Ответы на контрольные вопросы

1. **Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?**

   □Перезаписав СЛАУ таким образом: $x = Cx+y$, можно получить соотношение для итерационного процесса: $x^{k+1} = Cx^k + y$

   Вычтем и вычислим норму

$$\|x^{k+1} - x\| = \|Cx^k + y - Cx - y\| = \|Cx^k - Cx\| \leqslant \|C\|\|x^k - x\| =$$
$$= \|C\|\|Cx^{k-1} + y - Cx - y\| \leqslant \|C\|^2\|x^{k-1} - x\| < ... < \|C\|^{k+1}\|x^0 - x\|$$

   Т.к. $\|C\| \leqslant 1$, $\|C\|^{k+1} \to 0$, при $k \to \infty \Rightarrow \|C\|^{k+1}\|x^0 - x\| \to 0 \Rightarrow \|x^{k+1} - x\| \to 0$, т.е. $x^{k+1} \to x$ □

2. **Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x^0?**

   Параметр τ — число, на которое умножают исходную систему, чтобы улучшить скорость сходимости. Он подбирается так, чтобы выполнялась оценка $\|C\| < 1$ и норма C была как можно меньше ($C = -(A - E)$).

   Так происходит из-за того, что для сходимости метода необходимо, чтобы спектральный радиус матрицы системы был меньше 1. Грубо можно оценить спектральный радиус нормой матрицы, которая, в свою очередь оценивается максимальным собственным значением. Тогда получим: $\rho(A) \leq \|A\| < 1$.

   Обычно начальное приближение x^0 выбирается произвольно, но есть несколько соображений, позволяющие упростить выбор:

   - выбирается нулевое решение: $\vec{X}_0 = \vec{0}$;
   - выбирается вектор правой части, домноженный на коэффициент τ: $\vec{X}_0 = \tau b$.

3. **На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.**

   В методе Якоби итерационный процесс организован в систему:

$$a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = f_1; \quad (1)$$
$$a_{21}x_1^k + a_{22}x_2^{k+1} = f_2. \quad (2)$$

   Прямая I соответствует уравнению (1), прямая II — уравнению (2). Ни одно из приближений x^k не лежит на прямых I и II.

В методе Зейделя итерационный процесс задается формулами:

$$a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k = f_1; \tag{3}$$

$$a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} = f_2. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) всегда точное.

В методе релаксации каждое следующее приближение задается формулами:

$$a_{11}(x_1^{k+1} - x_1^k) = \omega(-a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k +) \tag{5}$$

4. **При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?**

Теорема. Пусть A — симметричная положительно определённая матрица, $\tau > 0$ и выполнено неравенство $B - 0.5\tau A > 0$. Тогда стационарный итерационный метод $B\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax^k = f$ сходится.

Следствие 1. Пусть A — симметричная положительно определённая матрица с диагональным преобладанием, т.е.

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда метод Якоби сходится.

Следствие 2. Пусть A — положительно определенная матрица. Тогда метод релаксации сходится при $0 < \omega < 2$. В частности, сходится метод Зейделя ($\omega = 1$).

Следствие 3. Метод простой итерации сходится при $\tau < 2/\lambda_{max}$, где λ_{max} — максимальное собственное значение симметричной положительно определенной матрицы A.

Линейный оператор A в действительном гильбертовом пространстве H называется положительно определенным, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in H : (Ax, x) \geqslant \delta(x, x).$$

5. **Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.**

Канонический вид метода релаксации:

$$(D + \omega L)\frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = f, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Преобразуем это выражение:

$$(D+\omega L)\frac{x^{k+1}-x^k}{\omega}+Ax^k=f \Leftrightarrow (D+\omega L)(x^{k+1}-x^k)=\omega(f-Ax^k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (D+\omega L)x^{k+1}=\omega f-\omega Ax^k+(D+\omega L)x^k \Leftrightarrow (D+\omega L)x^{k+1}=\omega f+x^k(-\omega A+D+\omega L)$$

$C=(D+\omega L)^{-1}(-\omega A+D+\omega L)$. Метод Зейделя является частным случаем метода релаксации при $\omega=1$, поэтому для Метод Зейделя:

$$C=(D+L)^{-1}(-A+D+L)=(D+L)^{-1}(-U)=-(D+L)^{-1}U$$

6. **Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k-x^{k-1}\|<\varepsilon$?**

   В общем случае последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ может не сходится к вектору решения x, поэтому таким критерием пользоваться нельзя. Может быть преждевременная остановка цикла из-за малого изменения решения, но к истинному решению цикл сходиться не будет.

7. **Какие еще критерии останова итерационного процесса Вы можете предложить?**

   Возможны следующие критерии останова:

   - **По малости невязки**: $\|f-Ax^k\|\le\varepsilon$

     Аналогично вопросу №6, полученное решение может удовлетворять неравенству, но будет находиться далеко от истинного решения.
   - **Относительная погрешность невязки:** $\dfrac{\|f-Ax^k\|}{\|f-Ax_0^k\|}\le\varepsilon$
   - **Для методов простой итерации и Якоби:** $\|x^k-x^{k+1}\|\le\dfrac{1-\|C\|}{\|C\|}\varepsilon$
   - **Для метода Зейделя:** $\|x^k-x^{k+1}\|\le\dfrac{1-\|C\|}{\|C_U\|}\varepsilon.$
   - **Самый жёсткий критерий:** $\left\|\dfrac{x^{k+1}-x^k}{|x^k|+\varepsilon_0}\right\|\le\varepsilon$