

第二部分

牛顿动力学

第四章

质点动力学

§4.1 动力学基本公理

- 牛顿第一定律

[定义] 孤立质点：距离其它物体足够远以致其它物体对其影响可忽略不计。

注：孤立质点只是一个理想化模型，实际上是不存在的

[公理一] 存在惯性 (参考) 系，孤立质点在其中处于静止或作匀速直线运动。

注：公理一给出了惯性系的定义，由于孤立质点实际上是不存在的，所以惯性系也是无法找到，只在一定精度下存在着近似的惯性系。

注：惯性系即基本公设中的绝对空间。以下未经特别说明，均指惯性系。

• 牛顿第二定律

[公理二] 受单个力作用时，惯性系中的质点所获得的加速度大小正比于力的大小，反比于其（惯性）质量，即 $a = F/m$ ；
加速度方向与力的方向相同

注：第二定律给出了惯性质量和力的操作性定义，即 

对于给定质点，如果测得质点加速度大小加倍，则说明力的大小加倍，由此可以定义力的相对大小。

对于给定力作用在不同质点 A 和 B 上，如果测得质点 A 加速度大小是 B 的两倍，则说明 A 的质量是 B 的一半，由此可定义质量的相对大小。

注：由此可见，对于同一质点，其质量在牛顿力学范畴内是常量。

第二定律重要性在于它是建立质点动力学微分方程的基础。

• 牛顿第三定律

[公理三] 两个质点间的作用力和反作用力总是同时成对出现，大小相等，方向相反，作用在同一条直线上。

注：第二定律和第三定律表明力是物体间的相互作用，力的动力学效果是使受力质点产生加速度。

注：（万有引力定律）两质点间均存在引力，其方向沿两质点的连线，大小为

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

引力常数

两质点的引力质量

两质点间距离

注：选择 G 适当的数值，可以使引力质量 = 惯性质量，以下不再区分

• 力的矢量特征

[公理四] 力是矢量，力的合成满足平行四边形法则。

注：结合公理四和第二定律，我们有 $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ （仍称为第二定律）

[推论] 力的独立作用原理：如果一个质点同时受多个力的作用，产生的动力学效果（即加速度）相当于这些力单独作用产生的动力学效果的总和。

证明：由于力是矢量，所以可以根据平行四边形法则将这些力合成一个力，

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j$$

这个力产生的加速度为

$$a = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\sum_j \mathbf{F}_j}{m} = \sum_j \frac{\mathbf{F}_j}{m}$$

力 \mathbf{F}_j 单独作用产生的加速度为 $a_j = \frac{\mathbf{F}_j}{m}$



$$\mathbf{a} = \sum_j \mathbf{a}_j$$

证毕。

• 牛顿动力学的特点

1. 公理化体系：从以上公理和第一章关于绝对时空的基本公设出发可推出定理和推论。
2. 矢量化特征：在数学上广泛使用矢量分析，牛顿力学亦被称为矢量力学
3. 满足伽利略相对性原理：牛顿力学的矢量表述只要求参考系是惯性系，但不论选取那个惯性系，其动力学基本规律是相同的. (*)
4. 适用于低速、宏观和弱引力场的体系：高速（狭义相对论），微观（量子力学），强引力场（广义相对论）。

注：任何理论都是相对真理，有它的适用范围，都是在一定的范围和精度上对客观世界进行近似描述。牛顿力学到目前为止仍旧是物理和工程中应用得最广泛的理论。牛顿力学自身体系是自洽而完美的，该理论不存在任何内在错误。相对论和量子力学并不证明牛顿力学错误。

§4.2 质点运动动力学方程（组）

- 自由质点的动力学方程

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

对于自由质点，力是已知的，所以上述方程加上初始条件即可确定质点的运动。

例题 1. 质量为 m ，电量为 q 的粒子在电场强度为 E 和磁感应强度为 B 的均匀稳定电磁场中运动，假定 $E \perp B$. 试分析粒子运动行为.

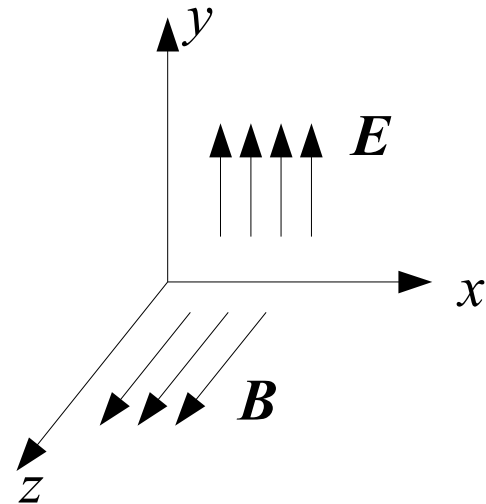
（注：此例放在牛顿力学中并不合适，电磁力不满足伽利略变换）

解：粒子受力为 $\mathbf{F} = q \mathbf{E} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q \mathbf{E} + q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$

所以粒子的运动微分方程为 $m \ddot{\mathbf{r}} = q \mathbf{E} + q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$

建立直角坐标系 $Oxyz$ ，使得 y 沿 E 方向， z 沿 B 方向

在这个坐标系内，运动微分方程表示为



$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = \lambda - \omega \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{其中 } \lambda = qE/m, \quad \omega = qB/m$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} = \omega \dot{y} &\Rightarrow \dot{x} = \omega(y + c_1) \\ \ddot{y} &= \lambda - \omega \dot{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = \lambda - \omega^2 c_1$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow y &= \underbrace{c_2 \cos(\omega t + c_3)}_{\text{齐次通解}} + \underbrace{\frac{\lambda}{\omega^2} - c_1}_{\text{非齐次特解}} \\ \dot{x} &= \omega(y + c_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = c_2 \sin(\omega t + c_3) + \frac{\lambda}{\omega} t + c_4$$

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = c_5 t + c_6$$

六个积分常数由初始条件确定。

讨论: $z = c_5 t + c_6 = v_{0z} t + z_0$ z 方向为匀速直线运动

1. 如果 $E=0$, 则 $\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x = c_2 \sin(\omega t + c_3) + c_4 \\ y = c_2 \cos(\omega t + c_3) - c_1 \end{cases}$ Oxy 投影为圆周运动

面内速度 $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega c_2 = \text{constant} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \equiv v_{\perp}$

投影圆半径 $c_2 = v_{\perp} / \omega = mv_{\perp} / qB$

运动可看成是垂直于 B 的平面内匀速圆周运动与沿 B 方向匀速直线运动的合成, 合成结果是沿磁力线方向的等速螺旋运动.

