

УДК 530.145

ББК 22.34

М-29

Рецензенты: член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. А.А.Андронов,  
доцент ННГУ к.ф.-м.н. С.Н.Менсов

М-29 Маругин А.В. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И МОДЕЛИ: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2022. - 105 с.

В пособии приведены основные физические модели и понятия, лежащие в основе квантовой электроники. Содержание пособия отражает материалы курсов лекций по дисциплинам «Квантовая радиофизика» и «Квантовая и оптическая электроника», читаемых на радиофизическом факультете ННГУ. Приведено описание как основополагающих явлений, происходящих при взаимодействии электромагнитных полей с веществом на атомарном уровне, так и макроскопическая теория, лежащая в основе современных систем квантовой электроники – квантовых стандартов частоты, оптических усилителей и лазерных источников излучения.

Учебное пособие предназначено в качестве основного учебно-методического материала для изучения теоретических и прикладных вопросов квантовой электроники и лазерной физики студентами радиофизического факультета, обучающимися по направлениям «Радиофизика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Ответственный за выпуск:

зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета  
ННГУ д.ф.-м.н. Е.З. Грибова

УДК 530.145

ББК 22.34

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2022  
© А.В. Маругин, 2022

## Содержание

<b>Введение. Предмет дисциплины «Квантовая электроника».....</b>	<b>5</b>
<b>1. Квантование свободного электромагнитного поля .....</b>	<b>7</b>
1.1. Свободное электромагнитное поле. Квантовый вариант описания .....	7
1.2. Фотонная структура квантованного электромагнитного поля .....	9
1.3. Операторы электромагнитного поля .....	11
<b>2. Квантовые переходы. Вероятности процессов излучения и поглощения .....</b>	<b>13</b>
2.1. Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия. Квантовые переходы в первом порядке теории возмущений .....	13
2.2. Вероятность перехода в первом порядке теории возмущений .....	14
2.3. Плотность состояний для атома и электромагнитного поля .....	16
<b>3. Взаимодействие электромагнитного поля с ансамблем заряженных частиц. Дипольное приближение.....</b>	<b>18</b>
3.1. Оператор взаимодействия поля с системой заряженных частиц .....	18
3.2. Электродипольное приближение.....	19
<b>4. Излучение и поглощение фотонов в электродипольном приближении .....</b>	<b>22</b>
4.1. Вероятность перехода в электродипольном приближении.....	22
4.2. Квантовая задача об излучении и поглощении фотона.....	23
4.3. Спонтанные и индуцированные переходы.....	24
4.4. Спонтанное излучение электрического диполя .....	25
4.5. Правила отбора для дипольных взаимодействий .....	26
4.6. Многофотонные (двухфотонные) процессы .....	29
<b>5. Теория релаксации и уширение спектральных линий веществ.....</b>	<b>34</b>
5.1. Динамическая и диссипативная подсистемы .....	34
5.2. Спонтанное излучение атома как пример релаксационного процесса....	34
5.3. Естественное уширение спектральной линии .....	36
5.4. Однородное и неоднородное уширение спектральных линий.....	36
<b>6. Физические принципы создания квантовых стандартов частоты .....</b>	<b>40</b>
6.1. Добротность спектральной линии квантового перехода в атоме .....	40
6.2. Принципы построения квантовых стандартов частоты (КСЧ) .....	41
<b>7. Квантовое кинетическое уравнение. Кинетика заселенности энергетических уровней .....</b>	<b>43</b>

7.1. Матрица плотности динамической подсистемы .....	43
7.2. Квантовое кинетическое уравнение. Времена релаксации .....	44
7.3. Динамические уравнения для двухуровневой среды, взаимодействующей с классическим резонансным полем .....	48
7.4. Кинетическая модель для населенностей энергетических уровней.....	51
<b>8. Взаимодействие двухуровневой электродипольной среды с резонансным внешним полем .....</b>	<b>54</b>
8.1. Эффективное сечение взаимодействия .....	54
8.2. Уравнение переноса излучения. Коэффициент усиления двухуровневой среды.....	55
8.3. Кинетическая модель для населенностей уровней (двууровневая система) .....	57
8.4. Спектральные особенности взаимодействия среды с электромагнитным полем .....	58
8.5. Эффект насыщения. Насыщающая интенсивность.....	60
8.6. Проявление эффекта насыщения в средах с разным характером уширения спектральных линий .....	62
8.7. Нестационарные (когерентные) явления в двухуровневых средах .....	64
<b>9. Физика лазеров. Принципы построения оптического квантового генератора .....</b>	<b>67</b>
9.1. Теоретическая модель оптического квантового генератора (ОКГ).....	67
9.2. Трех- и четырехуровневые схемы создания инверсии населенностей на рабочем переходе .....	69
9.3. Практические методы создания инверсии в активных средах .....	73
9.4. Открытые оптические резонаторы .....	79
9.5. Условие самовозбуждения оптического квантового генератора. Порог генерации .....	86
9.6. Источники шумов в лазерах. Ширина линии генерации. Эффект затягивания частоты генератора .....	90
<b>10. Динамика оптических квантовых генераторов .....</b>	<b>92</b>
10.1. Полуклассическая динамическая модель описания лазера .....	92
10.2. Балансная модель описания лазера .....	93
10.3. Стационарный (непрерывный) режим генерации .....	94
10.4. Нестационарный режим генерации лазера .....	96
10.5. Методы управления лазерным излучением. Повышение пиковой мощности генерации .....	97
<b>Заключение .....</b>	<b>103</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>104</b>

## **Введение. Предмет дисциплины «Квантовая электроника»**

Квантовая электроника представляет собой науку, направленную на изучение явлений и задач, базирующихся на представлениях о квантованной структуре носителей заряда и квантованием (фотонном) электромагнитном поле. Известно, что классическая физика (термодинамика, электродинамика, теория колебаний) имеет дело с понятиями материальной точки, ее траектории при движении в пространстве. Описание классических электромагнитных полей строится на основе уравнений Максвелла, записанных для напряженностей электрической и магнитной составляющих, термодинамика рассматривает статистически усредненные ансамбли частиц и молекул. Однако для решения определенного класса задач описание в рамках такого подхода недостаточно – а именно, требуется учет **дискретности** физических величин, для правильной интерпретации экспериментальных данных нужны другие уравнения эволюции, другой математический аппарат. Результатом усилий по устранению этих несоответствий стало появление в начале двадцатого века новой науки – **квантовой механики**. В ее основу положено представление о вероятностном характере наблюдаемых на микроуровне явлений, а также операторный метод описания физических переменных и характеристик квантовых систем. Тем не менее, для полного понимания многочисленных явлений в окружающем нас мире требуется дальнейшее соединение квантовой механики с теорией излучения и поглощения переменных электромагнитных полей и рассмотрение вопросов, связанных с обобщением характеристик отдельных квантовых частиц (электронов) на макроскопические среды и ансамбли. Указанный комплекс явлений решает квантовая электроника. Данная наука рассматривает не только основные фундаментальные принципы, определяющие поведение отдельных элементов физической системы, участвующих во взаимодействии с электромагнитными полями, но большей частью – и явления, наблюдаемые на макроуровне – для материальных сред, состоящих из однотипных элементов, а также и устройства и приборы, созданные на базе использования этих основополагающих принципов.

Таким образом, **Квантовую электронику можно определить как науку, исследующую взаимодействие электромагнитных волн с веществом, то есть явления излучения, поглощения, преобразования, распространения электромагнитных волн в различных средах (совместно с определяющими их квантовыми процессами на атомарном уровне), а также квантовые устройства различных диапазонов длин волн, созданных на основе исследования этих процессов.**

В отличие от классической электроники квантовая электроника не рассматривает ансамбли свободных электронов с непрерывным по энергии распределением. Что касается используемой модели электромагнитных

полей, то в ее основе лежат три постулата, введенные А.Эйнштейном, исходя из статистического анализа флуктуаций равновесного излучения:

1. Энергия электромагнитного излучения состоит из дискретных порций энергии – фотонов. Дискретная (фотонная) структура поля проявляется при взаимодействии с материальной средой.

2. Существует два типа процессов, имеющих место при взаимодействии электромагнитного поля с веществом – спонтанные и индуцированные (вынужденные) переходы. Индуцированные переходы при этом превалируют в сильных электромагнитных полях.

3. Статистическое распределение ансамбля фотонов в квантованном электромагнитном поле подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна, в соответствии с которой количество элементов в каждой моде поля может быть неограниченно большим (в отличие от фермионов, для которых справедлив запрет Паули). При этом с ростом суммарной энергии поля происходит переход к классической электромагнитной волне и соответственно – к классическим законам описания полей.

## 1. Квантование свободного электромагнитного поля

Для рассмотрения процессов взаимодействия вещества как ансамбля атомов с резонансным электромагнитным полем (ЭМП) необходимо провести процедуру квантования полевых характеристик. При этом можно использовать алгоритм квантования Дирака, которым в квантовой механике руководствуются при создании математической операторной модели для квантовых частиц (электронов). В соответствии с правилами, введенными Дираком, необходимо определить для ЭМП каноническую пару переменных и выразить через них энергию поля. Затем происходит переход к квантовому описанию заменой переменных на их операторы и подстановкой получившегося оператора энергии в эволюционное уравнение Шредингера. Классические скобки Пуассона при этом заменяются на квантово-механический коммутатор для операторов величин.

### 1.1. Свободное электромагнитное поле. Квантовый вариант описания

Рассмотрим свободное от зарядов ЭМП в неограниченном пространстве. Характеристики поля в этом случае могут быть записаны через напряженности полей, определяемые векторным потенциалом  $\vec{A}(\vec{r},t)$  в виде

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} (\vec{r},t) \\ \vec{H} &= \text{rot} \vec{A} (\vec{r},t)\end{aligned}\quad (1.1)$$

Для поперечных переменных полей в свободном пространстве справедлива кулоновская калибровка  $\text{div} \vec{A} = 0$ .

Энергия ЭМП может быть записана в стандартной форме через интеграл по пространству, занимаемому полем:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dV. \quad (1.2)$$

Для данной модели описания из уравнений Максвелла может быть получено стандартное волновое уравнение следующего вида:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

при решении которого может быть проведена формальная процедура разделения переменных в виде

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_k Q_k(t) \vec{A}_k(\vec{r}). \quad (1.4)$$

В приведенной форме индекс суммирования отражает наличие различных конфигураций (мод) ЭМП в рассматриваемом свободном пространстве. В результате подстановки (1.4) получим два уравнения – для пространственной (1.5) и временной (1.7) части решения:

$$\Delta \vec{A}_\lambda(r) = -\frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \vec{A}_\lambda(r) \quad (1.5)$$

Поскольку оператор Лапласа является эрмитовым, можно показать, что решения данного уравнения  $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$  составляют ортогональный базис (плоские волны, рассмотренные далее в разделе 2.3) с нормировкой вида

$$\int_V \vec{A}_\mu(r) \vec{A}_\lambda(r) dV = 4\pi c^2 \delta_{\mu\lambda} \quad (1.6)$$

Уравнение для эволюции поля во времени принимает вид:

$$\ddot{Q}_\lambda(t) + \omega_\lambda^2 Q_\lambda(t) = 0. \quad (1.7)$$

Здесь  $Q_\lambda(t)$  – амплитуда колебаний поля, а само уравнение подобно классическому уравнению для гармонического осциллятора. По аналогии с моделью квантового описания осциллирующих частиц можно ввести переменную  $P_\lambda = \dot{Q}_\lambda$  как эквивалент импульса, но теперь уже в описании ЭМП.

Наконец, с учетом введенных переменных  $Q_\lambda; P_\lambda = \dot{Q}_\lambda$ , можно выразить в новых переменных энергию ансамбля из совокупности ортогональных мод ЭМП непосредственной подстановкой этих переменных в соотношения (1.1) и учитывая при этом ортогональность разных конфигураций поля в виде (1.6). После проведения соответствующих математических преобразований можно получить функцию Гамильтона для свободного электромагнитного поля в виде суммы энергий отдельных мод

$$H = \sum_\lambda \frac{1}{2} (P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2). \quad (1.8)$$

Следующим шагом можно осуществить проверку – являются ли введенные переменные  $Q_\lambda; P_\lambda = \dot{Q}_\lambda$  канонически сопряженными, как это требуется в алгоритме квантования физических величин. Для этого надо подставить (1.8) в уравнения Гамильтона и убедиться, что они выполняются. Во введенных обозначениях уравнения Гамильтона выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial P_\lambda} = \dot{Q}_\lambda \text{ и } \frac{\partial H}{\partial Q_\lambda} = -\dot{P}_\lambda. \quad (1.9)$$

Нетрудно убедиться, исходя из (1.7) и (1.8), что данные соотношения выполняются, а следовательно, введенные переменные  $Q_\lambda; P_\lambda$  являются каноническими переменными, и на них можно распространить стандартный алгоритм квантования, т.е. реализовать переход к операторному описанию этих величин и энергии поля в целом. С учетом того, как в координатном представлении выглядят операторы координаты и импульса для частиц (электронов), можно ввести в качестве полевых операторов аналогичную

пару  $\hat{Q}_i = Q_i$  и  $\hat{P}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_i}$ . Соответственно, оператор для энергии электромагнитного поля принимает форму

$$\hat{H} = \sum_i \frac{1}{2} (\hat{P}_i^2 + \omega_i^2 \hat{Q}_i^2). \quad (1.10)$$

Решение стационарного уравнения Шредингера  $\hat{H}\Psi_\lambda = E_\lambda\Psi_\lambda$  при подстановке такого оператора, который повторяет с точностью до переобозначений переменных оператор гармонического осциллятора, приведет к аналогичному решению, как и для электрона в параболической потенциальной яме, а именно,

$$E = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda (n_\lambda + \frac{1}{2}) \quad (1.11)$$

для общего энергетического спектра как суммы отдельных мод, каждая из которых демонстрирует эквидистантный вид спектра. Волновая функция стационарного состояния суммарного по модам свободного электромагнитного поля записывается через полиномы Чебышева-Эрмита и в использованных обозначениях принимает следующий вид:

$$\Psi_{n_1 n_2 \dots} (Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda, \dots) = \prod_\mu \Psi_{n_\mu} (Q_\mu) = \prod_\mu \frac{(-1)^{n_\mu}}{\sqrt{2^{n_\mu} n_\mu!}} \left( \frac{\omega_\mu}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{\frac{\xi_\mu^2}{2}} \frac{d^{n_\mu}}{d\xi_\mu^{n_\mu}} (e^{-\frac{\xi_\mu^2}{2}}); \quad (1.12)$$

$$\xi_\mu = \sqrt{\frac{\omega_\mu}{\hbar}} Q_\mu.$$

Таким образом, квантование свободного электромагнитного поля можно свести к процедуре, аналогичной квантовому гармоническому осциллятору. Как следствие этого, все решения и характеристики свободного поля повторяют известные из квантовой механики свойства гармонического осциллятора, только в новых обозначениях переменных. В целом можно сделать вывод о том, что **квантованное электромагнитное поле представляет собой совокупность невзаимодействующих радиационных (полевых) осцилляторов.**

## 1.2. Фотонная структура квантованного электромагнитного поля

Полученные соотношения (1.9) - (1.12) позволяют рассматривать электромагнитные свободные поля как совокупность ортогональных мод с разным квантованным уровнем возбуждения. Параметром возбуждения для  $\lambda$ -моды является целочисленное значение  $n_\lambda$ , меняющееся от 0 до  $\infty$ .

Таким образом, каждая мода ЭМП может принимать по энергии дискретный ряд значений, но поскольку таких мод может быть бесконечно много, то суммарная энергия поля может принимать любое значение, т.е. для суммарного поля характерен непрерывный спектр.

Рассмотрим самый простой случай, когда в выделенной моде  $\lambda$  имеем  $n_\lambda = 1$ , а все остальные моды – не возбуждены ( $n_{\mu \neq \lambda} = 0$ ). Такое единичное возбуждение поля представляет собой единичный фотон, принадлежащий данной моде. Нетрудно видеть, что увеличение параметра  $n_\lambda$  будет соответствовать увеличению числа фотонов в данной моде. **Фотон – стационарное состояние ЭМП, характеризующееся импульсом  $\hbar k_\lambda$ , энергией  $\hbar\omega_\lambda$ , поляризацией  $\vec{e}_\lambda$ , пространственным распределением  $\tilde{A}_\lambda(\vec{r})$**  (как следствие, фотоны не локализованы в точке пространства). В отличие от классических ЭМП для фотона напряженности электрической и магнитной составляющей  $\tilde{E}, \tilde{H}$  – не определимы (имеют случайные распределения по амплитуде). Это можно доказать, если убедиться в том, что операторы  $\hat{E}, \hat{H}$  не коммутируют с оператором энергии поля (1.10). Амплитуды напряженностей имеют случайный, шумовой характер с ненулевыми значениями дисперсии для любых значений уровня возбуждения. Вычисление статистических параметров полей с использованием операторов показывает, что средние значения  $\bar{\tilde{E}} = \bar{\tilde{H}} = 0$ . Еще одним свойством фотона можно считать наличие целочисленного спина (момента количества движения), равного, как правило, единице:  $j_{\text{фот}} = 1$ .

Рассмотрим еще один интересный случай, возникающий при условии отсутствия возбуждения всех мод поля:  $n_\mu = 0, n_\lambda = 0$ . Если в качестве аналогии рассматривать состояние классического поля, то данному случаю будут соответствовать тривиальные нулевые решения уравнений Максвелла для  $\tilde{E}(\vec{r}, t); \tilde{H}(\vec{r}, t)$ . На квантовом уровне описание ситуации меняется. Как следует из (1.12), для случая, когда все  $n_\mu = 0$ , мы получаем не только ненулевую, «шумовую» энергию во всех модах, но главное – определенную нулевым полиномом Эрмита волновую функцию поля. Это означает, что становится доступным проведение квантовомеханических процедур вычисления статистических характеристик таких полей, причем дисперсии  $D_\lambda(\tilde{E})$  и  $D_\lambda(\tilde{H})$  будут отличными от нуля, как это и ожидается для сигналов шумового типа. Средние значения напряженностей, как и для фотона, будут равны нулю. Рассмотренное «нулевое» состояние электромагнитного поля носит название **электро-магнитного вакуума**. Это состояние является, как будет показано далее, причиной такого распространенного явления, как **спонтанное излучение** атома, т.е. обуславливает вполне реальные и регистрируемые процессы, наблюдаемые в веществах.

Наконец, можно дать некоторую характеристику и для случая  $n_\lambda > 1$ . За этим формальным условием скрывается случай сильных электромагнитных полей, или, говоря квантовым языком, поле содержит

много фотонов. Нетрудно понять, что при значениях  $N_\lambda$ , на много порядков превышающих единицу, экспериментальные измерительные установки уже не смогут из-за ограниченности своего динамического диапазона регистрировать отдельный фотон с энергией  $\hbar\omega_\lambda$ . Как следствие этого, при измерениях мы будем иметь дело с непрерывным по энергии полем. Другими словами, данный случай отражает переход к усредненному, классическому описанию электромагнитных полей. Подобная ситуация возникает, например, при описании лазерного, достаточно мощного излучения. Это означает, что при описании лазерных моделей можно использовать применительно к полю излучения как квантовый (на языке фотонов), так и классический (на языке напряженностей полей) подход.

### 1.3. Операторы электромагнитного поля

Вычисление статистических характеристик электромагнитного поля (средние значения, дисперсии, вероятностные распределения величин) требует определения операторов для напряженности электрической и магнитной компонент. Такие операторы могут быть легко формально получены, исходя из введенной пары операторов для канонических переменных  $\hat{Q}_\lambda$  и  $\hat{P}_\lambda$ . С учетом (1.1) и (1.4) :  $\hat{\vec{A}} = \sum \hat{Q}_\lambda(t) \cdot \hat{\vec{A}}_\lambda(\vec{r})$ .

Разложение напряженностей электрического и магнитного полей по собственным функциям оператора Лапласа имеет вид:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda P_\lambda \vec{E}_\lambda(\vec{r}); \vec{E}_\lambda(\vec{r}) = -\frac{\hat{\vec{A}}_\lambda(\vec{r})}{c} \quad . \quad (1.13)$$

$$\hat{\vec{H}}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \omega_\lambda Q_\lambda \vec{H}_\lambda(\vec{r}); \vec{H}_\lambda(\vec{r}) = \frac{\text{rot} \hat{\vec{A}}_\lambda(\vec{r})}{\omega_\lambda}$$

Соответственно, операторы для этих величин выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) &= \sum_\lambda \hat{P}_\lambda \vec{E}_\lambda(\vec{r}) \\ \hat{\vec{H}}(\vec{r}, t) &= \sum_\lambda \omega_\lambda \hat{Q}_\lambda \vec{H}_\lambda(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

При создании операторной модели описания электромагнитного поля можно использовать известный из квантовой механики алгоритм вторичного квантования, удобный для описания гармонического осциллятора. Формальной заменой для координаты и импульса частицы на полевые переменные:  $X \rightarrow Q_\lambda$  и  $P \rightarrow P_\lambda$  для  $m=1$  (масса является константой и не влияет на вид операторов) - можно перейти к аналогам операторов рождения  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  и уничтожения  $\hat{a}_\lambda$  фотона в моде  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
\hat{a}_\lambda \Psi_{n_\lambda}(Q_\lambda) &= \sqrt{n_\lambda} \Psi_{n_{\lambda+1}}(Q_\lambda) \\
\hat{a}_\lambda^+ \Psi_{n_\lambda}(Q_\lambda) &= \sqrt{n_\lambda + 1} \Psi_{n_{\lambda+1}}(Q_\lambda) \\
\hat{n}_\lambda \Psi_{n_\lambda} &= \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda \Psi_{n_\lambda}(Q_\lambda) = n_\lambda \Psi_{n_\lambda}(Q_\lambda)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь  $\hat{a}_\lambda^+$  и  $\hat{a}_\lambda$  принимают следующий вид

$$\begin{aligned}
\hat{a}_\lambda &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \hat{Q}_\lambda + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}} \hat{P}_\lambda \\
\hat{a}_\lambda^+ &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \hat{Q}_\lambda - i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}} \hat{P}_\lambda
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Коммутаторы

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_\mu^+] = \delta_{\lambda,\mu}; \quad [\hat{a}_\lambda, \hat{a}_\mu] = [\hat{a}_\lambda^+, \hat{a}_\mu^+] = 0;$$

а сами операторы рождения и уничтожения фотонов не являются эрмитовыми, а отвечают за появление или пропадание в моде поля одного фотона.

В обозначениях (1.15) и (1.16) можно записать исходный оператор вектор-потенциала в виде

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}} (\hat{a}_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) + \hat{a}_\lambda^+ \vec{A}_\lambda^*(\vec{r})) \tag{1.17}$$

Таким образом, с учетом пространственного распределения поля в моде (1.5) – (1.6) в виде плоских волн совокупность операторов, описывающих компоненты свободного электромагнитного поля в пространстве объемом  $L^3$ , может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{A}}(\vec{r}) &= \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_\lambda L^3}} \vec{e}_\lambda (\hat{a}_\lambda e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} + \hat{a}_\lambda^+ e^{-i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}}); \\
\hat{\vec{E}}(\vec{r}) &= \sum_\lambda i \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3}} \vec{e}_\lambda (\hat{a}_\lambda e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} - \hat{a}_\lambda^+ e^{-i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}}) \\
\hat{\vec{H}}(\vec{r}) &= -\sum_\lambda i \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_\lambda L^3}} [\vec{e}_\lambda \times \vec{k}_\lambda] (\hat{a}_\lambda e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} - \hat{a}_\lambda^+ e^{-i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}});
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Оператор энергии при этом остается в форме (1.10) как суммарный оператор по всем модам поля.

## 2. Квантовые переходы. Вероятности процессов излучения и поглощения

### 2.1. Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия. Квантовые переходы в первом порядке теории возмущений

Известно, что в основе модели, описывающей динамические изменения состояния квантовой системы, лежит эволюционное (нестационарное) уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V})\Psi(r,t) \quad (2.1)$$

Здесь в качестве волновой функции  $\Psi(r,t)$  можно рассматривать совокупную волновую функцию атома, а точнее говоря, электрона, ответственного за изменения, происходящие в атоме в результате взаимодействия с внешним электромагнитным полем, а стоящие в правой части операторы энергии  $\hat{H}_0 + \hat{V}$  отражают энергию изолированного атома и энергию взаимодействия, соответственно. Таким образом, случай  $V=0$  отражает стационарное состояние электрона, и его характеристики определяются решением стационарного уравнения Шредингера  $\hat{H}_0\Psi_k^{(0)} = E_k\Psi_k^{(0)}$ .

Решение этой задачи находится методами квантовой механики, и спектр энергий для электрона  $E_k$ , а также набор базисных функций  $\Psi_k^{(0)}$  будем считать известными. В общем виде для волновой функции системы можно записать

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H}_0\Psi_k^{(0)} = E_k\Psi_k^{(0)} \\ \Psi(r,t) = \sum C_k(t)\Psi_k^{(0)}(r,t) \\ \Psi_k^{(0)}(r,t) = \Psi_k^{(0)}(r)e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

(считаем, что волновая функция записывается как суперпозиция состояний в атоме, т.е. электрон может присутствовать на любом энергетическом уровне). После наложения внешнего поля (достаточно слабого, чтобы рассматривать его как возмущение)  $V > 0$ , и уравнение Шредингера принимает вид (2.1).

В результате подстановки в данное уравнение Шредингера волновой функции (2.2) можно провести ряд математических преобразований, которые с учетом ортогональности базисных функций  $\Psi_k^{(0)}$  приведут исходное уравнение к виду:

$$i\hbar \dot{C}_m(t) = \sum_n V_{mn}(t)C_n(t)e^{\frac{-i(E_m - E_n)}{\hbar}t} \quad (2.3)$$

В этом уравнении (*уравнение Шредингера в представлении взаимодействия*)

$$V_{mn}(t) = \int \Psi_m^{*(0)}(\vec{r}) \hat{V}(t) \Psi_n^{(0)}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.4)$$

- это стандартный матричный элемент, который ищется усреднением в данном случае оператора возмущения по невозмущенным состояниям системы. В результате вычисления матричного элемента все координатные зависимости после интегрирования исчезают, и остается только зависимость от времени.

Алгоритм теории возмущений – последовательное нахождение быстро убывающих по амплитуде вероятностных коэффициентов  $C_n(t) = C_n^{(0)} + C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + \dots$ , где номер индекса соответствует порядку теории возмущения.

Если в начальный момент времени система находилась в определенном фиксированном состоянии, т.е.  $C_n^{(0)}(t=0) = \delta_{nk}$ , то со временем система может перейти на новый уровень (мы обозначили его через  $m$ ):

$$i\hbar \dot{C}_m(t) = \sum V_{mn} C_n^{(0)} e^{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}} \quad (2.5)$$

и после подстановки начального условия исчезает суммирование, т.к. вся исходная вероятность «привязана» только к одному уровню  $k$ . После этой подстановки получаем решение дифференциального уравнения (2.3) в виде:

$$C_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t V_{mk}(t') e^{i\omega_{mk} t'} dt'. \quad (2.6)$$

Этот результат дает амплитуду вероятности перехода системы на  $m$ -уровень к моменту времени  $t$ , полученную **в первом порядке теории возмущений**. Единственное необходимое условие для нахождения решения - это вычисление матричного элемента (2.4), определяющего подынтегральное выражение.

## 2.2. Вероятность перехода в первом порядке теории возмущений

Самый типичный случай взаимодействия атома с внешним переменным электромагнитным полем можно представить в симметризованном виде

$$\hat{V}(t) = \hat{W} e^{-i\omega t} + \hat{W}^+ e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

(“+” – комплексное сопряжение и транспонирование). Такой вид имеет возмущение, например, при гармоническом резонансном воздействии со стороны электрического поля  $E = E_0 \cos(\omega t)$ . Вычисление матричных элементов для любого варианта взаимодействия  $\hat{W}$  сводится к нахождению

$$V_{mk}(t) = W_{mk} e^{-i\omega t} + W_{km}^* e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

После подстановки в (2.6) получим выражение для амплитудной вероятности перехода из  $k$  в  $m$  – состояние в первом порядке теории возмущений :

$$C_m^{(1)}(t) = -\frac{W_{km}}{\hbar} \left( \frac{e^{i(\omega_{mk}-\omega)t} - 1}{\omega_{mk} - \omega} + \frac{e^{i(\omega_{mk}+\omega)t} - 1}{\omega_{mk} + \omega} \right). \quad (2.9)$$

В данном соотношении в зависимости от знака  $\omega_{mk}$  одним из слагаемых можно пренебречь. Будем для определенности считать, что  $\omega_{mk} > \omega$ , тогда в скобках остается только первое слагаемое, т.к. второе - пренебрежимо мало. После преобразований получаем

$$\left| C_m^{(1)} \right|^2 = C_m^{(1)} \cdot C_m^{*(1)} = \frac{|W_{mk}|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{4 \sin^2 \left( \frac{\Delta\omega t}{2} \right)}{(\Delta\omega)^2}, \quad (2.10)$$

где в качестве  $\Delta\omega$  рассматривается расстройка  $\omega_{mk} - \omega$ . При отсутствии расстройки данный метод анализа (теория возмущения) не применим, и требуется решать непосредственно уравнение Шредингера, учитывающее поведение двухуровневой системы в квазирезонансном внешнем поле (система двух уравнений). В общем случае решение такой системы двух уравнений дает

$$\left| C_m^{(1)} \right|^2 = C_m^{(1)} \cdot C_m^{*(1)} = \frac{|W_{mk}|^2}{2\hbar^2 \Omega^2} [1 - \cos(2\Omega t)] \quad (2.11)$$

$$\text{где } \Omega^2 = (\Delta\omega)^2 + \left( \frac{W_{mk}}{\hbar} \right)^2.$$

В случае точного резонанса, как это следует из квантовой механики (задача о поведении двухуровневой системе во внешнем поле), наблюдаются осцилляции на частоте Раби  $\Omega_p = \left( \frac{W_{mk}}{\hbar} \right)$ . При возрастающей отстройке (частотная расстройка больше частоты Раби) получается переход к соотношению (2.10).

Проведем дополнительное преобразование частотного сомножителя в

соотношении (2.10) :  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\Delta\omega t}{2}}{\Delta\omega^2} d\Delta\omega \approx \frac{\pi}{2}$  при больших временах, т.е. при

$t \rightarrow \infty$  можно считать  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 \sin^2 \frac{\Delta\omega t}{2}}{\Delta\omega^2} = \frac{\pi^2}{2} \delta(\Delta\omega)$ . Таким образом, для квантовомеханической вероятности получаем

$$\left| C_m^{(1)} \right|^2 = \frac{4 |W_{mk}|^2}{\hbar^2} \frac{\pi t}{2} \delta(\Delta\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{mk}|^2 \delta(E_n - E_k - \hbar\omega)t, \quad (2.12)$$

т.е. изменение во времени вероятности перехода происходит линейно в условиях частотного резонанса.

Т.к. для дельта-функции выполняется  $\delta\left(\frac{x}{a}\right) = a\delta(x)$ , а в нашем случае

$\frac{E_n - E_k - \hbar\omega}{\hbar} = \Delta\omega$ , можно перейти при описании вероятности  $P_{k \rightarrow m}$  энергетической функции.

Введем величину вероятности перехода в единицу времени из одного состояния в другое:

$$P_{k \rightarrow m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|C_m|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{mk}|^2 \delta(E_m - E_k - \hbar\omega) \quad (2.13)$$

В целом можно утверждать, что взаимодействие атома с внешним электромагнитным полем носит *резонансный характер*. Необходимо учитывать, что соотношение (2.13) отражает дискретный набор возможных энергетических состояний. В реальных физических системах «атом+поле» имеет место непрерывное спектральное распределение по энергиям:  $\rho(E_m) = \frac{dN(E_m)}{dE}$ , и таким образом, надо заменить, проинтегрировав

по энергии в окрестности  $E_m$ , дискретную характеристику в виде  $\delta$ -функции в (2.10) на плотность состояний  $\rho(E_m)$ . В этом случае речь идет о суммарной вероятности:

$$P_{km}^{(1)} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{mk}|^2 \int_{E_m} \rho(E_m) \delta(\Delta E) dE_m = (\text{вблизи } E_k = \hbar\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{mk}|^2 \rho(E_m) \quad (2.14)$$

Отметим, что для эрмитовых операторов  $|W_{mk}|^2 = |W_{km}|^2$ , и если плотности состояний одинаковы ( $\rho(E_k) = \rho(E_m)$ ), то переходы между  $k$  и  $m$  в обе стороны равновероятны:  $P_{k \rightarrow m} = P_{m \rightarrow k}$ .

### 2.3. Плотность состояний для атома и электромагнитного поля

Решением уравнения (1.5), отвечающим за пространственное распределение внешнего поля, является функция вида

$$\vec{A}_\lambda(r) = A_{0\lambda} \vec{e}_\lambda e^{ik_\lambda r} \quad (2.15)$$

т.е. плоская волна. При неограниченном ( $L \rightarrow \infty$ ) по каждой из декартовых координат поле, как это имеет место для открытого пространства, амплитуда поля может быть записана с учетом нормировки (1.6) как  $A_{0\lambda} = \sqrt{\frac{4\pi}{L}}$

Переходя к идеализированной модели бесконечного по размерам «ящика» занимаемого полем, можно использовать периодические граничные условия на формальных границах «ящика» с ребром  $L$ .

Например, справедливо  $A(0, v_0, z_0) = A(L, v_0, z_0)$ , и тогда для волнового вектора моды поля  $\vec{k}_\lambda = \frac{2\pi}{L} n_x \vec{x}_0 + \frac{2\pi}{L} n_y \vec{v}_0 + \frac{2\pi}{L} n_z \vec{z}_0$

Переходя в  $k$ -пространство волновых векторов, соответствующих каждой из мод поля, можно посчитать плотности состояний:

$$\Delta n_x \cdot \Delta n_y \cdot \Delta n_z = \Delta k_x \frac{L}{2\pi} \cdot \Delta k_y \frac{L}{2\pi} \cdot \Delta k_z \frac{L}{2\pi} . \quad (2.16)$$

Тогда общее число мод поля в искусственно введенном «ящике» составляет

$$N = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \Delta k \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 k^3 \Delta k . \quad (2.17)$$

Плотность числа состояний по спектру и по величине телесного угла в стерадианах

$$\frac{dN}{d\omega \cdot d\Omega} = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{\omega^2}{c^3} = \rho(\omega, \Omega) , \quad (2.18)$$

где  $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$  - элемент телесного угла в сферической системе координат. Аналогично можно перейти к распределению по энергиям

$$\rho(E, \Omega) = \frac{\rho(\omega, \Omega)}{\hbar} , \text{ причем размерность этой характеристики } [\rho(E)] = \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{ср}} ,$$

а характерным признаком является тот факт, что плотность не зависит от числа фотонов в выделенной моде.

