

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова



Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Математических Методов Прогнозирования

## **КУРСОВАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 317 ГРУППЫ**

### **«Задача кластеризации зашумлённых данных с неоднородной плотностью »**

Выполнил:

студент 3 курса 317 группы

*Демин Георгий Александрович*

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор РАН

*Дьяконов Александр Геннадьевич*

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
2.1	Задача кластеризации в машинном обучении . . . . .	3
2.2	Формальная постановка задачи . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Обзор существующих решений</b>	<b>5</b>
3.1	Сдвиг среднего значения (mean shift) . . . . .	5
3.2	DBSCAN . . . . .	5
3.2.1	VDBSCAN . . . . .	6
3.2.2	Дифференциальная эволюция для подбора параметров DBSCAN	6
<b>4</b>	<b>Предлагаемый подход</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Набор данных. Каталог SDSS</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Эксперименты</b>	<b>9</b>
6.1	Априорные представления и их формализация . . . . .	9
6.2	Применённые алгоритмы . . . . .	11
6.3	Метрики качества . . . . .	11
6.4	Сравнения методов . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Литература</b>	<b>16</b>

## **Аннотация**

В работе представлен подход к кластеризации зашумлённых данных с неоднородной плотностью, при наличии некоторой априорной информации о распределении кластеров.

Предложенный подход сравнивается с классическими методами кластеризации на примере задачи выделения скоплений галактик по каталогу SDSS.

**Не готовы технические вещи: описание алгоритмов и метрик качества**

# 1 Введение

Задача кластеризации в машинном обучении - типичная задача обучения без учителя: есть некоторые критерии, которые сигнализируют о том, хорошо решена задача или нет, но точной информации нет. Обычно эта задача является промежуточным этапом построения модели в машинном обучении. Она может использоваться для добавления к объектам признаков, уменьшения объёма данных путём объединения объектов, попавших в один кластер. Также целью может служить - понимание структуры данных и их распределения. Более подробно задача кластеризации описана в разделе "постановка задачи".

В данной работе рассматривается задача кластеризация на данных, о которых известно, что большая их часть в кластеры не входит и является шумом. Кроме того, известно, что данные неоднородны и их плотность варьируется. Предполагается также, что имеется некоторая априорная информация о распределении кластеров. Такая задача может возникнуть при распознавании образов, анализе биологических или физических систем.

Предлагается алгоритм, основанный на DBSCAN, учитывающий некоторые априорные представления о данных и адаптирующийся, способный настраиваться на варьирующуюся плотность. Алгоритм используется для решения задачи кластеризации галактик из каталога SDSS. Результаты его работы сравниваются с результатами, полученными с помощью "классических" алгоритмов (mean shift, классический DBSCAN)

Опишем более подробно задачу кластеризации и её типы.

## 2 Постановка задачи

### 2.1 Задача кластеризации в машинном обучении

Задача кластеризации в машинном обучении - это задача разбиения выборки объектов на некоторые множества, называемые кластерами, при этом одному множеству должны принадлежать в некотором роде похожие объекты, а объекты из разных кластеров - существенно отличаться. Входными данными для задачи кластеризации

могут быть как объекты и их признаковое описание, так и матрица расстояний (или схожести) между объектами.

Особенностью этой задачи является то, что её решение принципиально неоднозначно: нет точной постановки задачи, существует много критериев качества кластеризации, результат решения задачи сильно зависит от выбранной метрики (или схожести близости), качество кластеризации определяется во многом спецификой задачи (один и тот же результат может восприниматься как хороший или плохой в зависимости от того, для чего именно мы кластеризуем данные).

Для решения задачи могут применяться различные алгоритмы в зависимости от того, какой структура кластеров ожидается. На основании этого задачу кластеризации разделяют на ([1]):

- **Иерархическая** или **плоская**. Под иерархической структурой кластеров понимается такое их устройство, что некоторые мелкие кластеры могут быть объединены в более крупные, которые в свою очередь также могут быть объединены на более высоком уровне иерархии. Плоская кластеризация подразумевает, что некоторое множество выделенных кластеров не может само образовывать кластер.

