное решение задачи (16) в виде ряда Фурье по собственным функциям  $X_j$  оператора  $L$ :

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad a_j = (u_0, X_j)_\rho. \quad (17)$$

Предположим, что  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ . Докажем, что при этом условии ряд (17), представляющий формальное решение задачи (16), сходится равномерно на  $\overline{\Pi}_\infty$  и определяет обобщенное решение  $u(x, t)$  этой задачи.

Действительно, пользуясь теоремой разложения 1 из § 5.1, п. 4 (см. замечание), представим функцию  $u_0$  в виде регулярно сходящегося на  $\overline{G}$  ряда Фурье по собственным функциям оператора  $L$ :

$$u_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_j(x). \quad (18)$$

Обозначим через  $u_k$  и  $u_{k0}$  частные суммы рядов (17) и (18) соответственно. Функции  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , являются классическими решениями задачи (16) с заменой  $u_0$  на  $u_{k0}$ , причем  $u_{k0} \rightarrow u_0$  в  $\mathcal{C}(\overline{G})$ . Поскольку все  $\lambda_k$  больше нуля, то ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (17), мажорируется на  $\overline{\Pi}_\infty$  равномерно сходящимся на  $\overline{G}$  рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j X_j(x)|.$$

Поэтому последовательность  $\{u_k\}$  сходится равномерно на  $\overline{\Pi}_\infty$  к обобщенному решению  $u(x, t)$  задачи (16).

Итак, установлена

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ , то обобщенное решение задачи (16) существует и представляется регулярно сходящимся на  $\overline{\Pi}_\infty$  рядом (17) — формальным решением этой задачи.*

**5. Существование классического решения.** Как и в § 6.2, п. 7, ограничимся рассмотрением смешанной задачи с двумя переменными  $(x, t)$  в полуполосе  $\Pi_\infty = (0, l) \times (0, \infty)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu, \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

$$h_1 u - h_2 u_x|_{x=0} = H_1 u + H_2 u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

(при условиях из § 6.2, п. 7).

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ , то ряд (17) дает классическое решение  $u(x, t)$  задачи (19)–(21), бесконечно дифференцируемое по  $t$  при  $t > 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По теореме из п. 4  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Pi}_\infty)$ . Далее, пользуясь равномерной сходимостью рядов (41) и (42) из § 6.2 и сходимостью первого ряда (45) из § 6.2, как и в § 6.2, п. 7, устанавливаем регулярную сходимость рядов

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j^{(k)}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad k = 1, 2;$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (-\lambda_j)^k e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

(при любом  $\varepsilon > 0$ ). При этом нужно учесть, что величины  $\lambda_j^k e^{-\lambda_j t}$  равномерно ограничены при  $j = 1, 2, \dots, t \geq \varepsilon$ . Теорема доказана.

# Дополнение

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

### § Д.1. Функции Бесселя

Функции Бесселя возникают при решении уравнений, связанных с оператором Лапласа  $\Delta$  на плоскости,

$$-\Delta u(x, y) \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u + f(x, y).$$

Действительно, в полярных координатах  $(r, \varphi)$ ,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

это уравнение принимает вид

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = \lambda \tilde{u} + \tilde{f}(r, \varphi), \quad \tilde{u}(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Если решение  $\tilde{u}(r)$  не зависит от  $\varphi$ , то последнее уравнение при  $f = 0$  принимает вид

$$u''(r) + \frac{1}{r} u'(r) + \lambda u(r) = 0$$

и является частным случаем *уравнения Бесселя*

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0. \quad (1)$$

Всякое решение уравнения Бесселя, не равное тождество нулю, называется *цилиндрической функцией*.

**1. Определение и простейшие свойства функций Бесселя.** Рассмотрим функцию

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1) \Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (2)$$

зависящую от параметра  $\nu \in (-\infty, \infty)$ . Эта функция представима в виде

$$J_\nu(x) = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (3)$$

где  $f_\nu(\zeta)$  — целая функция,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)}. \quad (4)$$

Действительно, по признаку Даламбера [2] ряд (4) сходится равномерно на всяком компакте плоскости комплексного переменного  $\zeta$ , и поэтому определяет целую функцию.

В частности,  $J_\nu(x)$  — однозначная аналитическая функция при  $\nu = 0, \pm 1, \dots$  и многозначная аналитическая функция при  $\nu \neq 0, \pm 1, \dots$ ; в последнем случае мы выделяем ту ветвь ее, где  $x^\nu > 0$  при  $x > 0$ .

Проверим, что  $J_\nu(x)$  удовлетворяет уравнению (1). Пользуясь соотношением  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , получим

$$\begin{aligned} x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + 2k+\nu-\nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \\ &= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Цилиндрическая функция  $J_\nu(x)$  называется *функцией Бесселя порядка  $\nu$* .

В частности,

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \quad (5)$$

Если  $\nu$  не целое число, то функции  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x) = J_{-\nu}(x)$  линейно независимы, поскольку согласно (2)

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0, \quad \nu \neq \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Если же  $\nu = n$  — целое число, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (7)$$

так что функция  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  линейно зависимы.

Докажем равенство (7). Учитывая, что  $\Gamma(-k) = \infty$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , из (2) имеем

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Отметим, что если  $\nu = n$  — целое неотрицательное число, то второе линейно независимое решение  $Y_n(x)$  уравнения Бесселя (1) обладает свойством

$$Y_n(x) = \begin{cases} c_n x^{-n} [1 + o(1)], & n \geq 1, \\ c_0 \ln x [1 + o(1)], & n = 0, \end{cases} \quad x \rightarrow 0, \quad (8)$$

при некоторых постоянных  $c_n \neq 0$ .

Это утверждение вытекает из формулы Остроградского–Лиувилля (см. [5]) при  $p(x) = x$ ,

$$Y'_n(x)J_n(x) - Y_n(x)J'_n(x) = \frac{a_n}{x}, \quad a_n \neq 0,$$

откуда

$$\left( \frac{Y_n(x)}{J_n(x)} \right)' = \frac{a_n}{x J_n^2(x)},$$

так что

$$Y_n(x) = J_n(x) \left[ b_n - a_n \int_x^{x_n} \frac{d\xi}{\xi J_n^2(\xi)} \right]. \quad (9)$$

Выбирая  $x_n$  достаточно малым и пользуясь асимптотикой (6), из (9) получаем (8).

