# Ответы на контрольные вопросы

1. **Почему нельзя находить собственные числа матрицы $A$, прямо решая уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы — «по определению», решая систему $(A - \lambda_j E)e_j = 0$?**

   Так как $A$ — матрица размера $n \times n$, то $\det(A - \lambda E)$ — многочлен степени $n$ относительно $\lambda$, и для $n \geq 5$ уже не существует аналитической формулы решения, поэтому в общем случае решить это уравнение не получится.

   Вычисление определителя неустойчиво, так как погрешности в элементах матрицы могут привести к неверному результату.

   Нахождение собственных векторов невозможно по определению, так как из найденного $\lambda_j$ можно найти приближенные решения уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, которые могут сильно отклониться от истинного решения из-за накопившихся ошибок.

2. **Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы**.

   Пусть $A$ — симметричная матрица, $P$ — ортогональная матрица, то есть

   $$A^T = A \qquad\qquad P^T P = E.$$

   Если $R$ — матрица, полученная с помощью ортогонального преобразования подобия, то её можно записать в виде

   $$R = P^T A P.$$

   Запишем $R^T$:

   $$R^T = (P^T A P)^T = (AP)^T (P^T)^T = P^T A^T P = P^T A P = R.$$

3. **Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?**

   Преобразование подобия является линейным преобразованием, то есть оно масштабирует и поворачивает собственные векторы.

   Пусть $A$ и $B$ — подобные матрицы, то есть существует такая матрица $P$: $B = P^{-1} A P$.

   Пусть $x$ — собственный вектор матрицы $A$, то есть $Ax = \lambda x$; $y = P^{-1} x$. Тогда

   $$By = (P^{-1} A P) y = P^{-1} A P P^{-1} x = P^{-1} A x = P^{-1} \lambda x = \lambda P^{-1} x = \lambda y.$$

   Получили, что $y = P^{-1} x$ — собственный вектор матрицы $B$ при том же собственном значении $\lambda$.

4. **Почему на практике матрицу $A$ подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?**

   Приведение матрицы $A$ методом вращений к матрице Хессенберга позволяет получить более простую матрицу $B$, собственные значения которой совпадают с собственными значениями исходной матрицы. Поэтому будет достаточно найти собственные числа матрицы $B$ с помощью $QR$-разложения.

   Приведение матрицы $A$ к верхнетреугольному виду позволило бы сразу найти собственные значения матрицы $A$, но в общем случае это сделать ортогональными преобразованиями невозможно.

5. **Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы $A$ к форме Хессенберга.**
6. **Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?**
7. **Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для $QR$-алгоритма отыскания собственных значений матрицы.**
8. **Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.**
9. **Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?**
10. **Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.**
    - Оценка числа обусловленности матрицы $A$: $\mathrm{cond}A \geq \dfrac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$
    - Нахождение оптимального параметра $\tau$ при решении СЛАУ с матрицей системы $A = A^T > 0$ методом простых итераций: $\tau_{opt} = \dfrac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$