- **Исключающая, перекрывающаяся** или **нечёткая**. Исключающая кластеризация означает, что объект может быть отнесён только к одному классу, перекрывающаяся - к нескольким. Нечёткая кластеризация является частным случаем перекрывающейся и для каждого объекта определяет вероятность вхождения в каждый кластер (другое её название - **вероятностная**).

- **Полная** или **частичная**. При полной кластеризации каждый объект обязательно относится к кому-либо кластеру, а при частичной объект может являться шумом или выбросом и не должен принадлежать кластеру.

- **Прототипная, графовая** или **плотностная**. При прототипной кластеризации кластер определяется как множество объектов, похожих на некий прототип. Графовая модель — модель, при которой данные представлены в виде графа и кластером будет являться некое подмножество вершин, которые имеют большое количество связей или образуют отдельную связную компоненту. Плотностная кластеризация же

означает, что кластером будут считаться объекты, плотность (при каком-то заданном распределении) которых больше средней плотности всей выборки.

В данной работе мы будем решать плоскую исключаящую плотностную задачу кластеризации. Кроме того, ожидаем, что большая часть данных относится к шуму

## 2.2 Формальная постановка задачи

Приведём формальную постановку задачи: имеется  $X \in \mathbb{R}^{N \times D}$  - матрица объекты-признаки,  $D \ll N$ .  $S = \{0, 1, \dots, K\}$  - множество номеров кластеров,  $K$  (число кластеров) априорно неизвестно точно. Требуется найти отображение  $y(x) : X \rightarrow Y$ , где  $Y_i \in S$  и является номером кластера, которому принадлежит  $X_i$ .  $y(x_0) = 0$  означает то, что объект  $x_0$  является шумовым и не принадлежит ни одному кластеру. Кроме того, мы предполагаем, что

- Кластеризация производится на основе плотности
- Число объектов, не относящихся ни к какому кластеру велико.

$$\frac{|\{x|y(x) = 0\}|}{|X|} \geq 0.5 \quad (1)$$

- Имеется некое априорное представление о структуре кластеров

$$\exists F_i(Y, K) \approx C_i, i = \overline{1, m} \quad (2)$$

## 3 Обзор существующих решений

### 3.1 Сдвиг среднего значения (mean shift)

Описание алгоритма mean shift

### 3.2 DBSCAN

Описание DBSCAN

Далее рассмотрим некоторые модификации алгоритма DBSCAN, на которые будет существенно опираться предложенный ниже подход

### 3.2.1 VDBSCAN

Для набора данных с варьирующей плотностью в статье [2] был предложен следующий подход: запустить алгоритм DBSCAN несколько раз с разными значениями радиуса. При каждой последующей итерации исключать точки, кластеризованные на предыдущей, - таким образом могут быть обнаружены кластеры с различной плотностью. В статье [3] описывается способ для определения параметров  $k$  и  $\epsilon$ . Предлагается посчитать среднее расстояние между точками в датасете, затем для каждой точки посчитать какой по номеру ближайший сосед отстоит от неё на это расстояние и взять в качестве  $k$  - самый частый номер среди всех точек. Далее для каждой точки находится расстояние от неё до  $k$ -го ближайшего соседа, строится гистограмма таких расстояний и резкие скачки на ней будут считаться кандидатами на  $\epsilon$ . У этого подхода есть несколько недостатков: во-первых, в нём слабо учитывается априорные знания о данных (только то, что они имеют варьирующуюся плотность), во-вторых, он не подходит для датасета с большим количеством шума, так как гистограмма расстояний до  $k$ -го ближайшего соседа не позволит определить значения  $\epsilon$  (она будет слишком гладкой из-за расстояния до шумовых точек)