**2. Свойство ортогональности.** Если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — вещественные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad (10)$$

то при  $\nu > -1$

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = 0, \quad \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \quad (11)$$

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x) dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1). \quad (12)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — любые вещественные числа. Функции  $J_\nu(\mu_1 x)$  и  $J_\nu(\mu_2 x)$  удовлетворяют в силу (1) уравнениям

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dJ_\nu(\mu_i x)}{dx} \right] + \left( \mu_i^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_i x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Первое из этих уравнений умножим на  $J_\nu(\mu_2 x)$ , а второе на  $J_\nu(\mu_1 x)$ , затем вычтем почленно одно из другого и проинтегрируем по интервалу  $(0, 1)$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[ x \left( J_\nu(\mu_2 x) \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} - J_\nu(\mu_1 x) \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right) \right] dx = \\ = (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x[\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x)] \Big|_0^1 = \\ = (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx. \quad (13) \end{aligned}$$

Но из (2) при  $x \rightarrow +0$  имеем (ср. (6))

$$\begin{aligned} J_\nu(\mu x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left( \frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ \mu x J'_\nu(\mu x) &= \frac{\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \left( \frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \end{aligned}$$

и поэтому

$$x \mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - x \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \quad x \rightarrow +0.$$

Таким образом, в силу условия  $\nu > -1$  левая часть равенства (13) обращается в нуль при  $x = 0$  и мы получаем

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2} [\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)]. \quad (14)$$

Если теперь  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — корни уравнения (10),

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0, \quad (15)$$

а числа  $\alpha$  и  $\beta$  не равны нулю одновременно, то определитель линейной системы (15) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\mu_1) & \mu_1 J'_\nu(\mu_1) \\ J_\nu(\mu_2) & \mu_2 J'_\nu(\mu_2) \end{vmatrix} = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) = 0.$$

Отсюда и из (14) следует свойство ортогональности (4).

Пусть  $\mu_1$  — корень уравнения (10). Переходя в равенстве (14) к пределу при  $\mu_2 \rightarrow \mu_1$  и пользуясь правилом Лопитала и уравнением (1), получим формулу (12):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x) dx &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{1}{\mu_2^2 - \mu_1^2} [\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)] = \\ &= \frac{1}{2\mu_1} \{ \mu_1 J'_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_1) - J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] \} = \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] = \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu^2(\mu_1) \left( 1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2} \right). \end{aligned}$$

### 3. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя.

Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (16)$$

Действительно, согласно определению (2)

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \right] \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+\nu-1} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_{\nu}(x),$$

и левая формула доказана. Аналогично проверяется и правая формула.

Формулы (16) можно переписать в виде

$$[x^{\nu} J_{\nu}(x)]' = x^{\nu} J_{\nu-1}(x), \quad [x^{-\nu} J_{\nu}(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad (17)$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m [x^{\pm\nu} J_{\nu}(x)] = (\pm 1)^m x^{\pm\nu-m} J_{\nu\mp m}(x), \quad m = 0, 1, \dots \quad (18)$$

В частности, из формул (5) и (18) при  $m = 0, 1, \dots$  имеем

$$\begin{aligned} J_{m+1/2}(x) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+1/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \frac{\sin x}{x}, \\ J_{-m-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+1/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \frac{\cos x}{x}. \end{aligned} \quad (19)$$

Наконец, вычитая формулы (16) друг из друга, получаем еще одно рекуррентное соотношение:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) + J_{\nu-1}(x) = 0. \quad (20)$$

**4. Корни функций Бесселя.** Докажем следующие свойства корней уравнения (10) при  $\nu > -1$ . (При  $\beta = 0$  это уравнение определяет корни функций Бесселя.)

**ТЕОРЕМА.** *Корни уравнения (10) при  $\nu > -1$  вещественные, простые, кроме, возможно, 0; они симметрично расположены относительно точки 0 и не имеют конечных предельных точек.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вещественность корней. Из формулы (2) в силу вещественности  $\Gamma(\xi)$  при вещественных  $\xi$  получаем  $J_{\nu}(\bar{x}) = J_{\nu}(x)$ , так что при вещественных  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha J_{\nu}(\bar{\mu}) + \beta \bar{\mu} J'_{\nu}(\bar{\mu}) = \overline{\alpha J_{\nu}(\mu) + \beta \mu J'_{\nu}(\mu)}.$$

Поэтому, если  $\mu$  — корень уравнения (10), то  $\bar{\mu}$  — также его корень. Если  $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$ , то, применяя формулу (11) с  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = \bar{\mu}$ , получим противоречие:

$$0 = \int_0^1 x J_{\nu}(\mu x) J_{\nu}(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_{\nu}(\mu x)|^2 dx.$$

Поэтому  $\mu^2 = \bar{\mu}^2$ , т. е. либо  $\mu$  вещественное, либо  $\mu = ia$  — мнимое число,  $a \neq 0$  вещественное. Но последний случай невозможен, поскольку в силу (2) и  $\Gamma(\xi) > 0$ ,  $\xi > 0$

$$\alpha J_\nu(ia) + \beta ia J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Симметрия корней и отсутствие конечных предельных точек следуют из представления (см. (3))

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = \mu^\nu [(\alpha + \beta\nu) f_\nu(\mu^2) + 2\beta\mu^2 f'_\nu(\mu^2)]$$

и из того факта, что нули целой функции не могут иметь конечных предельных точек (см. [3]).

Докажем простоту корней. Пусть  $\mu_0 > 0$  — корень уравнения (10) кратности  $\geq 2$ , так что

$$\begin{aligned} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) &= 0, \\ \alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J'_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_\nu(\mu_0) &= \\ &= -\beta \left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0}\right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

в силу уравнения (4).

Из системы (21) заключаем:

- а) либо  $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$ ;
- б) либо ее определитель  $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$ .

Случай а) невозможен в силу теоремы единственности решения уравнения (1), поскольку точка  $\mu_0$  не особая для него. Докажем, что случай б) также невозможен. Для реализации б) необходимо  $\beta > 0$  и

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}, \quad 0 < \mu_0 \leq |\nu|.$$

Подставляя это выражение в первое из равенств (21) и возводя в квадрат, получим

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1\right) J_\nu^2(\mu_0),$$

что в силу (12) приводит к противоречивому равенству

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\mu_0 x) dx = 0.$$

Теорема доказана.

На основании установленной теоремы положительные корни уравнения (13) можно перенумеровать, располагая их в порядке возрастания

$$\mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots \quad (22)$$

Приведем для примера первые три корня  $J_0(x)$ :

$$\mu_1^{(0)} = 2,4048, \quad \mu_2^{(0)} = 5,5201, \quad \mu_3^{(0)} = 8,6537.$$

Выпишем без доказательства асимптотику функции  $J_\nu(x)$ :

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Отсюда вытекает приближенная формула для корней  $J_\nu(x)$

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \nu + k\pi.$$

**5. Краевая задача на собственные значения для уравнения Бесселя.** Пусть  $\nu \geq 0$ . Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x} u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (24)$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (25)$$

где  $\gamma = \min(\nu, 1)$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ . К области определения  $\mathcal{M}_{L_\nu}$  оператора  $L_\nu$  отнесем функции  $u(x)$  класса  $C^2((0, 1])$ , удовлетворяющие граничным условиям (25) и условию:  $x^{-1/2} L_\nu u \in \mathcal{L}_2(0, 1)$ ;  $\mathcal{M}_{L_\nu}$  плотно в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ .

Из определения  $\mathcal{M}_{L_\nu}$  непосредственно вытекает: если  $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$ , то

$$L_\nu u \in \mathcal{L}_2(0, 1), \quad xu'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (26)$$

Оператор  $L_\nu$  положительный (и, стало быть, эрмитов; см. § 1.1, п. 10), причем

$$(L_\nu u, u) = \int_0^1 x|u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2 \geq 0, \quad u \in \mathcal{M}_{L_\nu} \quad (27)$$

(при  $\beta = 0$  последнее слагаемое в (27) выпадает).

Действительно, (27) следует из (25) и (26):

$$\begin{aligned} (L_\nu u, u) &= \int_0^1 (L_\nu u) \bar{u} dx = - \int_0^1 (xu')' \bar{u} dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx = \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx - xu' \bar{u} \Big|_0^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx = \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2. \end{aligned}$$

Каждое собственное значение  $\lambda$  оператора  $L_\nu$  неотрицательное и простое. Для того чтобы  $\lambda = 0$  было собственным значением оператора  $L_\nu$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\nu = \alpha = 0$ ; ему соответствует (единственная) собственная функция  $u(x) = \text{const}$ .

Действительно, из неотрицательности квадратичной формы  $(L_\nu u, u)$  следует неотрицательность собственных значений  $\lambda$ ; при этом, как и в § 5.1, п. 4, устанавливаем, что  $\lambda = 0$  — собственное значение тогда и только тогда, когда  $\nu = \alpha = 0$ , и ему соответствует собственная функция  $u(x) = \text{const}$ . Простота  $\lambda$  доказывается так же, как и в § 5.2, п. 3.

Пусть  $\mu_0$  — корень уравнения (10). Тогда из уравнения Бесселя (1) и из (6) следует, что  $\lambda_0 = \mu_0^2$  — собственное значение и  $J_\nu(\mu_0 x)$  — соответствующая собственная функция оператора  $L_\nu$ . Обратно, пусть  $\lambda_0$  — (положительное) собственное значение и  $u_\nu(x)$  — соответствующая собственная функция оператора  $L_\nu$ . Тогда (см. п. 1)

$$u_\nu(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda_0} x) + C_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda_0} x).$$

Но из первого граничного условия (25) и из (6) и (8) следует, что  $C_2 = 0$ . А тогда  $u_\nu(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda_0} x)$ , и из второго граничного условия (25) следует, что  $\mu_0 = \sqrt{\lambda_0}$  есть корень уравнения (10).

Таким образом,

$$\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2, \quad J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

— все собственные значения и собственные функции оператора  $L_\nu$ .

**6. Неоднородная краевая задача для уравнения Бесселя.** Пусть  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L_\nu$ , т. е. либо  $\nu > 0$ , либо  $\nu = 0$ ,  $\alpha > 0$ . Пользуясь методом из § 5.2, п. 1, построим функцию Грина  $\mathcal{G}_\nu(x, y)$  оператора  $L_\nu$ .

Пусть  $\nu > 0$ . Легко проверить, что  $x^\nu$  и  $x^{-\nu}$  — линейно независимые решения уравнения  $L_\nu u = 0$ . При этом функция  $v_1(x) = x^\nu$  удовлетворяет первому граничному условию (25), а функция

$$v_2(x) = ax^\nu + x^{-\nu}, \quad a = \frac{\beta\nu - \alpha}{\beta\nu + \alpha},$$

удовлетворяет второму граничному условию (25). Поэтому в соответствии с формулой (10) из § 5.2 функция  $\mathcal{G}_\nu(x, y)$  имеет вид

$$\mathcal{G}_\nu(x, y) = \begin{cases} c_\nu x^\nu (ay^\nu + y^{-\nu}), & 0 \leq x \leq y, \\ c_\nu y^\nu (ax^\nu + x^{-\nu}), & y \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (29)$$

при некотором  $c_\nu \neq 0$ .

Пусть  $\nu = 0$  и  $\alpha > 0$ . Функции 1 и  $\ln x$  — линейно независимые решения уравнения  $L_0 u = 0$ . Можно положить  $v_1(x) = 1$ ,  $v_2(x) = -\frac{\beta}{\alpha} + \ln x$  и

$$\mathcal{G}_0(x, y) = \begin{cases} c_0 \left( -\frac{\beta}{\alpha} + \ln y \right), & 0 \leq x \leq y, \\ c_0 \left( -\frac{\beta}{\alpha} + \ln x \right), & y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (30)$$

Решение краевой задачи

$$L_\nu u = f(x), \quad u \in \mathcal{M}_{L_\nu}, \quad f \in \mathcal{C}((0, 1]), \quad x^{-1/2} f \in \mathcal{L}_2(0, 1), \quad (31)$$

единственno и выражается формулой

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) f(y) dy. \quad (32)$$

Это утверждение устанавливается так же, как и в § 5.2, п. 2. Единственное различие связано с первым граничным условием (25). Проверим его выполнение. Пусть  $\nu > 0$ . Тогда, пользуясь (29) и неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| c_\nu (ax^\nu + x^{-\nu}) \int_0^x y^\nu f(y) dy + c_\nu x^\nu \int_x^1 (ay^\nu + y^{-\nu}) f(y) dy \right| \leqslant \\ &\leqslant O(x^\nu) + |c_\nu| x^{-\nu} \sqrt{\int_0^x y^{2\nu+1} dy} \sqrt{\int_0^x |f(y)|^2 \frac{dy}{y}} + \end{aligned}$$

$$+ |c_\nu| x^\nu \sqrt{\int_x^1 y^{-2\nu+1} dy} \sqrt{\int_x^1 |f(y)|^2 \frac{dy}{y}} = O(x^\nu) + O(x) = O(x^\gamma)$$

при  $x \rightarrow 0$ , что и требовалось. Аналогично, и даже проще, рассматривается случай  $\nu = 0$ .

