

## Ответы на контрольные вопросы

- 1. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполяции функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным  $n$ .**

Пусть задана сетка, узлы которой  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и интерполируется функция  $f(x)$ . Тогда полином Лагранжа будет иметь вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=1, \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

В таком случае будут иметь место:

- по  $(n - 1)$  операции умножения в числителе и знаменателе дроби, 1 операция деления и 1 операция умножения результата на  $f(x_i)$ ;
- $2(n - 1)$  операций вычитания во время нахождения коэффициентов  $c_k$
- каждые из выше перечисленных операций повторяются  $n$  раз
- также есть  $n - 1$  операция сложения чисел  $f(x_i) \cdot c_i(x_i)$

Итого интерполяция многочленом Лагранжа потребует  $(n - 1 + n - 1 + 1 + 1) \cdot n + 2(n - 1) \cdot n + n - 1 = 2n^2 + 2n^2 - 2n + n - 1 = 4n^2 - n - 1 \sim O(4n^2)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

- 2. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполяции функции в некоторой точке кубическим сплайнами (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным  $n$ .**
- 3. Функция  $f(x) = e^x$  интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке  $[0, 2]$  на равномерной сетке с шагом  $h = 0,2$ . Оцените ошибку экстраполяции в точке  $x = 2,2$ , построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.**

Построенный полином Лагранжа в точке  $x = 2,2$  отличается от исходной функции на величину:

$$\Delta = 6,26641 \cdot 10^{-8}.$$

Погрешность экстраполяции при  $x \in [2, 2,2]$  будет определяться по формуле

$$|y(x) - L_n(x)| \leq h^{n+1} \cdot \max_{\xi \in [0, 2,2]} |y^{(n+1)}(\xi)|$$

В данном случае  $n = 10$ ,  $h = 0,2$ . Любой производной  $y(x) = e^x$  является функция  $f(x) = e^x$ , она монотонно возрастающая, поэтому своё максимальное

значение на отрезке  $[0, 2,2]$  будет принимать в точке  $x = 2,2$ . Тогда

$$|y(x) - Ln(x)| \leq 0,2^{11} \cdot e^{2,2} \approx 1,84832 \cdot 10^{-7}.$$

Таким образом, ошибка экстраполяции с помощью полинома Лагранжа меньше теоретических предположений.

4. Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах  $x_0$  и  $x_n$  помимо значений функции  $y_0$  и  $y_n$  заданы первые производные  $y'(x_0)$  и  $y'(x_n)$ .
5. Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?

	Достоинства	Недостатки
Многочлен Лагранжа	<ul style="list-style-type: none"> <li>• простой способ нахождения полинома Лагранжа</li> <li>• наличие непрерывных производных больших порядков</li> <li>• интерполяционный полином Лагранжа задается единой на всем отрезке формулой</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• чем больше узлов сетки — тем сложнее построить интерполяционный полином Лагранжа и вычислить значение интерполянта в произвольной точке</li> <li>• сильная зависимость точности интерполянта от вида сетки (на чебышевской может хорошо приближать функцию, а на равномерной, при том же количестве узлов, могут происходить осцилляции)</li> </ul>
Сплайн-интерполяция	<ul style="list-style-type: none"> <li>• требуется малое количество операций для вычисления коэффициентов <math>a_i, b_i c_i d_i</math> многочлена <math>S_3(x)</math></li> <li>• нахождение значения функции <math>S_3(x)</math> в произвольной точке требует небольшое число арифметических операций</li> <li>• если <math>f(x) \in C^4 [a, b]</math>, то с помощью сплайна <math>S(x)</math> можно приблизить не только функцию, но и её первую и вторую производные</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> </ul>