Аналогичное рассмотрение, приводящее к непрерывному распределению по частотам (энергиям), можно провести для вклада в выражение  $\rho(E_m)$  (2.14) со стороны атома, участвующего во взаимодействии. Законы квантовой механики и, в частности, соотношение неопределенностей «энергия – время» вида  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$  приводят к тому, что для любого перехода электрона в атоме будет справедливым считать, что спектральная зона взаимодействия с полем отлична от идеальной резонансной  $\delta$ -функции и может быть представлена в виде некоторого контура с конечной шириной. Для решения задач это спектральное распределение можно ввести в виде лоренцевского контура, отнормированного по амплитуде:

$$F(\omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_{mk})^2 + \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2} \quad (2.19)$$

(где  $\Delta\omega$  – ширина на полувысоте), для которого выполняется условие

$$\int_0^\infty F(\omega) d\omega = 1 .$$

Таким образом, для количественных оценок из выражения для вероятности перехода необходимо в правую часть (2.14) подставить произведение (2.18) и (2.19) с учетом особенностей элементов системы.

### 3. Взаимодействие электромагнитного поля с ансамблем заряженных частиц. Дипольное приближение

#### 3.1. Оператор взаимодействия поля с системой заряженных частиц

Рассмотрим квантовую систему «ЭМП + ансамбль атомов». Запишем для этой системы суммарную энергию и попытаемся выделить из нее ту часть, которая отвечает за взаимодействие:

Известно, что для заряженной частицы во внешнем поле  $\vec{A}(r)$  можно записать:  $m\vec{V} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(r)$  - т.е. ввести динамический импульс. Здесь  $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$  - скорость частицы,  $e$  - заряд,  $m$  - масса,  $\vec{p}$  - канонический импульс. Тогда для системы заряженных частиц можно записать:

$$H_{\text{ат}} = \sum_k H_k = \sum_k \left( \frac{m_k V_k^2}{2} + e_k U(r_k) \right) = \sum_k \left( \frac{\left( \vec{p}_k - \frac{e_k}{c} \vec{A}(r_k) \right)^2}{2m_k} + e_k U(r_k) \right). \quad (3.1)$$

Теперь можно получить общую энергию системы, используя при этом кулоновскую калибровку для поперечных волн ( $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ ):

$$H = \sum_{\lambda} \hbar w_{\lambda} \left( n_{\lambda} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} \left( \vec{p}_k - \frac{e}{c} \vec{A}(r) \right)^2 + \sum_{i \neq k} \sum_{i \neq k}^N \frac{e_i e_k}{|r_i - r_k|}. \quad (3.2)$$

В этой сумме первое слагаемое описывает квантованное поле как набор осцилляторов, последнее – кулоновскую потенциальную энергию системы заряженных частиц.

Соответствующий оператор после преобразований во втором слагаемом (3.2) выглядит как

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\lambda} \hbar w_{\lambda} \left( \hat{n}_{\lambda} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} \hat{p}_k^2 + \sum_{i \neq k} \sum_{i \neq k}^N \frac{e_i e_k}{|r_i - r_k|} - \\ & - \sum_{k=1}^N \frac{e_k}{m_k c} \hat{p}_k \hat{\vec{A}}(r_k) + \sum_{k=1}^N \frac{e_k^2}{2m_k c^2} \hat{\vec{A}}^2(r_k) \end{aligned}, \quad (3.3)$$

где  $\hat{n}_{\lambda} = \hat{a}_{\lambda}^+ \cdot \hat{a}_{\lambda}$  - оператор числа фотонов в  $\lambda$ -моде.

Последние два оператора в данной сумме (обозначим их соответственно через  $\hat{V}_1$  и  $\hat{V}_2$ ) отвечают за взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным переменным полем. Можно понять физический смысл этих двух компонент, если подставить вместо оператора вектор-потенциала введенную ранее форму (1.17), в которой данный оператор

выражается через операторы рождения и уничтожения фотонов  $\hat{a}_{\lambda}^+$  и  $\hat{a}_{\lambda}$ .

Нетрудно видеть, что в слагаемом  $\hat{V}_1$  зашифрованы процессы сопровождающиеся изменением выделенной моды поля на один фотон, т.е.

имеют место *однофотонные процессы* излучения или поглощения. Что касается слагаемого  $\hat{V}_1$ , то при раскрытии квадрата вектор-потенциала в операторе энергии взаимодействия появятся комбинации из двух операторов, относящихся в общем случае к разным модам поля:  $\hat{a}_\lambda^+ \cdot \hat{a}_\mu^+$ ,  $\hat{a}_\lambda^- \cdot \hat{a}_\mu^+$ ,  $\hat{a}_\lambda^+ \cdot \hat{a}_\mu^-$  или  $\hat{a}_\lambda^- \cdot \hat{a}_\mu^-$ . Это означает, что в таком случае речь идет о вызываемых взаимодействием с ЭМП *двухфотонных процессах*, при которых одновременно меняется состояние сразу двух мод поля.

### 3.2. Электродипольное приближение

Рассмотрим подробнее процедуру вычисления матричных элементов для оператора взаимодействия  $\hat{V}_1$  (см. (3.3) и (2.15))

$$\left(\hat{V}_1\right)_{ba} = -\sum_{k=1}^N \frac{e_k}{m_k c} \left( \hat{p}_k \vec{A}(r_k) \right)_{ba} = -\sum_k \frac{e_k}{m_k c} A_{0,k} \left( \vec{e}_k \hat{p}_k e^{ik\lambda r} \right)_{ba} \quad (3.4)$$

Здесь индексы  $b$  и  $a$  соответствуют двум уровням атома (конечное и начальное состояние электрона) с энергиями  $E_b$  и  $E_a$ , соответственно. В общем случае нахождение данного матричного элемента сопряжено со значительными математическими трудностями. Однако несложно убедиться, что параметр  $\vec{k}_\lambda \vec{r}_k$  в показателе экспоненты для оптического и тем более для радиочастотного диапазона длин волн оказывается  $\ll 1$ . Это обстоятельство связано с тем, что для всех рассматриваемых явлений вплоть до глубокого ультрафиолета длина волны электромагнитной моды намного больше характерных размеров взаимодействующего с ней атома или молекулы (боровского радиуса)  $\lambda \gg 2r_B$ . В этом случае фазу плоской волны (2.15) можно не учитывать, а сама экспонента раскладывается в ряд по малому параметру:

$$e^{ik_\lambda r} = 1 - i(\vec{k}_\lambda \vec{r}) - \frac{(\vec{k}_\lambda \vec{r})^2}{2} + \dots \approx 1. \quad (3.5)$$

Замена в выражении (3.4) экспоненциального члена на единицу соответствует так называемому *электродипольному приближению*, применяя которое можно заметно упростить процедуру вычисления матричного элемента.

Найдем соответствующий матричный элемент  $(V_1)_{ab}$  с учетом электродипольного приближения. По сути алгоритм сводится к определению матричного элемента для оператора канонического импульса частицы  $(\hat{p}_k)_{ba}$ . При этом можно использовать известные из квантовой теории соотношения

для квантовомеханической производной  $\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]$  для произвольного

оператора физической величины  $\hat{A}$ , а также правила вычисления матричного элемента от произведения матриц:  $(\hat{A}\hat{B})_{mn} = \sum_k A_{mk}B_{kn}$ . В итоге получаем

$$\begin{aligned} (\hat{p}_k)_{ba} &= m_k \left( \frac{d\hat{r}_k}{dt} \right)_{ba} = \frac{im_k}{\hbar} \left( [\hat{H}\hat{r}_k] \right)_{ba} = \frac{im_k}{\hbar} \left( (\hat{H}\hat{r}_k) - (\hat{r}_k\hat{H}) \right)_{ba} = \\ &= \frac{im_k}{\hbar} \left( E_b(r_k)_{ba} - (r_k)_{ba} E_a \right) = im_k w_{ba} (r_k)_{ab} = \frac{im_k w_{ba}}{e_k} (\vec{d}_k)_{ba} \end{aligned} \quad (3.6)$$

С учетом суммирования диполей по всем частицам  $d = eP = \sum_i d_i$  и

выражения (1.1), связывающего вектор-потенциал поля с напряженностью  $\vec{E}_\lambda$ , можно выразить матричный элемент для электродипольного перехода:

$$(\hat{V}_\perp)_{ba} = - \sum_{k=1}^N \frac{e_k}{m_k c} A_{0\lambda} \vec{e}_\lambda (\hat{p}_k)_{ba} = - \frac{i\omega_{ba}}{c} A_{0\lambda} (\vec{e}_\lambda \vec{d}_{ba}) = - (\vec{d}_{ba} \vec{E}_\lambda). \quad (3.7)$$

Таким образом, в рамках электродипольного приближения вероятность наблюдаемых переходов можно вычислить из выражения (2.14) подстановкой матричного элемента (3.7). Для отдельных случаев расчет матричного элемента электрического диполя может привести к нулевым значениям:  $d_{ba} = 0$ . Это означает, что для описания характера взаимодействия в этом случае нужно использовать следующее слагаемое в разложении экспоненты (3.5), а именно:  $-i(\vec{k}_\lambda \vec{r}_k)$ . При подстановке этого слагаемого в общую форму матричного элемента (3.4) возникает более сложный вариант:

$$\begin{aligned} (\hat{V}_\perp) &\approx i \sum \frac{e_k}{m_k c} A_{0\lambda} \left\{ (\vec{k}_\lambda \vec{r}_k) (\vec{e}_\lambda \vec{p}_k) \right\}_{ba} = \frac{k_\lambda}{2} (\hat{L}_z)_{ba} + \frac{i w_{ba} k_\lambda}{2} m_k (x_k y_k)_{ba}, \\ &= ck_\lambda \sum_k \frac{e_k}{2m_k c} A_{0\lambda} (\hat{L}_z)_k + \frac{ik_\lambda w_{ba}}{6} A_{0\lambda} \sum_k 3e_k (x_k y_k)_{ba} \end{aligned} \quad (3.8)$$

В полученном выражении присутствует составной частью электроквадрупольный тензор:  $D_{ij} = 3e(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2)$ . Первое слагаемое можно интерпретировать как взаимодействие магнитного момента частицы с магнитной компонентой внешнего поля.

Таким образом, приближенное выражение для оператора энергии взаимодействия вещества с квантованным электромагнитным полем при условии малых размеров элементов вещества по сравнению с длиной волны излучения  $\lambda$  можно записать в **мультиспиновом** представлении в следующем виде:

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\hat{\vec{E}}(\vec{R}_B) - \hat{\vec{\mu}}\hat{\vec{H}}(\vec{R}_B) - \frac{1}{6} \sum_{ij=1}^3 \hat{D}_{ij} \nabla_i \hat{E}_j(\vec{R}_B) + \sum_{k=1}^N \frac{e_k^2}{8m_k c^2} \left[ \vec{r}_k \times \hat{\vec{H}}(\vec{R}_B) \right]^2 + \dots \quad (3.9)$$

В этом выражении  $\hat{d}, \hat{\mu}, \hat{D}_y$  - соответственно обозначают операторы **электрического, магнитного дипольных моментов и тензора электроквадрупольного момента** всего вещества;  $\hat{E}(\vec{R}_B)$  и  $\hat{H}(\vec{R}_B)$  - операторы электрического и магнитного полей в некоторой центральной точке  $\vec{R}_B$  вещества,  $ij$  - декартовы компоненты вектора,  $\nabla$  - оператор градиента по координате  $\vec{R}_B$ .

Для сравнения вероятностей процессов, определяемых разными составляющими в выражении (3.9), можно использовать некоторые общие численные оценки параметров. В частности, отношение вероятностей магнитодипольного и электродипольного процессов:

$$\frac{P_{u,d}}{P_{e,d}} \approx \frac{|\mu_{ba}|^2}{|d_{ba}|^2} \approx \frac{\mu_b^2}{(ea_b)^2} = \left( \frac{10^{-20} \text{ cgse}}{4.8 \cdot 10^{-10} \text{ cgse} \cdot 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}} \right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

Аналогичные сравнительные оценки вероятностей электроквадрупольного и электродипольного переходов выглядят следующим образом:

$$\frac{P_{e,d}}{P_{q,q}} \approx \frac{|\sum D_{ba} \nabla E_j|^2}{36 |d_{ba} E|^2} \approx \frac{k_\lambda^2 |D_y|_{ba}^2 E^2}{36 |d_{ba} E|^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 9 (ea_b^2)^2}{\lambda^2 \cdot 36 \cdot e^2 a_b^2} \approx \frac{a_b^2 \pi^2}{\lambda^2} \approx [\lambda = 0.5 \text{ мкм}] \approx 10^{-7}.$$

Таким образом можно утверждать, что электродипольные переходы характеризуются самыми большими значениями вероятностей процессов и должны поэтому рассматриваться в первую очередь при анализе взаимодействия электромагнитных полей с электронами в атомах.

## 4. Излучение и поглощение фотонов в электродипольном приближении

### 4.1. Вероятность перехода в электродипольном приближении

Запишем с учетом (2.14) выражение для вероятности перехода в электродипольном приближении для внешнего резонансного поля, заданного в виде  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \omega t$

$$P_{a \rightarrow b} = \frac{\pi}{\hbar^2} \left| \vec{E} \vec{d}_{ba} \right|^2 \rho(\omega). \quad (4.1)$$

Введем также в рассмотрение плотность энергии поля заданной моды, выраженную через число фотонов в моде  $n$ , и объем, занимаемый полем  $L^3$  (см. (2.15) – (2.18)):

$$\rho_{E_\lambda} = \frac{n_\lambda \hbar \omega_\lambda}{L^3}. \quad (4.2)$$

Следует учесть, что с помощью введенных соотношений можно выразить классическое поле  $\vec{E}$  через характеристику квантованного поля  $n_\lambda$ . Для интенсивности поля  $I_\lambda$  моды будет справедливо записать (используем (2.18) и (4.2)):

$$\frac{I_\lambda(\omega, \Omega)}{c} d\omega \cdot d\Omega = \rho_{E_\lambda} \cdot \rho(\omega, \Omega) \cdot d\omega \cdot d\Omega = \frac{\omega_\lambda^3 n_\lambda \hbar}{8\pi^3 c^3} d\omega \cdot d\Omega. \quad (4.3)$$

Данное соотношение показывает, что результат не зависит от объема, занимаемого полем (не зависит от  $L$ ).

Классическая интерпретация предполагает связь интенсивности и напряженности  $\vec{E}_\lambda$  поля вида  $\frac{I_\lambda(\omega, \Omega)}{c} d\omega \cdot d\Omega = \frac{\left| \vec{E}_\lambda \right|^2}{8\pi} d\omega \cdot d\Omega$ . Таким

образом, если  $n_\lambda$  достаточно большое, то полученные соотношения позволяют связать классические и квантовые выражения для энергии поля:

$$\frac{E_\lambda^2}{8\pi} = \frac{\omega_\lambda^3 n_\lambda \hbar}{8\pi^3 c^3} \Rightarrow E_\lambda^2 = \frac{\omega_\lambda^2 n_\lambda \hbar}{\pi^2 c^3} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Гц} \cdot \text{ср} \cdot \text{м}^3} \right]. \quad (4.4)$$

Соответственно, выражение для вероятности (4.1) может быть переписано в форме:

$$P_{b \rightarrow a} = \frac{\omega_\lambda^3 n_\lambda}{2\pi\hbar c^3} \left( \vec{e}_\lambda \vec{d}_{ba} \right)^2 \cdot F(\omega) \cdot g_a, \quad (4.5)$$

где дополнительно учтены параметры атома в виде форм-фактора (2.19) и кратности вырождения атомного (электронного) уровня конечного состояния перехода  $g_b$ . Также учтено, что взаимодействие носит резонансный характер

$$\text{и } \omega_\lambda \approx \omega_{ba} = \frac{E_b - E_a}{\hbar}.$$

## 4.2. Квантовая задача об излучении и поглощении фотона

Рассмотрим квантовую задачу о переходе в атоме, сопровождающемся излучением и поглощением фотона в выделенной моде. Общая энергия системы при этом имеет форму, повторяющую выражение (3.2), т.е. суммирует в себе отдельные выражения для энергии электромагнитной моды, энергии электрона в атоме, а также выделенный аналогично выражению (3.3) оператор энергии взаимодействия  $\hat{W}$  (без конкретизации типа взаимодействия).

Рассмотрим для такой постановки задачи процесс **излучения отдельного фотона в моду  $\lambda$ .**

В начальном состоянии атом характеризуется:

- $E_a$  - нижний энергетический уровень электрона, учитываемый при переходе на частоте  $\omega_{ba}$
- $\varphi_a$ -функция состояния для этого уровня.

Для электромагнитной моды поля до взаимодействия:

- число фотонов в моде  $n_\lambda$
- функция состояния  $\Psi_{n_\lambda}$  (1.12)
- характерная частота фотонов в данной моде  $\omega_\lambda$ .

При излучении фотона после «включения» в некоторый момент времени взаимодействия  $W$  система переходит в новое состояние:

- $E_b$  - верхний энергетический уровень электрона, учитываемый при переходе на частоте  $\omega_{ba}$
- $\varphi_b$ -функция состояния для этого уровня.

Для электромагнитной моды поля после излучения фотона

- число фотонов в моде  $n_\lambda + 1$
- функция состояния  $\Psi_{n_\lambda + 1}$ .

Для вычисления матричных элементов перехода определим общую функцию системы «атом + поле»

$$\Phi_{\text{нач}} \equiv (b, n_\lambda) = \varphi_b(\vec{r}) \Psi_{n_\lambda}(Q_\lambda) \prod_{\mu \neq \lambda} \Psi_{n_\mu}(Q_\mu) - \text{начальное состояние системы}$$

$$\Phi_{\text{кон}} \equiv (a, n_\lambda + 1) = \varphi_a(\vec{r}) \Psi_{n_\lambda + 1}(Q_\lambda) \prod_{\mu \neq \lambda} \Psi_{n_\mu}(Q_\mu) - \text{конечное состояние}.$$

Тогда усреднением по данным функциям получаем матричный элемент перехода за счет взаимодействия и соответствующую вероятность процесса излучения в виде

## 4.2. Квантовая задача об излучении и поглощении фотона

Рассмотрим квантовую задачу о переходе в атоме, сопровождающемся излучением и поглощением фотона в выделенной моде. Общая энергия системы при этом имеет форму, повторяющую выражение (3.2), т.е. суммирует в себе отдельные выражения для энергии электромагнитной моды, энергии электрона в атоме, а также выделенный аналогично выражению (3.3) оператор энергии взаимодействия  $\hat{W}$  (без конкретизации типа взаимодействия).

Рассмотрим для такой постановки задачи процесс **излучения отдельного фотона в моду  $\lambda$ .**

В начальном состоянии атом характеризуется:

- $E_a$  - нижний энергетический уровень электрона, учитываемый при переходе на частоте  $\omega_{ba}$
- $\varphi_a$  - функция состояния для этого уровня.

Для электромагнитной моды поля до взаимодействия:

- число фотонов в моде  $n_\lambda$
- функция состояния  $\Psi_{n_\lambda}$  (1.12)
- характерная частота фотонов в данной моде  $\omega_\lambda$ .

При излучении фотона после «включения» в некоторый момент времени взаимодействия  $W$  система переходит в новое состояние:

- $E_b$  - верхний энергетический уровень электрона, учитываемый при переходе на частоте  $\omega_{ba}$
- $\varphi_b$  - функция состояния для этого уровня.

Для электромагнитной моды поля после излучения фотона

- число фотонов в моде  $n_\lambda + 1$
- функция состояния  $\Psi_{n_\lambda + 1}$ .

Для вычисления матричных элементов перехода определим общую функцию системы «атом + поле»

$$\Phi_{\text{нач}} \equiv (b, n_\lambda) = \varphi_b(\vec{r}) \Psi_{n_\lambda}(Q_\lambda) \prod_{\mu \neq \lambda} \Psi_{n_\mu}(Q_\mu) - \text{начальное состояние системы}$$

$$\Phi_{\text{кон}} \equiv (a, n_\lambda + 1) = \varphi_a(\vec{r}) \Psi_{n_\lambda + 1}(Q_\lambda) \prod_{\mu \neq \lambda} \Psi_{n_\mu}(Q_\mu) - \text{конечное состояние.}$$

Тогда усреднением по данным функциям получаем матричный элемент перехода за счет взаимодействия и соответствующую вероятность процесса излучения в виде

$$P_{b,n_\lambda \rightarrow a,n_\lambda+1} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| W_{(a,n_\lambda+1),(b,n_\lambda)} \right|^2 \rho(a,n_\lambda+1) \quad (4.6)$$

Аналогичные рассуждения для процесса **поглощения фотона**, при котором электрон переходит с уровня  $a$  на уровень  $b$ , а состояние поля меняется в результате уменьшения числа фотонов с  $n_\lambda$  на  $n_\lambda - 1$ , приводят к выражению для вероятности поглощения фотона в виде

$$P_{a,n_\lambda \rightarrow b,n_\lambda-1} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| W_{(b,n_\lambda-1),(a,n_\lambda)} \right|^2 \rho(b,n_\lambda-1) \quad (4.7)$$

Отметим, что поскольку оператор энергии взаимодействия является эрмитовым оператором, можно использовать свойство эрмитовых операторов:  $W_{mk} = W_{km}^*$  - и поменять порядок индексов в матричном элементе, например, в выражении (4.7):  $W_{(a,n_\lambda),(b,n_\lambda-1)}$ . Отметим также, что плотность состояний поля в соответствии с (2.18) не зависит от  $n_\lambda$ . Будем также для простоты считать, что уровни перехода имеют одинаковую кратность вырождения. Тогда из сравнения (4.6) и (4.7) нетрудно заметить, что вероятность излучения можно получить из аналогичного выражения для вероятности поглощения на том же переходе формальной заменой  $n_\lambda$  на  $n_\lambda + 1$ . Таким образом, вероятность излучения фотона практически повторяет выражение (4.5) и записывается как

$$P_{b \rightarrow a} = \frac{\omega_\lambda^3 (n_\lambda + 1)}{2\pi\hbar c^3} (\vec{e}_\lambda \vec{d}_{ba})^2 \cdot F(\omega) \cdot g_a. \quad (4.8)$$

### 4.3. Спонтанные и индуцированные переходы

Полученные выше соотношения (4.5) и (4.8) позволяют определить два основных типа процессов, которые в соответствии с постулатами А.Эйнштейна могут происходить при взаимодействии электромагнитного поля с атомом – **индуцированные и спонтанные переходы**.

#### 1. Спонтанное излучение.

При спонтанном (spontaneous) излучении атом излучает фотон на частоте  $\omega_0$  в пределах спектральной линии перехода  $F(\omega)$ . При этом другие характеристики излучаемого фотона – волновой вектор  $\vec{k}_\lambda$  и вектор единичной поляризации  $\vec{e}_\lambda$  – заранее предсказать невозможно. Ключевым свойством спонтанного излучения является **независимость вероятности излучения от  $n_\lambda$** , то есть от регулярного резонансного поля, в котором в общем случае находится рассматриваемый атом. Причиной спонтанного излучения в соответствии с выводами квантовой электродинамики является взаимодействие атома с шумовым полем – электромагнитным вакуумом. Это приводит нас к выводу, что любое возбужденное состояние атома из-за

наличия спонтанного излучения характеризуется **конечным временем жизни электрона** на этом уровне и, как следствие, все линии переходов в атоме окажутся уширенными в соответствии с квантовомеханическим соотношением неопределеностей «энергия – время».

### 2. Индуцированное излучение

При индуцированном (stimulated) излучении испускаемый фотон **по всем характеристикам должен соответствовать фотонам внешнего индуцирующего поля**, то есть при индуцированном излучении воспроизводится полный набор характеристик фотонов во внешней волне:  $\omega_\lambda, \vec{k}_\lambda, \vec{e}_\lambda$ . При этом вероятность такого излучения пропорциональна интенсивности падающей волны (числу фотонов в моде, взаимодействующей с атомом):  $P_{\text{инф}} \sim n_\lambda$ .

### 3. Резонансное поглощение

Поглощение фотона всегда является индуцированным процессом, так как возбуждение атома осуществляется за счет энергии внешнего поля. Единственное условие для процесса поглощения – наличие внешнего резонансного по отношению к атомному переходу электромагнитного поля.

В принципе существует еще один вариант для перехода электрона в атоме с верхнего на нижний уровень – это безызлучательный переход. Однако такой переход не является резонансным по отношению к частоте  $\omega_{ba}$  и таким образом выпадает из представленной классификации.

Соотношения (4.5) и (4.8) позволяют обозначить связь между величинами вероятностей спонтанных и индуцированных процессов.

$$P_{(b,n_\lambda \rightarrow a,n_\lambda+1)}^{\text{излуч}} = P_{\text{инф}} + P^{sn}. \quad (4.9)$$

Оба процесса могут идти одновременно, и в формуле (4.8) за вероятность спонтанного излучения отвечает единица в числителе, а вероятность индуцированного излучения обусловлена параметром  $n_\lambda$ . С учетом этого можно также записать

$$P_{\text{инф}} = n_\lambda P^{sn}. \quad (4.10)$$

Наконец для индуцированных процессов справедливо соотношение

$$P_{\text{инф}} / g_a = P_{\text{погл}} / g_b \quad (4.11)$$

### 4.4 Спонтанное излучение электрического диполя

Суммарная вероятность спонтанного излучения диполя, ориентированного определенным образом в пространстве, может быть

найдена из соотношения (4.8) при условии  $n_\lambda = 0$  интегрированием по частоте в пределах контура  $F(\omega)$ , по телесному углу, а также суммированием по всем поляризациям. Пусть диполь  $d_{ba}$  ориентирован по оси  $OZ$ . Тогда (см. рисунок 4.1) суммирование по поляризациям можно осуществить, выбрав в качестве базиса систему единичных ортов  $\vec{e}_{\lambda 1}$  и  $\vec{e}_{\lambda 2}$ , ортогональных к направлению волнового вектора и лежащих в плоскостях  $YZ$  и по нормали к ней.

$$\sum_{e_\lambda} (\vec{e}_\lambda \cdot \vec{d}_{ba})^2 = d_{ba}^2 \sin^2 \theta$$

Для интегрирования по телесному углу имеем  $d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta d\varphi$ , тогда

$$P_{cn}^\Sigma = \int d\omega \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot d_{ba}^2 \frac{w_\lambda^3 g_a F(w)}{2\pi \hbar c^3} = \frac{4}{3} \frac{w_\lambda^3 g_a}{\hbar c^3} d_{ba}^2 \int F(w) dw$$

$$P_{cn}^\Sigma = \frac{4}{3} \frac{w_\lambda^3 g_a}{\hbar c^3} d_{ba}^2 = (def) = A_{cn}$$
(4.12)

Это выражение представляет собой коэффициент спонтанного излучения, аналогичный коэффициенту, введенному А.Эйнштейном. Тем не менее, физический смысл этой характеристики заключается в том, что данная величина является расчетным параметром. В частности, он может оказаться равным нулю в случае, если расчеты покажут, что матричный элемент перехода равен нулю для конкретных уровней начального и конечного состояний атома. Еще один аспект заключается в том, что  $A_{cn}$  зависит от третьей степени частоты, что приводит к значительному увеличению для вероятности спонтанного излучения на оптических частотах. В противоположность этому для СВЧ- и тем более радио-диапазона спонтанными явлениями можно пренебречь, так как суммарная вероятность уменьшается на десять – пятнадцать порядков по величине.

#### 4.5. Правила отбора для дипольных взаимодействий

Рассмотрим общие правила («правила отбора»), дающие ответ на вопрос, существует ли ненулевая вероятность того или иного перехода в атоме при взаимодействии с внешними полями. В основе этих правил лежит алгоритм расчета соответствующих матричных элементов усреднением по состояниям атома. Проанализируем сначала случай электрического дипольного момента ( $\varphi_b$  и  $\varphi_a$  – волновые функции электрона в конечном и начальном состояниях соответственно):

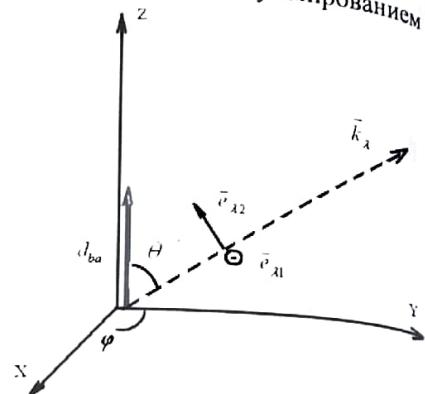


Рисунок 4.1

$$d_{ba} = \int \varphi_b^* d\varphi_a d\vec{r} \quad (4.13)$$

Необходимо отметить, что при рассмотрении электронных состояний в атоме в подавляющем большинстве случаев имеет место модель **центрально-симметричной системы**. Иными словами, в волновой функции электрона при замене координат  $\vec{r}$  на  $-\vec{r}$  мы получим физически неотличимую систему. С учетом вероятностной природы волновой функции можно записать данное условие как

$$\varphi(\vec{r}') = \varphi(-\vec{r}) = \pm \varphi(\vec{r}) = (-1)^\alpha \varphi(\vec{r}) \quad (4.14)$$

В зависимости от значения целого числа  $\alpha$  (2 или 1) считается, что  $\varphi(\vec{r})$  обладает **положительной или отрицательной четностью** соответственно.

Проведем формальное вычисление матричного элемента диполя с усреднением по состояниям электрона  $\varphi_b$  и  $\varphi_a$ . Используем инверсию координат  $\vec{r}' = -\vec{r}$

$$\begin{aligned} d_{ba} &= \iiint_{\pm x} \varphi_b^*(\vec{r}') e \vec{r}' \varphi_a(\vec{r}') d\vec{r}' = \\ &= \iiint_{\pm x} (-1) \varphi_b^*(\vec{r}) (-1)^{\alpha_b} e(-\vec{r}) \varphi_a(\vec{r}) (-1)^{\alpha_a} (-1) d\vec{r} = \\ &= (-1)^{\alpha_b + \alpha_a + 3} \iiint_{\pm x} \varphi_b^*(\vec{r}) e(\vec{r}) \varphi_a(\vec{r}) d\vec{r} = (-1)^{\alpha_b + \alpha_a + 1} \cdot \bar{d}_{ba} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом, для центрально симметричной системы без конкретизации волновых функций получается правило вида:  $d_{ba} = (-1)^{\alpha_b + \alpha_a + 1} d_{ba}$   $\Rightarrow$  для случая  $\alpha_b + \alpha_a = 2$  (или 4), то есть для состояний с одинаковой четностью - дипольный матричный элемент превращается в нуль  $d_{ba} = -d_{ab} \equiv 0$ . Для случая  $\alpha_b + \alpha_a = 3$  (случай различной четности для начального и конечного состояний) получаем  $d_{ba} \equiv d_{ab}$ , то есть в общем случае переход должен состояться. Можно сформулировать общее правило («правило Лапорта»): **В центрально-симметричной системе электро-дипольные переходы происходят между уровнями разной четности.**

В случае магнитодипольного перехода матричный элемент  $(\hat{\mu})_{ba}$  может быть рассчитан по аналогичному (4.15) алгоритму. Учитываем, что магнитный момент выражается как

$$\hat{\mu} = -\mu_B \hat{L}, \quad \hat{\mu} = -2\mu_B \hat{s}, \quad \text{где } \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \text{ - магнетон Бора.}$$

Отличие будет заключаться в том, что при написании оператора орбитального момента  $\hat{L}$  в подынтегральном выражении появляется при проведении процедуры инвертирования координат лишняя (-1), так как

$\hat{L} = \left[ \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \right]$ . Соответственно, это приведет к соотношению вида

$$\mu_{ba} = (-1)^{m_b + m_a + 4} \mu_{ba}$$

т.е. магнитодипольный переход может осуществляться между уровнями с одинаковой четностью волновых функций.

Существуют также правило отбора по квантовым числам, характеризующим состояние электрона в атоме. Чтобы их сформулировать, требуется выразить электрический диполь в сферических координатах:

$$\vec{d} = e\sigma(\vec{i}_0 \sin \theta \cos \varphi + \vec{j}_0 \sin \theta \sin \varphi + \vec{k}_0 \cos \theta) \quad (4.16)$$

и провести усреднение по начальному и конечному состояниям системы для каждой из проекций электрического диполя:

$$(\hat{d}_i)_{ba} = \left\langle n_b; l_b; m_b; s_b; m_{sb} \middle| \hat{d}_i \middle| n_a; l_a; m_a; s_a; m_{sa} \right\rangle = \int \psi_b^*(r, \theta, \varphi) \cdot \hat{d}_i \cdot \psi(r, \theta, \varphi) d\vec{r} =$$

$$\int r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \cdot R_{n_b l_b}(r) \cdot Y_{l_b m_b}^*(\theta, \varphi) \cdot \hat{d}_i \cdot R_{n_a l_a}(r) \cdot Y_{l_a m_a}(\theta, \varphi) \cdot \int \chi_{s_b m_{sb}}^*(s) \cdot \chi_{s_a m_{sa}}(s) \cdot ds \quad (4.17)$$

В результате расчетов с использованием свойств сферических функций  $Y(\theta, \varphi)$  можно показать, что формальные правила отбора можно свести к подборке следующих соотношений: чтобы хотя бы одна из проекций электрического диполя  $(d_i)_{ba} \neq 0$ , требуется выполнение условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta l = \pm 1 \\ \Delta m = 0, \pm 1 \\ \Delta m_s = 0 \\ \Delta p - \text{любое} \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Отметим, что именно квантовое орбитальное число  $l$  определяет четность сферических волновых функций.

В многоэлектронном атоме *правила по четности волновых функций* сохраняются, а с учетом правил сложения моментов сводятся для полного момента количества движения  $\vec{J}$  к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta j = 0, \pm 1 \\ \Delta m_j = 0, \pm 1 \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Приведенные соотношения (4.18) – (4.19) отражают то обстоятельство, что момент количества движения («спин») фотона  $j_\phi = 1$ .