**7. Полнота функций Бесселя.** Введем пространство  $\mathcal{L}_2((0, 1); x)$  — функций со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_x = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} x dx, \quad \|f\|_x = \sqrt{(f, f)_x}.$$

В силу результатов предыдущего пункта, как и в § 5.2, п. 2, заключаем, что если  $\lambda = 0$  не есть собственное значение оператора  $L_\nu$ , то задача на собственные значения (24), (25) эквивалентна задаче на собственные значения для однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{G}_\nu(x, y) u(y) y dy, \quad u \in \mathcal{C}([0, 1]). \quad (33)$$

Переходя к новой неизвестной функции  $v(x) = \sqrt{x} u(x)$ , приведем интегральное уравнение (33) к эквивалентному виду (ср. § 4.4, п. 6)

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y) v(y) dy, \quad v \in \mathcal{C}([0, 1]). \quad (34)$$

В силу (29) и (30) ядро  $\sqrt{xy} \mathcal{G}_\nu(x, y)$  вещественно, непрерывно и симметрично. Поэтому к интегральному уравнению (34) применима теория Гильберта–Шмидта (см. § 4.3 и § 5.1). В частности, существуют собственные значения  $\lambda_k^{(\nu)}$  и  $\sqrt{x} J_\nu(\sqrt{\lambda_k^{(\nu)}} x)$  — соответствующие собственные функции,  $k = 1, 2, \dots$ , ортогональные в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  (см. п. 5).

Таким образом, мы доказали, что краевая задача (24), (25) имеет собственные значения  $\lambda_1^{(\nu)} < \lambda_2^{(\nu)} < \dots$ , являющиеся квадратами положительных корней  $\mu_k^{(\nu)}$  уравнения (10); соответствующие собственные функции  $J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$  образуют ортогональную систему в  $\mathcal{L}_2((0, 1); x)$ , причем в силу (12)

$$\left\| J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x) \right\|_x^2 = \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_k^{(\nu)})]^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\nu^2}{\lambda_k^{(\nu)}} \right) J_\nu^2(\mu_k^{(\nu)}). \quad (35)$$

Справедлива следующая

**ТЕОРЕМА.** *Если  $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$ , то функция  $\sqrt{x} u(x)$  разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по системе функций  $\sqrt{x} J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$ ,*

$k = 1, 2, \dots$ :

$$\sqrt{x}u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} \sqrt{x}J_{\nu}(\mu_k^{(\nu)}x), \quad a_k^{(\nu)} = \frac{(u, J_{\nu}(\mu_k^{(\nu)}x))_x}{\|J_{\nu}(\mu_k^{(\nu)}x)\|_x^2}. \quad (36)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство следует доказательству теоремы Стеклова (см. § 5.2, п. 3). Если  $u \in \mathcal{M}_{L_{\nu}}$ , то  $L_{\nu}u = f$ , где  $f \in \mathcal{C}((0, 1])$ ,  $x^{-1/2}f \in \mathcal{L}_2(0, 1)$  (см. п. 5). По доказанному (см. п. 6) функция  $u(x)$  выражается через ядро  $\mathcal{G}_{\nu}(x, y)$  по формуле (32), т. е.

$$\sqrt{x}u(x) = \int_0^1 \sqrt{xy} \mathcal{G}_{\nu}(x, y) \frac{f(y)}{\sqrt{y}} dy.$$

Таким образом, функция  $\sqrt{x}u(x)$  истокообразно представима через вещественное непрерывное симметрическое ядро  $\sqrt{xy}\mathcal{G}_{\nu}(x, y)$ . По теореме Гильберта–Шмидта (см. § 4.4, п. 1) эта функция разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям  $\sqrt{x}J_{\nu}(\mu_k^{(\nu)}x)$  этого ядра.

Если же  $\lambda = 0$  есть собственное значение оператора  $L_{\nu}$  (т. е. при  $\nu = \alpha = 0$ ; см. п. 5), то, как и в § 5.2, достаточно рассмотреть задачу

$$-(xu')' + xu = (\lambda + 1)xu, \quad u(x) = O(1), \quad x \rightarrow 0, \quad u'(1) = 0.$$

Теорема доказана.

Множество функций  $\{\sqrt{x}u(x), u \in \mathcal{M}_{L_{\nu}}\}$  плотно в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ . По теореме каждую функцию вида  $\sqrt{x}u(x)$ ,  $u \in \mathcal{M}_{L_{\nu}}$ , можно сколь угодно точно приблизить в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$  линейными комбинациями ортогональной системы функций  $\sqrt{x}J_{\nu}(\mu_k^{(\nu)}x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Отсюда по теореме из § 1.1, п. 7 следует, что эта система полна в  $\mathcal{L}_2(0, 1)$ .

Итак, система собственных функций  $J_{\nu}(\mu_k^{(\nu)}x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , полна в пространстве  $\mathcal{L}_2([0, 1]; x]$ .

**8. Другие цилиндрические функции.** Наряду с функциями Бесселя  $J_{\nu}(x)$  большое значение для приложений имеют другие типы цилиндрических функций. К их числу относятся:

*функции Ханкеля первого рода*

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{i}{\sin \pi \nu} [J_{\nu}(x)e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \neq n,$$

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\partial J_{\nu}(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n};$$

функции Ханкеля второго рода

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(x) &= \frac{1}{i \sin \pi \nu} [J_\nu(x)e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \neq n, \\ H_n^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - \frac{i}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}; \end{aligned}$$

функции Неймана

$$\begin{aligned} N_\nu(x) &= \frac{1}{\sin \pi \nu} [J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \neq n, \\ N_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}; \end{aligned}$$

функции мнимого аргумента

$$I_\nu(x) = \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \nu i \right\} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} \exp \left\{ \frac{\pi}{2} \nu i \right\} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{cases} \quad (37)$$

Пользуясь асимптотикой (23) для  $J_\nu(x)$ , получим при  $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ i \left( x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + O(x^{-3/2}), \quad (38)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ -i \left( x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) \right\} + O(x^{-3/2}), \quad (39)$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \quad (40)$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (41)$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (42)$$

Аналогично, пользуясь (6), получим при  $x \rightarrow +0$

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad (43)$$

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad K_0(x) = \ln \frac{1}{x} + \dots \quad (44)$$

## § Д.2. Сферические функции

Сферические функции возникают при решении уравнения Лапласа в пространстве

$$\Delta u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

Действительно, в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ ,

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta,$$

уравнение Лапласа (см. (14) из § 1.3) для функции  $\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = u(x_1, x_2, x_3)$  принимает вид

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2)$$

Если решение  $\tilde{u}$  искать в виде  $\tilde{u} = r^\lambda Y(\theta, \varphi)$ , то функция  $Y(\theta, \varphi)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda(\lambda + 1)Y = 0. \quad (3)$$

Ниже мы увидим, что решения уравнения (3), бесконечно дифференцируемые на двумерной единичной сфере  $S^2$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , существуют при целых значениях  $\lambda = l = 0, 1, \dots$ . Такие решения называются *сферическими функциями*.

**1. Определение сферических функций.** *Сферической функцией (сферической гармоникой)* порядка  $l = 0, 1, \dots$  называется всякий однородный гармонический полином степени  $l$ , рассматриваемый на двумерной единичной сфере  $S^2 \equiv S_1$  трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$ .