2. 如果 $E \neq 0$, 则取相对于 $Oxyz$ 平动的坐标系 $O'x'y'z'$, 使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OO}' &= (\lambda/\omega)t \boldsymbol{e}_1 + v_{0z}t \boldsymbol{e}_3 \\ \Rightarrow \begin{cases} x' = c_2 \sin(\omega t + c_3) + c_4 \\ y' = c_2 \cos(\omega t + c_3) - c_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v'_{\perp} = \sqrt{(v_{0x} - \lambda/\omega)^2 + v_{0y}^2} \\ c_2 = mv'_{\perp} / qB \end{cases} \end{aligned}$$

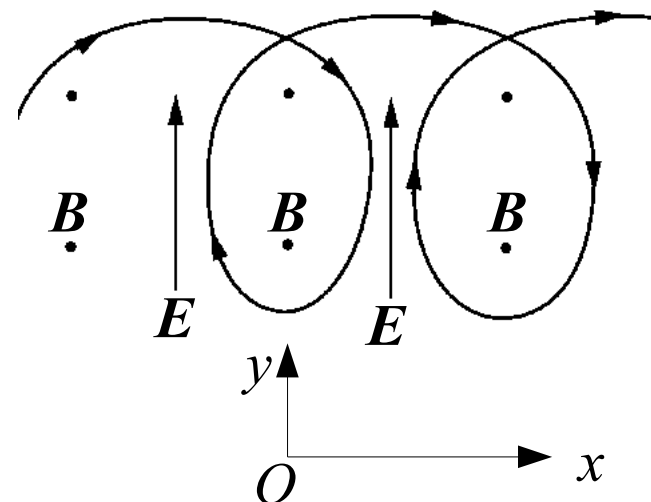
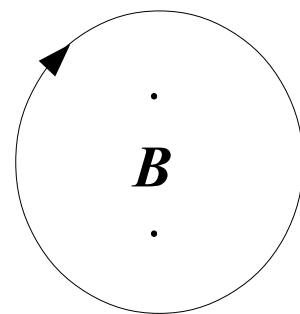


运动可看成是垂直于 B 的平面内匀速圆周运动与沿 OO' 方向匀速直线运动的合成, 合成结果不再是沿磁力线方向的等速螺旋运动.

轨迹在 Oxy 面内投影不再是完整的圆，而是如图所示

问题：为什么加 y 方向电场，粒子却向 x 方向漂移？

答：假定 $q>0$. 当 $E=0$ 时，运动轨道在 Oxy 上投影只能为右图圆轨道.



为了定性说明问题，我们考虑 E 非零，但是又非常小的情况，可以想象此时轨道近乎是圆的圆轨道，粒子速度也近乎是常数。

在轨道上顶点处，电场力与洛伦茨力反向，减弱了向心力，那么轨道曲率半径相对于 $E=0$ 的圆轨道要增大

在轨道下顶点处，电场力与洛伦茨力同向，增强了向心力，那么轨道曲率半径相对于 $E=0$ 的圆轨道要减小

在轨道左右顶点处，电场力不影响向心力，那么轨道曲率半径相对于 $E=0$ 的圆轨道几乎不变

考虑到以上分析，由原来圆轨道稍微变化后能得到满足条件的只有右上图.

• 非自由质点动力学方程组

[定义] 约束：预先给定的、由约束物给出的对系统运动的限制。

[定义] 约束方程：用数学方法表示约束条件的方程 $f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0$ 。

[定义] 约束力：为满足约束条件，约束物对质点施加的力 F_R 。

[定义] 主动力：质点所受的除约束力以外的力 $F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ 。

注：一般主动力是已知的，约束力是未知的，在牛顿力学中二者地位平等。
由牛顿第二定律及约束方程可得非自由质点动力学方程组

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \mathbf{F}_R \\ \text{约束方程} \end{cases}$$

注：这个方程组是封闭的，求解它可以得到质点的运动学方程及未知约束力。
很多情况下我们只关心质点运动方程，但我们仍旧要解很多个约束方程，这是牛顿力学缺点所在。

例题 2. 质量 m 的滑块视为质点, $t=0$ 时在半径为 R 的光滑固定半球面顶点由静止开始下滑. 求滑块运动到对应 θ 角的位置时滑块的速率及球面对滑块的支撑力. 设滑块一直不脱离球面, 求解后讨论解的适用范围.

解: 以质点为研究对象, 受重力 mg (主动力) 及支撑力 F_N (约束力) 作用.

由于这两个力均在竖直平面内, 滑块初始无速度, 那么以后的运动在竖直平面内, 下面只研究该面内运动

这里用自然坐标法求解 (直角、极坐标系亦可)

以 O_1 为弧长坐标起点, 沿物块滑动方向为正方向, 我们有

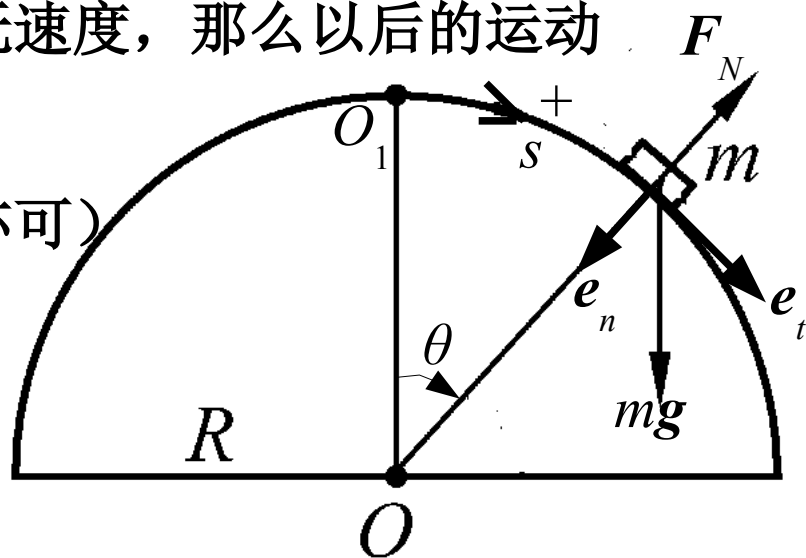
$$m[\ddot{s} \mathbf{e}_t + (\dot{s}^2/\sigma) \mathbf{e}_n] = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_N$$