Если сформулировать аналогичные правила отбора для магнитодипольного взаимодействия, то получим следующие соотношения для квантовых чисел:

для орбитального взаимодействия

$$n_b = n_a, \Delta l = 0, \Delta m = 0, \pm 1, \Delta s = 0, \Delta m_s = 0; \quad (4.20)$$

для спинового взаимодействия

$$n_b = n_a, \Delta l = 0, \Delta m = 0, \Delta s = 0, \Delta m_s = 0, \pm 1. \quad (4.21)$$

Следует отметить тот факт, что поскольку правила отбора предполагают  $n_b = n_a$ , то магнитодипольное излучение может осуществляться только между уровнями тонкой структуры и вследствие этого частоты таких переходов попадают не в оптический, а в микроволновый диапазон.

#### 4.6. Многофотонные (двуухфотонные) процессы

Как следует из предыдущего раздела, при наложении внешнего электромагнитного поля может возникнуть ситуация, при которой в силу запрета по правилам отбора однофотонные переходы между двумя уровнями электронных состояний окажутся невозможными. Типичным примером можно считать переход  $2S \rightarrow 1S$  для электрона в атоме водорода, запрещенный в электродипольном, магнитодипольном и электроквадрупольном приближении. В этом случае для описания процесса взаимодействия атома с полем может быть использовано последнее слагаемое  $\hat{V}_2$  в операторе энергии системы (3.3). Как уже отмечалось, энергия взаимодействия такого вида должна приводить к новым решениям теории возмущений, а именно – к **двуухфотонным процессам**.

Можно сравнить по порядку величины энергий, заключенных в слагаемых  $\hat{V}_1$  и  $\hat{V}_2$  в выражении (3.3). Примерные оценки с учетом констант дают нам величины порядка

$$V_1 \sim \sqrt{\frac{\hbar}{\omega L^3}} \frac{e_k}{m_k} p_k \sqrt{n_\lambda} \quad \text{и} \quad V_2 \sim \frac{\hbar}{\omega L^3} \frac{e_k^2}{m_k c} n_\lambda$$

Таким образом, можно считать, что  $\frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \sim \sqrt{n_\lambda} \cdot 10^{-13}$ . Это означает, что

примерно равный вклад во взаимодействие от каждого из этих слагаемых можно реализовать при значениях  $n_\lambda \sim 10^{26}$ . Такие сильные электромагнитные поля практически очень трудно достижимы, а следовательно в подавляющем числе случаев взаимодействия в реальных

условиях эксперимента  $\frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \ll 1$ . Данное соотношение предполагает, что для рассмотрения двухфотонных процессов, обусловленных наличием энергии взаимодействия  $\hat{V}_2$ , требуется использовать второй порядок теории возмущений. Модель расчета вероятностей процессов при этом аналогична приведенной в разделе 2 для первого порядка теории возмущений, но после соответствующих преобразований вместо соотношения (2.6) во втором порядке теории возмущений получим :

$$c_m^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^t \sum_k V_{nk} V_{km} e^{i(\omega_{nk} t_1 + \omega_{km} t_2)} dt_2, \quad (4.22)$$

и соответственно

$$\left| c_m^{(2)} \right|^2 = -\frac{1}{\hbar^2} \left| \sum_k \frac{V_{nk} V_{km}}{E_k - E_n} \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega_{mn} t}{2}}{\left( \frac{\omega_{mn} t}{2} \right)^2}. \quad (4.23)$$

В результате в пределе при  $t \rightarrow \infty$  аналогично случаю, рассмотренному в первом порядке теории возмущений, возникает  $\delta$ -функция вида  $2\pi\delta(\Delta E)$  для перехода из состояния  $n$  в  $m$ , а с учетом непрерывного спектра выражение для вероятности перехода принимает вид (аналог (2.14)):

$$P_{n \rightarrow m}(t) = \frac{\left| c_m^{(2)} \right|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \frac{V_{nk} V_{km}}{E_k - E_n} \right|^2 \rho(E_m), \quad (4.24)$$

где производится суммирование по всем возможным уровням  $k$ , которые по существу представляют собой виртуальные состояния атомной системы, так как время жизни на них равно нулю. С учетом соотношения неопределенностей «энергия-время» выполняющееся для виртуальных уровней  $\Delta t \rightarrow 0$  приводит к условию  $\Delta E \rightarrow \infty$ . Иными словами, двухфотонные процессы идут одновременно через всю совокупность остальных уровней, для начального и конечного состояний выполняется закон сохранения энергии системы вида  $\hbar\omega_\mu - \hbar\omega_\lambda = E_m - E_n$  (см.

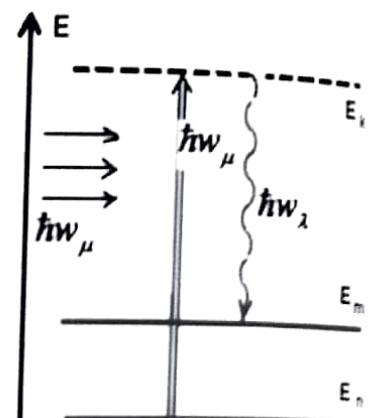
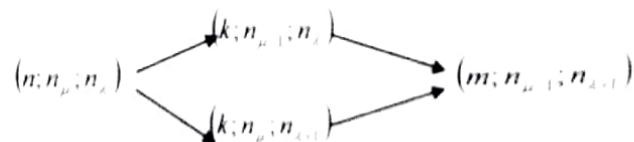


Рисунок 4.2

рисунок 4.2), но в промежуточном состоянии (виртуальный уровень  $k$ ), ни о каком законе сохранения речь не идет, зафиксировать систему в этом состоянии нельзя. Схематично это можно проиллюстрировать следующей схемой, отражающей тот факт, что невозможно указать однозначно состояние в промежуточной фазе перехода.



Двухфотонный процесс, представленный на схеме, называется **комбинационным рассеянием**. При  $\omega_\lambda < \omega_\mu$  имеет место так называемое стоксовское рассеяние, при обратном соотношении частот (меняются местами начальное и конечное состояние атома) – антистоксовский процесс.

Вероятность перехода при комбинационном рассеянии может быть представлена в виде:

$$P_{kp}(\omega_\mu, \omega_\lambda) = \frac{8\pi^3 \omega_\mu \omega_\lambda n_p (n_\lambda + 1)}{\hbar^2 L^6} \left| \sum_i \left\{ \frac{(\vec{d}_{mk} \vec{e}_\mu)(\vec{d}_{lm} \vec{e}_\lambda)}{\omega_{km} - \omega_\mu} + \frac{(\vec{d}_{ml} \vec{e}_\mu)(\vec{d}_{km} \vec{e}_\lambda)}{\omega_{km} - \omega_\lambda} \right\} \right|^2 \rho_{\text{фот}}(E) \quad (4.25)$$

где последний сомножитель представляет плотность состояний системы, но в отличие от выражения (2.14) учитывает двухфотонные состояния поля. Интегрированием данного выражения по телесным углам, поляризациям и частотам можно получить суммарную вероятность комбинационного рассеяния.

#### Типы двухфотонных процессов:

1. **Комбинационное рассеяние** ( $\hat{a}_\mu \cdot \hat{a}_\lambda^\dagger$  или  $\hat{a}_\mu^\dagger \cdot \hat{a}_\lambda$ ). Впервые комбинационное рассеяние в жидкостях наблюдали Ч.Раман (Нобелевская премия по физике 1930г. за это открытие) и К.Кришина в 1928 году. Примерно в это же время комбинационное рассеяние в твердом теле (квари) обнаружили советские ученые Л.И.Мандельштам и Г.С.Ландеберг. Частные случаи

– **вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР)**, при котором рассеяние идет в моду, присутствующую в поле (спонтанное излучение замещается индуцированной рассеянной волной).

- **рэлеевское** («несмешенное») рассеяние, наблюдаемое при мелкомасштабных (меньше длины волны падающей волны) вариациях рассеивающей среды. В этом случае частоты падающего и рассеянного поля совпадают  $\omega_\mu = \omega_\lambda$  (т.е.  $|\vec{k}_\mu| = |\vec{k}_\lambda|$ ), но направления волновых векторов

для падающего и рассеянного фотона отличаются  $\vec{k}_\mu \neq \vec{k}_\lambda$ . Вероятность рэлеевского рассеяния, как это следует из выражения (4.25), подчиняется закону  $P_{pp} \sim \omega^4$ .

#### **2. Двухфотонное излучение** ( $\hat{a}_\mu^\dagger \cdot \hat{a}_\lambda^\dagger$ ).

Явление предсказано в 1931 году М.Гепперт-Майер. Яркий пример – двухфотонный распад возбужденного  $2S$ -состояния в атомарном водороде. Однофотонные переходы  $2S \rightarrow 1S$ , как уже отмечалось, запрещены правилами отбора. Поэтому имеет место снятие возбуждения в атоме с одновременным излучением двух фотонов с общем случае с отличающимися частотами, в сумме соответствующие частоте данного перехода. В отличие от однофотонных переходов в водороде (например, переход  $2P \rightarrow 1S$ ), для которых величины для вероятностей составляют порядка  $10^6 - 10^8 \text{ c}^{-1}$ , а соответствующие времена жизни в возбужденном состоянии составляют доли микросекунд, для перехода  $2S \rightarrow 1S$  (второй порядок теории возмущений) вероятность двухфотонного излучения имеет значение  $\sim 8,2 \text{ e}^{-1}$ ,

т.е. атом находится в верхнем состоянии примерно 0,1 с, что является очень большим значением для систем атомной физики.

3. **Двухфотонное поглощение** ( $\hat{a}_\mu \cdot \hat{a}_\lambda$ ). Впервые было продемонстрировано В.Кайзером в 1961 году в кристалле  $\text{CaF}_2:\text{Eu}$ . Наблюдалось появление проводимости в диэлектрике при лазерном возбуждении с частотой, намного меньшей величины запрещенной зоны. В настоящее время активно применяется схема двухфотонного возбуждения исследуемых сред.

4. **Резонансная флуоресценция** ( $\hat{a}_\mu \cdot \hat{a}_\lambda^\dagger$ ).

Данная разновидность двухфотонного процесса аналогична комбинационному рассеянию, но имеет место для частот, близких к реальному, а не виртуальному переходу. За счет такого квазирезонансного соотношения частот в соответствии с математической моделью следует ожидать увеличения вероятности данного процесса, который, как и в случае комбинационного рассеяния, представляет собой спонтанный процесс – флуоресценцию.

#### 5. *Рассеяние Мандельштама-Бриллюэна:*

Рассеяние наблюдается в кристаллах при участии фононов кристаллической решетки. Для реализации этого типа рассеяния необходимо обеспечить не только закон сохранения энергии

$$\hbar\omega_\mu = \hbar\omega_\lambda + \hbar\omega_{\text{фонон}},$$

но и импульсный векторный синхронизм вида

$$\hbar\vec{k}_\mu = \hbar\vec{k}_\lambda + \hbar\vec{k}_{\text{фонон}}.$$

Следует отметить, что до появления мощных лазерных источников света экспериментальное наблюдение двухфотонных процессов было крайне затруднительным из-за малой вероятности переходов (второй порядок теории возмущений). Разработка мощных лазерных источников позволило не только осуществить наблюдение предсказанных квантовой теорией закономерностей поглощения и излучения в рамках двухфотонных процессов, но и разработать новые спектроскопические методики, позволяющие использовать данный тип взаимодействия для прецизионного анализа различных оптических сред. Наибольшее распространение получила так называемая КАРС-спектроскопия («когерентное антистоксовское рассеяние»), а также двухфотонная внутридоплеровская спектроскопия, применяемая для анализа тонкой структуры оптических спектров в условиях доплеровского уширения суммарного спектрального контура газовой среды. Использование в качестве накачки перестраиваемых по частоте лазеров позволило реализовать также эффективную ВКР-спектроскопию, позволяющую просканировать энергетические спектры исследуемых сред в широком диапазоне частот.

Многофотонная спектроскопия имеет ряд преимуществ перед другими аналитическими методиками:

- в результате двухфотонных переходов можно осуществлять возбуждение уровней, на которые однофотонные дипольный переходы запрещены правилами по четности волновых функций.
- достигаемый диапазон частот – ультрафиолетовый диапазон при накачке видимым излучением.
- подбор комбинации участвующих фотонов с суммарным вектором  $\hbar \cdot \sum \vec{k}_i = 0$  дает возможность реализовать бездоплеровскую многофотонную спектроскопию высокого разрешения, ограниченную только естественной шириной линии.
- возможна реализация ионизационной спектроскопии за счет возбуждения ионизированных состояний в атоме.

## 5. Теория релаксации и уширение спектральных линий вещества

### 5.1. Динамическая и диссипативная подсистемы

При анализе реальных макроскопических моделей взаимодействия электромагнитных полей с ансамблем атомов среды необходимо ввести в рассмотрение процессы **релаксации** возбуждения в атомах. По существу любая сложная система, рассматриваемая с точки зрения квантовой кинетики, может быть условно разделена на две части:

- **динамическая подсистема**
- **диссипативная подсистема (термостат).**

К **динамической подсистеме** в соответствии с ее названием относятся степени свободы и переменные, которые изменяются во времени при взаимодействии с внешними полями. Количество этих переменных ограничено и соответствует количеству уравнений в математической модели рассматриваемой физической системы. Например, для лазера как объекта квантовой физики в основе динамической модели описания – рабочий переход вещества и лазерные моды генерации.

К **диссипативной системе (термостату)** относятся все второстепенные параметры и степени свободы системы, присутствующие в условиях взаимодействия атома с полем, но характеризующиеся совокупным усредненным воздействием на элементы динамической системы. В качестве такой диссипативной системы можно рассматривать, например, решетку с фононными колебаниями для кристаллов, буферный газ и стенки сосуда для газовых сред, электромагнитный вакуум и шумовое внешнее ЭМП, тепловое излучение и т.п. Воздействие термостата на динамическую систему приводит к **релаксации** ее характеристик, т.е. к **возвращению динамической системы к состоянию статистического равновесия**, и основной характеристикой, описывающей этот процесс, является усредненное по ансамблю **время релаксации**. Другим характерным параметром, напрямую связанным с релаксационными процессами в веществе, является так называемое **уширение спектральных линий**, имеющее в зависимости от типа проявленного термостата различную физическую природу.

### 5.2. Спонтанное излучение атома как пример релаксационного процесса

Рассмотрим в качестве примера воздействия термостата на активную частицу процесс спонтанного излучения в двухуровневом атоме с верхним *b* и нижним *a*-уровнем, соответственно. В данной модели в начальный момент времени электрон в атоме находится в возбужденном состоянии. Это означает, что заселенности уровней при  $t = 0$ :  $N_b = 1$ ,  $N_a = 0$ . Это состояние не является равновесным, так как исходя из закона распределения Больцмана

$$\frac{N_b}{N_a} = e^{-\frac{E_b - E_a}{kT}}$$

и для рассматриваемого случая не выполняется условие

$N_b < N_a$ . Что касается электромагнитных полей, то равновесное число фотонов в  $\lambda$ -моде задается распределением Бозе-Эйнштейна и определяется температурой теплового излучения  $\bar{n}_\lambda = \frac{1}{e^{kT} - 1}$ . Нетрудно заметить, что  $n_\lambda$  в

каждой моде очень мало (например, для температуры солнечной оболочки  $T \approx 6000^\circ K$  имеем для оптических частот  $\langle n_\lambda \rangle \sim 10^{-2}$ ), поэтому приближенно можно считать каждую из мод невозбужденной ( $\bar{n}_\lambda = 0$ ). После излучения фотона в результате спонтанного процесса его энергия рассеивается в пространстве, не меняя при этом эффективную температуру шумового поля, а электрон в атоме претерпевает релаксацию в основное, нижнее по энергии состояние, в результате чего атом возвращается к равновесному распределению  $N_b = 0$ ,  $N_a = 1$ . Таким образом, взаимодействие атома с термостатом в виде электромагнитного вакуума привело в данном случае к релаксации динамической подсистемы за время, соответствующее спонтанному времени жизни электрона на верхнем энергетическом уровне.

Если рассмотреть указанный процесс на языке волновой функции, описывающей состояние электрона, то в общем случае ее можно представить в виде суперпозиции из двух слагаемых, определяющих вероятность нахождения электрона в возбужденном и нижнем энергетических состояниях:

$$\Psi = c_b \Psi_b^{(0)} + c_a \Psi_a^{(0)}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\Psi_b^{(0)}, \Psi_a^{(0)}$  - базисные функции, а  $c_b, c_a$  - зависящие от времени амплитуды вероятностей нахождения электрона на соответствующих уровнях. В результате можно записать систему из двух уравнений вида (2.3), решая которую можно найти вероятность спонтанного перехода в единицу времени. Однако с математической точки зрения данная задача (модель Вигнера-Вайскопфа) не имеет простого решения, так как бесконечно большое число мод, в которые может излучить атом, предопределяет трансцендентную форму итогового соотношения. В результате, опираясь на форму зависимости в правой части уравнений и начального условия

$c_b(t=0)=1$ , можно искать решение в виде  $c_b(t) \approx \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$ , где коэффициент  $\gamma$  является комплексной величиной. Таким образом, данная задача приводит к решению в виде волновой функции для верхнего состояния:

$$\Psi_b = \varphi_b(r) e^{-\frac{i E_b t}{\hbar}} e^{-\frac{\gamma}{2} t} = \Psi_b^{(0)}(r, t) e^{-\frac{\gamma}{2} t}. \quad (5.2)$$

Аналогичным образом записывается и функция нижнего состояния, с учетом нормировки вида  $|C_b|^2 + |C_a|^2 = 1$ .

### 5.3. Естественное уширение спектральной линии

Представляет интерес нахождение с помощью Фурье-преобразования спектральной формы, соответствующей рассмотренному процессу релаксации. С учетом комплексной формы для коэффициента  $\gamma$  получим для спонтанного излучения на переходе  $\omega_{ba}$

$$F_{SP}(\omega) = \frac{\operatorname{Re} \gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\omega - \omega_{ab} - \frac{\operatorname{Im} \gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Re} \gamma}{2}\right)^2} = \frac{A_{\text{спонт}}}{2\pi} \frac{1}{\left(\omega - \omega_{ab} - \frac{\Delta\omega_L}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_{\text{спонт}}}{2}\right)^2}, \quad (5.3)$$

где  $A_{\text{спонт}}$  - имеет смысл коэффициента спонтанного излучения (4.12), а  $\Delta\omega_L$  - Лэмбовский сдвиг верхнего уровня, обусловленный ненулевой величиной вероятности перехода. Представленная форма линии спонтанного излучения повторяет форм-фактор в виде лоренцевского спектрального контура, введенный выражением (2.19). Для спонтанного излучения ширина контура («размытие» энергетического уровня  $b$ ), таким образом, определяется как

$$\Delta E_b \sim \frac{\hbar}{\tau_{\text{спонт}}} \approx \hbar A_{\text{спонт}}, \text{ т.е. } \Delta\omega = A_{\text{спонт}}. \quad (5.4)$$

Данный вариант уширения линии, соответствующей переходу в атоме, обусловленному спонтанным излучением, носит название **естественной ширины линии**. Следует отметить, что этот тип уширения в принципе неустраним, так как релаксация атома за счет спонтанного излучения будет наблюдаться всегда, в том или ином порядке теории возмущений.

Если нижний уровень  $E_a$ , участвующий в переходе, не является основным состоянием для электрона и в свою очередь характеризуется тоже некоторым конечным временем жизни, то этому нижнему уровню можно поставить в соответствие аналогичный лоренцевский контур  $F_a(\omega)$ , и тогда для всего перехода в целом общий спектральный контур  $F^2(\omega)$  примет также лоренцевскую форму, определяемую сверткой двух контуров:

$$F^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega') F_2(\omega - \omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi\tau_2} \frac{1}{(\omega - \omega_{ba})^2 + \left(\frac{1}{2\tau_2}\right)^2}, \quad (5.5)$$

где  $\frac{1}{\tau_\Sigma} = \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_b}$ , или  $\Delta\omega_\Sigma = \Delta\omega_a + \Delta\omega_b$  (если считать, что центральные частоты контуров совпадают).

### 5.4. Однородное и неоднородное уширение спектральных линий

Кроме естественного уширения линии, которое всегда имеет место из-за наличия спонтанного излучения, возможны и другие физические механизмы, приводящие к спектральному уширению в различных средах и физических системах. Так, например, в газовых средах имеет место

**доплеровское уширение линии**, вызванное вариацией частот взаимодействия с ЭМП одинаковых молекул газа из-за разброса тепловых скоростей в ансамбле частиц:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_x}{c} \right). \quad (5.6)$$

Здесь  $v_x$  – проекция скорости частицы на направление наблюдения (на направление волнового вектора потока фотонов при взаимодействии).

Известно, что в состоянии теплового равновесия распределение молекул газа по скоростям подчиняется распределению Максвелла:

$$f(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x. \quad (5.7)$$

С учетом связи скорости с частотой можно заменить распределение по скоростям на распределение по частотам:

$$f(v_x)dv_x = g_d(\omega)d\omega = \frac{c}{\omega_0} f\left(c \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) d\omega, \quad (5.8)$$

то есть осуществить в (5.5) замену  $v_x$  на  $\omega$  с учетом дифференциала. Таким образом, имеем

$$F_d(\omega) = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right), \quad (5.9)$$

т.е. доплеровский эффект приводит к размыванию частотного контура с общей формой в виде гауссовского профиля. Ширина доплеровского контура на половине максимального значения будет иметь величину

$$\Delta\omega_d = 2\sqrt{\ln 2} \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (5.10)$$

Выражение под знаком корня в (5.10) представляет собой тепловую скорость частицы. Для  $T = 300K$ ,  $\mu \sim 100$  г/моль (молярная масса молекул):  $V_T \approx 10^3 \frac{M}{c}$ , и величина доплеровского уширения для оптических частот составит  $\Delta\nu \sim 17\text{Гц}$  или  $\Delta\omega \approx 10^{-6}\omega_0$ . В радиочастотном диапазоне, например, для усилителя на аммиаке  $NH_3$ , резонансный переход на частоте  $\nu_0 \approx 248.70\text{МГц}$  составит  $\Delta\nu_d = 70\text{КГц}$ . Данные оценки показывают, что в подавляющем большинстве реальных газовых сред, участвующих во взаимодействии с электромагнитными полями, величина доплеровского уширения как минимум на один-два порядка превышает значение естественного уширения линий.

Еще один наблюдаемый эффект уширения спектральной линии газа связан со столкновениями молекул между собой в результате хаотического теплового движения. Если при этом в ансамбле присутствуют возбужденные атомы, то возбуждение снимается за счет столкновений в результате обмена энергией с окружающими частицами и полем. Характерное время между

столкновениями (столкновительное время жизни частицы в возбужденном состоянии) можно рассматривать как время релаксации системы за счет столкновений по аналогии со спонтанным временем жизни. Нетрудно установить, что данный временной интервал зависит от длины свободного пробега частицы и определяется таким образом комбинацией нескольких параметров: тепловой скорости, концентрации частиц газа и непосредственно размеров самой частицы. С учетом связи концентрации молекул газа с давлением газа, можно для оценок столкновительного времени использовать выражение вида:

$$\tau_{ct} \approx \sqrt{\frac{mKT}{\pi}} \cdot \frac{1}{p \cdot a_0^2}, \quad (5.11)$$

где  $a_0^2$  - размеры (сечение) частицы,  $p$  - давление газа.

По аналогии с процессом спонтанного излучения можно показать, что в результате столкновительных процессов возникает лоренцевский уширенный контур спектральной линии, а сама величина  $\tau_{ct}$  определяет ширину лоренцевой кривой  $\Delta\omega_{ct} \sim \frac{1}{\tau_{ct}}$ . Расчетные оценки данного типа

уширения показывают, что, например, для гелий-неонового лазера с характерным параметром  $p = 0.5 \text{ мм.рт.ст.}$ , величина уширения составит  $\Delta\nu_{ct} \approx 0.3 \text{ МГц}$ . С другой стороны, для газов при атмосферном давлении величина столкновительного уширения составит  $1 - 3 \text{ ГГц}$ , что сравнимо с аналогичным вкладом доплеровского уширения.

В твердотельных средах, в полупроводниках возможны другие варианты уширения линий – например, из-за пространственной неоднородности образцов, нарушений структуры кристаллов и т.п. В пучковых системах физическим параметром, разброс которого приводит к аналогичному уширению спектра, становится время пролета частицы в области взаимодействия с магнитным полем. При взаимодействии с электромагнитным резонансным полем в среде наблюдается дополнительно так называемое полевое уширение спектральной линии, в основе которого лежит нелинейный эффект насыщения перехода.

Таким образом, на практике приходится, как правило, анализировать совокупность разных механизмов, приводящих к уширению спектральной линии рассматриваемого перехода, а общий вид и ширина спектральной кривой определяется доминирующим механизмом уширения линии.

При этом все варианты физических проявлений уширения линий можно разбить на два класса. В первом случае все элементы ансамбля характеризуются одинаковыми значениями частоты перехода, а уширение напрямую связано с характерным временем жизни, определяемым тем или иным физическим механизмом взаимодействия. Такое уширение называется **однородным уширением** (естественное, столкновительное, полевое уширение и т.п.)

Другая разновидность уширенной линии может быть проиллюстрирована рассмотренным выше доплеровским механизмом, при котором разные элементы ансамбля характеризуются разбросом частот в пределах некоторого интервала, а результирующий спектральный контур является по существу статистической огибающей отдельных линий, характеризующих с учетом частотного сдвига отдельные частицы. Кроме доплеровского уширения примером такого явления можно считать пространственно-неоднородное уширение в твердых телах и другие варианты, когда наблюдаемое уширение не связано напрямую с релаксационными процессами. В целом этот тип уширения получил название **неоднородного уширения** и характеризуется (как это видно на примере доплеровского уширения) гауссовской формой спектральной линии.

Необходимо отметить, что такого рода классификация становится важной при рассмотрении процессов взаимодействия различных сред с электромагнитными полями, например, при анализе лазерных активных сред, где характер уширения линии однозначно определяет специфику спектрально-энергетических параметров излучателей.

## 6. Физические принципы создания квантовых стандартов частоты

### 6.1. Добротность спектральной линии квантового перехода в атоме

Можно считать, что поведение атомной системы с квантовым переходом на частоте  $\omega_{ba}$  эквивалентно осциллятору, характеризуемому параметром добротности линии на собственной частоте:  $Q = \frac{\omega_{ba}}{\Delta\omega_{ba}}$ . Создание метрологических систем с предельно узкой реперной частотной линией предполагает анализ условий, при которых будет наблюдаться минимальное размытие (широкение) линии эталонного перехода. Применимительно к газовым разреженным средам, в которых происходит не такое активное взаимодействие с термостатом и, как следствие этого, низкие значения ширения спектральной линии, можно исходя из (5.9) – (5.11) сформулировать требования к параметрам газового ансамбля, при выполнении которых устраняются все варианты ширения, кроме спонтанного излучения. Соответственно, в этом случае предельные значения добротности будут определяться выражениями (4.12) и (5.3) или их аналогами для магнито-дипольного перехода.

Таким образом, величина добротности спектральной линии, обусловленная только вкладом спонтанного излучения, принимает вид:

$$Q = \frac{3}{4} \frac{\hbar c^3}{d_{ba}^2 \omega_{ba}^2}. \quad (6.1)$$

Как уже отмечалось (см.(4.12)), коэффициент спонтанного излучения  $A_{\text{спонт}} \sim \omega^3$ , соответственно, ширение линии быстро растет с частотой, а следовательно наблюдается уменьшение добротности в оптическом диапазоне по сравнению с СВЧ-областью спектра. Кроме того, полученные в разделе 3 численные оценки вероятностей дипольных переходов показывают, что электродипольные переходы демонстрируют в целом значения, превышающие аналогичные вероятности магнитодипольных переходов на несколько порядков:  $P_{\text{дл}}/P_{\text{мин д}} \sim 10^4 \div 10^5$ . Таким образом, для обычно соответствующих оптическому диапазону длин волн электродипольным переходам добротность спектральной линии, обусловленной спонтанным излучением, составляет  $10^8 \div 10^9$ , что не позволяет рассматривать эти переходы в различных средах в качестве эталонных реперных линий. С другой стороны, оценки добротности линии для магнитодипольного перехода в СВЧ-области приводят к значениям  $10^{21} \div 10^{22}$ , что является по существу рекордным потенциальным значением при оценке добротностей различных спектральных линий. Это обстоятельство, в свою очередь, приводит к выводу о том, что для получения стабильного эталона, обеспечивающего прецизионную привязку частот в метрологических системах, требуется реализация реперов на основе магнитодипольных переходов между уровнями сверхтонкой структуры в атомах.

## **6.2. Принципы построения квантовых стандартов частоты (КСЧ)**

Поскольку в качестве идеального варианта при создании квантового стандарта рассматривается максимально стабильный магнитодипольный переход в СВЧ-диапазоне, традиционно в качестве рабочих сред в такого рода устройствах используются газы (атомные пары') щелочных металлов, т.е. водородоподобных атомов первого столбца таблицы Д.И.Менделеева. Наибольшее распространение получили следующие системы КСЧ:

### *1. Мазер на водороде.*

Данный тип КСЧ использует в качестве рабочей среды ансамбль атомов водорода, находящийся в системе экранирующих электромагнитных ловушек. В рабочей области дискриминатора за счет цилиндрически симметричного магнитного поля осуществляется сортировка пучка атомов водорода. Основным элементом схемы является таким образом водородный генератор с частотой перехода 1420,4 МГц ( $\lambda \sim 21$  см). Этот переход является так называемым 0 – 0 переходом в сверхтонкой структуре ( $F=1, M=0 \rightarrow F=0, M=0$ ). Добротность линии составляет  $Q \sim 10^9$ . Исходный реперный СВЧ-сигнал используется для прецизионной подстройки кварцевого генератора. Данный тип КСЧ относится к стационарным системам.

### *2. Квантовый стандарт частоты с частотным дискриминатором на основе ячейки с парами $Rb^{87}$ .*

В основе системы – ячейка поглощения  $Rb^{87+}$  с буферным газом. Переход осуществляется между компонентами сверхтонкой структуры основного состояния ( $F=2, M=0 \rightarrow F=1, M=0$ ) на частоте 6835 МГц ( $\lambda=4,4$  см). Регистрируемое значение добротности составляет  $Q \sim 4 \cdot 10^8$ .

### *3. Атомно-лучевая трубка (АЛТ) на парах $Cs^{133}$ .*

Пролетная система, включающая в себя источник атомов  $Cs^{133}$  и систему неоднородных магнитных полей. Работа КСЧ основана на магнитном резонансе, при котором в условиях близкого совпадения частоты СВЧ-поля и эталонной частоты ( $F=4, M=0 \rightarrow F=3, M=0$ ) атомной системы (9192 МГц,  $\lambda=3,5$  см) индуцируются переходы с изменением эффективного магнитного момента атома, причем вероятность такого перехода резко возрастает при полном совпадении частот. Добротность линии эталонного перехода  $Q \sim 10^8$  (что соответствует ширине линии 90 Гц). Данный переход ( $\approx 9192631770$  колебаний атома  $Cs^{133}$ ) принят в 1960-х годах в качестве международного эталона 1 секунды.

Принцип работы АЛТ на  $Cs^{133}$  основан на отклонении траекторий атомов, обладающих магнитным моментом, в неоднородном магнитном поле. В камере с металлическим цезием-133 при нагреве создается избыточное давление, и вылетающий из камеры пучок атомов при попадании в область неоднородного магнитного постоянного поля расщепляется по траекториям в

соответствии с величиной эффективного магнитного момента  $\vec{\mu}_{\text{эфф}}$ . Затем рабочая группа атомов попадает в центральную область, к которой приложено переменное СВЧ-поле, при взаимодействии с которым в атомах происходит изменение направления  $\vec{\mu}_{\text{эфф}}$  на противоположное. В соответствии с соотношением

$$\vec{F} = -\nabla U = -(\vec{\mu}_{\text{эфф}} \cdot \nabla \vec{H}) \quad (6.2)$$

при последующем попадании этих атомов в область неоднородного магнитного поля, аналогичную входному сегменту, происходит отклонение атомного пучка в обратном направлении и компенсируется влияние поля в первой части схемы. Таким образом, в системе неоднородных магнитных полей происходит пространственная селекция атомного пучка, при котором отфильтровываются все остальные состояния, кроме относящегося к рабочему эталонному переходу. В дальнейшем атомы попадают на вольфрамовый приемник, и происходит регистрация сигнала, причем ток детектора пропорционален числу атомов, изменивших, как указано выше, свой магнитный момент на противоположный, т.е. осуществивших взаимодействие с внешним резонансным СВЧ-полем. Если осуществлять плавную перестройку частоты ВЧ-поля в пределах зоны резонанса, зависимость тока приемника от частоты примет вид резонансной дискриминационной кривой линии поглощения атомов цезия. Центральная частота этой кривой может служить эффективным репером, привязка к которой за счет систем обратной связи позволяет реализовать стабилизацию частоты  $\delta\nu/\nu$  с точностью до  $10^{-13}$  в реальном масштабе времени.

## 7. Квантовое кинетическое уравнение. Кинетика заселенности энергетических уровней

### 7.1. Матрица плотности динамической подсистемы

Для описания сложных физических систем, в которых макроскопический ансамбль атомов вещества взаимодействует с внешним электромагнитным полем в присутствии термостата, необходимо перейти к математической модели, учитывающей многочисленные степени свободы и состояния элементов системы. В основе такого описания можно опираться на традиционный подход квантовой кинетики, в котором эволюция системы и ее элементов привязана к матрице плотности, а не к волновой функции, которая в открытых системах с бесконечным числом степеней свободы теряет смысл. В случае, когда о системе неизвестно, в каком из состояний она находится («смешанное состояние» системы), удобно построить вероятностную картину эволюции атома с привлечением матричной формы представления операторов и функций состояния (Гейзенберговская модель описания квантово-механической системы). Матрица плотности системы  $\hat{\rho} = (\rho_{mn})$  представляет собой формально бесконечную матрицу с элементами, попарно связывающими все варианты состояний рассматриваемой системы. Иными словами, элементы матрицы плотности можно найти из исходного разложения функции состояния по всевозможным базисам  $\Psi = \sum_k c_k(t) \cdot \psi_k^{(0)}(\vec{r})$ , выполнив операцию перемножения коэффициентов:

$$\rho_{mn} = c_m \cdot c_n^*. \quad (7.1)$$

Определив таким образом матрицу плотности суммарной системы, можно, используя ее вероятностный смысл, найти любые статистические характеристики физических величин – средние значения, моменты разных порядков, вероятности того, что реализуется конкретное значение и т.д. Так, например, среднее значение  $\bar{L}$  физической величины  $L$ , характеризующей систему, вычисляется с помощью матрицы плотности  $\hat{\rho} = (\rho_{mn})$  по формуле

$$\bar{L} = Sp\hat{\rho}\hat{L} = Sp\hat{L}\hat{\rho} = \sum_n \sum_m L_{nm} \rho_{mn}, \quad (7.2)$$

где  $L_{nm}$  – матричные элементы оператора  $\hat{L}$  данной физической величины, а  $Sp$  – «шпур», процедура суммирования диагональных матричных элементов.