### 3.2.2 Дифференциальная эволюция для подбора параметров DBSCAN

Дифференциальная эволюция — это метод стохастической оптимизации (см. [5]). Его идея в том, что генерируется некоторое множество алгоритмов с разными параметрами - популяции (при этом используется один и тот же алгоритм и изменяются лишь его параметры), для каждого алгоритма вычисляется функция потерь. Алгоритмы, с "удачной" функцией потерь (то есть значение которой, оказалось низким), скрещиваются и получившийся алгоритм получает параметры, близкие к параметрам его предков. неудачные же алгоритмы с некоторой вероятностью мутируют, изменяя свои параметры. Несомненное преимущество этого метода в том, что он подходит для оптимизации вообще любых алгоритмов (однако вопрос о сходимости остаётся открытым). В [4] авторы используют этот подход, чтобы подобрать  $k$  и  $\epsilon$  для алгоритма DBSCAN. Это довольно удачный способ для нашей постановки задачи, так как все 2 могут быть учтены в функции потерь и параметры будут по-

добраны строго автоматически. Однако в этом методе тяжело учесть то, что данные неоднородные.

Для алгоритма DBSCAN есть множество усовершенствований, однако каждое из них имеет собственные недостатки, не позволяющие решить исследуемую задачу достаточно хорошо. Ниже будет представлен метод, опирающийся на приведённые выше модификации DBSCAN.

## 4 Предлагаемый подход

В основе предлагаемого подхода лежит одна простая идея: для областей с разной плотностью нужно использовать алгоритм с разными параметрами. Сначала опишем метод, а затем приведём его формальное описание

1. Разбиваем признаковое пространство на подпространства с более-менее однородным распределением признаков (для этого можно построить распределение признаков и делить некоторые из них)

2. Определяем некоторую функцию потерь, зависящую от (2), с помощью неё на каждом подпространстве находим параметры алгоритма DBSCAN, при этом слишком маленькие по размеру выделенные кластеры относим к шуму, чтобы учесть (1)

3. Выделяем из подпространств зоны, на которых работа алгоритма нас не устраивает (это можно сделать на основе функции потерь или отдельных условий 2) И повторяем шаги независимо в каждой такой зоне.



---

**Algorithm 1** DBSAN for variety density

---

```
function TUNEONSUBAREAS(subareas)  
    for  $X_i \in \textit{subareas}$  do  
         $\textit{eps}, k \leftarrow \text{OPTIMIZEDBSCAN}(X_i, \text{LossFunc1})$   
         $\textit{labels} \leftarrow \textit{labels} \cup \text{DBSCAN}(X_i, \textit{eps}, k)$   
    end for  
    return labels  
  
end function  
  
 $\textit{subareas} \leftarrow \text{GETSUBAREAS}(X)$   
 $\textit{labels} \leftarrow \{\}$   
 $\textit{labels\_first\_step} \leftarrow \text{TUNEONSUBAREAS}(\textit{subareas})$   
 $\textit{bad\_labels} \leftarrow \text{FINDBADLABELS}(\textit{labels}, \text{LossFunc2})$   
 $\textit{bad\_subareas} \leftarrow \textit{subareas}[\textit{bad\_labels}]$   
 $\textit{labels\_first\_step} \leftarrow \textit{labels\_first\_step} \setminus \textit{bad\_labels}$   
 $\textit{labels\_result} \leftarrow \textit{labels} \cup \text{TUNEONSUBAREAS}(\textit{bad\_subareas})$   
return labels_result
```

---

Функция GetSubareas неким образом разбивает выборку  $X$  на подобласти. LossFunc1, LossFunc2 неким образом отражают априорную информацию и штрафуют за нарушение (2). OptimizeDBSCAN подбирает параметры для алгоритма DBSCAN на подвыборке, используя дифференциальную эволюцию, а DBSCAN применяет алгоритм с подобранными параметрами. Наконец, FindBadLabels определяет какие данные были кластеризованы плохо (в следствие различия в плотности или чего-то другого).

Далее покажем, как все можно составить функции потерь, используя априорные знания на реальных данных.