约束方程: $\sigma=R$

$$\left. \begin{array}{l} m[\ddot{s} \mathbf{e}_t + (\dot{s}^2/\sigma) \mathbf{e}_n] = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_N \\ \text{约束方程: } \sigma=R \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{s} = g \sin \theta \\ m \dot{s}^2 / R = mg \cos \theta - F_N \end{array} \right.$$

补充几何方程: $s=R\theta$ 可解得 (见板书):

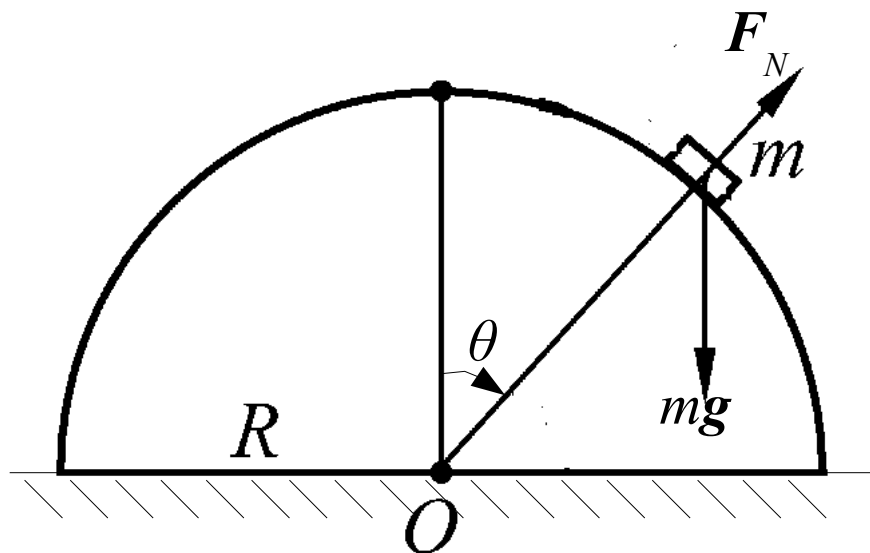
$$\dot{s} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}, \quad F_N = mg(3\cos\theta - 2) > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \arccos(2/3)$$



思考题：如果球面固定，表面不是光滑的，摩擦系数为 μ ，结果怎样？
（假定初始状态滑块静止在球面顶部）

如果球面表面光滑且能沿地面滑动，结果怎样？（假定初始状态滑块静止在球面顶部，球面也处于静止状态）

如果球面粗糙，可沿粗糙地面滑动，摩擦系数均为 μ ，结果怎样？
（假定初始状态滑块静止在球面顶部，球面也处于静止状态）



例题 3. 一内壁光滑的直管，在水平面内绕过其端点 O 的竖直轴以角速度 ω_0 做匀速转动。管内有一质量为 m 的质点，初始时距 O 点的距离为 ρ_0 ，相对管静止。试求质点沿管的运动规律和质点对管在水平方向的压力。

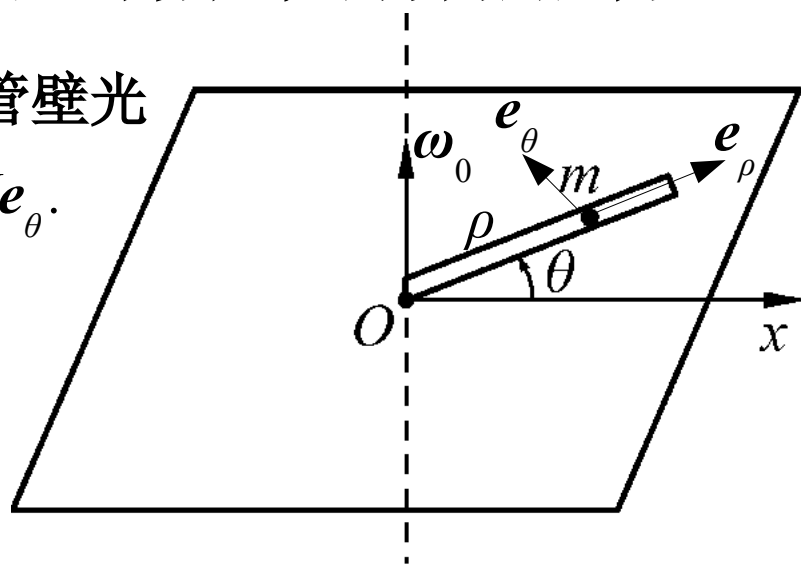
解：在图示极坐标系 (ρ, θ) 内求解。由于内管壁光滑，所以可假定管壁对质点作用力 $N = N e_\theta$ 。

动力学方程：

$$m[(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) e_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta}) e_\theta] = N$$

约束方程： $\dot{\theta} = \omega_0$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\rho} = \rho \omega_0^2 + \text{初始条件} \Rightarrow \rho = \rho_0 \cosh \omega_0 t \\ N = 2 m \dot{\rho} \omega_0 \end{array} \right\} \rightarrow N = 2 m \omega_0^2 \rho \sinh \omega_0 t$$



根据牛顿第三定律，质点对管的水平作用力大小为 $2 m \omega_0^2 \rho \sinh \omega_0 t$
方向垂直于管且指向转动反方向

§4.3 动力学基本定理和守恒定律

- 动量定理和动量守恒定律

[定义] 质点动量: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

质点动量定理: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

证明: 只要注意到质点质量是常量, 由牛顿第二定律即可得证.

[推论] 质点动量守恒定律: 如果 $\mathbf{F} = 0$, 则 \mathbf{p} 为常量

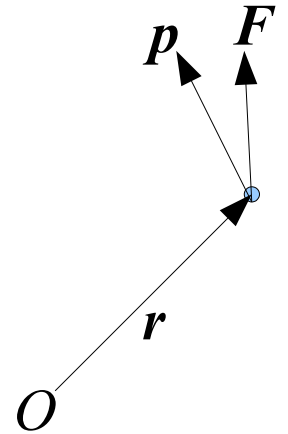
[推论] 如果沿某一固定方向合力为零, 则该方向上动量守恒

证明: 设固定方向单位矢量为 \mathbf{e}_l .

