Liczby p-adyczne

R. S.

8 marca 2016

Spis treści

Definicja 0.0.1. *Norma na ciele $\mathcal{K}$ to funkcja $|\cdot|\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ spełniająca trzy warunki:*

1. $|x| = 0$, *wtedy i tylko wtedy gdy* $x = 0$
2. $|xy| = |x|\,|y|$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathcal{K}$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathcal{K}$

Mówimy, że norma jest niearchimedesowa, jeżeli zachodzi dodatkowo

4. $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathcal{K}$,

w przeciwnym razie mamy do czynienia z normą archimedesową.

Definicja 0.0.2. *Waluacja p-adyczna (dla ustalonej liczby pierwszej $p \in \mathbb{Z}$) to funkcja $v_p\colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ określona w następujący sposób: $v_p(n)$ to jedyna dodatnia liczba całkowita, dla której zachodzi równość $n = p^{v_p(n)}n'$, przy czym p nie dzieli n'. Przedłuża się ją do całego ciała $\mathbb{Q}$ wzorem*

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b),$$

z umową, że $v_p(0) = +\infty$.

Tak określona funkcja jest dobrze określona.

Lemat 0.0.3. *Dla wszystkich x oraz $y \in \mathbb{Q}$ mamy*

1. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$
2. $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Definicja 0.0.4. *Dla dowolnej liczby wymiernej $x \neq 0$ określamy jej normę p-adyczną przez wzór $|x|_p = p^{-v_p(x)}$. Dodatkowo $|0|_p = 0$.*

Fakt 0.0.5. *Tak określona norma jest niearchimedesowa.*

Fakt 0.0.6. *Norma na ciele jest niearchimedesowa, wtedy i tylko wtedy gdy $|a| \leq 1$ dla wszystkich $a \in \mathbb{Z}$.*

Fakt 0.0.7. *W ciele z niearchimedesową normą „$x, y \in \mathcal{K}$, $|x| \neq |y|$” pociąga „$|x + y| = \max(|x|, |y|)$”.*

Kule otwarte i domknięte – topologia.
Równoważność dwóch norm na ciele.
Klasyfikacja norm z twierdzenia Ostrowskiego.
Ciała $\mathbb{Q}$ nie są zupełne – uzupełnianie.
„Product formula”
Lemat Hensela.

Rozdział 1

Lemat Hensela

Twierdzenie 1.0.1 (lemat Hensela)**.** *Niech $\mathfrak{K}$ będzie ciałem zupełnym względem wartości bezwzględnej $|\cdot|$ i niech $f(X) \in \mathfrak{O}[X]$. Załóżmy, że $a_0 \in \mathfrak{O}$ spełnia nierówność $|f(a_0)| < |f'(a_0)|^2$, gdzie $f'(X)$ jest (formalną) pochodną. Wtedy istnieje $a \in \mathfrak{O}$, taki że $f(a) = 0$.*

Dowód. Niech wielomiany $f_j(X)$ (dla $j = 1, 2, \ldots$) będą zdefiniowane przez tożsamość

$$f(X + Y) = f(X) + \sum_{j \geq 1} f_j(X) Y^j$$

dla niezależnych niewiadomych X, Y. Wtedy $f_1(X) = f'(X)$. Ponieważ $|f(a_0)| < |f'(a_0)|^2$, istnieje $b_0 \in \mathfrak{O}$, takie że $f(a_0) + b_0 f_1(a_0) = 0$. Istotnie,

$$|b_0| = \left| \frac{-f(a_0)}{f_1(a_0)} \right| = \frac{|f(a_0)|}{|f_1(a_0)|} < \frac{|f'(a_0)|^2}{|f'(a_0)|} = |f'(a_0)| \leq 1.$$

Zgodnie z definicją wielomianów f_j zachodzi relacja

$$|f(a_0 + b_0)| \leq \max_{j \geq 2} |f_j(a_0) b_0^j|.$$

Jako że $f_j(X) \in \mathfrak{O}[X]$ i $a_0 \in \mathfrak{O}$, mamy $|f_j(a_0)| \leq 1$. Oznacza to, że

$$|f(a_0 + b_0)| \leq |b_0^2| = \frac{|f(a_0)|^2}{|f'(a_0)|^2} < |f(a_0)|,$$

skorzystaliśmy tu ponownie z nierówności $|f(a_0)| < |f'(a_0)|^2$.

Podobnie pokazuje się, że

$$|f_1(a_0 + b_0) - f_1(a_0)| \leq |b_0| < |f_1(a_0)|,$$

a przez to

$$|f_1(a_0 + b_0)| = |f_1(a_0)|.$$

Kładziemy teraz $a_1 = a_0 + b_0$ i powtarzamy proces. Otrzymujemy w ten sposób ciąg $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Dla każdego n prawdziwa jest równość $|f_1(a_n)| = |f_1(a_0)|$, jednocześnie

$$|f(a_{n+1})| \leq \frac{|f(a_n)|^2}{|f_1(a_n)|^2} = \frac{|f(a_n)|^2}{|f_1(a_0)|^2}$$

To uzasadnia zbieżność $f(a_n)$ do zera. Co więcej,

$$|a_{n+1} - a_n| = |b_n| = \frac{|f(a_n)|}{|f_1(a_n)|} = \frac{|f(a_n)|}{|f_1(a_0)|} \to 0.$$

Ciąg $\{a_n\}$ jest fundamentalny, z zupełności ciała $\mathfrak{K}$ wynika istnienie jego granicy oraz $f(a) = 0$. $\square$

Analiza?

1. Zbieżność szeregu $\iff$ wyraz dąży do zera
2. Zbieżność jednostajna, zastosowanie do $\exp_2(2x^2 - 2x)$

Budowa rozszerzeń, $\mathbb{C}_p$, Ω_p.