Из общей матрицы плотности системы можно, проведя формальное суммирование по переменным, связанным с термостатом, перейти в описание к **матрице плотности динамической подсистемы**. После такого преобразования роль термостата в эволюции динамической подсистемы сводится к введению в рассмотрение усредненных **времен релаксации** как характеристик релаксационных процессов:

$$\hat{\sigma}_{\text{дин}} \equiv (\sigma_{mn}) = Sp_{\text{мерн}}(\rho_{mn}) = \sum_a \rho_{ma, na}, \quad (7.3)$$

где суммирование осуществляется по всем степеням свободы термостата. Таким образом, если пренебречь обратным влиянием динамической подсистемы на термостат, мы возвращаемся в описании к задаче о поведении системы во внешнем шумовом поле, и решение этой задачи позволяет рассчитывать эволюционные процессы с учетом релаксации и форму наблюдаемых спектральных линий.

При описании макрообъектов в статистической физике рассматривается ситуация, когда матрица плотности относится ко всему макроансамблю одинаковых частиц, и число возможных состояний и элементов данной матрицы бесконечно велико. В моделях квантовой электроники рабочие среды состоят из слабо взаимодействующих между собой атомов и молекул, поэтому достаточно оставить в модели состояния отдельного атома (внешнего электрона). При этом все остальные элементы ансамбля включаются в *диссилиативную часть системы (термостат)*, слабо возмущающую волновую функцию конкретного атома. Данный переход от бесконечного числа к нескольким степеням свободы кардинально упрощает математическую модель описания. Если дополнительно исключить из рассмотрения незаселенные уровни атома и нерезонансные состояния, т.е. перейти к рассмотренному ранее (см. раздел 2) двухуровневому переходу, можно получить в итоге матрицу плотности динамической подсистемы размером  $2 \times 2$ , то есть матрица  $\hat{\sigma}_{\text{дин}}$  будет состоять всего из 4-х элементов. Аддитивные макропараметры вещества будут теперь вычисляться простым умножением одноатомных средних величин на число элементов в ансамбле, например для поляризации получим  $\vec{P} = N \cdot \langle \vec{d} \rangle$  - суммирование по атомам эквивалентно усреднению по ансамблю.

## 7.2. Квантовое кинетическое уравнение. Времена релаксации

Динамика (эволюция) матрицы плотности подчиняется уравнению следующего вида (уравнение фон Неймана):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (7.4)$$

или в матричном виде:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = \sum_k (H_{mk} \rho_{kn} - \rho_{mk} H_{kn}). \quad (7.5)$$

Данное уравнение является аналогом уравнения Шредингера для изолированной квантовой системы и по форме соответствует классическому уравнению Лиувилля для распределения элементов в фазовом пространстве. По существу уравнение (7.5) с учетом определения (7.1) может быть выведено из уравнения Шредингера в представлении взаимодействия (2.3).

Входящий в уравнение (7.4) оператор энергии включает в себя как энергию атома (-ов) с учетом взаимодействия, так и энергию термостата:

$$\hat{H} = \hat{H}_{0,am} + \hat{H}_{mepm} + \hat{V}. \quad (7.6)$$

Для среды с двумя стационарными энергетическими уровнями операторы  $\hat{H}_{0,am}$  и  $\hat{V}$  могут быть записаны в матричной форме как  $\hat{H}_{0,am} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$  и

$\hat{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ . Соответственно, матрица плотности для динамической

подсистемы двухуровневого атома имеет форму  $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ . При этом

диагональные элементы матрицы  $\hat{\sigma}$  характеризуют вероятности нахождения квантовой частицы в состояниях 1 и 2, а недиагональные элементы – вероятности переходов между этими состояниями. Наконец, если взаимодействие носит электродипольный характер, то с учетом  $d_{11} = d_{22} = 0$  оператор  $\hat{V}$  принимает вид  $\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{d}_{12} \cdot \vec{E} \\ -\vec{d}_{21} \cdot \vec{E} & 0 \end{pmatrix}$ .

Переходя в результате процедуры усреднения (7.3) по переменным термостата к **динамическому уравнению для матрицы плотности подсистемы**  $\hat{\sigma}_{dyn}$ , получим следующий общий вид уравнения:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial t} = Sp_{mepm} \left( [\hat{H}_{0,am}, \hat{\rho}] \right) + Sp_{mepm} \left( [\hat{H}_{mepm}, \hat{\rho}] \right) + Sp_{mepm} \left( [\hat{V}, \hat{\rho}] \right) = \\ [\hat{H}_{0,am}, \hat{\sigma}] + Sp_{mepm} \left( [\hat{H}_{mepm} + \hat{V}, \hat{\rho}] \right) \quad (7.7)$$

Полученное уравнение называется **квантовым кинетическим уравнением** и описывает эволюционное поведение **открытых квантовых систем**, т.е. с учетом влияния термостата. Первое слагаемое отвечает за собственную динамику изолированного атома, а второе – результат взаимодействия с внешними полями и термостатом.

Если не учитывать воздействие термостата и считать внешнее резонансное поле равным нулю, то уравнение динамики изолированной системы приводит к решению вида

$$\sigma_{mn}(t) = \sigma_{mn}(0) \cdot e^{-i\omega_{mn}t}, \quad (7.8)$$

то есть по сути решение совпадает с решением квантовомеханической задачи на основе уравнения Шредингера (осцилляции на частоте перехода). Однако такой идеальный вариант не применим к реальным системам, которые всегда в той или иной степени взаимодействуют с окружением (с термостатом). В модели, учитывающей влияние диссипативной подсистемы, квантовое кинетическое уравнение принимает форму:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{nm}}{\partial t} + i\omega_{nm}\sigma_{nm} = -\gamma_{nm}\sigma_{nm} \Leftrightarrow n \neq m \\ \frac{\partial \sigma_{mm}}{\partial t} = \sum_n (W_{n \rightarrow m} \cdot \sigma_{nn} - W_{m \rightarrow n} \cdot \sigma_{mm}) \Leftrightarrow n = m \end{cases} \quad (7.9)$$

Здесь  $\sigma_{nm}$  - матричный элемент матрицы плотности подсистемы, и система уравнений дает два варианта решений - для диагональных и для недиагональных элементов матрицы  $\hat{\sigma}_{\text{дис}}$ . Для двухуровневого атома во втором уравнении остается только два слагаемых в правой части уравнения, при большем размере матрицы требуется суммирование по другим возможным состояниям.

Недиагональные элементы матрицы  $\hat{\sigma}$  изменяются по закону

$$\sigma_{mn}(t) = \sigma_{mn}(0) \cdot e^{-i\omega_{mn}t} \cdot e^{-\gamma_{mn}t}. \quad (7.10)$$

Декремент затухания для двухуровневой модели атома определяется значением характерного времени релаксации:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{T_2} \quad (7.11)$$

Это время называется **поперечным временем** релаксации. Именно поперечное время релаксации определяет величину уширения в однородно уширенных спектральных контурах линий

$$\Delta\omega_{\text{одн}} \approx \frac{2}{T_2} \quad (7.12)$$

Для диагональных элементов матрицы плотности аналогичный релаксационный процесс характеризуется другим временем - **продольным временем релаксации**  $T_1$ :

$$T_1 \approx \frac{1}{W_{2 \rightarrow 1}} \quad (7.13)$$

Здесь учтено, что диссипативная подсистема находится в состоянии термодинамического равновесия, и связь релаксационных вероятностей для «прямого» и «обратного» переходов  $m \leftrightarrow n$  определяется соотношением

$$\frac{W_{n \rightarrow m}}{W_{m \rightarrow n}} = \frac{\sigma_{mm}^{(0)}}{\sigma_{nn}^{(0)}} = e^{-\frac{E_m - E_n}{KT}} = e^{-\frac{\hbar\omega_{mn}}{KT}} \quad (7.14)$$

где  $\sigma_{mm}^{(0)}$  и  $\sigma_{nn}^{(0)}$  - равновесные значения диагональных элементов матрицы плотности динамической подсистемы (равновесные заселенности уровней в подсистеме), а  $T$  - температура термостата. Исходя из (7.14), легко видеть, что для оптических частот  $\omega_{mn}$  вклад в результирующее значение  $T_1$  вносит только одна из вероятностей  $W_{mn}$ , влиянием второго слагаемого можно пренебречь.

Таким образом, в двухуровневой подсистеме (двууровневая идеализация) процессы релаксации, обусловленные взаимодействием с термостатом, могут быть описаны с помощью продольного  $T_1$  и поперечного  $T_2$  времен релаксации.

Рассмотрим теперь случай **взаимодействия атома с резонансным электрическим полем в присутствии термостата**. Система уравнений для матрицы плотности двухуровневой подсистемы, взаимодействующей с классическим электромагнитным полем (электродипольное взаимодействие):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{11} = \frac{i}{\hbar} \vec{d}_{12} \vec{E}(\vec{r}, t) (\sigma_{21} - \sigma_{12}) - \frac{1}{T_1} (\sigma_{11} - \sigma_{11}^{(0)}) \\ \dot{\sigma}_{22} = -\frac{i}{\hbar} \vec{d}_{12} \vec{E}(t) (\sigma_{21} - \sigma_{12}) - \frac{1}{T_1} (\sigma_{22} - \sigma_{22}^{(0)}) \\ \dot{\sigma}_{21} = -i\omega_{21} \sigma_{21} - \frac{i}{\hbar} \vec{d}_{12} \vec{E}(t) (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{1}{T_2} (\sigma_{21} - \sigma_{21}^{(0)}) \\ \dot{\sigma}_{12} = i\omega_{21} \sigma_{12} + \frac{i}{\hbar} \vec{d}_{12} \vec{E}(t) (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{1}{T_2} (\sigma_{12} - \sigma_{12}^{(0)}) \end{array} \right. . \quad (7.15)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  - напряженность внешнего резонансного по отношению к переходу в атоме электрического поля,  $d_{12} = d_{21}$  - матричный элемент дипольного момента (с учетом  $d_{11}=d_{22}=0$ ),  $\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$  - боровская частота перехода подсистемы. Решение

данной системы уравнений дает полную эволюцию динамической подсистемы для перехода под воздействием резонансного внешнего поля в присутствии релаксационных процессов, обусловленных термостатом. Для анализа макроскопических характеристик ансамбля атомов, каждый из которых имеет одинаковые свойства и решения (7.15), необходимо учесть мультиплективный эффект переходом к классическим усредненным динамическим характеристикам. Для этого можно определить две новые переменные в описании системы - разность населенностей и поляризацию среды. Разность населенностей энергетических уровней  $\Delta N$  для двухуровневой модели определяется выражением

$$\Delta N = n_0 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) = N_2 - N_1, \quad (7.16)$$

в котором через  $n_0$  введена концентрация двухуровневых атомов в ансамбле.

Равновесная разность населенностей  $\Delta N^{(0)}$  (которая устанавливается в подсистеме в отсутствии внешних полей) определяется равновесными значениями диагональных матричных элементов  $\sigma_{nn}^{(0)}$ :

$$\Delta N^{(0)} = n_0 (\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)}) = N_2^{(0)} - N_1^{(0)} \quad (7.17)$$

Вторая динамическая характеристика, которую можно определить в рамках рассматриваемой модели – макроскопическая *поляризация среды* с учетом определения поляризации

$$\vec{P} = n_0 \cdot \langle \vec{d} \rangle = n_0 \cdot Sp\left(\hat{\sigma} \hat{\vec{d}}\right) = n_0 \cdot \vec{d}_{12} \cdot (\sigma_{12} + \sigma_{21}). \quad (7.18)$$

Таким образом, введенная в условиях двухуровневой идеализации матрица плотности  $\hat{\sigma}$  позволяет перейти к описанию взаимодействия ансамбля атомов с резонансным полем на языке макроскопических характеристик – разности населенностей уровней и поляризации.

### 7.3. Динамические уравнения для двухуровневой среды, взаимодействующей с классическим резонансным полем

Введенные соотношениями (7.16) и (7.18) новые переменные позволяют преобразовать систему уравнений (7.15) к полуklassической форме. Для этого можно сгруппировать попарно уравнения для диагональных и недиагональных элементов матрицы  $\hat{\sigma}$  и выполнить ряд последовательных преобразований. В итоге получим уравнения для электродипольной среды, взаимодействующей с внешним резонансным полем в следующем виде:

$$\ddot{\vec{P}} + \frac{2}{T_2} \dot{\vec{P}} + (\omega_{21}^2 + \frac{1}{T_2^2}) \vec{P} = - \frac{2\vec{d}_{12}\omega_{21}}{\hbar} (\vec{d}_{12}\vec{E}) \cdot \Delta N; \quad (7.19)$$

$$\Delta \dot{N} + \frac{1}{T_1} (\Delta N - \Delta N^{(0)}) = \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \left[ \dot{\vec{P}} + \frac{1}{T_2} \vec{P} \right] \vec{E}; \quad (7.20)$$

Данная система дифференциальных уравнений может рассматриваться как самосогласованная, достаточно добавить к ней уравнение, определяющее еще одну динамическую характеристику –  $\vec{E}(t)$ . В качестве такого уравнения может быть использовано, например, уравнение, определяющее структуру поля в лазерном резонаторе. При таком дополнении рассматриваемая система уравнений становится пригодной для описания лазерного источника излучения. Таким образом, уравнения (7.19) и (7.20) имеют универсальный характер и могут служить основой модели описания различных систем, взаимодействующих с внешними полями, например, при анализе процессов в активной среде генераторов, усилителей, преобразователей и других приборов квантовой электроники.

Представляет интерес проведение сравнения приведенной модели описания электродипольного взаимодействия с магнитным аналогом. В качестве наглядного варианта модели магнитодипольной среды можно рассмотреть явление электронного парамагнитного резонанса, представляющего собой резонансное взаимодействие спиновой системы с переменным СВЧ-магнитным полем. В соответствии с теоретической моделью при таком взаимодействии происходит поглощение парамагнетиком

энергии внешнего поля в рамках двухуровневой модели на переходе между зеemanовскими полуровнями сверхтонкой структуры спектра.

Известно, что оператор спина  $\hat{S}$  для микрочастиц со спином  $\frac{1}{2}$ :  $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$  определяется матрицами Паули  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_x \vec{i}^0 + \hat{\sigma}_y \vec{j}^0 + \hat{\sigma}_z \vec{k}^0$ , где  $\vec{i}^0, \vec{j}^0$  и  $\vec{k}^0$  - орты в направлении осей декартовой системы, а сами матрицы Паули выглядят следующим образом:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Магнитный момент можно записать как  $\hat{\mu}_s = -g_s \mu_B \frac{\hat{S}}{\hbar}$ , где  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$  - магнетон Бора,  $m_e$  - масса электрона,  $g_s \approx 2.0023$  - спиновый фактор Ланде ( $g$ -фактор).

Уравнение прецессии спинового момента при наложении магнитного поля, таким образом, может быть представлено как эволюция вектора  $\hat{\sigma}$ , определяемого с учетом направлений состоящими из четырех элементов матрицами Паули:

$$i\hbar \dot{\hat{\sigma}} = -2i\mu_B [\hat{\sigma} \times \vec{H}] \quad (7.22)$$

или для каждой проекции матрицы  $\hat{\sigma}$  - уравнения вида

$$i\hbar \dot{\hat{\sigma}}_z = 2i\mu_B (H_z \sigma_z - H_z \sigma_y). \quad (7.23)$$

Это уравнение совпадает по виду с классическим уравнением прецессии орбитального момента, но отличается спиновым дискретным набором элементов, составляющих матрицу  $\hat{\sigma}$ . Макроскопическим параметром, соответствующим суммарному магнитному моменту ансамбля спиновых частиц, является намагниченность среды (средний магнитный момент единицы объема среды)  $\bar{M}$ . Расчет данного параметра аналогичен алгоритму расчета поляризации  $\bar{P}$  и представляет собой процедуру усреднения с учетом элементов матрицы  $\hat{\sigma}$ :

$$\bar{M} = Sp(n_0 \hat{\mu} \hat{\sigma}) \quad (7.24)$$

Здесь  $\hat{\sigma}$  - матрица плотности частицы,  $n_0$  - концентрация микрочастиц в среде, а  $\hat{\mu}$  - оператор ее магнитного момента. В пространстве, как и любой классический вектор, намагниченность можно определить как

$$\bar{M} = \vec{i}^0 M_x + \vec{j}^0 M_y + \vec{k}^0 M_z. \quad (7.25)$$

Где, исходя из (7.18), получим для проекций:

$$M_x = -\mu_B n_0 (\sigma_{21} + \sigma_{12}),$$

$$\begin{aligned} M_y &= \mu_B n_0 (\sigma_{21} - \sigma_{12}), \\ M_z &= \mu_B n_0 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Если теперь рассмотреть дополнительные присутствующие в системе релаксационные процессы, как это ранее было сделано для электродипольных сред (см (7.11) и (7.14)), то динамическая система уравнений для спиновой среды парамагнетика, взаимодействующего с резонансным СВЧ-полем, может быть отражена уравнениями Блоха следующего вида:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma [\vec{M} \times \vec{H}] - (M_x \cdot \vec{i}^0 + M_y \cdot \vec{j}^0) \cdot \frac{1}{T_2} + (M_z - M_z^{(0)}) \cdot \frac{\vec{k}^0}{T_1} \quad (7.27)$$

Здесь  $\gamma$  - гиromагнитное отношение,  $T_1$  и  $T_2$  - продольное и поперечное времена релаксации, которые для магнитной системы соответствуют спин-решеточной и спин-спиновой релаксации, соответственно; магнитное поле  $\vec{H}$  представляет собой сумму постоянного поля  $\vec{H}_0$ , направленного по оси  $OZ$ , и резонансного СВЧ-поля  $\vec{H}_{СВЧ}$  с поляризацией в плоскости  $XY$ , а статическая намагниченность

$$M_0 = M_z^{(0)} = \mu_B n_0 (\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)}) \quad (7.28)$$

определяется равновесными условиями в системе.

Уравнения (7.27) были феноменологически получены У.Блохом (1946г.), однако, как это следует из вышеизложенного, их строгий вывод может быть осуществлен в рамках квантовой кинетической модели на основе динамической матрицы  $\hat{\vec{\sigma}}$ . Отметим также, что в опытах по наблюдению магнитного резонанса поля  $\vec{H}_0$  и  $\vec{H}_{СВЧ}$  перпендикулярны друг другу, и ось  $OZ$  привязана к направлению постоянного поля  $\vec{H}_0$  (продольное направление). Отсюда и возникло смысловое значение терминов «продольное» и «поперечное» времена релаксации. Они являются характерными временами для релаксации соответственно продольной  $M_z$  и поперечных ( $M_x, M_y$ ) компонент вектора намагниченности среды  $\vec{M}$ . Повидимому, исторически из-за соответствия динамики релаксации магнитных и электрических характеристик двухуровневой среды название этих терминов сохранилось и для случая электродипольных сред, хотя здесь они и теряют свою наглядность (смысловое значение).

Таким образом, уравнения Блоха представляют собой магнитный аналог уравнения (7.19), т.е. уравнения для матрицы плотности двухуровневой системы (см.рисунок 7.1).

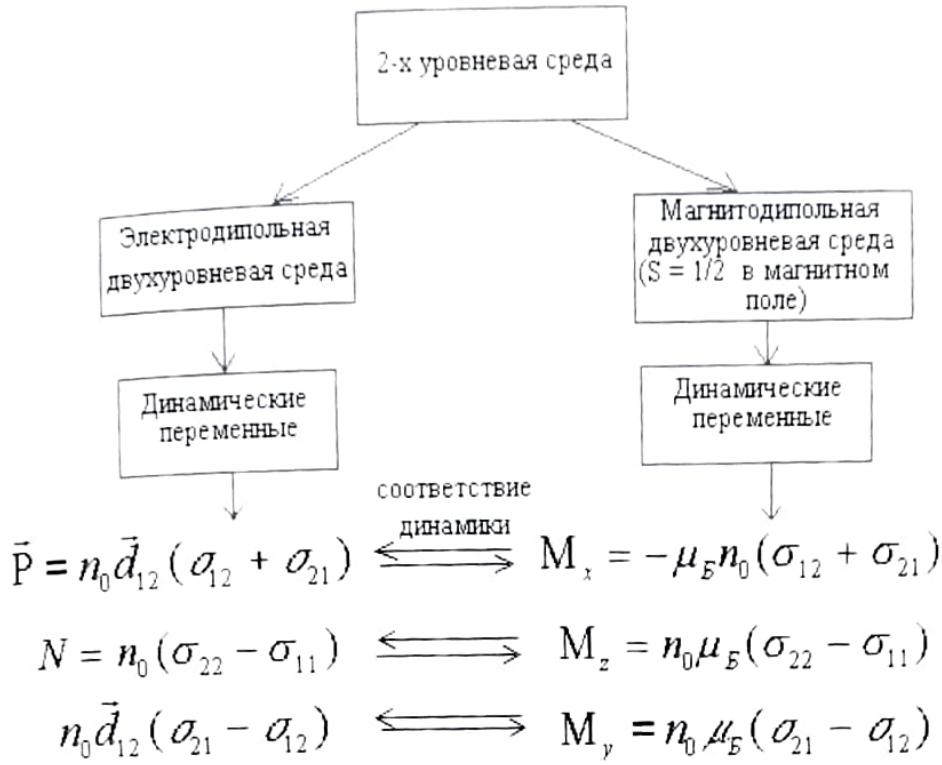


Рисунок 7.1

Если дополнить (7.19) и (7.20) соответствующими равновесными (из распределения Больцмана) соотношениями для заселенности уровней по аналогии с (7.17), то можно получить полную математическую модель описания магнитной среды, взаимодействующей с резонансным полем в присутствии термостата.

Поляризация  $\bar{P}$  и разность населенностей  $N$  двухуровневой электродипольной среды имеют сходную динамику с поведением намагниченности двухуровневой магнитодипольной среды (спин 1/2 в магнитном поле) при взаимодействии с резонансными полями, поскольку соответствующие им процессы описываются одним и тем же уравнением (уравнение для матрицы плотности двухуровневой среды).

#### 7.4. Кинетическая модель для населенностей энергетических уровней

При выводе соотношений (7.16) – (7.18) и результирующих уравнений (7.19) - (7.20) была использована двухуровневая модель среды с двумя энергетическими уровнями, определяющими переход. Как будет далее показано, в ряде важных задач, в том числе – при описании оптических квантовых генераторов (лазеров), приближения двухуровневой модели оказывается недостаточно для объяснения присутствующих явлений. Так, например, методика создания неравновесной инверсной разности населенностей в активных средах требует введения в рассмотрение по

крайней мере еще одного вспомогательного уровня (энергетической зоны). Иными словами, для объяснения работы систем квантовой электроники требуется рассмотрение кинетических уравнений (уравнений баланса), описывающих динамику заполнения всех участвующих в энергетическом балансе уровней. При этом по-прежнему резонансным в такой модели остается только один переход, связывающий основные два уровня.

Будем считать известными вероятности переходов между всеми входящими в модель уровнями  $P_{n \rightarrow m}$ . Тогда для каждого конкретного уровня  $m$  изменение его заселенности в единицах концентрации определяется уравнением следующего вида

$$\frac{dN_m}{dt} = \sum_{n \neq m} N_n P_{n \rightarrow m} - N_m \sum_{n \neq m} P_{m \rightarrow n} \quad (7.29)$$

Здесь суммирование происходит по всем энергетическим уровням, влияющим на заселенность выбранного состояния. В общем случае вклад в вероятности переходов могут давать три типа процессов: спонтанное излучение, индуцированные переходы и нерезонансные процессы, для оптических моделей, как правило, имеющие безызлучательный характер. Таким образом, можно ввести в описание известные коэффициенты Эйнштейна  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  и вероятность безызлучательного релаксационного процесса  $W_{nm}$ .

Между коэффициентами Эйнштейна существует связь вида

$$A_{nm} = B_{nm} \frac{\hbar w^3}{\pi^2 c^3} \quad (7.30)$$

и в соответствии с (4.12)

$$B_{nm}(w) = \frac{4\pi^2 |V_{nm}|^2}{\hbar^2} \quad (7.31)$$

Если привести эйнштейновские коэффициенты к размерности вероятности ( $1/c$ ) в (7.29), то для индуцированных процессов излучения и поглощения вероятность можно представить в виде:

$$P_{mn}(w) = B_{mn}(w) \frac{I(w)}{c} F(w) \quad (7.32)$$

и таким образом в системе уравнений (7.29)

$$P_{m \rightarrow n} = A_{nm} + B_{nm} \rho_{nm} + W_{nm} \quad , \quad (7.33)$$

где  $\rho_{nm} = \frac{I_{nm}(w)}{c} F(w)$  - представляет собой плотность энергии резонансного электромагнитного поля. В последнем слагаемом (7.33) представлена суммарная вероятность всех релаксационных нерезонансных по отношению к переходу  $m \rightarrow n$  процессов. Что касается второго слагаемого, то его можно рассматривать в зависимости от особенностей спектрального распределения для поля и вещества или как  $\rho_{mn}(\omega) \cdot B_{nm}$  для случая, когда ширина перехода в

веществе намного меньше ширины спектра внешнего поля, или как  $b_{mn}(\omega_{\text{лаз}})/\rho_{\text{лаз}}$ , где  $b_{mn}(\omega)$  – дифференциальный коэффициент Эйнштейна в случае возбуждения широкой линии вещества узкополосным лазерным излучением.

Записанная в форме (7.29) система  $z$  кинетических уравнений будет содержать  $z - 1$  независимое соотношение, что не позволяет разрешить эту систему с нахождением всех  $N_m$ . Недостающее для полноты системы соотношение может быть взято из очевидного условия, отражающего тот факт, что общее число (концентрация) атомов при любых переходах остается постоянным:

$$\sum_{m=1}^z N_m = N_0 = \text{const}. \quad (7.34)$$

С учетом того, что в кинетических уравнениях (7.29) учтены релаксационные процессы, вызванные взаимодействием с термостатом, за период, определяемый временами релаксации, система должна перейти в состояние равновесия  $\frac{dN_m}{dt} = 0$ , и (7.29) превращается в систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n \neq m}^z N_n P_{nm} - N_m \sum_{n \neq m}^z P_{mn} = 0. \quad (7.35)$$

Решая ее, можно получить распределение носителей по энергетическим уровням в ансамбле частиц как для термодинамически равновесных состояний, так и, например, в условиях стационарной накачки лазерных активных сред.

## 8. Взаимодействие двухуровневой электродипольной среды с резонансным внешним полем

### 8.1. Эффективное сечение взаимодействия

Полученные в предыдущем разделе соотношения (7.19) и (7.20) позволяют связать квантовые свойства отдельной частицы с усредненными характеристиками макроскопического вещества в целом. При этом в качестве внешнего поля используется квазиклассический вариант представления электромагнитных полей через напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Соответствующие выражения для вероятности квантовых переходов под воздействием полей могут содержать в качестве характеристик поля мощность, интенсивность или спектральную яркость моды поля – в зависимости от условий выбранной модели. В частности, можно преобразовать выражения для вероятности электродипольного перехода (4.5) и (4.8), введя вместо чисел фотонов в моде их макроскопические аналоги – спектральную яркость источника света  $J(w, \Omega)$  с размерностью  $Bm/(m^2\Gamma\text{ ster})$  или интенсивность – после интегрирования по телесным углам. Тогда вероятность электродипольного излучения примет вид:

$$P_{b \rightarrow a} = \frac{4\pi^2 g_a}{\hbar^2 c} F(w) |\vec{e}_\lambda \vec{d}_{ab}|^2 J(w, \Omega) + \frac{w^3 g_a}{2\pi\hbar c^3} |\vec{e}_\lambda \vec{d}_{ab}|^2 F(w), \quad (8.1)$$

а для поглощения на том же переходе получим:

$$P_{a \rightarrow b} = \frac{4\pi^2 g_b}{\hbar^2 c} F(w) |\vec{e}_\lambda \vec{d}_{ba}|^2 J(w, \Omega) \quad (8.2)$$

Приведенные соотношения позволяют ввести еще одну важную для оценки взаимодействия характеристику, часто используемую в оптике и аналитической спектроскопии, а именно, – **сечение излучения или поглощения** (эффективное сечение атома). По определению сечение излучения выражается как

$$\sigma_{int} \equiv \frac{P_{2 \rightarrow 1}}{J(w, \Omega)}, \text{ а сечение поглощения } \sigma_{погл} \equiv \frac{P_{1 \rightarrow 2}}{\hbar\omega}. \quad (8.3)$$

Иными словами, сечение фотопоглощения (излучения) – величина, численно равная отношению вероятности поглощения фотона к потоку падающих на атомную систему фотонов в единичном интервале частот и телесных углов. Преимущество данной характеристики при описании взаимодействия состоит в том, что в соответствии с (8.1) – (8.2) она не зависит от параметров падающего поля и определяется только способностью к взаимодействию с учетом угловых распределений. Размерность этой величины –  $\text{cm}^2$ , что и нашло отражение в названии характеристики.

$$\sigma_{int(погл)} = \frac{4\pi^2 g_{a(b)} F(w) w_{ab}}{\hbar c} |\vec{e}_\lambda \vec{d}_{ba}|^2 \quad (8.4)$$

крайней мере еще одного вспомогательного уровня (энергетической зоны). Иными словами, для объяснения работы систем квантовой электроники требуется рассмотрение кинетических уравнений (уравнений баланса), описывающих динамику заполнения всех участвующих в энергетическом балансе уровней. При этом по-прежнему резонансным в такой модели остается только один переход, связывающий основные два уровня.

Будем считать известными вероятности переходов между всеми входящими в модель уровнями  $P_{n \rightarrow m}$ . Тогда для каждого конкретного уровня  $m$  изменение его заселенности в единицах концентрации определяется уравнением следующего вида

$$\frac{dN_m}{dt} = \sum_{n \neq m} N_n P_{n \rightarrow m} - N_m \sum_{n \neq m} P_{m \rightarrow n} \quad (7.29)$$

Здесь суммирование происходит по всем энергетическим уровням, влияющим на заселенность выбранного состояния. В общем случае вклад в вероятности переходов могут давать три типа процессов: спонтанное излучение, индуцированные переходы и нерезонансные процессы, для оптических моделей, как правило, имеющие безызлучательный характер. Таким образом, можно ввести в описание известные коэффициенты Эйнштейна  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  и вероятность безызлучательного релаксационного процесса  $W_{nm}$ .

Между коэффициентами Эйнштейна существует связь вида

$$A_{nm} = B_{nm} \frac{\hbar w^3}{\pi^2 c^3} \quad (7.30)$$

и в соответствии с (4.12)

$$B_{nm}(w) = \frac{4\pi^2 |V_{nm}|^2}{\hbar^2} \quad (7.31)$$

Если привести эйнштейновские коэффициенты к размерности вероятности ( $1/c$ ) в (7.29), то для индуцированных процессов излучения и поглощения вероятность можно представить в виде:

$$P_{mn}(w) = B_{mn}(w) \frac{I(w)}{c} F(w) \quad (7.32)$$

и таким образом в системе уравнений (7.29)

$$P_{m \rightarrow n} = A_{nm} + B_{nm} \rho_{nm} + W_{nm} \quad , \quad (7.33)$$

где  $\rho_{nm} = \frac{I_{nm}(w)}{c} F(w)$  - представляет собой плотность энергии резонансного электромагнитного поля. В последнем слагаемом (7.33) представлена суммарная вероятность всех релаксационных нерезонансных по отношению к переходу  $m \rightarrow n$  процессов. Что касается второго слагаемого, то его можно рассматривать в зависимости от особенностей спектрального распределения для поля и вещества или как  $\rho_{mn}(\omega) \cdot B_{nm}$  для случая, когда ширина перехода в

учетом определения сечения (8.3) можно получить дифференциальное уравнение переноса излучения:

$$\frac{dI}{dz} = N_2 \sigma_{HII} I(z) - N_1 \sigma_{HOG} I(z) \quad (8.7)$$

Отметим, что  $\sigma_{HII}$  совпадает с  $\sigma_{HOG}$  с точностью до кратности вырождения уровней конечного состояния при переходе (см.(8.4)) и если считать  $g_1 = g_2$  то решение для уравнения переноса излучения запишется в виде

$$I(z) = I_0 \exp[z(N_2 \sigma_{HII} - N_1 \sigma_{HOG})] \quad (8.8)$$

где  $I_0$  - интенсивность на входе среды. Данная зависимость называется **законом Бугера-Ламберта-Бэра** (коротко – **закон Бугера**) и представляет собой экспоненциальный рост или затухание интенсивности волны в зависимости от знака показателя экспоненты.