Такое определение сферических функций можно сформулировать для любого числа переменных, в частности на окружности  $S^1$  (одномерной единичной сфере на плоскости).

Таким образом, между сферическими функциями  $Y_l(s)$ ,  $s \in S^2$ , порядка  $l$  и однородными гармоническими полиномами  $u_l(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , степени  $l$  равенство

$$Y_l(s) = u_l \left( \frac{x}{|x|} \right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \quad s = \frac{x}{|x|}, \quad (4)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Сферические функции  $Y_l$  и  $Y_{l'}$  различных порядков ортогональны в  $\mathcal{L}_2(S^2)$ ,

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^2} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds = 0, \quad l \neq l'. \quad (5)$$

Действительно, применяя формулу Грина (8) из § 5.1 для шара  $U_1$  к гармоническим полиномам

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^2} \left[ |x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial(|x|^l Y_l)}{\partial \mathbf{n}} - |x|^l Y_l \frac{\partial(|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial \mathbf{n}} \right] ds = \\ &= \int_{S^2} \left[ \frac{d(r^l)}{dr} - \frac{d(r^{l'})}{dr} \right]_{r=1} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds = (l - l') \int_{S^2} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Для примера вычислим все сферические функции  $Y_l$  на окружности  $S^1$ . Это удобно делать в полярных координатах  $(r, \varphi)$ . Применяя к гармоническому полиному

$$u_l(x) = r^l Y_l(\varphi) \quad (6)$$

оператор Лапласа (см. (15) из § 1.3), для сферической функции  $Y_l(\varphi)$  получаем дифференциальное уравнение

$$Y_l'' + l^2 Y_l = 0,$$

откуда

$$Y_l(\varphi) = a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi, \quad l = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Итак, сферические функции на окружности — это тригонометрические функции. При этом в силу (6) и (7)

$$u_l(x) = r^l (a_l \cos l\varphi + b_l \sin l\varphi) = a_l \operatorname{Re} z^l + b_l \operatorname{Im} z^l, \quad z = x_1 + ix_2,$$

дает общий вид однородного гармонического полинома степени  $l$  в  $\mathbb{R}^2$ .

Наша задача — вычислить все сферические функции  $Y_l(\theta, \varphi)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , на сфере  $S^2$ .

**2. Дифференциальное уравнение для сферических функций.** Выведем дифференциальное уравнение для сферических функций на сфере  $S^2$ . Применяя к гармоническому полиному

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi) \quad (8)$$

оператор Лапласа, получаем дифференциальное уравнение (3) при  $\lambda = l$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_l}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y_l = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) будем искать в классе  $C^\infty(S^2)$ .

Для того чтобы функция  $Y_l$  была сферической функцией порядка  $l$ , необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу  $C^\infty(S^2)$  и удовлетворяла уравнению (9).

Необходимость условий уже доказана. Докажем их достаточность. Пусть функция  $Y_l \in C^\infty(S^2)$  есть решение уравнения (9). Тогда функция  $u_l$ , построенная по формуле (8), удовлетворяет уравнению Лапласа в сферических координатах и, значит, гармонична при  $x \neq 0$ . Кроме того, эта функция ограничена в окрестности точки  $x = 0$ . По теореме о стирании особенностей гармонической функции (см. § 5.3, п. 6) функция  $u_l$  гармоническая в  $\mathbb{R}^3$ . Далее, эта функция однородная степени  $l$ . Отсюда, используя теорему Лиувилля (см. § 5.3, п. 9), заключаем, что  $u_l$  — однородный гармонический полином степени  $l$ . Это и значит, что функция  $Y_l$  есть сферическая функция порядка  $l$ .

Для нахождения решений уравнения (9) применим метод Фурье. В соответствии с общей схемой этого метода (см. § 5.4 и § 6.1) ищем решение  $Y_l$  уравнения (9) в виде произведения

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\cos \theta) \Phi(\varphi). \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (9) и деля его на  $\frac{\mathcal{P}\Phi}{\sin^2 \theta}$ , получим

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\cos \theta)}{d\theta} \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \mathcal{P}(\cos \theta)}{\mathcal{P}(\cos \theta)}. \quad (11)$$

Левая часть равенства (11) не зависит от  $\theta$ , а правая от  $\varphi$ . Следовательно, каждая из этих величин не зависит ни от  $\theta$ , ни от  $\varphi$ , т. е. является постоянной величиной. Обозначая эту постоянную через  $\nu$ ,

из равенства (11) для неизвестных функций  $\Phi$  и  $\mathcal{P}$  и параметра  $\nu$  получаем уравнения

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d\mathcal{P}(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{\nu}{\sin^2 \theta} \right] \mathcal{P}(\cos \theta) = 0. \quad (13)$$

Чтобы функция (10) была однозначно определена на сфере  $S^2$ , необходимо, чтобы  $\Phi$  была  $2\pi$ -периодической функцией. Но такие решения уравнение (12) имеет лишь при  $\nu = m^2$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , и тогда

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}. \quad (14)$$

Таким образом, задача нахождения сферических функций свелась к уравнению (13) при  $\nu = m^2$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Совершая в этом уравнении замену переменной  $\mu = \cos \theta$ , для функции  $\mathcal{P}(\mu)$  получаем уравнение

$$-[(1 - \mu^2)\mathcal{P}']' + \frac{m^2}{1 - \mu^2} \mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}. \quad (15)$$

Решения уравнения (15) в точках  $\pm 1$  должны принимать конечные значения  $|\mathcal{P}(\pm 1)| < \infty$ .

**3. Полиномы Лежандра.** При  $m = 0$  уравнение (15) принимает вид

$$[(1 - \mu^2)\mathcal{P}']' + l(l+1)\mathcal{P} = 0. \quad (16)$$

Проверим, что полиномы

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

называемые *полиномами Лежандра*, удовлетворяют уравнению (16). Равенство (17) называется *формулой Родрига*.

Действительно, полагая  $W_l = (\mu^2 - 1)^l$  и дифференцируя тождество

$$(\mu^2 - 1)W'_l - 2l\mu W_l = 0$$

$l + 1$  раз, получаем

$$(\mu^2 - 1)W_l^{(l+2)} + 2\mu W_l^{(l+1)} - l(l+1)W_l^{(l)} = 0.$$

Таким образом, функция  $W_l^{(l)}$  и, следовательно, полином  $\mathcal{P}_l$  удовлетворяют уравнению (16).

Выпишем первые четыре полинома Лежандра:

$$\mathcal{P}_0(\mu) = 1, \quad \mathcal{P}_1(\mu) = \mu, \quad \mathcal{P}_2 = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2}, \quad \mathcal{P}_3(\mu) = \frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \mu.$$

Из формулы (17) непосредственно следует, что

$$\mathcal{P}_l(1) = 1. \quad (18)$$

Полином Лежандра  $\mathcal{P}_l$  — единственное линейное независимое решение уравнения (16) в классе  $C^2([-1, 1])$ .

