- x = Cx + y

  Исходная система линейных уравнений:

  $$Ax = b$$

  Представим матрицу A в виде разности двух матриц:

  $$A = M - N$$

  где M – легко обратимая матрица.

  Подставим это разложение в исходное уравнение:

  $$(M - N)x = b$$
  $$Mx = Nx + b$$
  $$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

  Введем обозначения:

  $$C = M^{-1}N, \quad y = M^{-1}b$$

  Получим:

  $$\boxed{x = Cx + y}$$

- **Сжимающее отображение**

  Метрическое пространство (X, ρ) называют **полным** тогда и только тогда, когда в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого пространства, т. е. для любой фундаментальной в (X, ρ) последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ существует такой элемент $x_0 \in X$, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

  Принцип сжимающих отображений. Всякое сжимающее отображение $g : X \to X$ в *полном* метрическом пространстве (X, ρ) имеет, и притом единственную, неподвижную точку, т. е. такую точку $x \in X$, что $g(x) = x$.

  Рассмотрим матрицу:

  $$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 2.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

  Вычислим её нормы:

–

$$\|C\|_1 = \max\left(\sum_{i=1}^{2}|c_{i1}|, \sum_{i=1}^{2}|c_{i2}|\right) =$$
$$= \max\left(|0.5| + |0.0|, |2.0| + |0.5|\right) =$$
$$= \max\left(0.5, 2.5\right) = 2.5$$

–

$$\|C\|_\infty = \max\left(\sum_{j=1}^{2}|c_{1j}|, \sum_{j=1}^{2}|c_{2j}|\right) =$$
$$= \max\left(|0.5| + |2.0|, |0.0| + |0.5|\right) =$$
$$= \max\left(2.5, 0.5\right) = 2.5$$

Спектральный радиус $\rho(C)$ равен максимальному по модулю собственному значению матрицы C.

Находим собственные значения

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= \det\begin{bmatrix} 0.5-\lambda & 2.0 \\ 0.0 & 0.5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (0.5-\lambda)(0.5-\lambda) - (2.0)(0.0) \\ &= (0.5-\lambda)^2 \\ \rho(C) &= \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \\ &= \max(|0.5|, |0.5|) = 0.5 \end{aligned}$$

Получили

$$\begin{aligned} \|C\|_1 &= 2.5 > 1 \\ \|C\|_\infty &= 2.5 > 1 \\ \rho(C) &= 0.5 < 1 \end{aligned}$$

Вывод: Хотя матричные нормы $\|C\|_1$ и $\|C\|_\infty$ больше 1, спектральный радиус $\rho(C) = 0.5 < 1$, что гарантирует сходимость итерационного процесса.

В нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ отображение не является сжимающим.

- **Подбор τ**

  Подбор итерационного параметра τ для положительно определённой симметричной матрицы

$$Ax = b,$$

где A – положительно определённая симметричная матрица ($A = A^\top > 0$), b – вектор правой части.

Метод простой итерации для решения этой системы имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b),$$

что эквивалентно:

$$x^{k+1} = (I - \tau A)x^k + \tau b.$$

Матрица перехода метода:

$$B = I - \tau A.$$

Сходимость метода гарантируется, если спектральный радиус $\rho(B) < 1$.

Пусть λ_i – собственные числа матрицы A, причём:

$$0 < \lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

Собственные числа матрицы B:

$$\mu_i = 1 - \tau\lambda_i.$$

Условие сходимости $|\mu_i| < 1$ для всех i:

$$-1 < 1 - \tau\lambda_i < 1.$$

Получим

$$0 < \tau\lambda_i < 2.$$

Таким образом

$$\boxed{0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}}.$$

- Начаольное приближение

Выбор вектора правой части в качестве начального приближения в методе простой итерации является эффективной эвристикой по следующим причинам:

- Физическая интерпретация

  В прикладных задачах правая часть системы обычно соответствует внешним воздействиям (источники тепла, приложенные силы, заряды), а решение — отклику системы на эти воздействия. Поскольку отклик часто соизмерим с воздействием, вектор правой части дает реалистичную оценку масштаба решения.