## 5 Набор данных. Каталог SDSS

Продemonстрируем предлагаемый алгоритм на задаче выделения галактик по каталогу SDSS([6]). Этот каталог содержит сферические координаты и некоторые физические величины более чем 3 миллионах галактик, наблюдаемых в северном

полушарии Земли. **Расстояние** до галактики определяется с помощью измерения красного смещения электромагнитных волн, излучаемых ею, близкими считаются галактики, имеющие красное смещение меньше 0.3 (всюду далее под расстоянием до галактики мы будем подразумевать красное смещение этой галактики). Особенностью этих данных является то, что для галактик сильно удалённых от Земли погрешность вычислений координат достигает больших значений - это не позволяет их анализировать. **Кластером** (скоплением или глобуларом) называется набор галактик, расположенных близко друг к другу (более точного определения дать не удаётся, так как объективные характеристики, по которым можно было бы определить что является кластером, а что нет, пока в астрофизике не определены). Считается также, что галактика принадлежит либо принадлежит только одному кластеру, либо не принадлежит никакому (таких галактик большинство и мы будем называть их шумовыми). Ожидается, что кластеры будут сферической или эллипсоидной формы

## 6 Эксперименты

### 6.1 Априорные представления и их формализация

В качестве априорных представлений о структуре кластеров мы возьмём результаты работы Дж. Эйбелла [7]. Американский астроном вручную проанализировал фотопластины северной части звёздного неба и выделил 2712 кластеров. Так как это было сделано по фотометрическим данным, нельзя сказать, что координаты выделенных кластеров точны. Мы будем использовать 2 факта из работы физика: число кластеров приближённо известно и равно 1570<sup>1</sup>, характерный размер кластера примерно 125-175 галактик. Обозначим за  $N(k)$  количество объектов в кластере с номером  $k$ , и формализуем априорную информацию таким образом

$$F_1(Y, K) = F_1(|Y|, K) = |K - 1572 \cdot \frac{|Y|}{|X|}| - 50 \leq 0 \quad (3)$$

$$F_2(Y, K) = F_2(N(1), \dots, N(K), K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (|N(k) - 150| - 50) \leq 0 \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Каталог SDSS покрывает не все области видимого неба, поэтому ожидается меньшее число кластеров

Неравенства (3) и (4) не стоит понимать строго: это лишь наши предположения, они могут нарушаться. Исходя из этого построим функцию потерь для оптимизации DBSCAN. Будем штрафовать алгоритм, если он выделяет не то количество кластеров, которое нам нужно и если в кластерах оказывается намного больше или меньше галактик, чем предполагалось. Для этого хорошо подходит квадратичная функция.

$$f_1(K) = a_1 K^2 + b_1 K + c_1$$

$$f_2(N(i)) = a_2 N(i)^2 + b_2 N(i) + c_2$$

Коэффициенты определим из условий

$$\begin{cases} f_1|_{K=1572 \cdot \frac{|Y|}{|X|}} = 0 \\ f_1|_{K=1572 \cdot \frac{|Y|}{|X|} + 50} = 1 \\ f_1|_{K=1572 \cdot \frac{|Y|}{|X|} - 50} = 2.5 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} f_2|_{N(i)=150} = 0 \\ f_2|_{N(i)=100} = 2 \\ f_2|_{N(i)=200} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Ясно, что получается 2 СЛАУ, коэффициенты которых легко находятся. Заметим, что мы полагаем квадратичную функцию равной нулю в точках с ожидаемым значением, и накладываем некоторый штраф в точках, удалённых на 50 от ожидаемого значения — этот отступ, как и штрафы, вообще говоря, можно выбирать по-другому. Введём, наконец, функции потерь.

$$\text{LossFunc2} = \mathfrak{L}_2(Y, K) = \arg \{N(i) > T\}$$

$$\text{LossFunc1} = \mathfrak{L}_1(Y, K) = f_1(K) + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K \setminus \mathfrak{L}_2(Y, K)} f_2(N(i))$$

Эти функции с одной стороны учитывают априорные условия и с другой учитывают то, что данные имеют неоднородную плотность. Действительно, мы настраиваем DBSCAN таким образом, чтобы кластеры получались характерного небольшого размера, но если какой-то кластер получается слишком большим, мы его не учитываем и не штрафует за него, вместо этого считаем, что распределение объектов, входящих в него имеет большую плотность и требуется для них подобрать другие параметры.