Действительно, для всякого решения  $\mathcal{P} \in C^2([-1, 1])$  уравнения (16) в силу формулы Остроградского–Лиувилля (см. [5] и (5) из § 5.2) при  $p(\mu) = 1 - \mu^2$  справедливо соотношение

$$\mathcal{P}'_l(\mu)\mathcal{P}(\mu) - \mathcal{P}_l(\mu)\mathcal{P}'(\mu) = \frac{a}{1 - \mu^2}, \quad |\mu| < 1.$$

Поскольку левая часть ограничена на  $[-1, 1]$ , равенство возможно лишь при  $a = 0$ . Поэтому определить Вронского для решений  $\mathcal{P}_l$  и  $\mathcal{P}$  обращается в нуль тождественно, и, следовательно, решения  $\mathcal{P}_l$  и  $\mathcal{P}$  линейно зависимы (см. [5]).

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему в  $L_2(-1, 1)$ .

В самом деле, так как полином Лежандра  $\mathcal{P}_l(\mu)$  удовлетворяет уравнению (15) при  $m = 0$ , то в силу (14) и (10)  $\mathcal{P}_l(\cos \theta)$  принадлежит  $C^\infty(S^2)$  и удовлетворяет уравнению (9). Следовательно,  $\mathcal{P}_l(\cos \theta)$  — сферическая функция порядка  $l$  (см. п. 2). Но сферические функции различных порядков ортогональны в  $L_2(S^2)$  (см. п. 1). Поэтому

$$2\pi \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l(\mu)\mathcal{P}_{l'}(\mu) d\mu = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_l(\cos \theta)\mathcal{P}_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad l \neq l'.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Полином Лежандра  $\mathcal{P}_l$  является собственной функцией оператора  $-[(1 - \mu^2)\mathcal{P}'']'$ , соответствующей простому собственному значению  $\lambda = l(l + 1)$ . Роль граничных условий здесь играют условия конечности решения  $\mathcal{P}(\mu)$  в точках  $\pm 1$ . Отметим, что функция  $1 - \mu^2$  обращается в нуль на концах основного интервала  $(-1, 1)$  и потому не удовлетворяет условиям из § 5.2.

**4. Производящая функция.** Пусть  $x = (r, \theta, \varphi)$  и  $y = (0, 0, 1)$ . Разложим функцию

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})}} \quad (19)$$

в ряд по степеням  $r$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\cos \theta) r^l. \quad (20)$$

Ряд (20) сходится при  $|r| < 1$  и  $\theta \in [0, \pi]$ , и его можно почленно дифференцировать по  $r$  и  $\theta$  бесконечное число раз, причем полученные ряды будут сходиться равномерно по  $(r, \theta)$  на  $-r_0 \leq r \leq r_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , при любом  $r_0 < 1$ . Применяя к равенству (20) почленно оператор Лапласа и учитывая, что функция (19) гармонична в шаре  $|x| < 1$ , при всех  $0 < r < 1$  получаем с учетом (2)

$$0 = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta[a_l(\cos \theta) r^l] = \sum_{l=0}^{\infty} r^{l-2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{da_l}{d\theta} \right) + l(l+1)a_l \right].$$

Отсюда следует, что каждое слагаемое в последней сумме обращается в нуль, и, следовательно, функции  $a_l(\mu)$  удовлетворяют уравнению (16), поэтому  $a_l(\mu) = C_l \mathcal{P}_l(\mu)$  (см. п. 3) и разложение (20) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \mathcal{P}_l(\cos \theta) r^l. \quad (21)$$

Для определения постоянных  $C_l$  положим  $\theta = 0$  и воспользуемся равенством  $\mathcal{P}_l(1) = 1$ . В результате получим

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l,$$

откуда следует, что  $C_l = 1$ .

Итак, справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu) r^l, \quad |r| < 1. \quad (22)$$

Функция  $(1 - 2r\mu + r^2)^{-1/2}$  называется *производящей функцией для полиномов Лежандра*.

Из формулы (22) легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра

$$(l+1)\mathcal{P}_{l+1}(\mu) - (2l+1)\mu\mathcal{P}_l(\mu) + l\mathcal{P}_{l-1}(\mu) = 0, \quad (23)$$

$$(2l+1)\mathcal{P}_l(\mu) = \mathcal{P}'_{l+1}(\mu) - \mathcal{P}'_{l-1}(\mu). \quad (24)$$

Для этого, дифференцируя тождество (22) по  $r$  и  $\mu$  и умножая затем на  $1 - 2r\mu + r^2$ , получим тождества

$$\begin{aligned} (\mu - r) \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu)r^l &= (1 - 2r\mu + r^2) \sum_{l=0}^{\infty} l\mathcal{P}_l(\mu)r^{l-1}, \\ r \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(\mu)r^l &= (1 - 2r\mu + r^2) \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}'_l(\mu)r^l. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$ , получаем соотношения (23) и

$$\mathcal{P}_l(\mu) = \mathcal{P}'_{l-1}(\mu) - 2\mu\mathcal{P}'_l(\mu) + \mathcal{P}'_{l+1}(\mu). \quad (25)$$

Дифференцируем равенства (23):

$$(l+1)\mathcal{P}'_{l+1}(\mu) - (2l+1)\mathcal{P}_l(\mu) - (2l+1)\mu\mathcal{P}'_l(\mu) + l\mathcal{P}'_{l-1}(\mu) = 0.$$

Исключая из этого соотношения и соотношения (25) произведение  $\mu\mathcal{P}'_l(\mu)$ , получим равенства (24).

Докажем формулу

$$\|\mathcal{P}_l\|^2 = \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2l+1}. \quad (26)$$

Для этого одно из множителей  $\mathcal{P}_l$  подынтегральной функции выразим через  $\mathcal{P}_{l-1}$  и  $\mathcal{P}_{l-2}$  по формуле (23). Пользуясь ортогональностью полиномов  $\mathcal{P}_l$  и  $\mathcal{P}_{l-2}$ , получим

$$\|\mathcal{P}_l\|^2 = \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l \left( \frac{2l-1}{l}\mu\mathcal{P}_{l-1} - \frac{l-1}{l}\mathcal{P}_{l-2} \right) d\mu = \frac{2l-1}{l} \int_{-1}^1 \mu\mathcal{P}_l\mathcal{P}_{l-1} d\mu.$$

Выражая теперь произведение  $\mu\mathcal{P}_l$  по формуле (23) и пользуясь ортогональностью полиномов  $\mathcal{P}_{l-1}$  и  $\mathcal{P}_{l+1}$ , получим

$$\|\mathcal{P}_l\|^2 = \frac{2l-1}{l} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_{l-1} \left( \frac{l+1}{2l+1}\mathcal{P}_{l+1} + \frac{l}{2l+1}\mathcal{P}_{l-1} \right) d\mu = \frac{2l-1}{2l+1} \|\mathcal{P}_{l-1}\|^2,$$

откуда и вытекает формула (26):

$$\|\mathcal{P}_l\|^2 = \frac{2l-1}{2l+1} \frac{2l-3}{2l-1} \cdots \frac{1}{3} \|\mathcal{P}_0\|^2 = \frac{2}{2l+1}.$$

Система полиномов Лежандра  $\mathcal{P}_l$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , полна в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ .

Это утверждение вытекает из теоремы 2 из § 1.1, п. 7 и из теоремы Вейерштрасса (см. § 1.1, п. 3), согласно которой множество полиномов, а следственно, и множество линейных комбинаций полиномов Лежандра плотно в  $([-1, 1])$  и, значит, в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ .

Таким образом, всякая функция  $f \in \mathcal{L}_2(-1, 1)$  разлагается в ряд Фурье по полиномами Лежандра

$$f(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} (f, \mathcal{P}_l) \mathcal{P}_l(\mu),$$

сходящийся в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$  (см. § 1.1, п. 7).

**5. Присоединенные функции Лежандра.** Проверим, что функции

$$\mathcal{P}_l^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \mathcal{P}_l^{(m)}(\mu), \quad l = 0, 1, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, l, \quad (27)$$

называемые *присоединенными функциями Лежандра*, удовлетворяют уравнению (15).

Действительно, производя в уравнении (15) замену

$$\mathcal{P}(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} z(\mu),$$

для функции  $z$  получим уравнение

$$(1 - \mu^2)z'' - 2\mu(m+1)z' + (l^2 + l - m^2 - m)z = 0. \quad (28)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (16)  $m$  раз, убедимся, что производная  $\mathcal{P}_l^{(m)}$  удовлетворяет уравнению (28). Следовательно, присоединенные функции Лежандра  $\mathcal{P}_l^m$  удовлетворяют уравнению (15).

Умножая уравнение (28) на  $(1 - \mu^2)^m$ , перепишем его для  $z = \mathcal{P}_l^{(m)}$  в виде

$$[(1 - \mu^2)^{m+1} \mathcal{P}_l^{(m+1)}]' = -(l-m)(l+m+1)(1 - \mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)}. \quad (29)$$

При каждом  $m \geq 0$  система присоединенных функций Лежандра  $\mathcal{P}_l^m$ ,  $l = m, m+1, \dots$ , ортогональна в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ , причем

$$\|\mathcal{P}_l^m\|^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}. \quad (30)$$

Это утверждение верно при  $m = 0$  для полиномов Лежандра  $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^0$  (см. пп. 3, 4). Отсюда, пользуясь определением функции  $\mathcal{P}_l^m$  и формулой (29) с заменой  $m$  на  $m - 1$ , получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_l^m, \mathcal{P}_{l'}^m) &= \int_{-1}^1 \mathcal{P}_l^m \mathcal{P}_{l'}^m d\mu = \int (1 - \mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)} \mathcal{P}_{l'}^{(m)} d\mu = \\ &= (1 - \mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)} \mathcal{P}_{l'}^{(m)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \mathcal{P}_{l'}^{(m-1)} [(1 - \mu^2)^m \mathcal{P}_l^{(m)}]' d\mu = \\ &= (l - m + 1)(l + m) \int_{-1}^1 (1 - \mu^2)^{m-1} \mathcal{P}_l^{(m-1)} \mathcal{P}_{l'}^{(m-1)} d\mu = \\ &= (l + m)(l - m + 1) (\mathcal{P}_l^{(m-1)}, \mathcal{P}_{l'}^{(m-1)}) = \\ &= (l + m)(l + m - 1)(l - m + 1)(l - m + 2) (\mathcal{P}_l^{(m-2)}, \mathcal{P}_{l'}^{(m-2)}) = \\ &= \frac{(l + m)!}{(l - m)!} (\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_{l'}) = \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \frac{2}{(2l + 1)} \delta_{ll'}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

При каждом  $m \geq 0$  система присоединенных функций Лежандра  $\mathcal{P}_l^m$ ,  $l = m, m + 1, \dots$ , полна в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ .

Действительно, возьмем произвольную функцию  $f$  класса  $\mathcal{D}(-1, 1)$ , плотного в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$  (см. § 1.1, п. 7). Тогда

$$\psi(\mu) = f(\mu)(1 - \mu^2)^{-m/2} \in \mathcal{D}(-1, 1).$$

По теореме Вейерштрасса (см. § 1.1, п. 3) функцию  $\psi$  можно сколь угодно точно приблизить в  $\mathcal{C}([-1, 1])$  полиномами и, следовательно, линейными комбинациями производных  $\mathcal{P}_l^{(m)}$ ,  $l = m, m + 1, \dots$ . Отсюда следует, что функцию  $f$  можно сколь угодно точно приблизить в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$  линейными комбинациями функций системы  $\mathcal{P}_l^m$ ,  $l = m, m + 1, \dots$ , что в силу теоремы 2 из § 1.1, п. 7 и доказывает полноту этой системы.

**6. Сферические функции.** В силу (10), (14) и (27) получена следующая совокупность решений уравнения (9):

$$\tilde{Y}_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \mathcal{P}_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi, & m = 0, \dots, l, \\ \mathcal{P}_l^{|m|}(\cos \theta) \sin |m|\varphi, & m = -1, \dots, -l, \end{cases} \quad l = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

или, в комплексной форме,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \mathcal{P}_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \quad (31')$$

Эти функции, очевидно, принадлежат классу  $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ . Поэтому  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  — сферические функции (см. п. 2).

Сферические функции  $Y_l^m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ , порядка  $l$  линейно независимы, их линейные комбинации

$$Y_l = \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s) \quad (32)$$

с произвольными коэффициентами  $a_l^{(m)}$  также являются сферическими функциями порядка  $l$ .