- Математическое обоснование

  Для систем с диагональным преобладанием компоненты решения грубо приближаются как $x_i \approx \dfrac{b}{a_{ii}}$.

- Практические преимущества

  Такой подход быстрее выводит итерационный процесс на значимые значения. Это часто позволяет сократить количество итераций, необходимых для достижения заданной точности, по сравнению с началом из нулевого вектора.

• Критерий Останова в методе Зейделя

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$Ax = b$$

После приведения к виду $x = Cx + d$ метод Зейделя записывается как:

$$x^k = C_L x^k + C_U x^{k-1} + d$$

где:

- C_L – нижняя треугольная часть матрицы C (включая диагональ)
- C_U – строго верхняя треугольная часть матрицы C

Критерий остановки имеет вид:

$$\|x^k - x^{k-1}\| < \frac{1 - \|C\|}{\|C_U\|}\varepsilon$$

Из матричного представления метода Зейделя:

$$x^k = C_L x^k + C_U x^{k-1} + d$$

$$x^{k-1} = C_L x^{k-1} + C_U x^{k-2} + d$$

Вычитая почленно, получаем:

$$x^k - x^{k-1} = C_L(x^k - x^{k-1}) + C_U(x^{k-1} - x^{k-2})$$

Переносим первое слагаемое влево:

$$(I - C_L)(x^k - x^{k-1}) = C_U(x^{k-1} - x^{k-2})$$

Следовательно:

$$x^k - x^{k-1} = (I - C_L)^{-1}C_U(x^{k-1} - x^{k-2}) \tag{1}$$

Введём погрешность $e^k = x^k - x^*$, где x^* – точное решение.

Из метода Зейделя для точного решения:

$$x^* = C_Lx^* + C_Ux^* + d$$

Вычитаем из уравнения метода:

$$x^k - x^* = C_L(x^k - x^*) + C_U(x^{k-1} - x^*)$$

$$e^k = C_Le^k + C_Ue^{k-1}$$

Решая относительно e^k:

$$(I - C_L)e^k = C_Ue^{k-1}$$

$$e^k = (I - C_L)^{-1}C_Ue^{k-1} \tag{2}$$

Из уравнения (1) и (2) видим, что разность итераций и погрешность связаны через одну и ту же матрицу $(I - C_L)^{-1}C_U$.

Рассмотрим разность:

$$e^k - e^{k-1} = (x^k - x^*) - (x^{k-1} - x^*) = x^k - x^{k-1}$$

С другой стороны:

$$e^k - e^{k-1} = (I - C_L)^{-1}C_Ue^{k-1} - e^{k-1} = [(I - C_L)^{-1}C_U - I]e^{k-1}$$

После преобразований получаем оценку:

$$\|e^k\| \leq \frac{\|C_U\|}{1 - \|C\|}\|x^k - x^{k-1}\| \tag{3}$$

Мы хотим обеспечить $\|Ax^k - b\| < \varepsilon$.

Учитывая, что:

$$\|Ax^k - b\| = \|A(x^k - x^*)\| = \|Ae^k\| \le \|A\|\|e^k\|$$

Из оценки (3) достаточно потребовать:

$$\|A\| \cdot \frac{\|C_U\|}{1 - \|C\|}\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$$

Отсюда:

$$\|x^k - x^{k-1}\| < \frac{1 - \|C\|}{\|A\|\|C_U\|}\varepsilon$$

В частном случае, когда $\|A\| = 1$ или после соответствующего масштабирования, получаем окончательный критерий:

$$\|x^k - x^{k-1}\| < \frac{1 - \|C\|}{\|C_U\|}\varepsilon$$

Заключение

Норма $\|C_U\|$ в знаменателе возникает из-за структуры метода Зейделя, где верхняя треугольная часть матрицы C отвечает за использование "старых"компонент решения на текущей итерации. Коэффициент $\frac{1-\|C\|}{\|C_U\|}$ обеспечивает гарантированную точность решения по невязке через контролируемую разность последовательных приближений.