Полученное решение позволяет ввести в рассмотрение новую характеристику – коэффициент усиления (поглощения) двухуровневой среды:

$$k(w) = \frac{I(L)}{I(0)} - \text{безразмерный коэффициент усиления (поглощения);} \quad (8.9)$$

$$g(w) = \frac{1}{I} \frac{dI}{dz} - \text{линейный коэффициент усиления (поглощения)} \quad (8.10)$$

С учетом возможных отличий в кратности вырождения верхнего и нижнего состояний в общем виде коэффициент усиления (gain) среды имеет вид :

$$g(w) = \sigma_{HII}(w) \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right), \quad (8.11)$$

Для обозначения коэффициента поглощения в среде - как отрицательного усиления – будем в дальнейшем использовать обозначение  $a(\omega)$ , тогда для модели прохождения резонансной волны через двухуровневую среду всегда согласно закону Бугера имеется один из двух вариантов:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \text{ или } I(z) = I_0 e^{gz}. \quad (8.12)$$

Напомним, что в рамках квантовой статистики для частиц с полуцелым спином (электроны) справедливо равновесное распределение Ферми-Дирака

$$f_1 = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{KT}\right) + 1}, \text{ а для частиц с целым спином (фотоны) имеет место}$$

равновесное распределение Бозе-Эйнштейна  $f_1 = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{KT}\right) - 1}$ , где  $E_F$  –

химический потенциал. Наконец, для невырожденного ансамбля частиц выполняется распределение Больцмана. В любом из этих распределений имеет место уменьшение числа возможных состояний (числа электронов по уровням) с ростом энергии в состоянии равновесия. Исходя из (8.11) это

означает, что в термодинамически равновесной среде всегда  $g < 0$ , или  $\alpha(\omega)$   $\sim 0$  т.е. **равновесная среда в условиях резонансного взаимодействия с внешним полем всегда поглощает**. Чтобы среда излучала (усиливала световую волну), знак  $\Delta N = N_2 - N_1$  должен быть положительным. Такое состояние среды называется инвертированным (или говорят, что имеется **инверсия населенностей на рабочем переходе**). Как будет показано далее, для реализации такого состояния требуется энергетическая накачка вспомогательных уровней, способная привести к нарушению термодинамического равновесия в системе.

### 8.3. Кинетическая модель для населенностей уровней (двухуровневая система)

Рассмотрим кинетическую модель заселенностей уровней для двухуровневой среды (т.е.  $z = 2$  в соотношениях (7.29) и (7.35)). В этом случае частный вид системы уравнений (7.29) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dt} = (A_{21} + \rho_{21}B_{21})N_2 - \rho_{12}B_{12}N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = \rho_{12}B_{12}N_1 - (A_{21} + \rho_{21}B_{21})N_2 \\ N_1 + N_2 = N_0 \end{array} \right\} \quad (8.13)$$

Начальные условия  $N_1(0), N_2(0)$

могут быть заданы любыми.

Кроме того, будем исходить из положения о том, что встречные индуцированные переходы по вероятности совпадают (см.рисунок 8.2), т.е.  $B_{21} = B_{12}$ ,  $\rho_{21} = \rho_{12}$ , тогда, переходя к стационарным характеристикам (производные в левой части равны нулю), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2 = \frac{\rho_{12}B_{12}}{A_{21} + 2\rho_{12}B_{12}}N_0 \\ N_1 = \frac{A_{21} + \rho_{12}B_{12}}{A_{21} + 2\rho_{12}B_{12}}N_0 \end{array} \right\} \quad (8.14)$$

Если ввести аналогично (7.17)  $\Delta N = N_2 - N_1$ , то решение для стационарного случая принимает вид:

$$\Delta N = -\frac{N_0}{1 + \rho_{12}B_{12}\tau_{sp}}, \text{ где } \tau_{sp} = \frac{1}{A_{sp}} \quad (8.15)$$

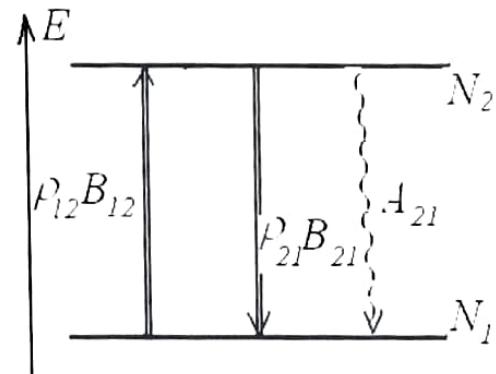


Рисунок 8.2

т.е. всегда выполняется условие  $\Delta N < 0$  независимо от интенсивности внешнего поля и начальных параметров системы. Таким образом, при взаимодействии с внешним резонансным полем двухуровневая среда всегда остается поглощающей, а следовательно, прямой оптической накачкой инвертировать среду и получить усиление в такой модели нельзя.

Необходимо отметить, что несмотря на полученные для стационарного случая соотношения (8.14), условие инверсии в двухуровневой модели в принципе достигается в условиях нестационарного режима, т.е. например, под действием очень мощного и короткого светового импульса. В пределах короткого промежутка времени, пока в среде еще не осуществлены переходные процессы, чисто математически возможно достижение условия  $\Delta N > 0$ . В принципе этот интервал можно использовать для усиления в среде, но создание устройств, использующих эту особенность взаимодействия среды с полем, представляется весьма проблематичным. Другое обстоятельство заключается в том, что для двухуровневой среды возможен принципиально иной способ достижения инверсии – это пространственная селекция возбужденных атомов. Такой метод не применим в оптических системах, но является весьма эффективным для пучковых СВЧ-систем. Именно такой способ был положен в основу первого созданного квантового генератора – мазера на пучке атомов  $NH_3$ .

#### 8.4. Спектральные особенности взаимодействия среды с ЭМП

Учесть спектральные особенности взаимодействия двухуровневой среды с внешним электромагнитным полем можно, используя ранее полученную систему динамических уравнений (7.15) и (7.16). Если решить данную систему уравнений, задав гармоническое внешнее поле в виде

$$\vec{E} = \operatorname{Re}(\vec{E}_0 e^{i\omega t}) = \vec{E}_0 \cos \omega t, \quad (8.16)$$

можно найти поляризацию  $\vec{P}$  и разность населенностей на рабочем переходе  $\Delta N$  как отклик среды на это поле. В результате получим решения в виде

$$\Delta N_{CTAII} = -N_0 \frac{(\omega_{21} - \omega)^2 + T_2^{-2}}{(\omega_{21} - \omega)^2 + T_2^{-2} + \left( \frac{\bar{d}_{21} \vec{E}}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}} \quad (8.17)$$

$$\vec{P}_{CTAII} = \frac{\bar{d}_{21} (\bar{d}_{21} \vec{E}) N_0 \left[ (\omega_{21} - \omega) \cos \omega t + i \frac{1}{T_2} \sin \omega t \right]}{\hbar \left[ (\omega_{21} - \omega)^2 + T_2^{-2} + \left( \frac{\bar{d}_{21} \vec{E}}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2} \right]} \quad (8.18)$$

т.е. в поляризации есть компонента, совпадающая по фазе с внешним полем, и есть компонента, отличающаяся на  $\frac{\pi}{2}$ . Оба приведенных выражения имеют в знаменателе характерный параметр  $\frac{|d_{21} E|}{\hbar} = \Omega_p$  – частоту Раби. Именно этот

параметр определяет нелинейные свойства среды. Поскольку поляризация связана с восприимчивостью известным соотношением  $\vec{P} = \chi \vec{E} = (\chi' - i\chi'') \vec{E}$ , из (8.18) видно, что при достаточно сильных полях зависимость  $\chi(\omega)$  становится нелинейной по отношению к полю и проявляется **эффект насыщения** среды. В пределе при увеличении внешнего поля  $\Delta N_{\text{стаци}} \rightarrow 0, P_{\text{стаци}} \rightarrow 0$  т.е. среда перестает изменять интенсивность падающей волны, и волна преодолевает эту среду, не меняя своей энергии (**эффект просветления среды**).

Представляет интерес оценка уровня мощности, поглощаемой двухуровневой средой в электромагнитном резонансном поле. Для этого можно использовать квантовомеханическое определение производной оператора физической величины:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]. \quad (8.19)$$

В качестве параметра  $\hat{A}$  можно взять оператор энергии системы двухуровневых атомов, взаимодействующих с резонансным полем:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = H_0 - d\vec{E}_0 \cos \omega t. \quad (8.20)$$

Тогда получаем из (8.19) следующее соотношение, имеющее физический смысл мощности, поглощаемой атомом:

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{H}] = \omega d_{21} E_0 \sin \omega t. \quad (8.21)$$

Если ввести в рассмотрение подобно (7.16), (7.18) параметр  $n_0$  для обозначения суммарной концентрации атомов среды, тогда

$$\frac{d(n_0 \hat{H})}{dt} = w(n_0 d) \vec{E}_0 \sin \omega t. \quad (8.22)$$

Данное выражение описывает, таким образом, мощность, поглощаемую системой атомов во внешнем поле. Проведем формальное усреднение по периоду колебаний поля:

$$\frac{d\bar{U}^T}{dt} = \omega \vec{E}_0 \left( \bar{P} \sin \omega t \right)^T, \quad (8.23)$$

т.е. результат определяется «квадратурной» поляризацией, смещенной на  $\pi/2$  по фазе по отношению к полю (8.16). Окончательно, с учетом (8.18), получаем:

$$\frac{d\bar{U}^T}{dt} = \frac{(\vec{d}_{21} \vec{E}_0)^2}{2\hbar} \frac{\omega T_2^{-1} N_0}{(\omega_{21} - \omega)^2 + T_2^{-2} + \left( \frac{\vec{d}_{21} \vec{E}_0}{\hbar} \right)^2 \frac{T_1}{T_2}}. \quad (8.24)$$

Коэффициент поглощения среды (8.11) связан с этой величиной как

$$\alpha = \frac{8\pi}{cE_0^2} \frac{dU}{dt}$$

и таким образом повторяет спектральную форму характеристики, представленную в выражениях (8.18) и (8.24).

Аналогичным образом для магнитодипольного взаимодействия можно получить спектральную зависимость для мощности, поглощаемой магнитодипольной средой во внешнем магнитном СВЧ-поле:

$$P_{\text{погл}} = \int_{M(t=0)}^{M(\frac{2\pi}{\omega}-t)} \bar{H} d\bar{M} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} H(x) \frac{dM_x}{dt} dt = \omega H_1^2 \chi_0 \frac{\omega T_2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + \gamma^2 H_1^2 T_2^2} \quad (8.26)$$

где  $H_1$  – переменное резонансное поле (как это имеет место при электронной парамагнитном резонансе),  $\chi_0$  – статическая восприимчивость среды,  $\gamma$  – гиromагнитное отношение.

Таким образом, все эти спектральные распределения имеют форму лоренцевского контура с шириной, определяемой двумя последними слагаемыми в знаменателе.

## 8.5. Эффект насыщения. Насыщающая интенсивность

Полученные соотношения позволяют рассмотреть нелинейный эффект, возникающий при взаимодействии двухуровневых сред с достаточно сильными полями, а именно – эффект насыщения. Как это следует из равенства коэффициентов индуцированного излучения и поглощения, в термодинамически равновесной среде должно при наложении внешнего резонансного поля происходить поглощение энергии поля (см.(8.24)), приводящее в конечном счете к изменению заселенности уровней в направлении выравнивания населенностей (см. соотношение (8.14)). Результатом такого направленного процесса становится практически полное выравнивание населенностей верхнего и нижнего уровня до уровня  $\approx N_0/2$ . Полному выравниванию населенностей препятствует наличие, хотя и относительно небольшого по вероятности, спонтанного излучения с верхнего уровня. Выражение для поглощаемой мощности имеет вид:

$$M_{\text{нас}} = \frac{\Delta \bar{U}}{\Delta t} = \hbar \omega P_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ (2 \rightarrow 1)}} (N_1 - N_2) \quad (g_1 = g_2) \quad (8.27)$$

или с учетом выражения (8.14)

$$\frac{\Delta \bar{U}}{\Delta t} = \hbar \omega B_{12} \rho_{12} (N_1 - N_2) = - \frac{\hbar \omega N_0 B_{12} \rho_{12}}{1 + 2B_{12} \rho_{12} \tau_{\text{сп}}} \quad (8.28)$$

Условие насыщения среды в этих обозначениях сводится к выполнению условия:  $\rho_{12} B_{12} \tau_{\text{сп}} \gg 1$

Глубокое насыщение среды приводит к выражению

$$M_{\text{нас}} \approx \frac{\hbar \omega N_0}{2\tau_{\text{сп}}} \quad (8.29)$$

Можно ввести новую характеристику, отражающую силу эффекта насыщения, например, через сечение поглощения  $\sigma_H$  (8.3), – **насыщающую интенсивность**. После преобразования выражения (8.14) запишем:

$$\frac{\Delta N}{N_0} = -\frac{1}{1 + \frac{I}{I_{HAC}}}, \quad \text{где } I_{HAC} = \frac{\hbar\omega}{2\sigma_H\tau} \quad (8.30)$$

В случае слабого внешнего поля, т.е. при соотношении параметров, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{d_{21}E_0}{\hbar}\right)^2 \frac{T_1}{T_2} \ll T_2^{-2}, \quad (8.31)$$

выражение (8.24) переходит в форму:

$$\frac{d\bar{U}^T}{dt} = \frac{(\bar{d}_{21}\bar{E}_0)^2}{2\hbar T_2} \frac{\omega N_0}{(\omega - \omega_0)^2 + T_2^{-2}}, \quad (8.32)$$

т.е. получаем неискаженный лоренцевский контур, ширина которого определяется релаксационным временем  $\frac{2}{T_2}$  (см. соотношение (7.12)).

С другой стороны, в случае сильных полей выполняется условие

$$\left(\frac{d_{21}E_0}{\hbar}\right)^2 \frac{T_1}{T_2} > T_2^{-2}, \quad (8.33)$$

и тогда в выражении (8.24) уменьшается влияние слагаемого, отражающего частотную расстройку, а разность населенностей  $\Delta N \rightarrow 0$ , т.е. происходит, как уже отмечалось, выравнивание населенности уровней.

Таким образом, в сильных полях (8.33) возникает нелинейный отклик среды на внешнее поле, величина которого определяется последним слагаемым в знаменателе выражений (8.17), (8.18) и (8.24). Формальным параметром, отражающим возникающий эффект насыщения среды, является насыщающая интенсивность, которая с учетом сопоставления формы (8.30) и выражения (8.24), может быть также выражена следующим образом:

$$I_{HAC} = \frac{c\hbar^2}{d_{21}^2 \cdot 8\pi T_1 T_2}. \quad (8.34)$$

В целом, рассматривая представленную в этом разделе модель взаимодействия, можно утверждать, что любая характеристика среды в условиях резонансного взаимодействия с внешним полем может быть записана в аналогичной спектральной форме. Например, для коэффициента поглощения среды можно записать (см. (8.25)):

$$\alpha(\omega) = \frac{8\pi N_0 d_{21}^2}{c} \frac{\omega T_2}{1 + (\omega_{21} - \omega)^2 T_2^2 + \Omega_p^2 T_1 T_2}, \quad (8.35)$$

а для нулевого значения расстройки частот, т.е. без учета спектральных особенностей в максимуме поглощения выполняется

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_{HAC}}} \alpha_0 , \quad (8.36)$$

где  $\alpha_0$  – коэффициент поглощения в отсутствии внешнего поля.

### 8.6. Проявление эффекта насыщения в средах с разным характером уширения спектральных линий

При рассмотрении спектральных особенностей проявления процесса взаимодействия двухуровневой среды с ЭМП следует различать два варианта, отражающих характер уширения спектральных линий вещества.

#### 1. Однородное уширение

В случае однородно уширенной линии среды коэффициент поглощения  $\alpha(\omega)$  вычисляется, исходя из (8.30). В соответствии с данным соотношением наблюдается уменьшение значения поглощения по закону (8.30b), а форма линии сохраняется лоренцевской (см. рисунок 8.3). Ее ширина при увеличении внешнего поля

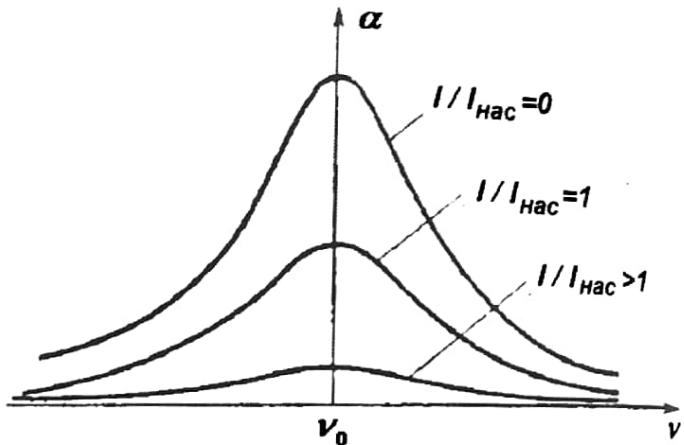


Рисунок 8.3

по отношению к  $I_{HAC}$  будет расти по закону

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 \sqrt{1 + \frac{I}{I_{HAC}}} \quad (8.37)$$

или в развернутом виде

$$\Delta\omega = \Delta\omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{d_{21}E_0}{\hbar} \right)^2 T_1 T_2} . \quad (8.38)$$

Для слабых полей  $\Delta\omega = \Delta\omega_0$ .

#### 2. Неоднородное уширение

По иному закону происходит видоизменение контура линии поглощения в случае неоднородного уширения линии перехода. Как уже отмечалось, для неоднородно уширенных линий общий контур представляет собой свертку отдельных однородных линий для каждой группы атомов. При взаимодействии монохроматической внешней волны с ансамблем атомов, т.е. при соотношении параметров поля и вещества  $\Delta\omega_\lambda \ll \Delta\omega_0$ , взаимодействие

происходит только с отдельной группой частиц, обладающих резонансными по отношению к внешнему полю частотами перехода. В результате в контуре поглощения возникает локальный провал («выжигание спектральных дыр»), причем ширина провала пропорциональна ширине однородно уширенной линии (рисунок 8.4).

Явление «спектрального выжигания дыр» в неоднородном контуре находит весьма широкое применение в различных областях квантовой электроники – и в первую очередь, – в методиках аналитической лазерной

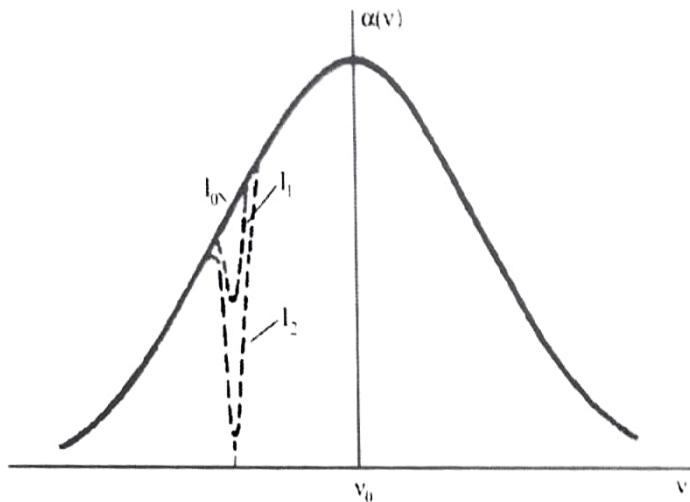


Рисунок 8.4

спектроскопии. Так, например, существует целое направление в современных спектроскопических исследованиях – **внутридоплеровская спектроскопия**, которая использует данное явление для анализа тонкой структуры энергетических спектров на частотных масштабах, намного более узких, чем общее значение доплеровской ширины линии поглощения. Использование метода встречных волн приводит к спектроскопии сверхвысокого разрешения (с добротностью наблюдаемых линий до  $10^9$  и выше). Кроме того, использование лазерного пучка с подстройкой частоты позволяет реализовать в условиях неоднородного контура прецизионное селективное управление молекулярно-кинетическими процессами («лазерное охлаждение» атомов).

В целом приведенные выше результаты показывают, что анализ процесса взаимодействия двухуровневой среды с резонансным полем можно вести или на энергетическом (баланском) уровне рассмотрения, если не учитывать частотные особенности процесса, или на языке спектрального анализа  $\bar{P}$  или  $\Delta N$ , дающего более точное описание с рассмотрением характерных спектральных распределений параметров. Более того, в ряде практических задач (например, при анализе лазерных сред в резонаторах с определенной пространственной структурой мод поля) требуется введение в модель пространственных координатных распределений, что еще больше усложняет аналитические расчеты для системы материальных уравнений (7.19) и (7.20). Но при любом подходе основное следствие и свойство двухуровневой среды – это наблюдаемый нелинейный эффект насыщения среды под воздействием внешнего резонансного поля.

## 8.7. Нестационарные (когерентные) явления в двухуровневых средах

В предыдущих разделах были рассмотрены в основном стационарные характеристики двухуровневых сред при воздействии на них резонансного поля. Полученные соотношения, учитывающие эффект насыщения, отражают ситуацию, при которой реакция среды на внешнее воздействие формируется в присутствии термостата, следствием чего становится постепенное затухание всех релаксационных процессов. Если время воздействия поля на среду  $\tau_E > T_1, T_2$ , для слабого поля (см. (8.3)), уравнения для среды линейны, и восприимчивость среды, получаемая из (8.18), определяет также и поведение вещества в нестационарных условиях (отклик среды на короткий  $\tau_E < T_2$  и слабый по амплитуде импульс может рассматриваться как фурье-образ от свертки внешнего поля  $\hat{E}$  и  $\chi(t)$  в виде набора затухающих осцилляций).

Другой вариант взаимодействия возникает при воздействии на среду мощного короткого импульса (совокупность условий  $\tau_E < T_2$  и (8.33)). При таком воздействии возникает ряд нестационарных специфических эффектов (называемых иногда «когерентными»): например, **самоиндукционная прозрачность, оптическая нутация, сверхизлучение**. Эти явления наблюдались ранее в радиодиапазоне, а в оптических взаимодействиях проявились после создания мощных импульсных лазерных источников излучения.

Особенность математической модели описания реакции среды на короткий импульс заключается в том, что при таком подходе можно пренебречь влиянием термостата (эквивалентно условию  $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ ). Это приводит к тому, что на масштабах временного интервала  $\tau_E \ll T_2$  атомы среды можно считать изолированной квантовой системой, а следовательно для описания возникающих явлений можно использовать вместо кинетического уравнения (7.4) модель на основе уравнения Шредингера для волновой функции квантовой частицы. Аналитическое решение динамических уравнений, аналогичных (2.3), приводит к осцилляторному решению вида (2.11) для квантового перехода в двухуровневой системе. С учетом (2.3) и (2.11) получим:

$$|C_{12}|^2 = \left[ \frac{\Omega_p}{\Omega_0} \sin \left( \Omega_0 \frac{t}{2} \right) \right]^2. \quad (8.39)$$

Таким образом, для вероятности переходов возникают осцилляторные решения на частоте  $\Omega_0$ , где  $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_p^2 + (\omega - \omega_{21})^2}$  - определяется соотношением (2.11). В сильных полях при небольших расстройках выполняется  $\Omega_p > \omega - \omega_{21}$ , следовательно имеет место сфазированное изменение состояний отдельных атомов. При адиабатическом, «медленном включении» поля вероятности переходов не зависят от времени и равны 1/2.

В соответствии с (8.39) процесс переброса электрона на другой уровень происходит за время

$$\tau_H = \frac{\pi}{\Omega_p} = \frac{\pi\hbar}{d_{12}E_0}, \quad (8.40)$$

численные оценки показывают, что необходимость для обеспечения условия  $\tau_E \ll T_2$ , т.е.  $\tau_H \sim 10^{-12}$  сек, требует использования лазерных источников с интенсивностью пучка  $I \sim 1 \frac{ГВт}{см^2}$ , ( $E_0 \sim 1 \frac{МВ}{см}$ ). При меньших уровнях пиковой мощности динамическое равновесие в среде успевает

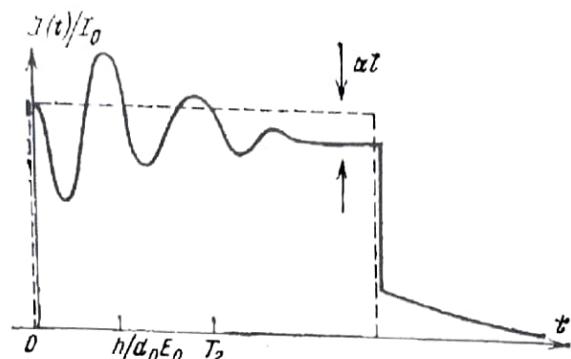


Рисунок 8.5

восстановиться. Из оценок для  $I = I_{HAC}$  (8.34) можно получить  $E_0 \geq \frac{\hbar}{d_{12}\sqrt{T_1 T_2}}$ ,

а в рассматриваемом случае из (8.40) следует оценка  $E_0 \geq \frac{\hbar}{d_{12}T_2}$ . Сравнение этих двух оценок показывает, что при длительном воздействии поля указанной мощности должно привести к глубокому **эффекту насыщения**, рассмотренному для стационарного режима.

Разберем для примера одно из нестационарных явлений, возникающих в веществе под воздействием короткого мощного импульса – **явление оптической нутации**. Данный эффект представляет собой периодическое изменение мгновенной оптической плотности вещества, вызываемой изменением заселенности уровней и поляризации частиц в нестационарном случае (см. рисунок 8.5)

Пусть на двухуровневую среду падает мощный лазерный импульс с длительностью, более короткой, чем любое из релаксационных времен, присутствующих в системе. Тогда мощность, поглощаемая средой за период, записывается в форме (8.19) как результат взаимодействия внешнего поля и мгновенной поляризации в среде:

$$\frac{d \overline{U}}{dt} = \frac{1}{2} \omega E_0 P_{\text{sin}}(t) = \frac{1}{2} \hbar \omega N_0 \left( \frac{d_{12} E_0}{\hbar} \right) \sin(\Omega_p t), \quad (8.41)$$

$P_{\text{sin}}(t)$  – квадратурная компонента, смещенная по фазе на  $\pi/2$  относительно напряженности поля  $\vec{E}$ . Общее изменение энергии, вызываемой поглощением в среде за время действия светового импульса  $\tau_k$ , получается интегрированием (8.34) на интервале длительности возбуждающего импульса и принимает следующий вид

$$\Delta U = \int_0^{\tau_E} \frac{d\bar{U}^T}{dt} \cdot dt = \hbar\omega N_0 \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega_p \tau_E}{2}\right). \quad (8.42)$$

Приведенное соотношение означает, что для  $\tau_E = \frac{2\pi}{\Omega_p} = \frac{\hbar}{d_{12}E_0}$  (так

называемый « $2\pi$ -импульс») среда станет прозрачной по отношению к падающему полю, т.е. лазерный импульс передается без изменений. Возникает режим **самоиндуцированной прозрачности**, хотя сама среда при этом остается поглощающей в общем случае. По сути имеет место ситуация, когда половину периода импульс поглощается веществом, возникает инверсия. Вторая половина импульса снимает эту инверсию, и поглощенная энергия когерентно возвращается полю. На практике данное явление продемонстрировано в целом ряде поглощающих сред – например, в соединениях  $SF_6$ ,  $BCl_3$  и др. Явление характеризует взаимодействие импульсного излучения со средой и в газах, и в полупроводниках, причем и в присутствии неоднородного уширения.

Среди других проявлений когерентного, коллективного по ансамблю частиц взаимодействия можно отметить открытый в 1950 г. Э.Ханом эффект, продемонстрированный изначально на примере спинового ансамбля в ядерном магнитном резонансе, а впоследствии получивший название «фотонное эхо». Еще одно нестационарное явление, так называемое «коллективное сверхизлучение», было предсказано в 1954 г. Р.Дикке. В основе указанных явлений лежит принцип управления длительностью воздействия мощного поля на систему, позволяющий демонстрировать сфазированный отклик среды на временных интервалах, более коротких, чем релаксационные константы.

В целом можно утверждать, что оптические нестационарные процессы представляют большой практический интерес с точки зрения спектроскопических приложений (методики нестационарной спектроскопии), диагностики и анализа веществ, а также оптимизации параметров лазерных источников излучения.

## 9. Физика лазеров. Принципы построения оптического квантового генератора

### 9.1. Теоретическая модель оптического квантового генератора (ОКГ)

Перейдем теперь к рассмотрению физических вопросов и аспектов, связанных с проблемой создания наиболее эффективных устройств квантовой электроники - **оптических квантовых генераторов (лазеров)**. В конструктивном плане квантовый генератор состоит из трех основных элементов: **рабочего вещества (активная среда с инверсией населенности), оптического открытого резонатора и источника внешней энергии - накачки**. С точки зрения анализа взаимодействующих в ОКГ подсистем теоретическую модель квантового генератора (или усилителя) можно представить следующей блок-схемой (рисунок 9.1):

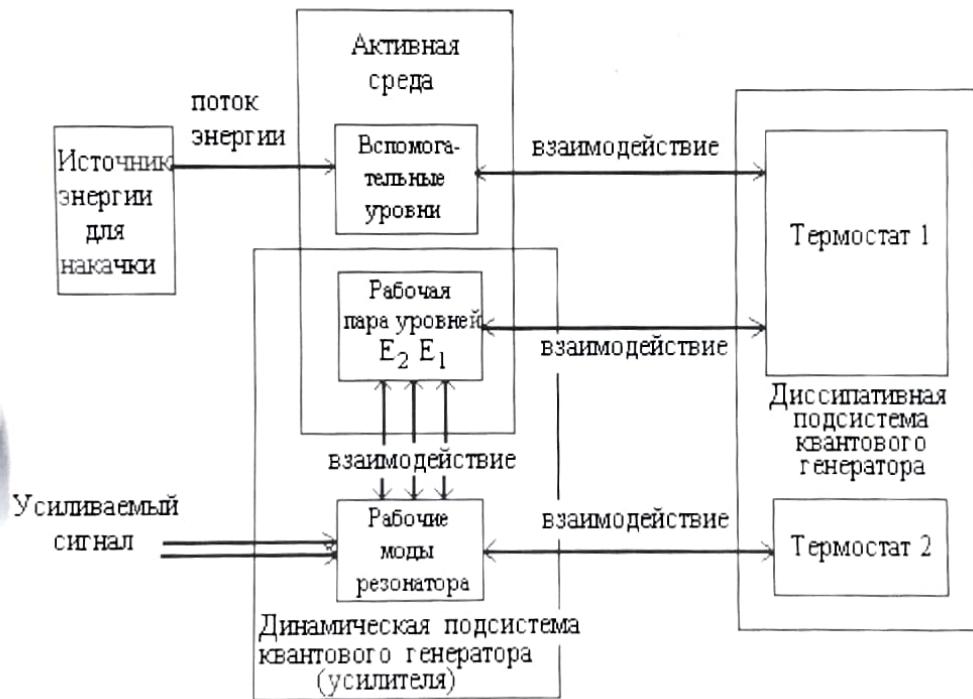


Рисунок 9.1

При описании физических процессов, протекающих в лазерных системах, используются следующие основные понятия и термины:

**Накачка** - процесс создания неравновесного состояния вещества под действием электромагнитных полей, соударений с заряженными или нейтральными частицами, при резком охлаждении предварительно нагретых

газовых масс, химической реакции и других возможностях образование инверсной заселенности ряда энергетических уровней в веществе. Активная среда (активное вещество, рабочее вещество, активные центры) среда, в которой достигнута инверсная населенность, в результате чего в ней может быть получено усиление электромагнитной энергии. Рабочая пара уровней - два энергетических уровня активной среды, переход между которыми используется для усиления или генерации когерентного излучения.

Рабочие моды резонатора - собственные типы колебаний оптического резонатора, частоты которых попадают в полосу усиления активного вещества, соответствующую рабочему переходу.

Вспомогательные уровни энергии активной среды - все квантовые состояния среды, переходы между которыми вызывает данный источник энергии накачки и которые посредством релаксационных процессов (взаимодействием с термостатами) связаны переходами с рабочей парой уровней.

Динамическая подсистема для лазерной модели понимается как неизолированная квантовая система с ограниченным набором степеней свободы, эволюция (динамика) которой может быть описана небольшим числом дифференциальных уравнений. В данную подсистему в лазере можно включить разность населенностей на рабочем переходе, поляризацию активной дипольной среды, а также напряженность электрического поля одной или нескольких рабочих мод лазерного резонатора.

Диссипативная система (термостат, тепловой резервуар) конкретного лазерного источника излучения представляет собой частный случай произвольной физической системы с бесконечным числом степеней свободы, в силу чего ее состояние практически не изменяется при взаимодействии с динамической подсистемой. По характеру вызываемых ею релаксационных процессов в оптическом квантовом генераторе диссипативная подсистема лазера может быть разделена на две части - условно называемые термостатами 1 и 2.

Термостат 1 включает лишь те степени свободы диссипативной подсистемы, которые связаны взаимодействием с активными центрами и приводят через это взаимодействие к появлению релаксационных процессов на рабочих и вспомогательных уровнях активной среды. Соответственно, термостат 1 ассоциируется с электромагнитным вакуумом, континуумом электромагнитных мод, стенками резонатора и другими степенями свободы, включая и совокупность внешних степеней свободы движения атомов активной среды в пространстве. Влияние термостата 1 на эволюцию лазерной динамической подсистемы выражается присутствием в уравнениях квантового генератора членов, содержащих две макроконстанты: продольное  $T_1$  и поперечное  $T_2$  времена релаксации, величины которых определяются свойствами термостата 1.

Все степени свободы диссипативной подсистемы, задействованные в процессах релаксации рабочих мод генератора или усилителя, то есть обуславливающих потери их энергии, относятся к термостату 2. Это, прежде всего, стекки и зеркала оптического резонатора, обеспечивающие вывод излучения лазера. Дополнительно сюда относятся потери, связанные с дифракцией волн на зеркалах резонаторов и рассеянием на неоднородностях активной среды. Таким образом, термостат 2 - это совокупность степеней свободы, объединяющая степени свободы заряженных носителей в стеклах и зеркалах и континуума электромагнитных мод за пределами резонатора, которые подпитываются излучением через полупрозрачные зеркала, а также через открытые поверхности резонаторов ОКГ за счет процессов дифракции на зеркалах и потерь излучения на распределенных неоднородностях активной среды.

## 9.2. Трех- и четырех-уровневые схемы создания инверсии населенностей на рабочем переходе

Одной из ключевых особенностей активной среды оптических квантовых генераторов является обязательное наличие в энергетической схеме вспомогательных уровней, эффективно взаимодействующих с рабочим переходом. Как уже отмечалось выше, модель двухуровневой среды не способна обеспечить необходимую для осуществления усиления инверсию населенностей на рабочем переходе. Для достижения данного неравновесного состояния необходимо ввести в модель дополнительно один или два вспомогательных уровня, приводящих к формированию так называемых трех- и четырех-уровневой схем ОКГ.