Сферические функции  $Y_l^m$  образуют ортогональную и полную систему в  $\mathcal{L}_2(S^2)$ , причем

$$\|Y_l^m\|^2 = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}. \quad (33)$$

Действительно, тригонометрическая система  $\{e^{im\varphi}, m = 0, \pm 1, \dots\}$  ортогональна и полна в  $\mathcal{L}_2(0, 2\pi)$ , и при каждом  $m = 0, 1, \dots$  система присоединенных функций Лежандра  $\{\mathcal{P}_l^m(\mu), l = m, m+1, \dots\}$  ортогональна и полна в  $\mathcal{L}_2(-1, 1)$  (см. п. 5). Отсюда легко доказать, что система функций

$$\{\mathcal{P}_l^{|m|}(\mu) e^{im\varphi}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l\}$$

ортогональна и плотна в  $\mathcal{L}[(-1, 1) \times (0, 2\pi)]$ , и, следовательно, система сферических функций  $\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$  ортогональна и полна в  $\mathcal{L}_2(S^2)$ . Формула (33) вытекает из (30):

$$\begin{aligned} \|Y_l^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|Y_l^m(\theta, \varphi)\|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_{-1}^1 [\mathcal{P}_l^{|m|}(\mu)]^2 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}. \end{aligned}$$

Полнота ортогональной системы сферических функций  $\{Y_l^m\}$  означает, что всякая функция  $f \in \mathcal{L}_2(S^2)$  разлагается в ряд Фурье по этим функциям:

$$f(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s), \quad (34)$$

сходящийся в  $\mathcal{L}_2(S^2)$ . В соответствии с (33) коэффициенты  $a_l^{(m)}$  ряда (34) вычисляются по формуле

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \overline{Y_l^m}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (35)$$

Пусть  $Q_l(s)$  — произвольная сферическая функция порядка  $l$ . В этом случае  $(Q_l, Y_{l'}) = 0$ ,  $l \neq l'$  (см. п. 1), и в разложении (34) для функции  $Q_l$  остается только одно слагаемое  $Y_l$ , так что  $Q_l = Y_l$ .

Итак, доказано: сферические функции  $Y_l^m$  исчерпывают все линейно независимые сферические функции; формула (32) дает общее выражение для сферической функции порядка  $l$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Сферические функции  $Y_l^m$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ , являются собственными функциями оператора Бельтрами

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}, \quad Y \in \mathcal{C}^\infty(S^2),$$

соответствующими собственному значениюю  $\lambda = l(l+1)$  кратности  $2l+1$ .

**7. Формула Лапласа.** Пусть  $Y_l(s)$  — сферическая функция порядка  $l$ . Применяя формулу Грина (5) из § 5.3 для шара  $U_1$  к гармоничному полиному  $r^l Y_l(s)$ , получим при  $r < 1$

$$r^l Y_l(s) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \left\{ \frac{\partial [|x'|^l Y_l(s')]}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{|x - x'|} - \right. \\ \left. - |x'|^l Y_l(s') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{|x - x'|} \right\}_{x' = s'} ds'. \quad (36)$$

Но в силу (22)

$$\frac{1}{|x - x'|} \Big|_{x' = s'} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r(s, s') + 1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k((s, s')) r^k, \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{|x - x'|} \Big|_{x' = s'} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho(s, s') + \rho^2}} \Big|_{\rho=1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k((s, s')) \frac{r^k}{\rho^{k+1}} \Big|_{\rho=1} = - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mathcal{P}_k((s, s')) r^k, \quad (38)$$

причем ряды (37) и (38) сходятся равномерно по  $(s, s')$  при каждом  $r < 1$  (см. п. 4). Подставляя выражения (37) и (38) в формулу (36) и производя почленное интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} r^l Y_l(s) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \left[ lY_l(s') \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k((s, s')) r^k + Y_l(s') \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mathcal{P}_k((s, s')) r^k \right] ds' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_{S^2} (l+k+1) Y_l(s') \mathcal{P}_k((s, s')) ds', \quad r < 1. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности  $r$  вытекает следующая важная интегральная формула для сферических функций:

$$\int_{S^2} Y_l(s') \mathcal{P}_k((s, s')) ds' = \frac{4\pi}{2l+1} Y_l(s) \delta_{lk}. \quad (39)$$

Применяя формулы разложения (34), (35) к функции  $f(s') = \mathcal{P}_l((s, s'))$  и учитывая формулу (39), получим *формулу сложения для полиномов Лежандра*

$$\mathcal{P}_l((s, s')) = \sum_{m=-l}^l \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} Y_l^m(s) Y_l^m(s'). \quad (40)$$

Заменим в равенстве (34)  $s$  на  $s'$ . Умножая это равенство на  $\mathcal{P}_k((s, s'))$ , интегрируя его почленно по  $s' \in S^2$  и пользуясь формулой (39), получаем формулу

$$Y_k(s) = \frac{2k+1}{4\pi} \int_{S^2} f(s') \mathcal{P}_k((s, s')) ds'. \quad (41)$$

Формула (41) сразу дает все коэффициенты в сферической функции  $Y_k$  из разложения (34) функции  $f \in \mathcal{L}_2(S^2)$ . Она называется *формулой Лапласа*.

**8. Шаровые функции.** Построим решения уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в  $\mathbb{R}^3$  методом разделения переменных в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ . В этих координатах уравнение Лапласа имеет для функции  $\tilde{u}$  вид (2):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (42)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье ищем решение  $\tilde{u}$  уравнения (42) в виде произведения

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r)Y(\theta, \varphi). \quad (43)$$

Подставляя это выражение в уравнение (42), для функций  $\mathcal{R}$  и  $Y$  получаем уравнения

$$(r^2 \mathcal{R}')' - \mu \mathcal{R} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = 0, \quad (45)$$

где  $\mu$  — неизвестный параметр. Здесь  $Y \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ .

При  $\mu = l(l+1)$  уравнение (45) имеет решения класса  $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ , и этими решениями являются сферические функции  $Y_l^m$  (см. п. 6). Уравнение (44) при  $\mu = l(l+1)$  имеет два линейно независимых решения:  $r^l$  и  $r^{-l-1}$ .

Таким образом, в силу (43) уравнение Лапласа имеет следующий набор линейно независимых решений:

$$r^l Y_l^m(\theta, \varphi), \quad r^{-l-1} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm m, \quad (26)$$

где  $r^l Y_l^m$  — гармонический полином степени  $l$  и  $r^{-l-1} Y_l$  — гармоническая функция в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Функции (46) называются *шаровыми функциями*; они широко используются в математической физике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — Изд. 5-е. — М.: Наука, 1985.
2. *Никольский С. М.* Математический анализ. — Изд. 5-е. — М.: Физматлит, 2000.
3. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Изд. 3-е. — М.: Наука, 1989.
4. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Изд. 8-е. — М.: Физматлит, 2000.
5. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.

Учебное издание

*ВЛАДИМИРОВ Василий Сергеевич  
ЖАРИНОВ Виктор Викторович*

## **УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Редактор *E.YO. Ходан*  
Оригинал-макет *A.A. Черепанова*

ЛР № 071930 от 06.07.99.  
Подписано в печать 31.10.02. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная №1. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 27,5. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с диапозитивов  
в РГУП «Чебоксарская типография № 1»  
428019 Чебоксары, пр. И. Яковleva, 15