

Ответы на контрольные вопросы

1. **Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n .**

Пусть задана сетка, узлы которой x_1, x_2, \dots, x_n , и интерполируется функция $f(x)$. Тогда полином Лагранжа будет иметь вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

В таком случае будут иметь место:

- по $(n - 1)$ операции умножения в числителе и знаменателе дроби, 1 операция деления и 1 операция умножения результата на $f(x_i)$;
- $2(n - 1)$ операций вычитания во время нахождения коэффициентов c_k
- каждые из выше перечисленных операций повторяются n раз
- также есть $n - 1$ операция сложения чисел $f(x_i) \cdot c_i(x_i)$

Итого интерполяция многочленом Лагранжа потребует $(n - 1 + n - 1 + 1 + 1) \cdot n + 2(n - 1) \cdot n + n - 1 = 2n^2 + 2n^2 - 2n + n - 1 = 4n^2 - n - 1 \sim O(4n^2)$, $n \rightarrow \infty$.

2. **Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n .**
3. **Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0,2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2,2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.**

Построенный полином Лагранжа в точке $x = 2,2$ отличается от исходной функции на величину:

$$\Delta = 6,26641 \cdot 10^{-8}.$$

Погрешность экстраполяции при $x \in [2, 2,2]$ будет определяться по формуле

$$|y(x) - L_n(x)| \leq h^{n+1} \cdot \max_{\xi \in [0, 2,2]} |y^{(n+1)}(\xi)|$$

В данном случае $n = 10$, $h = 0,2$. Любой производной $y(x) = e^x$ является функция $f(x) = e^x$, она монотонно возрастающая, поэтому своё максимальное

значение на отрезке $[0, 2,2]$ будет принимать в точке $x = 2,2$. Тогда

$$|y(x) - Ln(x)| \leq 0,2^{11} \cdot e^{2,2} \approx 1,84832 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, ошибка экстраполяции с помощью полинома Лагранжа меньше теоретических предположений.

4. **Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$.**
5. **Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?**

	Достоинства	Недостатки
Многочлен Лагранжа	<ul style="list-style-type: none"> • простой способ нахождения полинома Лагранжа • наличие непрерывных производных больших порядков • интерполяционный полином Лагранжа задается единой на всем отрезке формулой 	<ul style="list-style-type: none"> • чем больше узлов сетки — тем сложнее построить интерполяционный полином Лагранжа и вычислить значение интерполанта в произвольной точке • сильная зависимость точности интерполанта от вида сетки (на чебышевской может хорошо приближать функцию, а на равномерной, при том же количестве узлов, могут происходить осцилляции)
Сплайн-интерполяция	<ul style="list-style-type: none"> • требуется малое количество операций для вычисления коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i многочлена $S_3(x)$ • нахождение значения функции $S_3(x)$ в произвольной точке требует небольшое число арифметических операций • если $f(x) \in C^4[a, b]$, то с помощью сплайна $S(x)$ можно приблизить не только функцию, но и её первую и вторую производные 	<ul style="list-style-type: none"> •