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{F} = \mathbf{e}_l \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{p}) \\ \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{F} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{p} = \text{const.} \quad (\text{证毕})$$

• 角动量定理与角动量守恒

设质点相对于 O 点的位置矢量为 r ，质点受合外力 F ，动量为 $p=mv$ 。



[定义] 力对 O 点力矩: $M_O = r \times F$

[定义] 质点对 O 点角动量 (动量矩) : $L_O = r \times p$

质点对 O 点角动量定理: $\dot{L}_O = M_O$

证明:

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}_O &= \frac{d}{dt}(r \times p) = \dot{r} \times p + r \times \dot{p} \\ \dot{r} \times p &= \dot{r} \times (m v) = m \dot{r} \times \dot{r} = 0 \\ \text{动量定理} &\Rightarrow r \times \dot{p} = r \times F \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{L}_O = M_O \quad (\text{证毕})$$

[推论] 质点对 O 点角动量守恒定律: 如果 $M_O=0$ ，则 L_O 为常量

设过 O 点的固定轴的单位向量为 e_l ，简称该轴为 e_l 轴

[定义] 力对 e_l 轴的力矩: $M_l = e_l \cdot M_O$

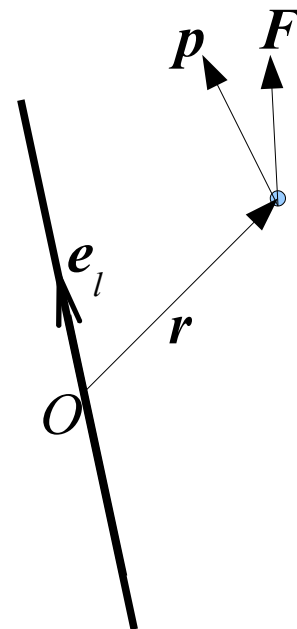
[定义] 质点对 e_l 轴的角动量 $L_l = e_l \cdot L_O$

[推论] 质点对 e_l 轴的角动量定理: $\dot{L}_l = M_l$

证明: $\dot{L}_O = M_O \Rightarrow e_l \cdot \dot{L}_O = e_l \cdot M_O = M_l$
 e_l 是常矢量 $\Rightarrow \dot{L}_l = e_l \cdot \dot{L}_O$ $\Rightarrow \dot{L}_l = M_l$

[推论] 质点对 e_l 轴的角动量守恒定律: 如果 $M_l = 0$ ，则 L_l 为常量

注: 有两种情形使得 $M_l = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} (1) F = 0 \\ (2) F, r, e_l \text{ 共面} \end{array} \right.$

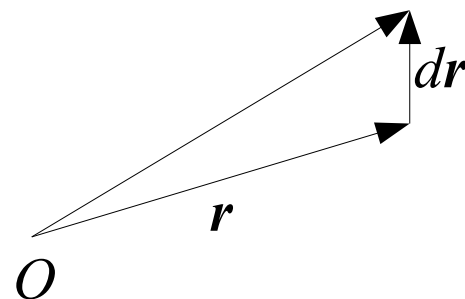


[推论] 若质点对 O 点角动量守恒, 即 L_O 为常量, 那么质点的运动轨迹是平面曲线; 质点的位置矢量在单位时间内扫过的面积为常量。

证明: 根据定义 $L_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 知 $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}_O$, 即位置矢量在垂直于 \mathbf{L}_O 的平面内。

由于 \mathbf{L}_O 是常矢量, 且位置矢量起始于 O , 那么位置矢量始终在过 O 点且垂直于常矢量 \mathbf{L}_O 的平面内, 位置矢量末端对应于质点运动轨迹, 它亦在这个面内。故质点运动轨迹为平面曲线。

$$\left. \begin{aligned} dA &= \frac{|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|}{2} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}{2} \\ \mathbf{L}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}_O|}{2m}$$



\mathbf{L}_O 是常矢量, 所以 $\frac{dA}{dt}$ 为常量. (证毕)

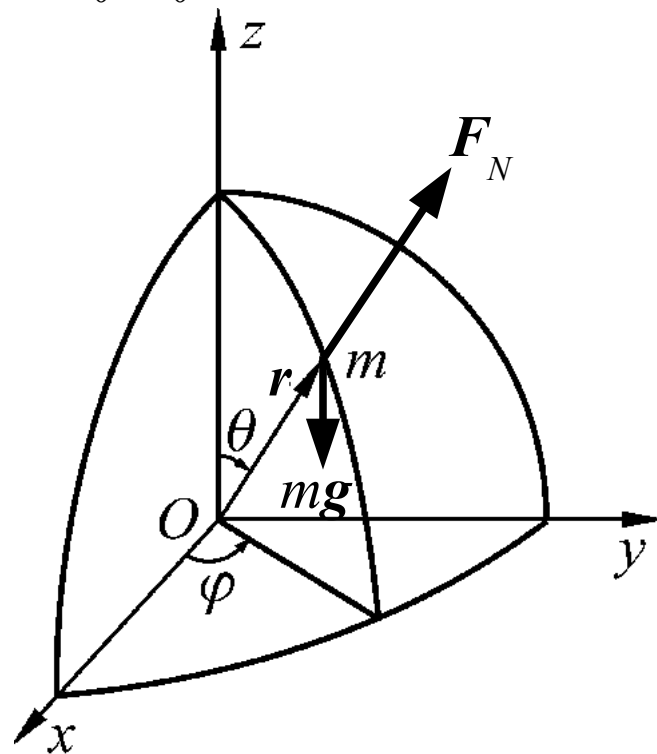
例题 4. 质量为 m 的质点受重力作用，在一光滑的、半径为 R 的球面上运动。如图所示，采用球坐标系，设 t_0 时刻质点位置为 (R, θ_0, φ_0) ，且 $\dot{\varphi}_0$ 已知；设 t 时刻质点位置为 (R, θ, φ) ，求 t 时刻的 $\dot{\varphi}$ 。

解：质点受重力 mg 和球面约束力 F_N 作用，

这两个力均与 z 轴共面，所以质点对 z 轴的角动量守恒。

$$\mathbf{v} = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$L_z = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r} \times m \mathbf{v}) = m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$



L_z 守恒，所以

$$m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = m R^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} \dot{\varphi}_0$$

特别是 $\dot{\varphi}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$ ，则质点在 $\varphi = \text{const.}$ 的面内运动。（回忆例题 2）

• 动能定理与机械能守恒定律

[定义] 质点动能: $T = \frac{1}{2} m v^2$

[定义] 功率: $w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

质点动能定理: $\dot{T} = w$

证明: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \dot{T} = m \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ (证毕)

[推论] 质点在力 \mathbf{F} 作用下沿路径 C 从位置 \mathbf{r}_1 运动到位置 \mathbf{r}_2 , 则

$$\Delta T = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{path } C)$$

证明: $\dot{T} = w \Rightarrow dT = w dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \bar{d} W \quad (\text{Path } C)$