### Трехуровневая энергетическая схема

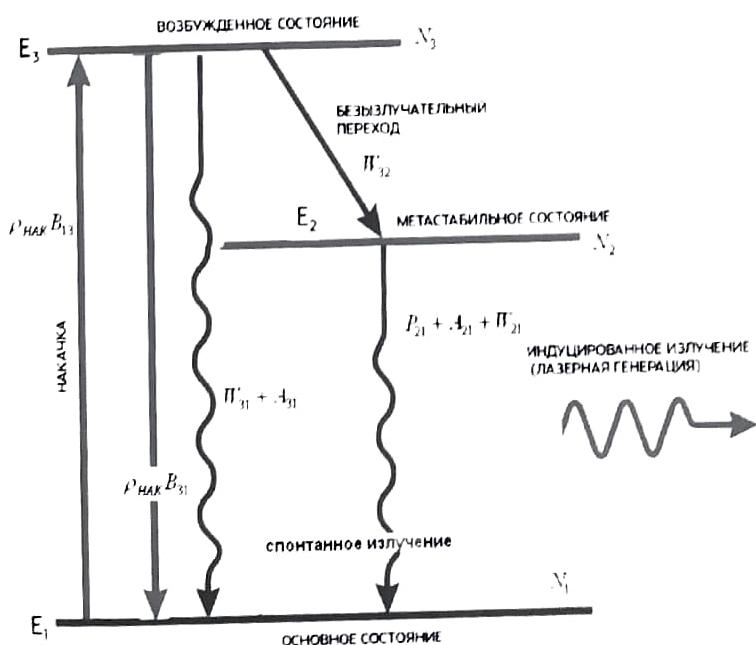


Рисунок 9.2

На рисунке 9.2 представлена типичная трехуровневая энергетическая схема. По такой схеме работает, в частности, рубиновый лазер. Переход  $2 \rightarrow 1$  - лазерный рабочий переход. Именно на этом рабочем переходе требуется создание инверсии носителей. Переход  $1 \rightarrow 3$  является резонансным для накачки, он используется для передачи энергии от внешнего источника в активную среду. Для эффективной работы схемы дополнительно считаем, что отсутствует внешнее поле, резонансное по отношению к переходам  $1 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 3$ . Будем также для упрощения считать, что все весовые коэффициенты (кратности вырождения уровней)  $g_i = 1$ .

Система кинетических балансных уравнений (7.29) для рассматриваемой трехуровневой модели принимает форму:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_3}{dt} = \rho_H B_{13} N_1 - (\rho_H B_{31} + W_{32} + A_{31}) N_3 \\ \frac{dN_2}{dt} = W_{32} N_3 - (P_{21} + W_{21} + A_{21}) N_2 \\ N_1 + N_2 + N_3 = N_0 \end{array} \right. . \quad (9.1)$$

Решение данной системы уравнений для стационарного случая приводит к следующим соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{P_{21}^\Sigma (A_{31} + W_{32} + \rho_H B_{31})}{P_{21}^\Sigma (W_{32} + A_{31}) + (2P_{21}^\Sigma + W_{32}) \rho_H B_{31}} N_0 \\ N_2 = \frac{W_{32} \rho_H B_{31}}{P_{21}^\Sigma (W_{32} + A_{31}) + (2P_{21}^\Sigma + W_{32}) \rho_H B_{31}} N_0 \\ N_3 = \frac{P_{21}^\Sigma \rho_H B_{31}}{P_{21}^\Sigma (W_{32} + A_{31}) + (2P_{21}^\Sigma + W_{32}) \rho_H B_{31}} N_0 \end{array} \right. . \quad (9.2)$$

На рисунке 9.3 представлен график зависимостей (9.2) как функция накачки и асимптот при бесконечном увеличении накачки:

$$N_{1,3} \approx \frac{P_{21}}{(2P_{21} + W_{32})} N_0 \quad N_2 \approx \frac{W_{32}}{(2P_{21} + W_{32})} N_0 \quad (9.3)$$

В отличие от двухуровневой системы  $\Delta N$  в данном случае не характеризуется определенным знаком, а зависит от соотношения коэффициентов. При реализации условия

$$W_{32} > P_{21} = A_{21} \quad (9.4)$$

становится возможным получение инверсии на рабочем переходе:  $\Delta V = N_2 - N_1 > 0$  при подаче в систему накачки на уровне  $\rho_n > \rho_n^{\text{inv}}$ . Реализация ключевого условия (9.4) требует выполнения ряда требований к параметрам активной среды. В частности, требуется обеспечить, чтобы вероятности  $P_{21}, A_{21}$  были малы (т.е. второй уровень должен быть **метастабильным**). С другой стороны,

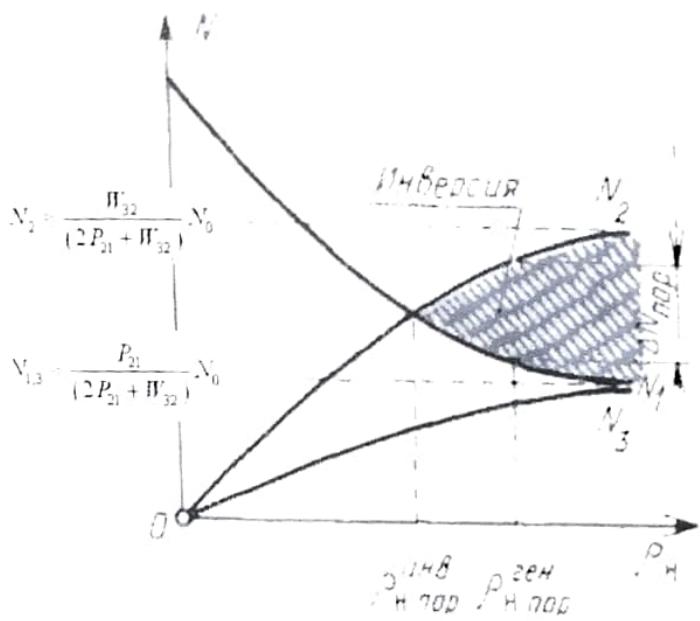


Рисунок 9.3

безызлучательную вероятность  $W_{32}$  надо обеспечить большую,  $\rho_{\text{нак}} B_{13}$  тоже желательно иметь очень большую. Таким образом, в среде должно выполняться следующее соотношение вероятностей переходов:

$$W_{32} >> A_{21} >> W_{21}, \quad W_{32} >> A_{31}. \quad (9.5)$$

При выполнении приведенных требований уровень инверсии на рабочем переходе, а значит и усиление среды меняется с ростом накачки по закону

$$\Delta N \sim \frac{\rho_{13} B_{13} T_1 - 1}{\rho_{13} B_{13} T_1 + 1} \Delta N_0, \quad (9.6)$$

где  $T_1$  - время жизни на верхнем уровне рабочего перехода.

Следует также отметить, что появление в среде инверсии не означает автоматического запуска генерации лазера. Как будет показано далее, для выхода в режим самовозбуждения ОКГ необходимо иметь, как это и показано на рисунке, некоторый запас инверсии. Величина этого запаса  $\Delta N_{\text{пор}}$  определяется уровнем суммарных потерь в системе, в первую очередь – в резонаторе лазерного излучателя. Что касается системы уравнений (9.1), то выше порога генерации уравнения для населенностей уровней становятся нелинейными, так как вероятность индуцированных переходов на рабочей частоте  $P_{12}$  будет содержать поле генерации. Эта зависимость приведет к тому, что характер изменения инверсии с накачкой резко меняется, и в

соответствии с (8.30)  $\Delta N \sim \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{I_{21}}{I_{\text{нac}}}},$  т.е. начнет проявляться эффект

насыщения на рабочей частоте генератора. В результате, как будет показано далее,  $\Delta N \rightarrow N_{\text{пор}}$  и стабилизируется на этой величине.

### Четырехуровневая схема лазера

Перейдем к рассмотрению более эффективной для создания инверсии четырехуровневой схемы активной среды. На рисунке 9.4 представлены основные переходы, определяющие работу такой схемы. Рабочим переходом является переход  $3 \rightarrow 2$ , переходы  $4 \rightarrow 3$  и  $2 \rightarrow 1$  соответствуют безызлучательным релаксационным процессам.

Решение системы уравнений, аналогичной (7.22) и (9.1), для четырехуровневой модели имеет весьма объемную форму, несмотря на формально несложный вид уравнений. Качественный вид решений, аналогичный (9.2), но отражающий специфику четырехуровневого энергетического приближения, представлен на рисунке 9.5. Нетрудно заметить, что появление еще одного дополнительного уровня на энергетической схеме привело к сдвигу точки начала появления инверсии  $\Delta N = N_3 - N_2$  на рабочем переходе в область низких значений  $\rho_{H \text{ пор}}^{\text{инв}} \sim 0$ . По существу, такое поведение системы означает, что вся энергия накачки трансформируется в накопленную инверсию, что делает эту схему весьма эффективной для создания лазерного источника излучения. Специфической особенностью четырехуровневой схемы, делающей возможным такой энергообмен, является

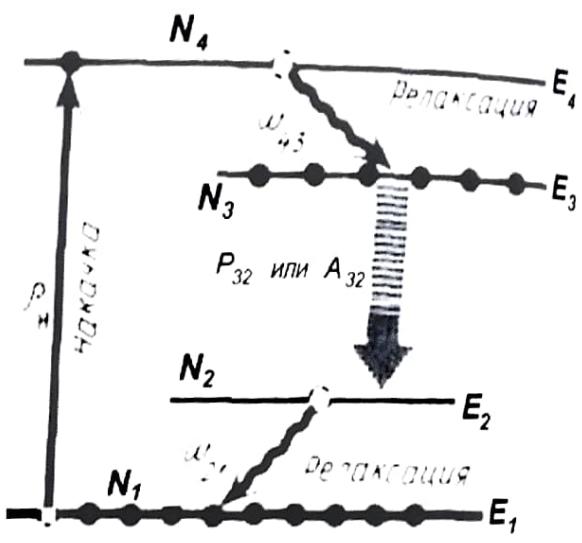


Рисунок 9.4  
Появление инверсии

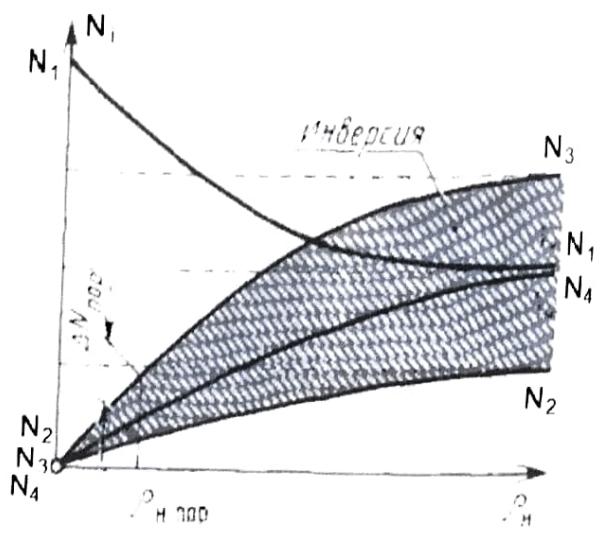


Рисунок 9.5

начальное условие  $N_3 = 0$  (если не принимать во внимание остаточную населенность данного уровня в условиях термодинамического равновесия).

Условие, аналогичное (9.4), т.е. соотношение вероятностей, при котором становится возможным появление инверсии населенностей, принимает в четырехуровневой схеме следующий вид:

$$W_{21}W_{43} > \frac{g_3}{g_2} [W_{42}(W_{31} + P_{32}) + P_{32}W_{43}] \quad (9.7)$$

Формируемая разность населенностей как функция энергии накачки проявляется себя как

$$\Delta N_{32} \approx N_0 \frac{\rho_H B_{14}(W_{21} - A_{32})}{\rho_H B_{14}(W_{21} + 2A_{32}) + W_{43}A_{32}} \quad (9.8)$$

Это означает, что при  $\rho_{HAK}B_{14} < W_{43}$  выполняется  $\Delta N \sim \rho_{HAK}$ , т.е. инверсия растет по линейному закону. При  $\rho_{HAK}B_{14} \rightarrow \infty$  в соответствии с соотношением (9.8)  $W_{21} > P_{32}$ , а значит  $\Delta N \rightarrow N_0$ .

Четырехуровневая схема может быть оптимизирована по положению всех участвующих в переходах уровней. Так, например, чтобы избежать мешающих накоплению инверсии обратных тепловых перебросов желательно иметь  $E_4 - E_3 \gg KT$  и аналогично  $E_2 - E_1 \gg KT$ . С другой стороны, чтобы увеличить к.п.д. излучателя и уменьшить тем самым тепловую нагрузку, эта разница энергий не должна быть очень большой.

В заключение данного раздела сравним эффективность накачки в 3-х и 4-х уровневых схемах. С учетом характерного вида энергетических схем, представленных на рисунках, можно оценить энергетические затраты на создание необходимой фиксированной инверсии населенностей в этих двух случаях. Соответствующие величины внешней мощности требуемой накачки принимают следующий вид:

$$M^{4-x}_{HAK} \approx \Delta N_{HOP} \hbar w A_{32}$$

$$M^{3-x}_{HAK} = \left( \frac{N_0}{2} + \Delta N_{HOP} \right) \hbar w A_{21} \quad (9.9)$$

С учетом того, что общая величина  $N_0 \gg \Delta N_{HOP}$ , можно сделать однозначный вывод о том, что четырехуровневая схема намного более эффективна, и использование активных лазерных сред с такой структурой уровней несомненно более предпочтительно при разработке оптических квантовых генераторов.

### 9.3. Практические методы создания инверсии в активных средах

Рассмотрим теперь наиболее характерные практические способы создания инверсии в стандартных трех- и четырех-уровневых активных средах.

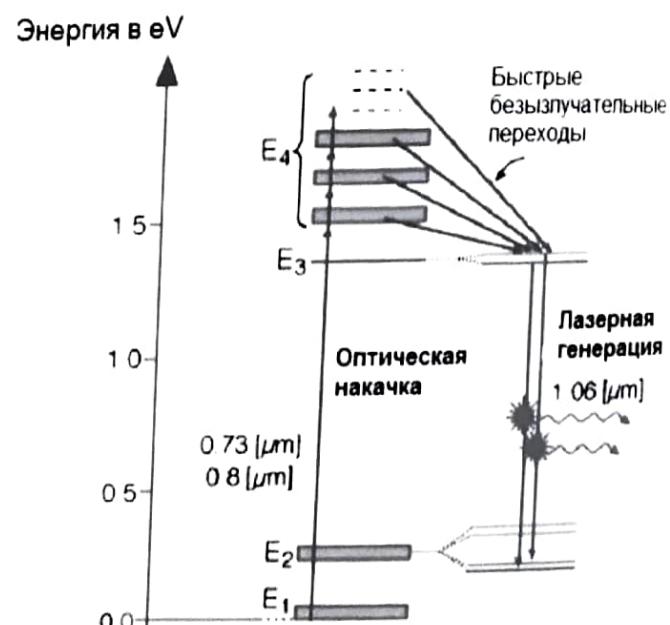
## 1. Накачка оптическим вспомогательным излучением (оптическая накачка).

Данный тип накачки – наиболее универсальный метод, используемый в первую очередь для создания инверсии на лазерном переходе в **твердотельных средах** (например, лазеры на  $Nd^3+$ :YAG, ZnSe,  $Tm^3+$ :LF, титан-сапфировый лазер, оптические волоконные усилители и лазеры на  $Er^3+$ ). Используется этот метод и в других типах лазеров (полупроводниковые лазеры, лазеры на органических красителях).

При оптической накачке активная среда подвергается мощному электромагнитному облучению на частоте накачки (вспомогательное излучение). Параметры накачки подбирают таким образом, чтобы оно поглощалось активным веществом, переводя его в возбужденное состояние. Требуемый уровень интенсивности оптической накачки определяется, исходя из анализа кинетических уравнений (9.1).

На первых этапах развития лазерной техники в качестве источника оптической накачки использовались импульсные лампы-вспышки (ксеноновые, ртутные). Пороговая мощность накачки составляла 800 – 1000 Вт, что вызывало большие тепловые потери в материале. В настоящее время накачка производится с помощью излучения светодиодов или лазеров, более высокого по частоте по отношению к рабочему переходу.

На рисунке 9.6 приведена энергетическая схема оптической накачки  $Nd$ -лазера. Накачка, продольная или поперечная, производится за счет облучения кристалла с ионами  $Nd$  линейкой лазерных полупроводниковых диодов. Уровень мощности, необходимый



для создания пороговой инверсии, составляет от 10 до 100 Вт в непрерывном или квазинепрерывном режиме. Полосы поглощения связаны с уровнем  $E_3$  безызлучательными переходами с релаксационными временами  $\sim 10^{-7}$  с. Переходы с уровня  $E_2$  на основной уровень – также безызлучательные, время релаксации  $\sim 10^{-9}$  с. Время жизни электронов на метастабильном уровне  $E_3$  составляет  $\sim 2 \cdot 10^{-4}$  с. Таким образом, необходимое для создания инверсии условие (9.7) выполняется с большим запасом.

## 2. Столкновительное возбуждение в газовом разряде.

Рассмотрим (на примере  $\text{He}-\text{Ne}$  лазера) другой вариант создания усиления, используемый в газовых лазерных средах, столкновительное возбуждение молекул газа в разрядных трубках.

На рисунке 9.7 представлена энергетическая схема уровней смеси гелия и неона. Возбуждение происходит за счет энергии разряда и неупругих столкновений, приводящих к обмену энергией частицами (атомами).

Процесс, приводящий к формированию инверсии на переходах в  $\text{Ne}$ , можно разбить на два этапа:

1.  $\text{He} + e^- \rightarrow \text{He}^* + (e^- - \Delta E)$
2.  $\text{He}^* + \text{Ne} \rightarrow \text{He} + \text{Ne}^* + \Delta E$

На первом этапе происходит столкновительное возбуждение буферного газа  $\text{He}$  за счет энергии свободных электронов в разряде. Обратный переход атомов гелия из возбужденного  $2S$  состояния запрещен правилами отбора. Это приводит к увеличению времени жизни атомов гелия в возбужденном состоянии, достаточного для реализации второго этапа – передаче возбуждения от  $\text{He}$  к  $\text{Ne}$  на переходах  $2S(\text{He}) \rightarrow 3S(\text{Ne})$  и  $2S(\text{He}) \rightarrow 2S(\text{Ne})$  при столкновениях в разряде. Этот процесс неупругих соударений носит квазирезонансный характер и характеризуется небольшим дефицитом энергии в системе. В результате представленного двухэтапного возбуждения происходит (см.рисунок) формирование инверсии сразу на трех переходах в атомах неона, которые можно использовать для получения лазерной генерации.

Для эффективного заселения возбужденного верхнего уровня скорость передачи возбуждения должна быть больше (много больше) обратного времени распада возбужденного состояния гелия. Это условие обеспечивается, в частности, пропорцией концентраций атомов  $\text{He}$  к  $\text{Ne}$  на уровне  $5:1 \div 15:1$ . Кроме того, с учетом процесса опустошения нижних уровней переходов в  $\text{Ne}$  за счет столкновений со стенками трубы, можно оптимизировать произведение давления и диаметра трубы  $d_{\text{труб}} \cdot p \approx 3 \div 4 \text{ мм} \cdot \text{торр}$ .

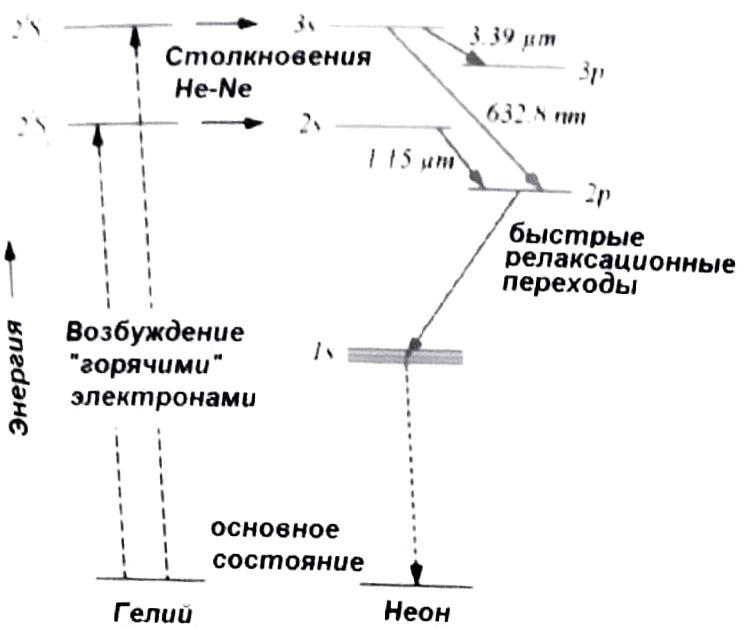
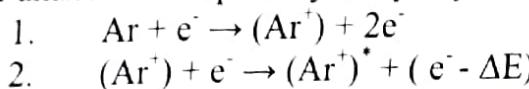


Рисунок 9.7

Нетрудно заметить, что схема накачки  $He-Ne$  смеси газов соответствует рассмотренной выше четырехуровневой схеме энергетических уровней. Еще одна существенная особенность данной системы заключается в локализации энергетических состояний в газах, в отличие от, например, твердотельных сред, где для поглощения энергии накачки используются широкие зоны, выполняющие функцию эффективного верхнего вспомогательного уровня.

Другой пример использования столкновительной энергии накачки – создание инверсии в ионных аргоновых ( $Ar^+$ ) лазерах. Процесс возбуждения происходит аналогично предыдущему случаю по двухэтапной схеме.



На первом этапе столкновение с быстрыми электронами в разряде приводит к ионизации атомов аргона. На втором этапе формируется возбужденное состояние иона аргона с накоплением инверсии на переходе  $4P \rightarrow 4S$ .

Следует отметить, что в ряде случаев возможно объединение процессов возбуждения в один этап (модель Пеннинга), как это происходит, например, в парах  $HeCd$  смеси. В целом столкновительный способ возбуждения характеризуется относительно невысоким к.п.д. преобразования энергии, не превосходящим, как правило, нескольких процентов.

### 3. Инжекция носителей в полупроводниковом лазерном диоде.

Самый эффективный вариант накачки активной среды, приводящий к рекордно высокому к.п.д. излучателя, реализуется в полупроводниковых активных средах при инжекции носителей через  $p-n$  переход. Энергетическая схема несмещенного  $p-n$  перехода и картина, возникающая при прямом смещении диода внешним напряжением, приведена на рисунке 9.8.

В исходном состоянии  $p-n$  переход вырожденного полупроводника имеет общий уровень Ферми для каждой из зон, а центральная область  $p-n$  перехода с собственной проводимостью не содержит свободных электронов. При подаче прямого электрического смещения происходит снижение потенциального барьера между  $p$  и  $n$  областями, в результате чего происходит расщепление уровня Ферми на два квазиуровня – в зоне проводимости и в валентной зоне, а в центральной зоне формируется заполнение

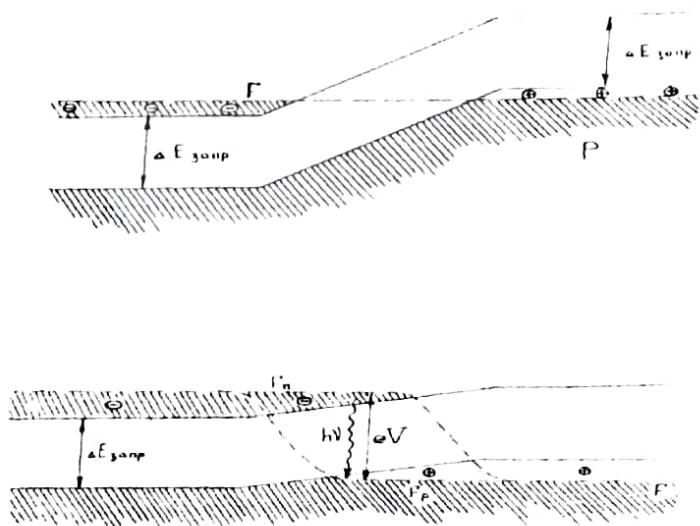


Рисунок 9.8

зоны проводимости электронами, а валентной зоны – дырками с вероятностью, превышающей 1/2. Таким образом, в среде формируется с учетом неравновесных распределений носителей в зонах инверсия, соответствующая частотам, немного превышающим запрещенную зону полупроводника. Формальное условие, определяющее полосу частот для получения инверсии населенностей и как следствие - усиления, может быть записано в виде:

$$\Delta E_{\text{напр}} < \hbar\omega < eU, \text{ где } U - \text{напряжение внешнего смещения.}$$

Несмотря на зонную структуру состояний в кристаллических полупроводниках общая энергетическая схема излучающего *p-n* перехода может быть сведена к четырехуровневой модели, а быстрые безызлучательные переходы ( $\sim 10^{-12}$  с), соответствующие внутризонной релаксации носителей, обусловлены в данном случае плотным взаимодействием с фононами кристаллической решетки.

Еще более эффективной схемой, обеспечивающей накопление инверсии в полупроводниковой активной среде, можно считать

гетероструктурные *p-n* переходы. На рисунке 9.9 приведена схема гетероструктуры на основе *GaAlAs* – *GaAs* без смещения и при подаче прямого напряжения на *p-n* переход. За счет наличия потенциальных барьеров в более широкозонных слоях *GaAlAs* в приведенной схеме обеспечивается более эффективная локализация носителей в активном слое *GaAs*, что позволяет достичь требуемого уровня инверсии с меньшими затратами (низкие пороговые значения тока накачки).

Наконец, самый легкий вариант получения пороговой инверсии в полупроводниках достигается в современных полупроводниковых лазерах на основе квантоворазмерных структур с дискретным набором уровней. В этих структурах наблюдается локализация инверсии как в пространстве, так и со спектральной точки зрения из-за наличия дискретных энергетических уровней в потенциальной яме.

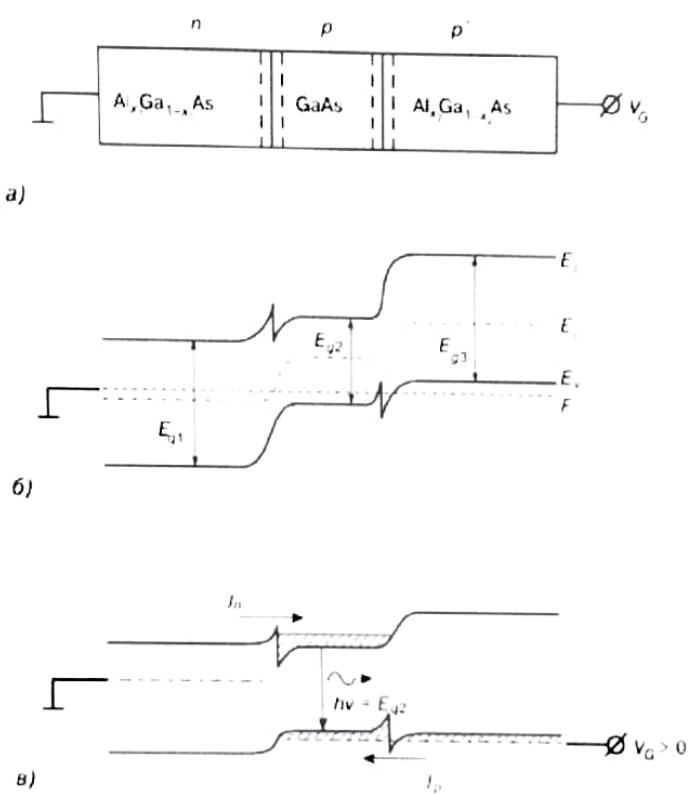
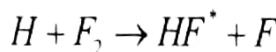
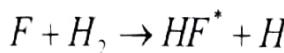


Рисунок 9.9

#### 4. Химическая накачка

В химических лазерах инверсия возникает при возбуждении промежуточных химических реакций. Эта особенность позволяет организовать автономный вариант активной лазерной среды без привлечения дополнительных внешних источников энергии. Типичным вариантом химической накачки можно считать реакции в HF – среде:



Возбужденное состояние  $HF^*$  является верхним уровнем рабочего перехода в активной среде. В дальнейшем при испускании фотона такой молекулой формируются новые составляющие  $H_2$  и  $F_2$ , и экзотермический химический процесс, приводящий к образованию возбужденного состояния, запускается снова.

Подобный тип накачки применим для весьма широкого класса молекулярных соединений, обладающих колебательной структурой энергетического спектра.

#### 5. Газодинамическая накачка

Данный вид накачки применяется в газовых лазерах и основан на термодинамических особенностях заселения энергетических уровней молекул газа. В основе этого метода – резкое охлаждение газовой среды, в результате чего происходит мгновенное нарушение равновесных условий заселенности уровней. В результате при переходе к новому равновесному распределению, соответствующему новой температуре, носителей задерживаются в некоторых метастабильных состояниях, и для определенных переходов фиксируется в этом интервале появление инверсной разности населенностей. Возможны также схемы, в которых предварительно нагретый буферный газ смешивается с холодным рабочим газом и возбуждает его за счет неупругих соударений. В любом случае рассматривается нестационарный, импульсный вариант возбуждения среды на интервале переходных релаксационных процессов в газовой среде. Самый распространенный тип лазерного источника, использующий данный тип накачки, – газодинамический  $CO_2$  лазер.

#### 6. Пространственная селекция возбужденных состояний

Данный метод создания инвертированных сред не предусматривает непосредственную накачку активной среды. Получение инвертированной среды основано на пространственном разделении элементов ансамбля с разными характеристиками атомов. Подобная картина наблюдается в СВЧ-диапазоне при попадании атомного пучка с распределением электронов по всем уровням тонкой структуры в неоднородное магнитное поле (см. раздел 6.2). В результате взаимодействия магнитных моментов с этим полем возникает разделение атомов по разным траекториям в пространстве, что

можно использовать для выделения нужной группы атомов, имеющих верхний заселенный уровень, т.е. получить инвертированную среду. Данный метод не применим для оптического диапазона частот переходов и может стать основой только для создания усиления в СВЧ-диапазоне для параметрических усилителей и мазеров.

#### 9.4. Открытые оптические резонаторы

Как уже отмечалось, одним из обязательных элементов в схеме любого лазера является резонатор. Резонаторы оптического диапазона имеют принципиальные отличия от СВЧ-резонаторов, являясь так называемыми «открытыми» объемными резонаторами, конфигурация которых не предусматривает стенок (зеркал) в поперечных по отношению к оси излучателя направлениях. Такая особенность является отражением того обстоятельства, что в оптическом диапазоне размеры резонатора  $L \gg \lambda$ , и невозможно использовать в лазерах методики, применяемые для более длинноволновых систем СВЧ.

Модой резонатора будем считать стационарную конфигурацию электромагнитного поля, удовлетворяющую уравнениям Максвелла и граничным условиям на стенках резонатора. Как было показано ранее (см. соотношение (2.18)), плотность числа мод (разрешенных конфигураций электромагнитной волны) по спектру и по величине телесного угла для свободного поля определяется соотношением

$$\frac{dN}{d\omega d\Omega} = \frac{V}{8\pi^3 c^3} \frac{\omega^2}{c^3} = \rho(\omega, \Omega). \quad (9.10)$$

Соответственно, для трехмерного резонатора, характеризуемого объемом  $V$ , получим

$$\Delta N \approx \frac{\omega^2 V}{2\pi^2 c^3} \Delta\omega. \quad (9.11)$$

Если рассматривать закрытую конфигурацию трехмерного резонатора, используемую в СВЧ-электронике, то можно сопоставить соотношению (9.11) выражение для скин-слоя — его толщина

определяется как  $\delta \sim \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma}}$   
 $(\sigma$  — проводимость стенок),  
 что, в свою очередь, позволяет определить  
 добротность такого  
 резонатора с размером  $d$  как  
 $Q \sim \frac{d}{\delta} \sim \sqrt{\omega}$ . Соответственно,  
 ширина моды в таком случае  
 с ростом частоты

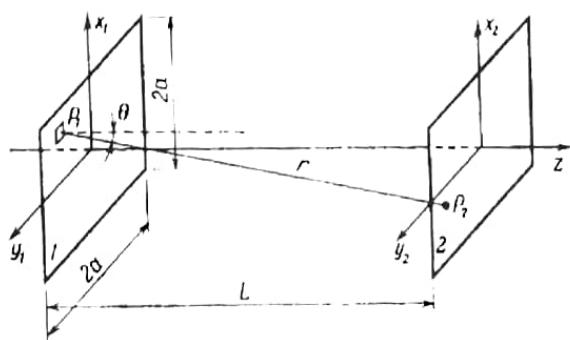


Рисунок 9.10

увеличивается по закону  $\Delta\omega = \frac{\omega}{Q} \sim \sqrt{\omega}$ .

Приведенные рассуждения показывают, что при переходе к высоким частотам, т.е. в оптическом диапазоне, в трехмерных закрытых резонаторах увеличивается, причем очень быстро (см. (9.11)), число возможных собственных мод, а также ширина отдельной моды. В результате теряется селективность резонатора, моды в спектре плотно перекрываются. Данное обстоятельство мешало в свое время появлению лазерных систем, пока не была осуществлена идея об *открытой конфигурации* резонатора (см. рисунок 9.10), в котором в качестве элемента, обеспечивающего оптическую обратную связь, используются только два зеркала с юстировкой по оси Z, без боковых стенок резонатора.

В открытой конфигурации резонатора у подавляющего большинства мод добротность резко падает (потери растут), в результате чего «выживает» только малая часть мод. Эту часть можно оценить примерно как:

$$K = \frac{N_{\text{открыт}}}{N_{\Sigma}} \sim \frac{a^2}{2L^2} (1-R)^2, \quad (9.12)$$

где  $a^2$  - поперечное сечение резонатора, определяемое размерами зеркал,  $R$  - коэффициент отражения зеркал по мощности,  $L$  - длина резонатора (расстояние между зеркалами). Подстановка в соотношение (9.12) характерных параметров оптических резонаторов, используемых в лазерной технике приводит к значениям коэффициента  $K \sim 10^6$  (твердотельные лазеры) и  $K \sim 10^9$  (газовые лазеры). При таких условиях можно говорить о восстановлении конкурентных селективных свойств в открытых резонаторах, в результате чего он становится способным поддерживать с достаточной добротностью колебания только небольшого числа собственных мод.