Заметим, что мы никак не штрафуем количество галактик, которые определяются как шумовые, так как ограничения на количество объектов в каждом кластере и на количество самих кластеров по сути учитывают это.

возвращает номера кластеров, количество объектов в которых больше некоторого порога. Эта функция отражает условие неоднородности плотности данных: действительно, установив порог достаточно большим (например, в 10 раз больше ожидаемого числа кластеров), мы получим кластеры, в которых оказалось слишком много галактик. Ясно, что плотность распределения объектов, попавших в эти кластеры больше, чем средняя плотность по всей выборке, однако мы считаем, что это может

## 6.2 Применённые алгоритмы

Мы будем сравнивать результаты работы 3 основных алгоритмов

- Mean shift
- Mini Batch K-means (спецификация K-means, которая для пересчёта центра кластера на каждой итерации использует не все объекты, принадлежащие ему, а лишь некоторую их подвыборку, что очень ускоряет алгоритм)
- Предложенный алгоритм оптимизации DBSCAN с дополнительным подбором параметров на областях с высокой плотностью

## 6.3 Метрики качества

Для задачи кластеризации с неизвестным числом кластеров существуют несколько коэффициентов, в какой-то мере описывающих результат

- Silhouette Coefficient
- Davies-Bouldin Index
- Calinski-Harabasz Index (Variance Ratio Criterion)

$$s(K) = \frac{Tr(B_k)}{Tr(W_k)} \times \frac{|X| - K}{K - 1}$$

где  $B_k$  - матрица дисперсий центров кластеров,  $W_k$  - сумма матриц дисперсий всех кластеров

$$B_k = \sum_k N(k)(c_k - c)(c_k - c)^T$$

$$W_k = \sum_{k=1}^K \sum_{x:y(x)=k} (x - c_k)(x - c_k)^T$$

$c_k$  - центр  $k$ -го кластера,  $c$  - центра всех объектов. Подразумевается, что метрика расстояний между объектами (и соответственно кластерами) - евклидова. Чем  $s(K)$ , тем лучше результат кластеризации. Действительно максимизация  $s(K)$  равносильна максимизации дисперсий распределения центров кластеров (то есть, чем более центры кластеров будут разбросаны, тем лучше) и в то же время минимизации дисперсий распределения в объектов в каждом кластере (чем компактнее расположены объекты, тем лучше).

Все эти 3 коэффициента дают лучшие значение для выпуклых сферических кластеров с евклидовой метрикой. Это подходит для нашей задачи.

Отметим то, что обысно DBSCAN не склонен выделять кластеры сферической формы, его главное преимущество состоит в том, что он способен распознавать кластеры производной формы.

## 6.4 Сравнения методов

	# subareas	silhouette	C-H / $10^3$	(1- D-B)	K	$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N(k)$
Mean Shift	4	0.34	21	0.15	2867	105
Mini Batch K-means	4	0.22	<b>49</b>	-0.1	<b>1570</b>	478
optimized DBSCAN	5	0.11	12	0.23	1391	170
optimized DBSCAN NH	5	<b>0.42</b>	41	0.32	<b>1510</b>	<b>123</b>
optimized DBSCAN	4	0.13	17	0.23	890	178
optimized DBSCAN NH	4	<b>0.49</b>	<b>59</b>	<b>0.4</b>	992	<b>111</b>

Таблица 1: Сравнение метод кластеризации

В Таблице 1 приведены результаты работы различных методов. Колонка #subareas показывает насколько частей делилась исходная выборка; silhouette содер-

жит значения соответствующего коэффициента; колонка C-H/ $10^3$  заполнена значениями Calinski-Harabasz Index, делёнными на 1000; (1-DB) - Davies-Bouldin index, вычтенные из 1 (так как лучшей классификации соответствует меньшее значение, применяем такое преобразование для согласованности с другими индексами). optimized DBSCAN - это оптимизированный алгоритм без дополнительного подбора параметров на областях, соответствующих большим кластерам; optimized DBSCAN NH - с дополнительным подбором и разбиением соответствующих областей.