[定义] $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{path } C)$ 称为力沿连接点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 的路径 C 作的功

注意: 力做功通常是与路径有关的。

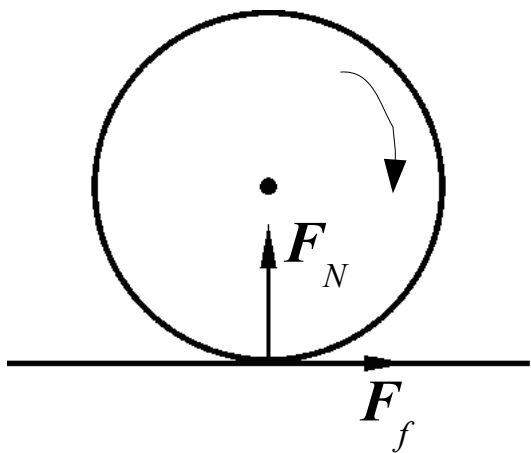
注：在以下三种情况下力的功率为零。

(1) $F=0 \Rightarrow w=0$

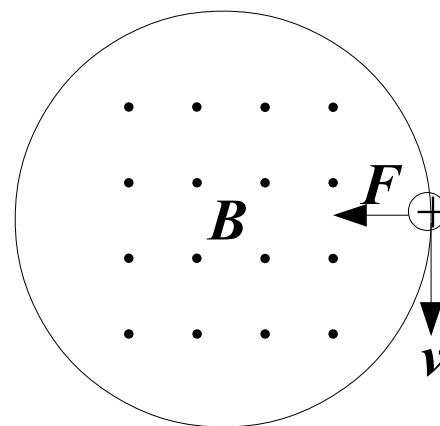
(3) $F \perp v \Rightarrow w=0$

(2) $v=0 \Rightarrow w=0$

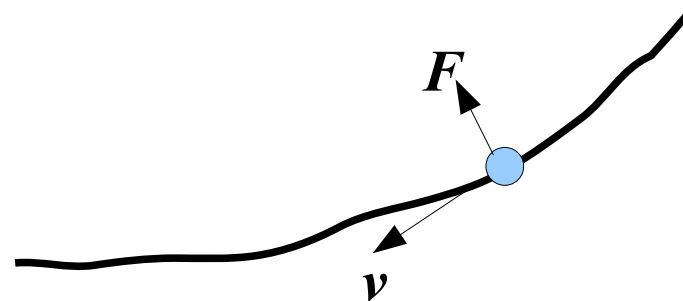
例子：无滑滚动



例子：洛伦茨力



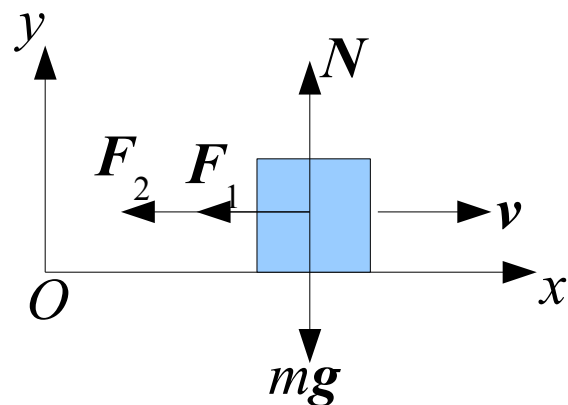
例子：固定光滑轨道上运动质点



思考题：分析课本 57 页图 3.11 中摩擦力做功情况

例题 5. 质量为 m 的滑块在粗糙水平地面上沿直线滑动. 已知其初速度为 v_0 , 它与地面间的动摩擦因数为 μ , 所受空气阻力与速度平方成正比, 比例系数为 b , 求经过多远距离后滑块停止滑动.

解: 以物块初始位置为 O 点, 初速度方向为 x 轴
 竖直方向为 y 轴建立图示坐标系.



滑块受重力 mg , 地面支撑力 N ,
 地面摩擦力 F_1 , 以及空气阻力 F_2 四个力作用
 由于 z 方向不受力, 所以该方向动量守恒;
 该方向初速度为 0, 所以滑块无 z 方向运动.

$$\text{约束方程 } y=0 \Rightarrow \ddot{y}=0 \Rightarrow N=mg \Rightarrow F_1=\mu N=\mu mg \quad \text{又 } F_2=b\dot{x}^2$$

$$\text{根据动能定理有 } d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)=(F_1+F_2)(-\hat{x})\cdot d\mathbf{x}=-(\mu mg+b\dot{x}^2)dx$$

$$\Rightarrow \int_{v_0^2}^0 \frac{m}{2} \frac{d\dot{x}^2}{\mu mg+b\dot{x}^2} = -\int_0^s dx \Rightarrow s = \frac{m}{2b} \ln\left(1 + \frac{bv_0^2}{\mu mg}\right) \quad \text{思考题: } b=0, s=?$$

[定义] 保守力：如果力 $F=F(\mathbf{r})$ 做功只与质点首末位置有关，而与中间路径无关，则该力称为保守力。

注：关于保守力还有以下四种等价定义。

- (1) 若受力质点沿任意闭合路径运动一周，力做功为零，则力为保守力。
- (2) 若 $F \cdot d\mathbf{r}$ 为全微分，则力为保守力。
- (3) 若存在标量函数 $V(\mathbf{r})$ 使得 $F = -\nabla V$ ，则力为保守力。
- (4) 若力 F 旋度为零，即 $\nabla \times F = 0$ ，则力为保守力。

证明：只需证

[定义] \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow [定义]

下略（请自行证明）

[定义] 势能：如果 $F = F(\mathbf{r}) = -\nabla V$ ，则称 $V(\mathbf{r})$ 为保守力的势能。

[推论] 如果 $V(\mathbf{r}_0)=0$ ，则 $V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 。


证明： $\mathbf{F} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -(\nabla V) \cdot d\mathbf{r} = -dV$ 积分即得证。

