Ответы на контрольные вопросы

1. **Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?**

   Пусть СЛАУ задана в матричном виде как $Ax = b$. Тогда главным условием применимости метода Гаусса в обоих упомянутых в вопросе случаях является неравенство нулю определителя матрицы системы: $\det A \neq 0$.

   Если метод Гаусса применяется без выбора ведущего элемента, то необходимо учитывать следующее условие: $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$. Это нужно для того, чтобы избежать деления на ноль и, как следствие, аварийного завершения программы.

   В случае выбора главного элемента достаточно неравенства нулю определителя матрицы системы, так как деление производится на наибольший по модулю коэффициент при a_{ii}, что обеспечивает устойчивость вычислений.

2. **Докажите, что если $\det A \neq 0$, то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.**

   $\square$ «От противного»:

   Пусть на k-том шаге метода Гаусса все элементы в k-том столбце начиная с k-того равны нулю. Тогда k-тый столбец является линейной комбинацией первых $k-1$ столбцов $\Rightarrow$ определитель матрицы равен нулю. Так как элементарные преобразования не обнуляют определитель, а для исходной матрицы $\det A \neq 0$, получим противоречие $\square$

3. **В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.**

   Для метода Гаусса с полным выбором ведущего элемента необходимо завести массив перестановок, который будет учитывать порядок переменных в ответе. То есть изначально он может выглядеть так:

   $$\text{permutations} = [0, 1, \ldots, n-1].$$

   Если в ходе работы программы меняются местами i-й и j-й столбцы, то меняются местами и числа i и j в массиве перестановок. Затем, когда найден вектор решения $\tilde{X}$ с измененным порядком неизвестных, находим X с правильным порядком переменных.

4. **Оцените количество арифметических операций, требуемых для QR-разложения произвольной матрицы A размера $n \times n$.**
5. **Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?**

   Величину
   $$\mathrm{cond}A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$
   называют числом обусловленности матрицы A. Матрицы с большим числом обусловленности называются плохо обусловленными, в противном случае — хорошо обусловленными.

   Из оценки $\|\delta x\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\delta f\|$ следует, что чем меньше определитель A, тем больше определитель A^{-1}, а значит, больше постоянная при $|\delta f\|$ и, соответственно, больше влияния погрешностей правой части на погрешности решения.
6. **Как упрощается оценка числа обусловленности, если матрица является:**

   6.1. диагональной;

   6.2. симметричной;

   6.3. ортогональной;

   6.4. положительно определённой;

   6.5. треугольной?
7. **Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?**

   Понятие числа обусловленности не применимо к вырожденным матрицам, так как они не имеют обратных. Из выражения для числа обусловленности
   $$\mathrm{cond}A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$
   следует, что в таком случае посчитать число обусловленности для вырожденной матрицы невозможно, и его принято считать бесконечностью.
8. **В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких—методы, основанные на факторизации матрицы?**

   Метод Гаусса эффективен, когда нужно решить систему с одной правой частью, матрица не имеет специальной структуры (не симметричная, не положительно определенная и т.д.),требуется простота реализации для разовых вычислений.

Методы факторизации целесообразны, когда нужно решить много систем с одной матрицей и разными правыми частями (факторизацию делают один раз), матрица имеет специальные свойства.

9. **Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чём достоинства и недостатки такого подхода?**

   Для того, чтобы объединить прямой и обратный ход метода Гаусса в одну процедуру, можно на каждом шаге прямого хода не только нормировать ведущий элемент, но и занулять остальные элементы этого столбца. Тогда в одном большом цикле мы сможем сразу получить решение системы уравнений.

   Достоинства:

   - решение получено сразу, без использования обратного хода;
   - интуитивно понятный метод, связанный с элементарными преобразованиями строк матрицы.

   Недостатки:

   - меньше устойчивость численного решения: быстрее накапливается ошибка из-за операций над элементами как под главной диагональю, так и над ней;
   - большее число операций: требует примерно в 2 раза больше числа арифметических операций по сравнению с методом Гаусса

10. **Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.**

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|;$$

   Соотвествующие единичные шары ($\|x\| \leqslant 1$) в данных нормах при изображении в декартовых координатах представляют собой: октаэдр для $\|\cdot\|_1$, шар для $\|\cdot\|_2$, куб для $\|\cdot\|_\infty$.