Мы видим, что простой подбор параметров для DBSCAN на всей области даёт крайне низкие результаты - ясно, что это происходит из-за наличия очень больших кластеров (в таблице 2 приведены размеры наибольших кластеров до переподсчёта параметров и после). Однако после перенастройки результаты заметно возрастают и становятся лучше других алгоритмов. Различие 3-го и 4-го алгоритмов состоит в том, как изначально делится обучающая выборка (см рисунок ???: в случае, когда используется 4 подвыборки деление производится по расстоянию, равному 0.11 и азимутному углу, равному 180. Идея в том, что количество объектов в областях примерно одно и то же, но плотности могут незначительно варьироваться. В случае же когда используется 5 подвыборок деление происходит так: одна подвыборка - это объекты, находящиеся на расстоянии больше 0.2, а 4 остальных аналогично делятся по расстоянию, равному 0.1 и углу 180. Лучший алгоритм в смысле метрик кластеризации оказался тот, который оперирует 4 подвыборками, однако он не очень хорош в смысле выполнения априорных данных: кластеров намного меньше. Так получается, скорее всего потому, что алгоритм настраивается на меньшее число кластеров - они лучше отделены, следовательно все коэффициенты показывают лучший результат. Однако больший интерес с точки зрения физики составляет 3ий алгоритм.

Заметим, что немалую роль играет время обучения алгоритмов: одна итерация DBSCAN на 170000 объектов (столько примерно составляет одна подвыборка) занимает 2-3 секунды. Количество итераций алгоритма для подбора хороших параметров с помощью дифференциальной эволюции примерно составляет 360 итераций. Итого (с учётом того, что областей 4) получается около 30 минут. Mean Shift (который по экспериментам показывает не самый плохой результат занимает 4 часа для сходимости. Учитывая, что его нужно запускать также несколько раз, чтобы определить