[定义] 质点机械能： $E = T + V$

质点机械能定理：机械能变率等于非保守力的功率，即

$$\dot{E} = w_{nc} \equiv \mathbf{F}_{nc} \cdot \mathbf{v}$$

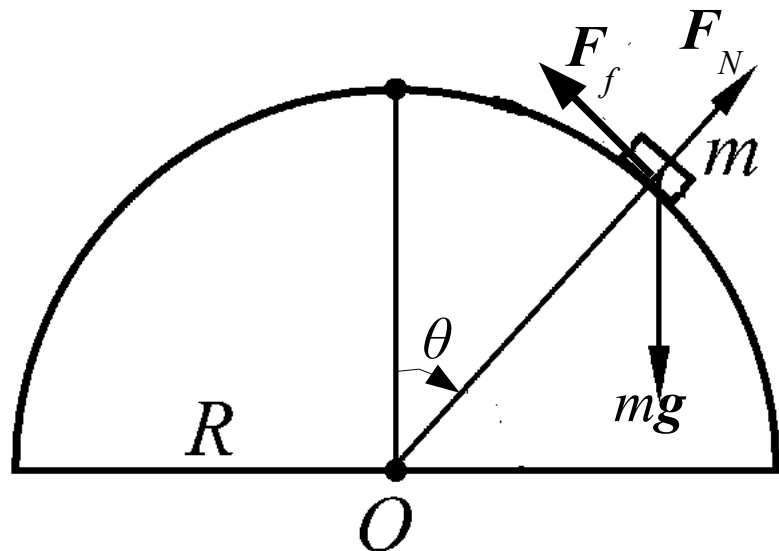
证明：将质点所受外力分为保守力 \mathbf{F}_c 和非保守力 \mathbf{F}_{nc} 。

动能定理 $\dot{T} = (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc}) \cdot \mathbf{v}$
存在势能 V ，使得 $\mathbf{F}_c = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot d\mathbf{r}/dt = -\dot{V}$ }  得证。

[推论] 质点机械能守恒定律：若某一过程中质点所受非保守力均不做功，则该过程中机械能守恒， $E = T + V = \text{常量}$

例题 6. 质量 m 的滑块视为质点， $t=0$ 时在半径为 R 的粗糙固定半球面顶点由静止开始下滑。求滑块运动到对应 θ 角的位置时滑块的速率。
 设摩擦系数为 μ ($\ll 1$)，求滑块不脱离球面条件。

解：受图示重力 mg ，支撑力 F_N 和摩擦力 F_f 作用，它们共面，且滑块初始静止，所以尔后在某一平面内运动，轨迹为圆周。



向心加速度由重力分量和支撑力提供，故

$$a_n = R \dot{\theta}^2 = (mg \cos \theta - F_N) / m \Rightarrow F_N = m(g \cos \theta - R \dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow F_f = \mu F_N = \mu m(g \cos \theta - R \dot{\theta}^2)$$

以顶点为势能零点，机械能表示为 $E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - mgR(1 - \cos \theta)$

滑动过程中支撑力不做功，摩擦力为非保守力，功率为 $w_{nc} = -F_f R \dot{\theta}$

质点机械能定理 $\dot{E} = w_{nc} \Rightarrow$

$$d \left[\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - mgR(1 - \cos \theta) \right] = -\mu m (g \cos \theta - R \dot{\theta}^2) R d \theta$$

当 $\mu \ll 1$ 时, $\dot{\theta}^2 = h_0(\theta) + h_1(\theta)\mu + h_2(\theta)\mu^2 + \dots$, $h_j(0) = 0$ (微绕法)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} d \left[\frac{1}{2} m R^2 h_0(\theta) - mgR(1 - \cos \theta) \right] &= 0 \Rightarrow h_0(\theta) = 2g(1 - \cos \theta)/R \\ d \left[\frac{1}{2} m R^2 h_1(\theta) \mu \right] &= -\mu m [g \cos \theta - R h_0(\theta)] R d \theta \\ \vdots \end{aligned} \right. \Rightarrow h_1(\theta) = 2g(2\theta - 3\sin \theta)/R \end{aligned}$$

$$v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 = R^2 [h_0(\theta) + h_1(\theta)\mu + \dots] \approx 2gR[(1 - \cos \theta) + \mu(2\theta - 3\sin \theta)]$$

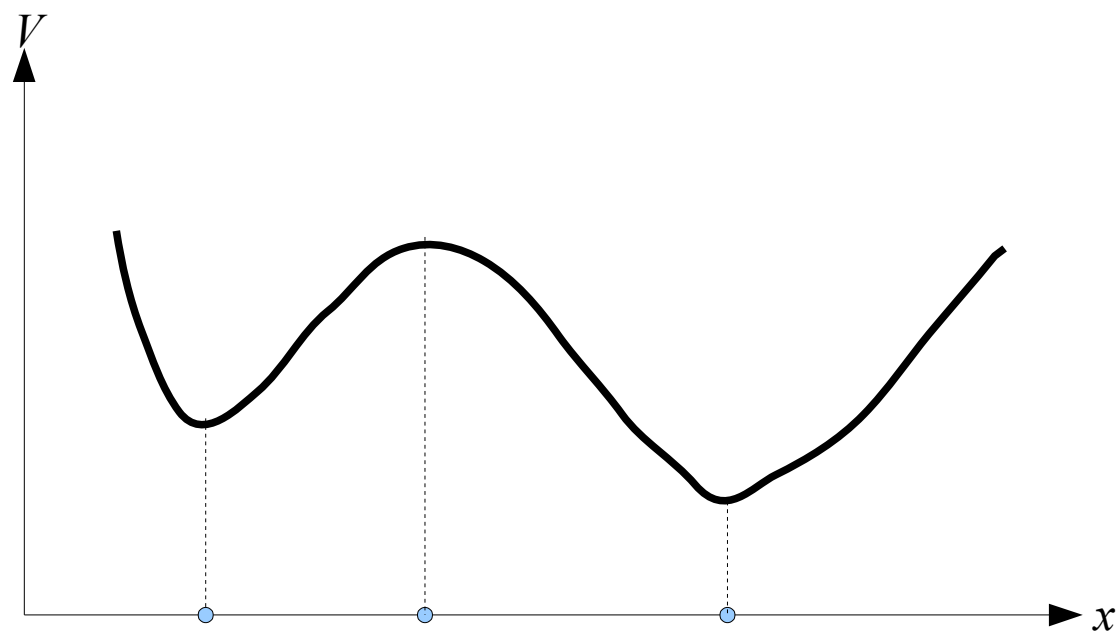
$$\Rightarrow F_N = m(g \cos \theta - R \dot{\theta}^2) \approx mg[3 \cos \theta - 2 - 2\mu(2\theta - 3\sin \theta)]$$

设使得 $F_N \geq 0$ 的临界角为 θ_c , 利用上述类似微绕法可得上面解有效条件

$$0 < \theta < \theta_c \approx \arccos(2/3) + 2\mu[1 - (2/\sqrt{5})\arccos(2/3)] > \arccos(2/3)$$

§4.4 质点平衡及其稳定性

请自学课本 62-64 页内容.