Можно записать в общем виде для каждой моды резонатора поле в виде:

$$\vec{E}_\lambda(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_\lambda \cdot a_\lambda(\vec{r}) \cdot \exp(i\omega_\lambda t - \frac{t}{2\tau_\phi}). \quad (9.13)$$

Здесь  $a_\lambda(\vec{r})$  - нормированное распределение электромагнитного поля в  $\lambda$  моде резонатора,  $\omega_\lambda$  - частота моды, а  $\tau_\phi$  - время жизни фотона в резонаторе. Последний параметр соответствует скорости релаксационного процесса убывания энергии моды в резонаторе и отражает уровень оптических потерь в моде поля.

Конфигурация полей в резонаторе может быть рассчитана на основе решения волнового уравнения с учетом специфики резонатора и его заполнения активной средой. В основе анализа - модифицированное уравнение (1.3), записанное для электрической напряженности поля с учетом потерь в резонаторе:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (9.14)$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость,  $\sigma$  – проводимость среды. В правой части присутствует слагаемое, отражающее потери и ток поляризации  $\dot{\vec{P}} = \sigma_{\text{стор}} \vec{E} = \vec{j}_{\text{стор}}$ . Решение (9.14) ищется в виде  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} E_{\lambda}(t) \cdot \vec{a}_{\lambda}(\vec{r})$ , где  $\vec{a}_{\lambda}(\vec{r})$  – пространственная мода резонатора с

учетом граничных условий на зеркалах. После разделения переменных получим два уравнения – для меняющейся во времени амплитуды поля и для резонаторной пространственной моды. Во временной области после преобразований получаем:

$$\ddot{E}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}}{Q_{\lambda}} \dot{E}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 E_{\lambda}(t) = -4\pi \chi (\ddot{\vec{P}} \cdot \vec{e}_{\lambda}), \quad (9.15)$$

где  $\chi$  – коэффициент заполнения резонатора средой, а  $\vec{e}_{\lambda}$  – единичный вектор поляризации моды поля в резонаторе.

Пространственная часть решения находится из волнового уравнения:

$$\Delta a_{\lambda}(\vec{r}) + k_{\lambda}^2 \cdot a_{\lambda}(\vec{r}) = 0. \quad (9.16)$$

Здесь волновое число  $k_{\lambda} = k'_{\lambda} + ik''_{\lambda}$ , записанное в комплексной форме:

$$k_{\lambda}^2 = \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \left( 1 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \right), \text{ т.е. } k'_{\lambda} = \frac{\omega_{\lambda}}{c} \text{ и } k''_{\lambda} = -\frac{2\pi\sigma}{c}. \quad (9.17)$$

С учетом специфики открытых оптических резонаторов:  $L \gg a$  – решение ищется в виде параксиальных мод ( $k_z \gg k_{x,y}$ ):

$$a_{\lambda}(\vec{r}) \approx a_{\lambda}^{(0)}(\vec{r}_\perp, z) \cdot e^{ik_{\lambda} z}. \quad (9.18)$$

Соответственно в процессе решения приходим к уравнению параболического типа в форме:

$$\Delta_{\perp} a_{\lambda}^{(0)} + 2ik \cdot \frac{\partial a_{\lambda}^{(0)}}{\partial z} = 0 \quad (9.19)$$

Решением является конфигурация поля в виде гауссова пучка

$$a_{\lambda}^{(0)}(\vec{r}_{\perp}, z) \approx \frac{A_0}{\sqrt{2k_{\lambda}(z - z_0)}} e^{ik_{\lambda} \frac{r_{\perp}^2}{2(z - z_0)}}. \quad (9.20)$$

Так, например, для моды так называемого конфокального резонатора с учетом его геометрии получаем:

$$E_{\lambda}(x, y, z, t) = \frac{w_0}{w} H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \cdot \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w^2} \right) \cdot e^{i\varphi(x, y, z)} \cdot e^{i\omega_{lm} t}. \quad (9.21)$$

Здесь  $w^2 = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{2z}{L}\right)^2\right)$  определяет ширину пучка, а  $w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}}$  – диаметр минимальной стяжки пучка в центре резонатора.

Теория формирования мод в открытом оптическом резонаторе была разработана в 60<sup>х</sup> годах прошлого века А.Фоксом, Т.Ли – для Фабри-Перо резонаторов, а Дж.Гордоном и Дж.Бойдом – для конфокального резонатора. Для вывода выражений для конфигураций поля в этих исследованиях использовалась модель последовательных итераций поля в линзовом волноводе. Следует отметить, что приведенные в (9.21) решения для мод поля отличаются по структуре от поперечных TEM-мод, характерных для СВЧ-волноводов и резонаторов.

Для оптических открытых конфигураций резонатора уровень потерь определяется числом Френеля  $N_{fp} = \frac{a^2}{\lambda L}$ . При  $N_{fp} > 1$  – справедливо приближение геометрической оптики, и структура оптических полей аналогична поперечным TEM-модам закрытого резонатора.

Приведем примерную классификацию типов оптических резонаторов, используемых в реальных лазерных системах.

1. Фабри-Перо резонатор с плоскими зеркалами.
2. Сферический резонатор ( $L = 2r_{kp}$ ),  $r_{kp}$  – радиус кривизны зеркал
3. Конфокальный резонатор ( $L = r_{kp}$ )
4. Составной резонатор.
5. Неустойчивые конфигурации резонаторов
6. Резонаторы со спектральной селекцией

Наиболее простым вариантом является **Фабри-Перо резонатор**, образуемый съюстированными плоскопараллельными зеркалами (рисунок 9.11). Такой резонатор характеризуется дискретным набором собственных частот:

$$\omega_{lmn} \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{l^2 + m^2}{n} \cdot \frac{L}{4a^2} + \frac{2n}{L} \right) \quad (9.22)$$

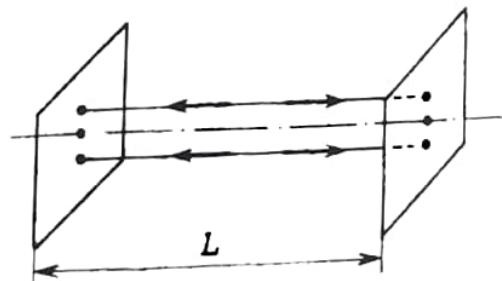


Рисунок 9.11

Другие специфические свойства Фабри-Перо резонатора, описывающие характеристики конфигураций полей, формируемых в нем:

1. Однородные плоские волны не являются нормальными модами Фабри-Перо резонатора. Тем не менее, структура мод Фабри-Перо резонатора близка к поперечным модам.

2. Моды более высокого порядка имеют больший уровень дифракционных потерь.

3. Для основной моды (с нулевыми поперечными индексами  $l$  и  $m$ ) профиль моды характеризуется сильным спаданием интенсивности к краям зеркал.

При разработке лазерных систем часто используются также две положение конфигурации на основе сегментов сферических зеркал – **конфокальный** (рис.9.12а) и **сферический** (рис.9.12б) **резонаторы**.

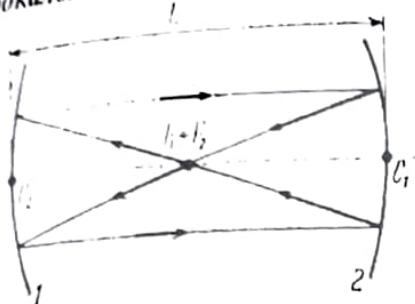


Рисунок 9.12а

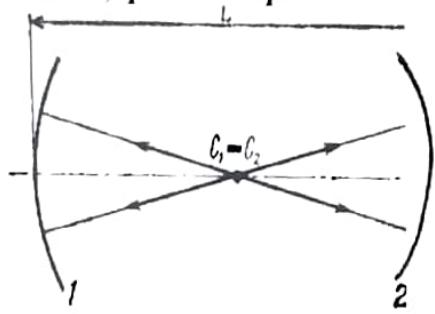


Рисунок 9.12б

Структура полей в этих типах резонаторов определяется, как уже отмечалось, выражением (9.21). Профили фазовых фронтов в резонаторах подобного типа показаны на рисунке. В центре резонатора этот фронт всегда плоский в симметричных резонаторах. При удалении от центра радиус кривизны волнового фронта и диаметр пучка меняется вдоль резонатора по

$$\text{закону } R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0}{\lambda z} \right)^2 \right]$$

$$\text{и } w(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2},$$

соответственно.

Наконец, собственные частоты для конфокального (или сферического) оптического резонатора можно найти по формуле :

$$\omega_{lmn} = \frac{\pi c}{L} \left[ n + (1 + m + l) \cdot \frac{\arccos(\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right]. \quad (9.23)$$

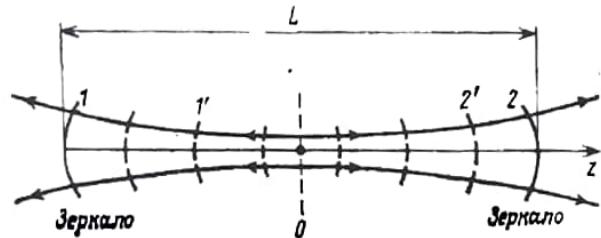


Рисунок 9.13

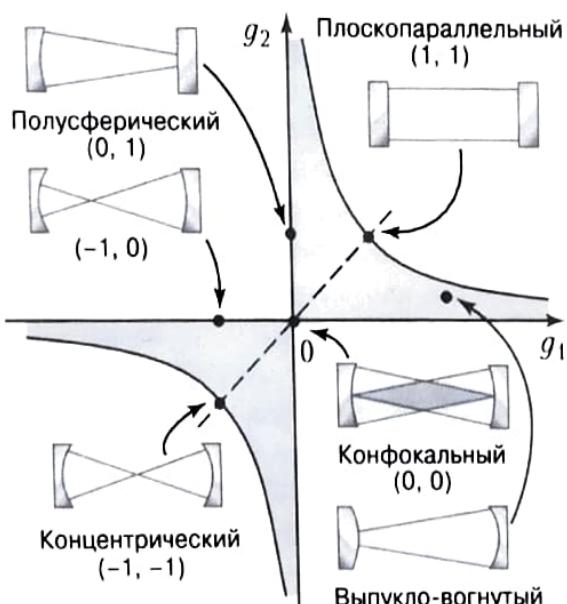


Рисунок 9.14

Здесь через  $g_1$  и  $g_2$  обозначены безразмерные параметры, связанные с длиной резонатора с радиусом кривизны каждого из двух зеркал:

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad \text{и} \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}. \quad (9.24)$$

Введенные таким образом параметры  $g_1$  и  $g_2$  удобно использовать для оценки такого свойства как устойчивость разных конфигураций резонаторов. На рисунке 9.14 представлены точками несколько вариантов используемых в лазерных схемах резонаторов.

Можно показать, что условие устойчивости резонатора выглядит следующим образом:

$$0 < g_1 \cdot g_2 = \left(1 - \frac{L}{r_1}\right) \left(1 - \frac{L}{r_2}\right) < 1. \quad (9.25)$$

Из рисунка 9.14 видно, что все три рассмотренные выше конфигурации резонаторов в соответствии с (9.24) и (9.25) попадают на границы области устойчивости. Это приводит к тому, что наличие в реальных условиях эксплуатации ненулевых вариаций параметров схемы (шумов разной природы) может привести к разрушению когерентной генерации такого излучателя, что безусловно является нежелательным.

Чтобы избежать таких режимов работы, на практике используются **составные конфигурации резонаторов**, например, полуконфокальный резонатор, имеющий в схеме одно сферическое и одно плоское зеркало. Другой пример составного резонатора представляет собой конфигурация с дополнительным внешним резонатором, т.е. трехзеркальная схема, в которой параметры и поля основного резонатора лазера модулируются параметрами внешней части схемы. Если во внешней части резонатора присутствует **дисперсионный элемент**, то подобная схема будет производить дополнительно эффективную селекцию оптических потерь на разных частотах, что обеспечивает работу такого излучателя в устойчивом одночастотном режиме.

Необходимо отметить, что все перечисленные особенности являются идеальными параметрами, при анализе которых не были учтены отклонения параметров, присущие в реальных лазерных системах. К причинам неидеальности параметров резонаторов можно отнести, например, следующий ряд факторов:

1. Оптическая неоднородность активной среды, заполняющей резонатор;
2. Неоднородность накачки;
3. Влияние эффекта насыщения на динамику разных мод;
4. Разъюстировка зеркал;
5. «Акусто-геометрические» шумы.

В целом можно утверждать, что независимо от конкретного типа оптического резонатора все они выполняют основную функцию – обеспечивают положительную оптическую обратную связь, необходимую

для осуществления лазерной генерации. С энергетической точки зрения основными параметрами резонатора, отвечающими за эффективность его работы, являются **уровень оптических потерь** в резонаторе и определяемое ими значение **добротности резонатора**.

Потери в резонаторе  $\alpha$  можно условно разделить на **внутренние распределенные** потери, присутствующие в активной среде, **дифракционные** потери, обусловленные открытой конфигурацией резонатора и соответствующими дифракционными краевыми эффектами, а также **излучательными потерями** (потери на излучение), определяемые уровнем излучения лазера, выводимым наружу через полупрозрачные зеркала.

$$\alpha = \alpha_{\text{внутр}} + \alpha_{\text{дифр}} + \alpha_{\text{излуч}} \quad (9.26)$$

Добротность резонатора в соответствии с определением данного параметра записывается как

$$Q = 2\pi \frac{U_\Sigma}{|\bar{U}^T_{\text{ном}}|} = \omega \frac{U_\Sigma}{\left| \frac{\Delta U}{\Delta t} \right|}, \quad (9.27)$$

где  $U_\Sigma$  - суммарная энергия ЭМП,  $|\bar{U}^T_{\text{ном}}|$  - мощность потерь за период колебаний поля (с учетом знака) т.е. скорость убывания поля в резонаторе. Общее соотношение (9.27) может рассматриваться с учетом знака как дифференциальное уравнение для энергии конкретной моды  $U_\lambda$  поля в резонаторе:

$$\frac{dU_\lambda}{dt} = -U_\lambda \frac{\omega_\lambda}{Q}. \quad (9.28)$$

Решение этого уравнения, таким образом, приводит к выражению, связывающему добротность резонатора с временем жизни фотона в резонаторе:

$$U_\lambda(t) = U_\lambda(0) \cdot e^{-\frac{\omega_\lambda t}{Q}} = U_\lambda(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_\phi}}. \quad (9.29)$$

Декремент затухания в (9.29) определяется суммарным уровнем потерь (9.26). При разработке лазерных источников в результате оптимизации параметров активной среды и резонатора увеличение добротности обеспечивается за счет уменьшения внутренних и дифракционных потерь. Однако полностью устраниТЬ оптические потери принципиально нельзя, так как излучательные потери отражают полезные потери, имеющие смысл излучаемой мощности лазера.

Для Фабри-Перо резонатора с коэффициентами отражения зеркал  $R$ , без учета дифракционных потерь, выражение для добротности принимает упрощенную форму:

$$Q = \frac{\omega L \sqrt{R}}{c(1-R)} = \frac{kL\sqrt{R}}{1-R}. \quad (9.30)$$

Фактор «резкости» резонатора, определяемый как отношение межмодового спектрального интервала  $\delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$  (см. соотношение (9.22)) к ширине моды резонатора  $\Delta\omega$ , зависит в этом случае только от коэффициентов отражения зеркал и определяется соотношением

$$\frac{\delta\omega}{\Delta\omega} = \frac{\pi c}{L} \cdot \left( \frac{L}{c} \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}. \quad (9.31)$$

## 9.5. Условие самовозбуждения оптического квантового генератора. Порог генерации

Основной принцип реализации лазера – создание положительной оптической обратной связи с помощью резонатора. Увеличение времени жизни фотона в резонаторе (т.е. времени взаимодействия поля с активным веществом) приводит к нарастанию интенсивности электромагнитных волн. При определенных соотношениях между коэффициентом усиления в среде и уровнем суммарных потерь (9.26) возникают условия существования в резонаторе, заполненном активной средой, самоподдерживающихся колебаний – начинается генерация на одной или нескольких модах резонатора.

Рассмотрим на основе энергетической модели, что собой представляет данное **условие самовозбуждения** лазера. Пусть имеется плоскопараллельный резонатор Фабри-Перо, заполненный активной средой, и электромагнитная волна фиксированной частоты распространяется вдоль оси резонатора, отражаясь попеременно от зеркал (см. рисунок 9.15). Тогда последовательное изменение интенсивности волны после серии последовательных пролетов резонатора ( $\langle + \rangle$  - по направлению оси  $Z$ ,  $\langle - \rangle$  - в обратном направлении) и отражения от зеркал выглядит следующим образом (без учета фазовых соотношений):

$$I^+(z=0) = I_0;$$

$$I^+(z=L) = I_0 \cdot \exp((g - \alpha_0)L);$$

$$I^-(z=L) = R_2 I_0 \cdot \exp((g - \alpha_0)L);$$

$$I^-(z=0) = R_2 I_0 \cdot \exp(2(g - \alpha_0)L);$$

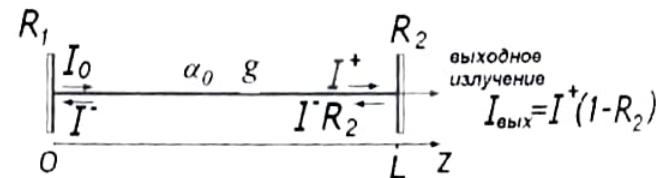


Рисунок 9.15

$$I^+(z=0) = R_1 R_2 I_0 \cdot \exp(2(g - \alpha_0)L).$$

Здесь  $\alpha_0$  – внутренние (+ дифракционные) потери в среде,  $R_1$  и  $R_2$  – коэффициенты отражения зеркал по мощности. Условие самовозбуждения будет выполнено, если в результате полного облета резонатора волна по крайней мере не будет ослаблена:

$$I^+(z=0) = R_1 R_2 I_0 \cdot \exp(2(g - \alpha_0)L) \geq I_0. \quad (9.32)$$

После логарифмирования получим:

$$g \equiv g_{nop} \geq \alpha_0 + \frac{1}{2L} \ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) = \alpha_0 + \alpha_{u_{zi}}. \quad (9.33)$$

Таким образом, колебания в резонаторе не будут затухать, *если усиление в активной среде компенсирует все виды потерь* (суммарные потери) в резонаторе.

Следует отметить, что кроме рассмотренного амплитудного условия для поддержания определенных типов колебания требуется еще и выполнение фазового условия, и в общем виде условие самовозбуждения может быть представлено в виде:

$$R_1 R_2 \cdot \exp(2(g - \alpha_0)L) \exp(-2ikL) \geq 1. \quad (9.34)$$

Однако по существу фазовое условие означает возможность существования в резонаторе набора собственных частот, для которых выполнены соответствующие граничные условия. Набор таких частот был рассмотрен ранее (см. выражения (9.22) и (9.23) для разных конфигураций резонатора). Отметим также, что лазер как источник «полезного» излучения всегда будет характеризоваться ненулевым уровнем излучательных потерь  $\alpha_{u_{zi}}$  в правой части условия (9.33). При этом плотность энергии электромагнитной моды в резонаторе может существенно отличаться от уровня интенсивности на выходе лазера.

Выходной к.п.д. лазера определяется соотношением излучательных потерь и суммы всех остальных потерь в резонаторе:

$$\text{k.p.d.} = \eta_{nump} \cdot \eta_{nump} = \eta_{nump} \cdot \frac{\alpha_{u_{zi}}}{\alpha_0 + \alpha_{u_{zi}}}. \quad (9.35)$$

Первый коэффициент в произведении  $\eta_{nump}$  соответствует эффективности преобразования энергии накачки в излучение в активной среде. С учетом выражения для коэффициента усиления (8.11) можно переписать условие самовозбуждения (9.33) в виде:

$$g_{nop} = \sigma_{u_{zi}} \cdot \Delta N \geq \alpha_z = \frac{1}{c\tau_\phi} = \frac{\omega}{cQ}. \quad (9.36)$$

Наконец, при необходимости с использованием (4.12) и (8.4) можно получить и развернутое выражение для порогового условия:

$$3\pi^2 A_{in} c^3 \frac{F(\omega)}{\omega_{21}^2} \cdot \Delta N \geq \frac{1}{\tau_\phi} = \frac{\omega}{Q} = \alpha_z c. \quad (9.37)$$

Соответственно, энергия накачки, при которой выполняются условия (9.33), (9.36), (9.37) и достигается пороговая инверсия, обеспечивающая генерацию, называется **пороговой энергией накачки** лазера. Из (9.37) также следует, что пороговая энергия накачки минимальна, если обеспечена максимальная добротность резонатора  $Q$ , что требует, в свою очередь, минимальных потерь на зеркалах. Однако данное обстоятельство не означает, что надо стремлять коэффициент отражения выходного зеркала  $R \rightarrow 1$ , так как при этом выходная мощность излучателя будет стремиться к нулю. Поэтому на практике задача заключается в подборе оптимальных условий накачки и оптимальных коэффициентов отражения зеркал резонатора.

Рассмотрим вопрос о спектральном составе поля генерации лазера. Условие самовозбуждения будет выполняться в первую очередь для колебаний, обладающих повышенной добротностью, причем резонансные частоты должны быть расположены наиболее близко к максимуму спектральной линии усиления среды  $g(\omega)$ . Таким образом, вначале условие (9.33), (9.36) реализуется для одной, центральной частоты по отношению к спектральному контуру активного вещества  $g(\omega)$ .

В условиях однородного уширения линии усиления  $g(\omega)$  (см. рисунок 9.16) после достижения порога генерации на одной моде происходит быстрое насыщение усиления на данной частоте из-за быстро растущей вероятности индуцированного лазерного излучения при условии дальнейшего увеличения накачки. Это приведет к тому, что вся дополнительная энергия накачки в пределах контура усиления будет перекачиваться в генерирующую моду. Эта особенность отличает лазерную активную среду от обычного пассивного спектрального фильтра. Фактически, несмотря на рост накачки в однородно уширенном контуре усиления будет происходить ограничение характеристик усиления на некотором стационарном (пороговом) уровне.

В предыдущем разделе 8 был проведен анализ проявления эффекта насыщения в средах с разным типом уширения линий. При появлении генерации лазера в условиях однородного уширения контура усиления взаимодействие мощного поля со средой внутри этого контура приводит к равномерному распределению накопленной инверсии для всех частот и к равномерному по всему спектру уменьшению коэффициента усиления с сохранением общей формы контура.

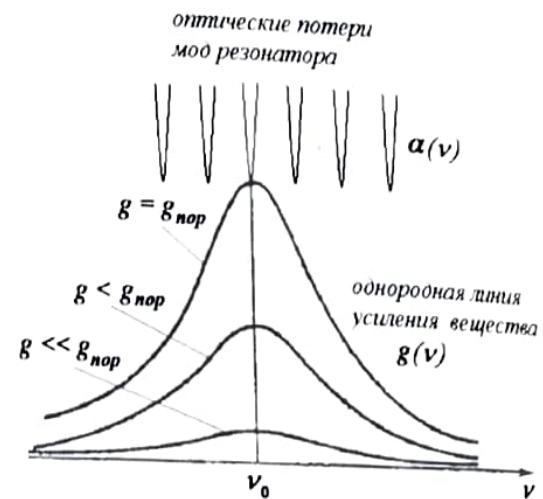


Рисунок 9.16

При неоднородном уширении линии усиления во взаимодействии с монохроматической волной будут участвовать только частицы, собственные частоты которых лежат вблизи частоты лазерной моды генерации. Увеличение интенсивности поля приведет в этом случае в появлению в спектре и нарастанию по глубине спектральных провалов («выжигание дыр»), причем ширина этих провалов, как правило, намного уже общей неоднородной ширины контура и соответствует по масштабу однородной зоне, определяемой значением релаксационного времени  $T_2$ . С учетом этой специфики генерация в подобных системах начинается на центральной моде, но в дальнейшем из-за продолжающегося нарастания усиления на боковых частотах (см. рисунок 9.17) условие самовозбуждения начинает выполняться и для других мод резонатора, обладающих меньшим значением добротности или расположеными дальше от центра линии усиления.

Таким образом, присущее неоднородному контуру усиления образование спектральных провалов является причиной **многомодовой генерации** лазерного излучателя, так как становится возможным почти независимое усиление полей мод, отстоящих друг от друга по частоте на величину, превышающую ширину провала.

Коэффициент усиления неоднородной среды в условиях насыщения полями многомодового лазерного излучения можно приближенно считать равным

$$g_{\text{неодн}}(\omega) = g_0 \cdot \exp \left( - \left( \frac{\omega_{ba} - \omega}{\Delta\omega_{\text{неодн}}} \right)^2 \right) \cdot \left[ 1 + \sum_q \frac{I(\omega_q)}{I_{\text{ max}} (\omega_q - \omega)^2 T_2^2 + 1} \right]^{-1} \quad (9.38)$$

Если спектральное расстояние между модами сравнимо с интервалом  $1/T_2$ , то провалы, вызванные насыщением среды, перекрываются между собой, и возникает **конкуренция мод**, взаимодействующих и влияющих друг на друга через общую инверсию. При этом контур  $g_{\text{неодн}}(\omega)$

оказывается

периодически промодулированным по частоте. Следует отметить, что к подобному эффекту, вызывающему многомодовую генерацию излучателя, может привести не только спектральная неоднородность ансамбля частиц активной

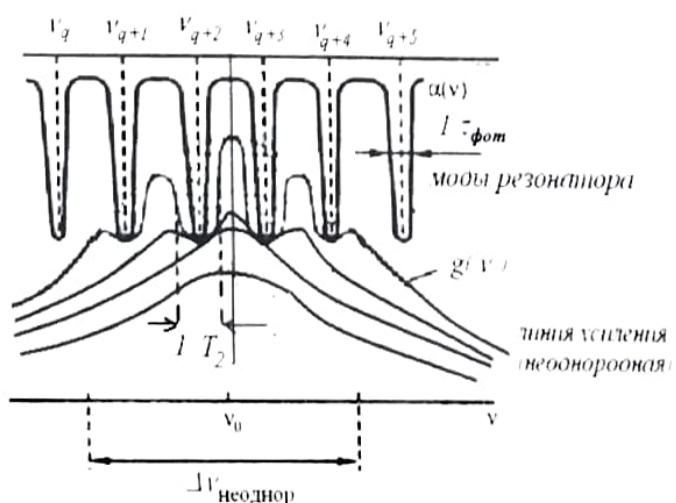


Рисунок 9.17

среды, но и наличие пространственной неоднородности активной среды, характерной для твердотельных и полупроводниковых сред.

В целом конкурентное взаимодействие мод приводит к нестационарным явлениям и неустойчивому многомодовому спектру генерации с различным соотношением интенсивностей отдельных мод. С другой стороны, идеальный лазер с однородно уширенной линией усиления должен демонстрировать режим устойчивой одномодовой генерации, что несомненно является преимущественным фактором в любых практических случаях использования лазерного излучения.

## 9.6. Источники шумов в лазерах. Ширина линии генерации. Эффект затягивания частоты генератора

Одночастотность, спектральная яркость и связанные с ними свойства монохроматичности и когерентности – важнейшая специфическая характеристика любого лазерного излучателя. Количественную оценку этой характеристики дает *ширина спектральной линии излучения (генерации)  $\Delta\omega_{gen}$* . Из (9.29), (9.30) следует, что ширина моды резонатора  $\Delta\omega_{res}$  определяется временем жизни фотона  $\tau_\phi^{-1}$ , а добротность  $Q$  и  $\tau_\phi$ , в свою очередь, определяются суммарными потерями в резонаторе. Таким образом,  $\Delta\omega_{res}$  – это «пассивная» характеристика моды так называемого «холодного» резонатора, без учета взаимодействия резонатора с полем генерации. Реальная ширина линии генерации  $\Delta\omega_{gen}$  в одночастотном режиме существенно ниже величины, определяемой  $\Delta\omega_{res}$ . Для оценки этого параметра требуется ввести в рассмотрение источники шума, присутствующие в лазерной системе.

Теоретический нижний предел для  $\Delta\omega_{res}$  обусловлен, как минимум, тремя основными факторами:

1. Флуктуации, обусловленные тепловым излучением в резонаторе;
2. Флуктуации, связанные со спонтанным излучением в активном веществе;
3. Акустические и технические шумы (резонатор, накачка).

Как уже отмечалось, в оптическом диапазоне частот спонтанное излучение является превалирующим фактором. Если считать его единственным источником шума в лазерной системе, то ширина линии генерации, обусловленная спектральным распределением флуктуаций, определяется модифицированной формулой Шавлова-Таунса (ширина линии генерации в одночастотном режиме):

$$\Delta\omega_{gen} \approx \frac{\hbar\omega_{gen} \cdot (\Delta\omega_{res})^2 n_{sp}}{M_{onm}} \cdot (1 + \gamma^2). \quad (9.39)$$

Здесь основным параметром, связанным с  $\Delta\omega_{gen}$ , является оптическая мощность лазерного излучения  $M_{onm}$ . Численный коэффициент  $n_{sp}$  учитывает термодинамические особенности активной среды ( $N_0/\Delta N_{nsp}$ ) и коэффициент спонтанного излучения в моде. Другой численный параметр –  $\gamma$ .

определяется как  $\gamma = -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{\partial n_{npe}}{\partial N}$  ( $n_{npe}$  – коэффициент преломления активной среды,  $g$  – коэффициент усиления) и проявляется в конденсированных и кристаллических активных средах. С учетом зависимости от параметров выражение (9.39) справедливо для лазера, работающего в стационарном непрерывном одномодовом режиме генерации и по сути отражает минимальное возможное значение  $\Delta\omega_{cen}$ , так как не учитывает технических шумов, всегда присутствующих на практике в реальных лазерах. Если произвести в соответствии с (9.39) оценку величины  $\Delta\omega_{cen}$  для газового  $He-Ne$ -лазера (вариант, характеризующийся минимальными шумами излучения), то при подстановке  $\lambda=0,63 \text{ мкм}$ ,  $M_{om} = 1 \text{ мВт}$ ,  $Q \sim 10^8$  возникает оценка  $\Delta\nu_{cen} \sim 0,2 \text{ Гц}$ . Но на практике лучшие значения, достигнутые в лаборатории, демонстрируют значения  $\Delta\nu_{cen} \sim 200 - 500 \text{ Гц}$ . Такое расхождение оценок отражает тот факт, что мгновенные вариации частоты в резонаторе лазера являются следствием акустических

вариаций оптической длины резонатора -  $\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta L}{L}$ , а контролировать длину резонатора (макроскопическую величину) с точностью  $10^{-12} \div 10^{-15}$  не представляется возможным даже в условиях жесткой стабилизации параметров.

Что касается импульсного режима работы, характерного для мощных лазерных источников излучения, то в соответствии с законами спектрально-временных преобразований параметр  $\Delta\omega_{cen}$  будет определяться длительностью импульса излучения -  $\Delta\omega_{cen} \sim \tau_{imp}$ , и происходит значительное уширение линии до значений  $\sim 1 \text{ ГГц}$  и выше.

Если рассматривать непосредственное значение самой частоты генерации лазера  $\omega_{cen}$ , то ее значение определяется в общем случае взаимным положением центральных значений линии усиления активной среды  $\omega_{ba}$ , положением «холодной» моды резонатора и соответствующими добротностями  $Q$  линий усиления и резонатора. В результате моделирования задачи о формировании поля генерации в лазерном резонаторе можно получить соотношение, которое принято называть **эффектом затягивания частоты**. Этот эффект проявляется, если изначально центр линии усиления  $\omega_{ba}$  не совпадает ни с одной из частот резонатора  $\omega_{per}$ . В результате лазер будет генерировать на частоте  $\omega_{cen}$ , определяемой следующим соотношением:

$$\omega_{cen} \approx \frac{\omega_{ba}/\Delta\omega_{ba} + \omega_{per}/\Delta\omega_{per}}{1/\Delta\omega_{per} + 1/\Delta\omega_{ba}} = \frac{\omega_{ba}\Delta\omega_{per} + \omega_{per}\Delta\omega_{ba}}{\Delta\omega_{ba} + \Delta\omega_{per}}. \quad (9.40)$$

Отметим, что в отличие от генераторов СВЧ-диапазона в лазерах всегда выполняется условие  $\Delta\omega_{усиления} > \Delta\omega_{резонатора}$ , в результате чего можно считать, исходя из (9.40), что  $\omega_{cen} \approx \omega_{per}$ . Это означает, что в оптических квантовых генераторах эффект затягивания частоты очень мал.

## 10. Динамика оптических квантовых генераторов

### 10.1. Полуклассическая динамическая модель описания лазера

При рассмотрении в предыдущем разделе основных принципов построения лазерных источников излучения использовались в основном стационарные параметры, характеризующие активную среду, оптический резонатор и распределение электромагнитных полей в лазере. С другой стороны, полученные ранее динамические уравнения (7.19), (7.20) и (9.15) позволяют проводить анализ временной зависимости основных характеристик лазерного излучения и не требуют дополнительной адаптации для использования в математической модели описания лазера. Первые два уравнения (7.19) и (7.20) были исходно получены из кинетического уравнения для динамики двухуровневой среды во внешнем резонансном поле, но при этом не содержат ограничений для использования их при описании инвертированных лазерных сред. По сути меняется только смысл параметра  $\Delta N^{(0)}$ , который для лазера выполняет функцию заданного с учетом накачки значения стационарной инверсии населенностей. Уравнение для поляризации вещества (7.19) по-прежнему содержит описание взаимодействия макроскопического дипольного момента среды с полем генерации лазера в условиях усиления в активной среде. Наконец, уравнение для электромагнитной моды поля (9.15) потенциально содержит (см. выражения (9.16), (9.18)) пространственные распределения полей в лазерном резонаторе с учетом конкретной конфигурации резонатора и граничных условий на зеркалах. Совокупность указанных уравнений, таким образом, приводит к математической модели описания динамики лазера (ОКГ) в рамках так называемого полуклассического приближения.

Необходимо также отметить, что в используемых в лазерных схемах трех- и четырех-уровневых средах наличие дополнительных уровней по отношению к модели двухуровневой среды не меняет принципиально структуры уравнений, так как в любом лазере тоже присутствует основной (рабочий) переход, а участие других уровней в процессе генерации может быть учтено через введение *эффективных параметров* этого перехода.

Таким образом, при использовании системы уравнений (7.19), (7.20) и (9.15) мы получаем замкнутую систему динамических самосогласованных уравнений – имеется три переменные и три уравнения, причем при необходимости можно ввести в рассмотрение и координатные зависимости и распределения динамических величин. Решение данной системы дает полную информацию о процессе генерации в лазерных средах за исключением проявления флуктуационных свойств излучения, требующих для своего анализа введения дополнительных ланжевеновских источников шума в уравнения для поля генерации и разности населенностей.