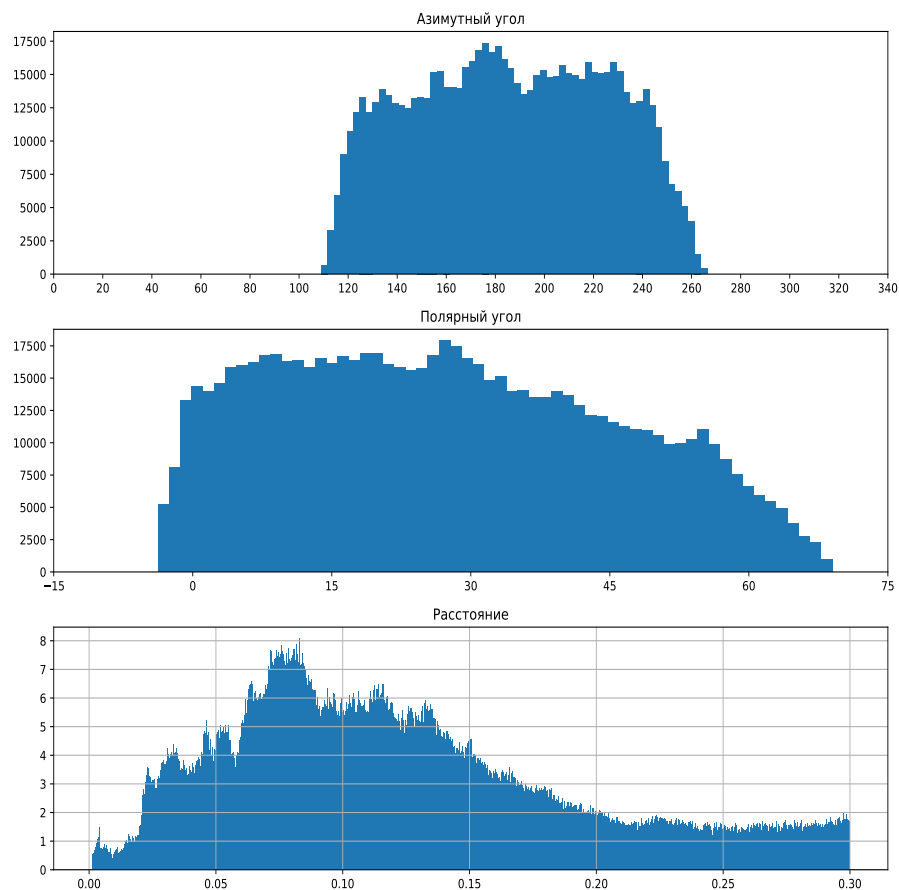


Рис. 1: Распределение координат галактик

значение параметра `bandwith`, то решение задачи этим методом занимает несравнимо больше времени.

DBSCAN_5	18620	18620	8365	6995	3517	3315	2977	2693
DBSCAN_5 NH	2218	1113	1047	1001	936	912	845	840
DBSCAN_4	28683	18634	4989	2713	1535	1366	1270	1151
DBSCAN_4 NH	2021	937	835	663	662	662	667	604

Таблица 2: Наибольшие по размеру кластеры

## 7 Заключение

В данной работе был предложен подход, основанный на дифференциальной эволюции и алгоритме DBSCAN для решения задачи кластеризации сильно зашумлен-

ных данных с некоторой известной априорной информацией о распределении кластеров. Данный подход отличается от VDBSCAN тем, что не требует определения множества параметров  $\epsilon$  с помощью графика распределений расстояний до  $k$ -го соседа (что очень трудно сделать в сильно зашумлённых данных).

Была решена задача кластеризации галактик по каталогу SDSS. В дальнейшем с помощью варьирования или замены функций (3, 4) на другие, выражающие иные априорные представления (характерный размер кластеров в единицах расстояния, их форма), возможно улучшить результаты этой кластеризации



Список литературы необходим в любой научной публикации.

## 8 Литература

### Список литературы

- [1] M. Steinbach, V. Kumar, "Cluster Analysis: Basic Concepts and Algorithms", January 2005
- [2] Peng Liu, Dong Zhou, Naijun Wu, "VDBSCAN: Varied Density Based Spatial Clustering of Applications with Noise" // 2007 International Conference on Service Systems and Service Management
- [3] A. Özokes, F. Ozge Ozkok et al, "AutoVDBSCAN: An Automatic and Level-Wise Varied-Density Based Anomaly Detection Algorithm" // 2018 Conference: 7th International Conference on Advanced Technologies (ICAT'18)
- [4] A. Karami, R. Johansson, "Choosing DBSCAN Parameters Automatically using Differential Evolution" // 2014 International Journal of Computer Applications (0975 8887) Volume 91 - No.
- [5] R. M. Storn, K. Price, "Differential Evolution: A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization Over Continuous Spaces" // 1995 Journal of Global Optimization
- [6] SDSS Collaboration, "THE THIRTEENTH DATA RELEASE OF THE SLOAN DIGITAL SKY SURVEY: FIRST SPECTROSCOPIC DATA FROM THE SDSS-IV SURVEY MAPPING NEARBY GALAXIES AT APACHE POINT OBSERVATORY"
- [7] Abell, G. O. (1958). "The distribution of rich clusters of galaxies. A catalogue of 2712 rich clusters found on the National Geographic Society Palomar Observatory Sky Survey". The Astrophysical Journal Supplement Series, 3,: 211—288.