一维系统

§4.5 有心力场

- 质点在有心力场中运动的一般规律

[定义] 有心力场：若质点在稳恒力场中所受力的作用线始终通过惯性系中的某个固定点，则该力场称为有心力场。

注：通常把研究质点在有心力场中的运动称为单体问题。

例如行星绕太阳运动时，由于行星质量远远小于太阳，所以行星的运动对太阳的运动影响很小，可近似的把太阳看成不动的，因而把研究行星的运动转化为单体问题。

[定理] 在有心力场中运动的质点对力心的角动量守恒

证明：取力心为坐标系原点 O ，由于 $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$

$\Rightarrow \dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O = 0$ 故质点对 O 点角动量守恒（证毕）

[定理] 在有心力场中运动的质点机械能守恒

证明：只需证明中心力场是保守力场即可。

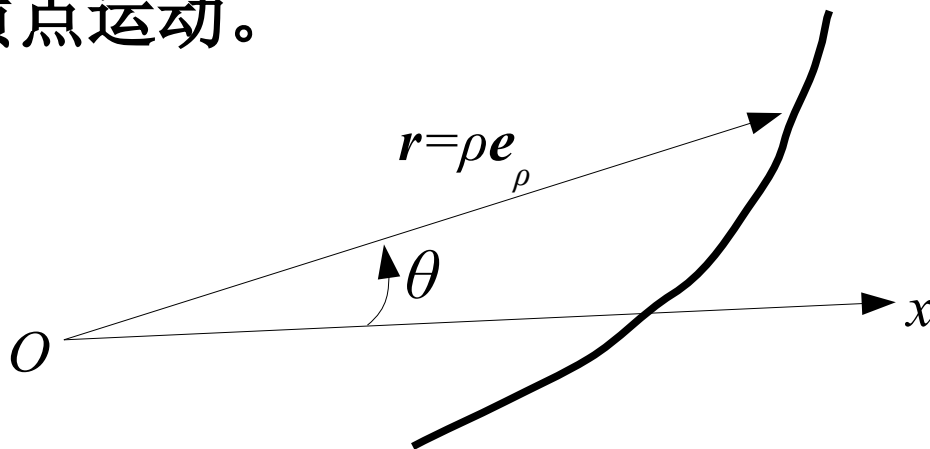
$$\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r = F(r) \mathbf{r} / r$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{F(r)}{r} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{F(r)}{r} \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{2} = \frac{F(r)}{r} \frac{dr^2}{2} = F(r) dr$$

那么存在势能函数 $V(r) = -\int F(r) dr$ 使得 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV$ 为全微分

故中心力场是保守力场，质点机械能守恒。（证毕）

由于角动量守恒，所以质点作平面曲线运动，可以用极坐标 (ρ, θ) 来描述质点运动。



[推论] 用极坐标表示质点运动的动力学方程组为

$$\begin{cases} m\rho^2\dot{\theta}=L \quad (\text{常量}) \\ \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2)+V(\rho)=E \quad (\text{常量}) \end{cases}$$

证明：极坐标系中质点位置矢量和速度分别表示为

$$\mathbf{r}=\rho\mathbf{e}_\rho \quad \mathbf{v}=\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho+\rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=m\rho^2\dot{\theta}\mathbf{k} \quad \text{角动量守恒, 所以 } m\rho^2\dot{\theta}=L \quad (\text{常量})$$

由机械能守恒和速度表达式即可证明另外一个方程. (证毕)

[推论] 质点运动轨道微分方程为 $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=\rho^2\left[\frac{2m}{L^2}(E-V)\rho^2-1\right]$

证明：从动力学方程组中消去时间 t 即可得证.

注：轨道微分方程有时采用 $u=1/\rho$ 变换表示成比尼公式的形式，
请自学课本 35-36 页 ‘轨道微分方程’ 小节.

[定理] 在平方反比有心力场中运动的质点轨道是圆锥曲线 .

证明一：以无穷远点为势能零点，平方反比力场势能可表示为

$$V(\rho) = -k/\rho \quad (\text{其中 } k \text{ 为常数})$$

利用比尼变换 $u=1/\rho$

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 \left[\frac{2m}{L^2} (E - V) \rho^2 - 1 \right] \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2 k^2}{L^4} - \left(u - \frac{mk}{L^2}\right)^2}} = \pm d\theta$$

$$\text{令 } u - \frac{mk}{L^2} = \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2 k^2}{L^4}} \cos \zeta \quad \longrightarrow \quad d\zeta = \pm d\theta \Rightarrow \zeta = \zeta_0 \pm \theta$$

选择适当的初始条件使得 $\zeta_0 = 0$, 则 $u = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{m^2 k^2}{L^4}} \cos \theta$

于是轨道可表示为

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{其中} \quad p = \frac{L^2}{mk} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

所以轨道为圆锥曲线 . (证毕)

证明二：（拉普拉斯方法）

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r} = \text{const.} \Rightarrow m \ddot{\mathbf{r}} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{L} &= \text{const.} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{L} \times \ddot{\mathbf{r}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{k}{mr^3} \mathbf{L} \times \mathbf{r}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{L} \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{D} &= \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{L} \times \mathbf{r} = m \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (m \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} \times \mathbf{r} = m \dot{\mathbf{r}} r^2 - \mathbf{r} m \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = m \dot{\mathbf{r}} r^2 - \mathbf{r} m r \dot{r} = m r (\dot{\mathbf{r}} r - \mathbf{r} \dot{r})$$

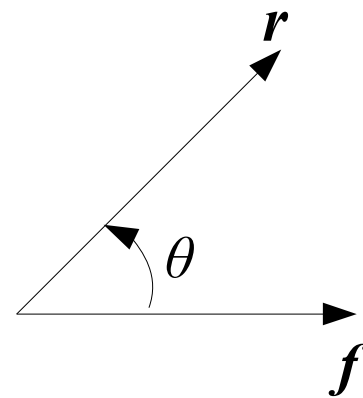
$$= m r^3 \left(\frac{\dot{\mathbf{r}} r - \mathbf{r} \dot{r}}{r^2} \right) = m r^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