Однако в целом можно отметить, что решение полуклассических уравнений представляет собой сложную расчетную задачу из-за большого количества учитываемых параметров и сложной нелинейной динамики системы.

## 10. 2. Балансная модель описания лазера

Более простым для анализа динамики лазера подходом является модель на основе так называемых *уравнений баланса (скоростных уравнений)*, в которой рассматриваются только амплитудные (а точнее – мощностные) параметры генерации, и не сохраняется информация о фазовых соотношениях электромагнитных полей. Балансная система уравнений может быть записана в результате феноменологического описания процессов, протекающих в лазерной системе, причем в качестве переменных используется пара связанных характеристик – *разность населенностей на рабочем переходе и мощность генерации (число фотонов в генерирующей моде поля)*.

Рассмотрим балансную модель с привлечением проанализированной ранее в разделе 9.2 четырехуровневой модели лазерной среды (см. рисунок 10.1). Будем считать, что в лазере генерируется только одна мода с индексом  $\lambda$ , и описание ее интенсивности будем осуществлять на языке числа фотонов в данной моде –  $n_\lambda$ . При таком подходе, как уже отмечалось, мы теряем информацию о фазовых соотношениях параметров, когерентности излучателя и т.п., но сохраняем все основные энергетические характеристики. Четырехуровневая схема (рисунок 10.1) может быть заменена эквивалентной двухуровневой моделью, где инверсия на рабочем переходе  $\Delta N = N_3 - N_2$ . Но для исходного состояния равновесия системы можно положить  $N_4 \approx N_3 \approx N_2 \approx 0$ , так как в исходном состоянии равновесия все энергетические уровни, кроме основного, не заселены (если не учитывать незначительное заполнение второго уровня «хвостом» теплового распределения), причем  $N_4 \approx N_2 \approx 0$  и при наличии накачки. Тогда уравнение для инверсии  $\Delta N$  будет эквивалентно уравнению для  $N_3$ , а  $N_1 \approx N_0 - N_3$ , т.е. выражается через суммарную концентрацию, которая выполняет функцию константы.

Как уже отмечалось, вид балансных уравнений носит феноменологический характер и учитывает все процессы, изменяющие концентрацию носителей на верхнем уровне рабочего перехода (инверсию) и число фотонов в поле генерации:



Рисунок 10.1

может быть заменена эквивалентной двухуровневой моделью, где инверсия на рабочем переходе  $\Delta N = N_3 - N_2$ . Но для исходного состояния равновесия

системы можно положить  $N_4 \approx N_3 \approx N_2 \approx 0$ , так как в исходном состоянии равновесия все энергетические уровни, кроме основного, не заселены (если не учитывать незначительное заполнение второго уровня «хвостом» теплового распределения), причем  $N_4 \approx N_2 \approx 0$  и при наличии накачки. Тогда уравнение для инверсии  $\Delta N$  будет эквивалентно уравнению для  $N_3$ , а  $N_1 \approx N_0 - N_3$ , т.е. выражается через суммарную концентрацию, которая выполняет функцию константы.

Как уже отмечалось, вид балансных уравнений носит феноменологический характер и учитывает все процессы, изменяющие концентрацию носителей на верхнем уровне рабочего перехода (инверсию) и число фотонов в поле генерации:

$$\begin{cases} \dot{N}_3 = Y_{\text{нак}} \cdot N_1 - B_{32} \cdot n_\lambda \cdot N_3 - \frac{N_3}{\tau_e} \\ \dot{n}_\lambda = \left( V_a \cdot B_{32} \cdot N_3 - \frac{1}{\tau_{\text{фотом}}} \right) \cdot n_\lambda + \frac{V_a \cdot \beta_{\text{сп}} \cdot N_3}{\tau_e} \end{cases} \quad (10.1)$$

В этой системе уравнений  $Y_{\text{нак}}$  – вероятность процесса накачки,  $\tau_e$  – время жизни носителя (электрона) на верхнем уровне рабочего перехода,  $B_{32}$  – коэффициент Эйнштейна для индуцированных переходов с рабочей частотой,  $V_a$  – объем активной среды, участвующей в процессе генерации,  $\tau_{\text{фотом}}$  – время жизни фотона в резонаторе лазера, и наконец,  $\beta_{\text{сп}}$  – коэффициент спонтанного излучения в моду, соответствующий по величине  $\sim A_{\text{сп}} \Delta \omega_{\text{рез}} \Delta Q$ , т.е. показывающий долю спонтанно излученных фотонов, которые по своим характеристикам соответствуют индуцированной волне генерации.

В режиме развитой генерации мощность индуцированного излучения намного превышает спонтанный фон, поэтому в уравнении для числа фотонов вклад последнего слагаемого оказывается пренебрежимо мал. Однако физическая модель лазера должна учитывать это слагаемое на пороге генерации, когда  $n_\lambda = 0$  (фотонов в моде генерации еще нет), так как без учета спонтанного излучения производная от  $n_\lambda$  останется равной 0 независимо от уровня накачки, и в рамках такого рассмотрения лазер не выйдет на режим генерации. Иными словами, спонтанное излучение играет в лазерах роль исходной энергетической «затравки» на рабочей частоте, и именно из спонтанного излучения развивается волна генерации.

Таким образом, для развитой генерации можно записать

$$\begin{cases} \dot{N}_3 = Y_{\text{нак}} \cdot (N_0 - N_3) - B_{32} \cdot n_\lambda \cdot N_3 - \frac{N_3}{\tau_e} \\ \dot{n}_\lambda = \left( V_a \cdot B_{32} \cdot N_3 - \frac{1}{\tau_{\text{фотом}}} \right) \cdot n_\lambda \end{cases} \quad (10.2)$$

Данная система уравнений позволяет проводить анализ как стационарных характеристик излучения, включая пороговые условия, так и работы лазера в нестационарном, например, импульсном режиме генерации.

### 10.3. Стационарный (непрерывный) режим генерации

Условие стационарного режима генерации лазера реализуется, если производные в уравнении (10.2) обращаются в ноль:  $\dot{N} = \dot{n}_\lambda = 0$ . Тогда из второго уравнения с учетом того, что при генерации  $n_\lambda > 0$ , получаем  $V_a \cdot B_{32} \cdot N_3 - 1/\tau_{\text{фотом}} = 0$  или

$$N_{3\text{стаци}} = N_{\text{нор}} = \frac{1}{V_a \cdot B_{32} \cdot \tau_{\text{фотом}}} \quad (10.3)$$

Данное соотношение означает, что при всех значениях накачки, начиная с порогового уровня и выше, будет реализовываться одно и то же значение накопленной на рабочем переходе инверсии (если не учитывать нелинейный вклад в усиление при больших значениях мощности генерации). Характерная зависимость инверсии (или усиления в активной среде) от накачки представлена на рисунке 10.2. Отметим, что характер изменения уровня инверсии в допороговом режиме излучателя определяется конкретными особенностями среды и не всегда подчиняется линейному закону.

Из первого уравнения системы (10.2) можно определить минимальную величину вероятности накачки  $Y_{\text{nop}}$ , при которой реализуется пороговый уровень инверсии:

$$Y_{\text{nop}} = \frac{N_{\text{nop}}}{N_0 - N_{\text{nop}}} \cdot \frac{1}{\tau_e}. \quad (10.4)$$

Следует отметить, что данное соотношение отражает специфику генерации в четырехуровневой схеме лазерной среды, для которой в соответствии с рассмотренной выше моделью (см. (9.7), (9.9))  $Y_{\text{nop}} < 1/\tau_e$ . В случае трехуровневой модели аналогичное (10.4) выражение принимает вид:

$$Y_{\text{nop}} = \frac{N_0 + N_{\text{nop}}}{N_0 - N_{\text{nop}}} \cdot \frac{1}{\tau_e} \quad (10.5)$$

т.е. в такой схеме требуется гораздо более высокий уровень внешней накачки (см. соотношение (9.4)).

Наконец, можно исходя из первого уравнения системы (10.2) оценить с учетом (10.3) и (10.4) стационарное значение для числа фотонов в генерируемой моде. Для лазера, работающего выше порога генерации в стационарном режиме,

$$n_\lambda = n_{\text{смеш}} = V_a \cdot \tau_{\phi\text{ом}} \cdot \left( Y(N_0 - N_{\text{nop}}) - \frac{N_{\text{nop}}}{\tau_e} \right) = \frac{V_a \cdot N_{\text{nop}} \cdot \tau_{\phi\text{ом}}}{\tau_e} \cdot \left( \frac{Y}{Y_{\text{nop}}} - 1 \right). \quad (10.6)$$

Соответственно, для мощности излучения лазера, с учетом размерных коэффициентов, получим

$$M_\lambda = \frac{V_a \cdot N_{\text{nop}} \cdot \tau_{\phi\text{ом}}}{\tau_e} \cdot \frac{\hbar\omega_\lambda}{\tau_{\text{изл}}} \left( \frac{Y}{Y_{\text{nop}}} - 1 \right) \cdot \eta_1, \quad (10.7)$$

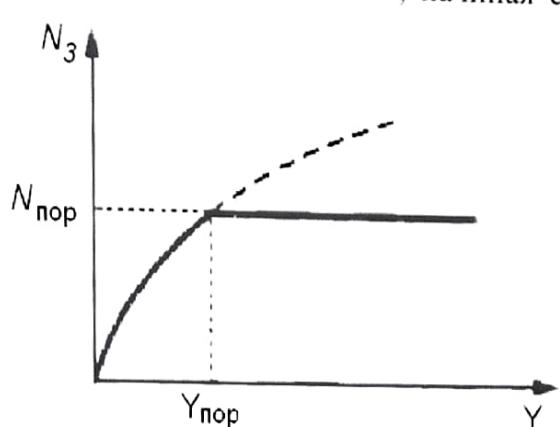


Рисунок 10.2

где  $\tau_{u33} = \frac{1}{\alpha_{u33} \cdot c}$ , а к.п.д. при выводе излучения через «рабочее» зеркало резонатора определяется исходя из значений коэффициентов отражения зеркал как

$$\eta_1 = \frac{\alpha_{1u33}}{\alpha_{1u33} + \alpha_{2u33}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)} = \frac{\ln R_1}{\ln R_1 + \ln R_2}. \quad (10.8)$$

Таким образом, в условиях стационарного режима основная энергетическая характеристика лазера – зависимость мощности излучения от уровня накачки - имеет два характерных участка (рисунок 10.3): для уровня накачки ниже порогового в излучении присутствует только слабый спонтанный фон, а выше порога характер зависимости резко меняется, переходя в соответствии с (10.7) к линейному росту мощности излучателя за счет увеличивающейся энергии накачки при сохраняющемся неизменным уровне усиления в среде.

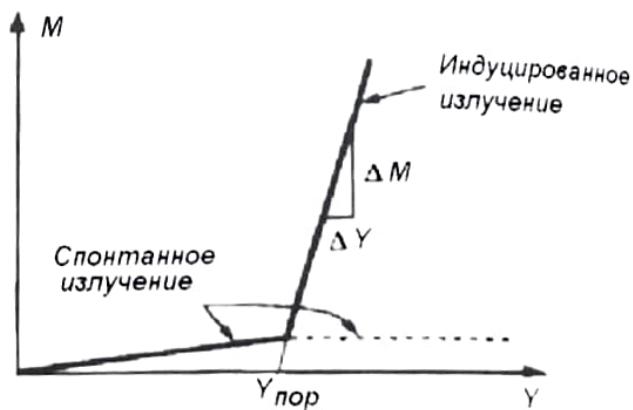


Рисунок 10.3

#### 10.4. Нестационарный режим генерации лазера

В общем случае, как это следует из системы (10.2), характеристики лазерного излучателя зависят от времени. Такой вариант реализуется, например, при импульсном режиме генерации, когда и процесс накачки, и генерация лазера имеют вид периодических коротких и мощных импульсов. Таким образом, наличие импульсного закона изменения уровня накачки приводит к аналогичному проявлению и в параметрах среды и электромагнитного поля генерации:  $Y_{нак} = Y_{нак}(t) \rightarrow N = N(t); n_i = n_i(t)$ . В качестве характерного примера нестационарного процесса в динамике лазера можно рассмотреть переходный режим в ОКГ, возникающий при выходе на генерацию после включения накачки. Исходная система уравнений (10.2) решается в этом случае с использованием начальных условий по накачке в виде функции Хэвисайда:  $Y = 0$  при  $t \leq 0$  и  $Y = Y_0$  при  $t > 0$ .

Для вычисления отклика лазера на такой режим возбуждения требуется провести линеаризацию уравнений, т.е. разделить обе переменные

на стационарную, не зависящую от времени часть, и вариационную компоненту, которая и отражает нестационарную динамику лазера:

$$N(t) = N_{cm} + \delta N(t) \quad n_\lambda(t) = n_{\lambda cm} + \delta n_\lambda(t). \quad (10.9)$$

Для такой постановки задачи из системы уравнений (10.2) после линеаризации получаем

$$\begin{cases} \delta \dot{N} = -\delta N \left( Y_0 + \frac{1}{\tau_e} \right) - B_{32} (n_{\lambda cm} \cdot \delta N + N_{cm} \cdot \delta n_\lambda) \\ \delta \dot{n}_\lambda = \left( V_a B_{32} N_{cm} - \frac{1}{\tau_{dpm}} \right) \cdot \delta n_\lambda + V_a B_{32} n_{\lambda cm} \cdot \delta N \end{cases}. \quad (10.10)$$

Решение линеаризованной системы (10.10) записывается в виде осцилляторных решений, сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} \delta n_\lambda(t) &= A_1 \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \sin(\Omega_0 t + \varphi) \text{ и} \\ \delta N(t) &= A_2 \cdot \frac{\Omega_0}{B_{32} n_{\lambda cm} V_a} \cdot \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \cos(\Omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Здесь  $t_0 = \frac{2}{Y_0 + \frac{1}{\tau_e} + B_{32} n_{\lambda cm}}$ , а  $\Omega_0^2 = B_{32}^2 \cdot N_{cm} \cdot n_{\lambda cm} \cdot V_a$ .

Таким образом, решение системы линеаризованных дифференциальных уравнений приводит к режиму регулярного «пичкования», представленному качественно на рисунке 10.4. Отметим, что характерные значения констант, определяющих вид решения для твердотельных лазерных систем (для характерных величин параметров  $L = 1 \text{ м}$   $Y_0/Y_{nop} = 1,1$ ), имеют значения  $t_0 \approx 1,7 \text{ мсек}$  для рубинового и  $t_0 \approx 0,3 \text{ мсек}$  для неодимового лазера. Период осцилляций при этом практически одинаков для обоих типов лазеров и составляет  $T = 2\pi/\Omega_0 \approx 60 \text{ мксек}$ . С ростом уровня накачки  $Y_0$  оба временных параметра  $T$  и  $t_0$  уменьшаются по своим значениям.

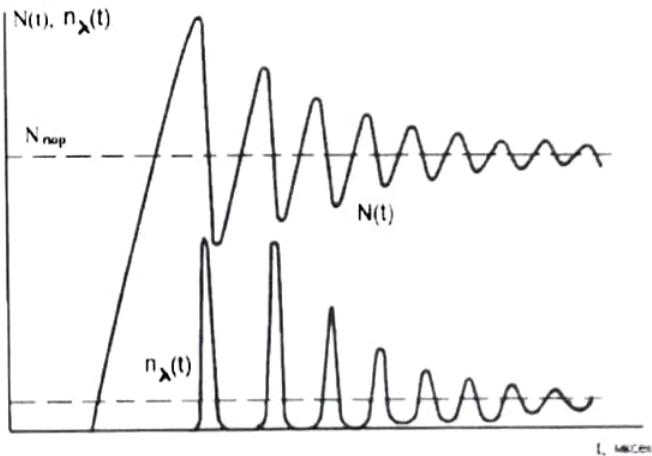


Рисунок 10.4

## 10.5. Методы управления лазерным излучением. Повышение пиковой мощности генерации

Многочисленные практические методы использования лазерных источников требуют осуществления прецизионного управления параметрами излучения, и в первую очередь, - управления мощностью излучения. Методы управления параметрами достаточно разнообразны и позволяют реализовать

требуемые режимы работы излучателей. Остановимся в заключение рассмотрения динамических режимов лазеров на нескольких основных способах реализации генерации с предельно высокими значениями пиковой мощности.

### 1. Модуляция добротности резонатора

Идея данного метода заключается в быстром (мгновенном) переключении добротности лазерного резонатора. Такое переключение добротности резонатора эквивалентно соответствующему быстрому управляемому изменению времени жизни фотона в резонаторе

$$\Delta t_{\text{перекл}} < T = \frac{2\pi}{\Omega_0},$$

т.е. время переключения добротности должно быть меньше

характерного масштаба времени развития генерации (см. (10.11)).

Для реализации рассматриваемого метода управления добротностью резонатора могут использоваться различные технические решения, которые формально можно поделить на три группы с учетом специфики управляющего элемента.

**Оптикомеханический затвор.** Основной элемент оптической схемы – углковый отражатель в качестве одного из зеркал резонатора. При механическом вращении такого отражателя вокруг оси периодически возникает пространственное положение, когда данный элемент выполняет функцию зеркала резонатора и отражает волну вдоль оси обратно в активную среду (рисунок 10.5). Весь оставшийся временной интервал между этими фиксированными положениями оптическая обратная связь вдоль оси резонатора отсутствует, и лазерная генерация невозможна.

**Электрооптический модулятор (затвор) на основе эффекта Керра или эффекта Поккельса.** В данной разновидности схемы (рисунок 10.6) внутри резонатора лазера размещен электрооптический элемент на основе нелинейного кристалла, прозрачный для излучения или выполняющий роль оптического фильтра – в зависимости от приложенного внешнего

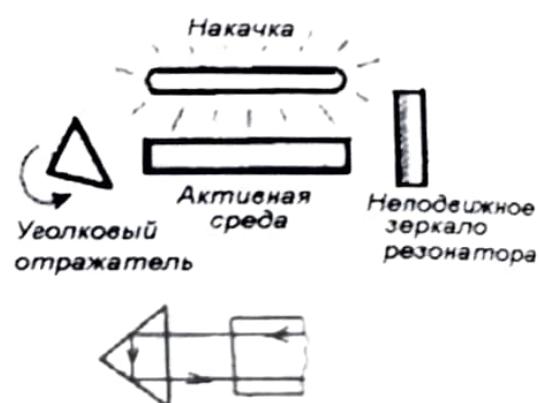


Рисунок 10.5

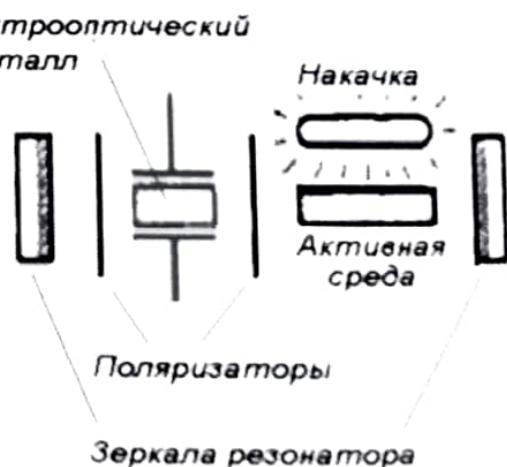


Рисунок 10.6

напряжения. Современные модуляторы излучения способны осуществлять скоростную модуляцию поляризации или фазы электромагнитной волны на частотах, превышающих сотни мегагерц, что вполне достаточно для обеспечения требуемого быстрого переключения добротности схемы.

**Нелинейный насыщающийся поглотитель.** Метод управления основан на реализации метода управления, основанного на использовании элемента, помещенного внутри резонатора, обладающего способностью к сильному насыщению лазерной волны (из-за более высокой, чем у лазерной среды, величины сечения поглощения) и влияющему таким образом на развитие генерации. Конкретный тип поглотителя подбирается с учетом соответствия рабочего перехода в нем частоте генерации лазерной волны.

Наиболее простой для

### Насыщающийся поглотитель

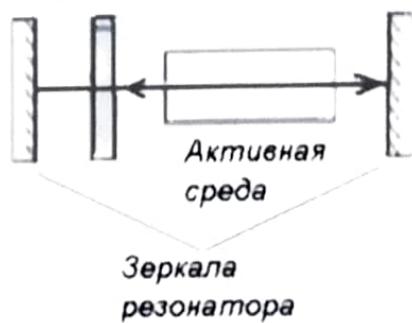


Рисунок 10.7

## 2. Генерация «гигантских» импульсов

Рассмотрим с привлечением математической модели процесс формирования импульсного режима генерации в виде периодического следования мощных («гигантских», giant) лазерных импульсов. На начальном этапе для режима с низким значением добротности в такой системе идет накопление инверсии

$$\text{по закону: } N(Y) \approx \frac{N_0 Y \tau_e}{1 + Y \tau_e} \quad (\text{см.}$$

первое уравнение 10.2). В определенный момент времени в среде возникает уровень инверсии, с большим запасом превышающий необходимое пороговое условие для лазера с обычной, высокой добротностью, однако в результате управления в системе все еще поддерживается крайне низкое значение добротности (см. рисунок 10.8). Таким образом,

$$N(Y) \leq N_{\text{пор}}^* = \frac{1}{V_a B_{\text{дв}} \tau_\phi^*} \quad (10.12)$$

(аналог (10.3), где звездочкой обозначено состояние низкой добротности системы). В результате генерация лазера к этому моменту отсутствует, но в системе накоплен большой запас энергии для последующей трансформации в

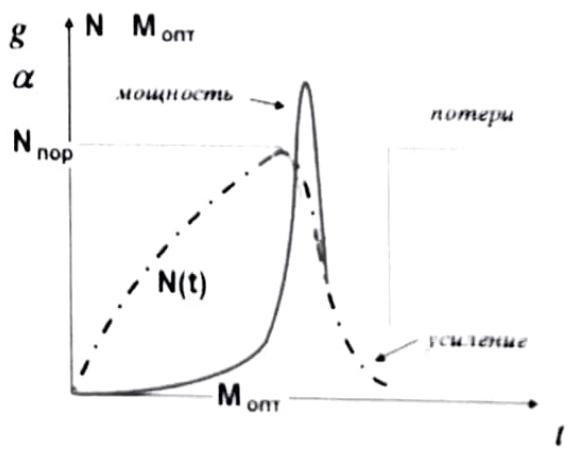


Рисунок 10.8

световое поле. Следующим шагом производится внешнее быстрое переключение добротности одним из описанных выше способов.

В результате для описания такого режима лазера используем систему балансных динамических уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{N}_3 = -B_{32} \cdot n_\lambda \cdot N_3 \\ \dot{n}_\lambda = \left( V_a \cdot B_{32} \cdot N_3 - \frac{1}{\tau_{\phi,om}} \right) \cdot n_\lambda \end{cases} \quad (10.13)$$

Высокое значение накопленной инверсии позволяет пренебречь в первом уравнении исходной системы (10.2) медленно меняющимися накачкой и релаксационным процессом. Решение второго уравнения для сформированных с учетом (10.8) начальных условий по уровню инверсии приводит к зависимости вида:

$$n_\lambda(t) \approx n_{0,\lambda} \cdot \exp \left\{ \left( V_a B_{32} N_3(t) - \frac{1}{\tau_\phi} \right) t \right\}. \quad (10.14)$$

Характерный график процесса генерации в виде короткого импульса с  $\Delta\tau_{um}$  приведен на рисунке 10.8. Отметим, что быстро развивающаяся в условиях нелинейности генерация приводит к сопровождающему резкое нарастание энергии генерации сильному опустошению накопленного запаса инверсии и соответственно, в определенный момент времени – к смене знака в показателе экспоненты. В результате происходящего процесса возникает генерация мощного импульса, энергия которого может быть учтена следующим соотношением:

$$U = M_{onm} \cdot \Delta\tau_{um} = \frac{\hbar\omega}{\tau_{uzl}} \cdot n_\lambda \cdot \Delta\tau_{um} \sim \hbar\omega \cdot \frac{\alpha_{uzl}}{\alpha_\Sigma} \cdot V_a \cdot \frac{N^* - N_{ocm}}{2}. \quad (10.15)$$

В данном выражении  $N^*$  – накопленный запас инверсии в режиме низкодобротного резонатора (к моменту переключения),  $N_{ocm}$  – остаточный уровень инверсии после высвечивания гигантского импульса. Остальные обозначения соответствуют модели балансных уравнений (10.2). Следует отметить, что типичные длительности импульса генерации составляют обычно  $\Delta\tau_{um} \leq 1\text{нсек}$ , что приводит к достижению пиковых значений мощности генерации  $M_{onm}$  на уровне десятков киловатт и выше.

### 3. Синхронизация мод в лазерах

Данная методика используется для лазеров с широкой линией усиления и многочастотным спектром генерации. В основе реализуемого режима работы лежит принцип интерференционного (сфазированного) сложения большого числа продольных мод излучения.

Основным условием такого сложения является наличие в спектре излучения лазера большого числа  $(2n+1)$  примерно одинаковых по интенсивности мод, причем не менее важным становится также фазовое согласование мод, а именно – одинаковая фазовая расстройка для всех соседних мод:

$\varphi_q - \varphi_{q-1} = \varphi_0 = const$ . При выполнении этих условий общее суммарное поле всех мод генерации можно записать в виде (см. рисунок 10.9)):

$$E(t) = \sum_{q=-n}^n E_0 \cdot \exp \{i[(\omega_0 + q \cdot \Delta\omega)t + q\varphi]\} \quad (10.16)$$

Здесь  $E_0$  – напряженность (амплитуда) каждой из  $2n+1$  моды генерации,  $\omega_0$  – частота центральной моды,  $\Delta\omega$  – межмодовый частотный интервал. Суммирование полей в соотношении (10.16) на фазовой диаграмме приводит к выражению вида

$$E(t) = A(t) \cdot e^{i\omega_0 t} = E_0 \frac{\sin[(2n+1)(\Delta\omega t + \varphi)/2]}{\sin[(\Delta\omega t + \varphi)/2]} \cdot e^{i\omega_0 t} \quad (10.17)$$

Окончательно для интенсивности суммарного поля получаем

$$I(t) = I_0 \frac{\sin^2[(2n+1)(\Delta\omega t + \varphi)/2]}{\sin^2[(\Delta\omega t + \varphi)/2]} \quad (10.18)$$

Качественный вид представленной зависимости показан на рисунке 10.10.

Максимальная пиковая мощность излучения наблюдается в моменты времени, соответствующие фазовым набегам, обращающим числитель и знаменатель правой части в ноль. При этом уровень пиковой мощности составляет  $I_{max} = I_0 \cdot (2n+1)^2$ . Следует учесть, что в случае не интерференционного сложения аналогичного числа генерирующих мод со случайными фазами результат окажется равным  $I_{max} = I_0 \cdot (2n+1)$ .

Таким образом, использование режима синхронизации мод позволяет получить выигрыш в мгновенном значении интенсивности, равный количеству мод  $-2n+1$ . Для твердотельных лазеров или лазеров на

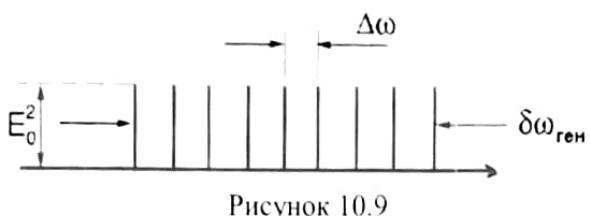


Рисунок 10.9

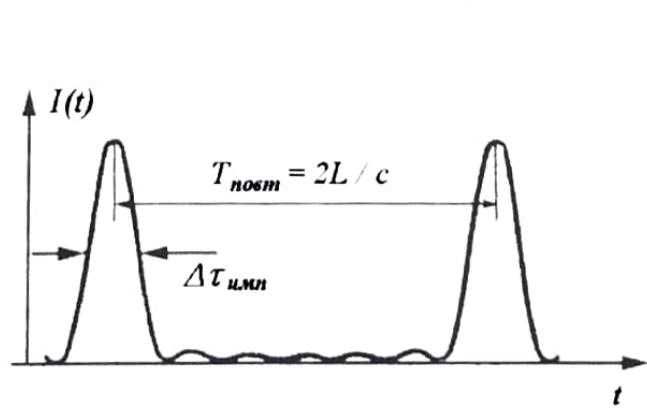


Рисунок 10.10

органических красителях данный параметр может достигать значения в несколько тысяч, соответственно, аналогичное увеличение пиковой импульсной мощности будет наблюдаться и в условиях реализации данного режима в лазерных системах. Что касается длительности каждого импульса генерации, то ее величина определяется общей шириной спектра излучения и записывается в виде

$$\Delta\tau_{um} \approx \frac{2\pi}{(2n+1) \cdot \Delta\omega}. \quad (10.19)$$

Минимально возможное значение  $\Delta\tau_{um}$  составляет по порядку величины  $\sim 1$  нс для газовых лазеров и  $\sim 1$  нс для твердотельных лазерных систем.

Для реализации метода синхронизации мод можно использовать как активные, так и пассивные оптические схемы. Активная синхронизация осуществляется, как правило, с помощью электрооптического модулятора, расположенного внутри лазерного резонатора. В такой конфигурации возможна как амплитудная (мощностная) модуляция излучения, так и частотная модуляция каждой из мод. При амплитудной модуляции, осуществляющейся на частоте  $\omega_{mod} = \Delta\omega$ , боковые компоненты спектра совпадают на частотной оси с соседними модами, и в результате все моды спектра генерации оказываются связанными между собой, в том числе – и по фазе. Для частотной модуляции электрооптический кристалл помещается вблизи одного из зеркал резонатора, и подача управляющего напряжения на частоте модуляции  $\omega_{mod} = \Delta\omega$  приводит за счет изменения оптической длины резонатора к одновременной частотной модуляции всех мод с сохранением фазовых сдвигов между ними.

Пассивная синхронизация мод реализуется помещением внутри лазерного резонатора нелинейного поглощающего элемента аналогично рассмотренной выше схеме модуляции добротности. Наличие такого поглотителя приводит к нелинейности вида (8.30), а именно,  $\Delta N \approx \Delta N_{cmq} \cdot \left(1 - \frac{I}{I_{nac}}\right)$ , в результате чего в процессе генерации происходит согласование полей отдельных мод.

В заключение отметим, что рассмотренная методика синхронизации мод наиболее наглядно проявляет себя в **титан-сапфировом лазере**, имеющем потенциальную полосу генерации (ширина линии усиления) в диапазоне 750 – 850 нм. В титан-сапфировом лазере на начальной фазе начинается обычная генерация, потом за счет синхронизации происходит переход в режим коротких импульсов. Для осуществления режима синхронизации при этом используется ряд технических решений, включающих технологию компенсации дисперсии, технологию « chirпированного импульса » и т.д. В результате в титан-сапфировом лазере удается реализовать режим мощных ультракоротких импульсов с длительностью, не превышающей значений  $\Delta\tau_{um} \leq 100$  фсек.

## **Заключение**

В пособии приведены основные физические принципы и математические модели, которые лежат в основе эффектов взаимодействия электромагнитных полей с веществом на атомарном уровне, а также описание систем, функционирующих на базе этих принципов.

В первой части рассмотрены основные элементы квантовой теории излучения – процессы излучения и поглощения фотонов в результате взаимодействия электронов с внешним электромагнитным полем, приведены соотношения, позволяющие проводить количественные оценки для вероятности этих процессов. В описании представлены также элементы квантовой кинетики и модель релаксационных процессов в веществе, определяющих уширение спектральных линий и условия взаимодействия активных атомов с термостатом. Далее на основе перехода к макроскопическим характеристикам вещества приведены характеристики взаимодействия дипольных двухуровневых сред с резонансным классическим полем. Наконец, заключительная часть пособия посвящена подробному описанию принципов работы основных устройств квантовой электроники – оптических квантовых генераторов (лазеров). Приведены характерные особенности трех элементов, определяющих работу лазеров – активной среды, системы накачки и оптических открытых резонаторов, а также динамические параметры генерации лазерных излучателей в различных режимах работы.

## Список литературы

1. Ханин Я.И. Лекции по квантовой радиофизике. - Н.Новгород: ИПФ РАН, 2005. – 224с. ( к разделам 1,2,3,7)
2. Страховский Г.М., Успенский А.В. Основы квантовой электроники. - М.: Высшая школа, 1979. – 303с. (к разделам 3, 6, 7)
3. Звелто О. Физика лазеров. - М.: Мир, 1979. – 373с. (к разделам 9,10)
4. Карлов Н.В. Лекции по квантовой электронике. - М.: Наука, 1983. – 320с. (к разделам 2,4,9)
5. Клышко Д.Н. Физические основы квантовой электроники. - М.: Наука, 1986. – 296с. (к разделу 8)
6. Демтредер В. Лазерная спектроскопия. Основные принципы и техника эксперимента. - М.: Наука, 1985. - 608с. (к разделам 4,5,8)
7. Квантовая радиофизика в 2 т., Т.2: Динамика квантовых генераторов. . М.: Сов.радио, 1975. – 496с. (к разделу 10)
8. Ярив А. Квантовая электроника. - М.: Сов.радио, 1980. – 460с. (к разделам 3,4,8,9)
9. Акулин В.М., Карлов Н.В. Интенсивные резонансные взаимодействия в квантовой электронике. - М.: Наука, 1987. – 312с. (к разделу 8)
10. Дудкин В.И., Пахомов Л.Н. Квантовая электроника. Приборы и их применение. - М.: Техносфера, 2006. - 432с. (к разделам 8,9,10)
- 11.Крайнов В.П., Смирнов Б.М. Излучательные процессы в атомной физике. - М.: Высшая школа, 1983. – 288с. (к разделу 4,5)
- 12.Стандарты частоты и времени на основе квантовых генераторов и дискриминаторов / А.И.Пихтелев, А.А.Ульянов, Б.П.Фатеев и др.; под ред. Фатеева Б.П. - М.: Сов.радио, 1978. – 304с. (к разделу 6)

Алексей Валентинович **Маругин**

**КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И  
МОДЕЛИ**

*Учебное пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать 19.05.2022. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 6,1. Уч.-изд. л. 8,4.  
Заказ № 731. Тираж 200 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета  
им. Н.И. Лобачевского.  
603000, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.