于是有 $\frac{d}{dt} (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Rightarrow \mathbf{f} = -\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} - k \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const.}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= -\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} - k \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const.} \Rightarrow f^2 = (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}})^2 + k^2 \left(\frac{r}{r} \right)^2 + 2k(\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\
 \mathbf{L} &= (\mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}) \perp \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}})^2 = L^2 \dot{\mathbf{r}}^2 \\
 (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} &= -(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{L} = -(\mathbf{L}/m) \cdot \mathbf{L} = -L^2/m
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} - k \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const.} \\ \mathbf{L} &= (\mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{r}}) \perp \dot{\mathbf{r}} \\ (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} &= -(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{L} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f^2 &= L^2 \dot{\mathbf{r}}^2 + k^2 - \frac{2k L^2}{mr} \\
 E &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow f^2 &= L^2 \dot{\mathbf{r}}^2 + k^2 - \frac{2k L^2}{mr} \\ E &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow f^2 = \frac{2EL^2}{m} + k^2$$

$$rf \cos \theta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{r} \cdot \left(-\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} - k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{L^2}{m} - kr$$



$$\Rightarrow r = \frac{L^2/mk}{1 + (f/k) \cos \theta} \equiv \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{证毕})$$

[推论] 平方反比引力场中质点轨道可为椭圆、抛物线和双曲线；轨道偏心率依赖于总能量，力心恰好在轨道焦点上

证明： $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, $k > 0$, $p = \frac{L^2}{mk} > 0$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + V(\rho) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{\rho} \quad \text{可正可负}$$

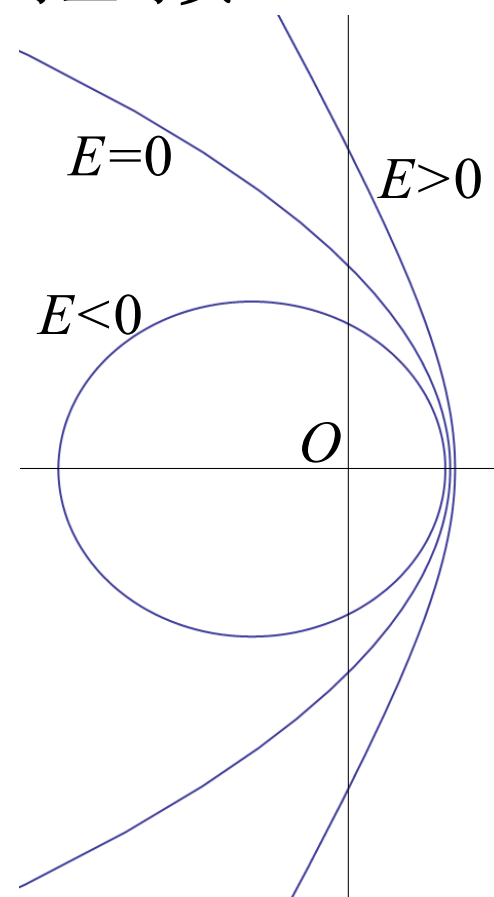
$E < 0 \Rightarrow 0 < e < 1 \Rightarrow$ 轨道为椭圆

$E = 0 \Rightarrow e = 1 \Rightarrow$ 轨道为抛物线

$E > 0 \Rightarrow e > 1 \Rightarrow$ 轨道为双曲线

三种情况轨道如右图所示，焦点在 O 点，而 O 点即力心，故力心在轨道焦点上。

特别是，双曲线只取一支，其焦点与力心重合。



[推论] 斥力场中质点轨道为双曲线，力心在双曲线异侧焦点上

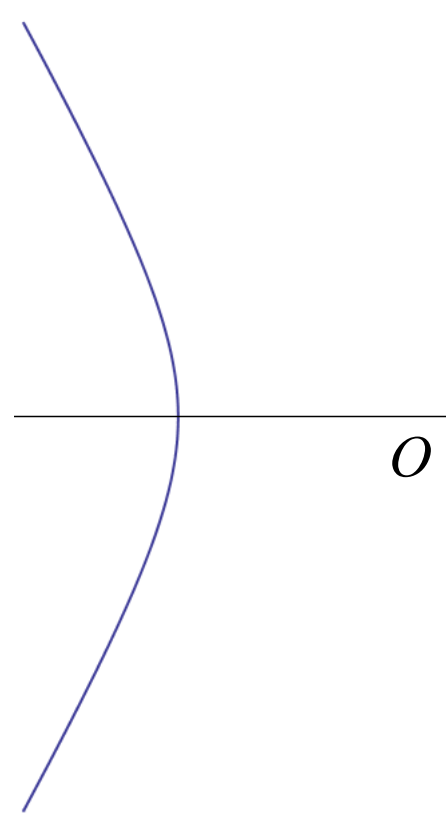
$$\text{证明: } \rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad k < 0, \quad p = \frac{L^2}{mk} < 0, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + V(\rho) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{\rho} > 0$$

$\Rightarrow e > 1$ 故轨道为双曲线

如右图所示，力心 O 不在双曲线同侧焦点上，而是在异侧焦点上。

注：由此可见斥力场中不存在闭合轨道。



• 行星轨道

将太阳近似看成不动，考虑行星公转，将行星视为质点，则引力势能

$$V(\rho) = -\frac{GMm}{\rho} \Rightarrow k = GMm > 0$$

[推论] 开普勒第一定律：行星绕太阳做椭圆轨道运动，
太阳位于其中一个焦点上。

证明：我们已经知道引力场中质点轨道为圆锥曲线，力心为焦点。

行星公转轨道是闭合的，所以只能是椭圆，
太阳即力心，所以为焦点。（证毕）

[推论] 开普勒第二定律：行星与太阳连线在单位时间内扫过的面积为常量。

证明：在 §4.3 已经证明 $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ 这是角动量守恒的自然推论。

[推论] 开普勒第三定律：行星运动周期的平方
正比于其轨道半长轴的立方

证明：根据开普勒第二定律，单位时间扫过的面积为 $L/2m$

$$\text{椭圆总面积为 } \pi ab, \text{ 所以周期为 } T = \frac{\pi ab}{L/2m} = \frac{2\pi m ab}{L}$$

$$\rho = \frac{p}{1+e \cos \theta} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2}, \quad p = \frac{L^2}{mk} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

机械能守恒，故可用远日点的运动学量表示机械能

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + V(\rho) = \frac{m}{2} \left[0 + \frac{L^2}{(mp/1-e)^2} \right] - \frac{GMm}{p/(1-e)}$$

消去 p 和 L^2 可得 $E = -\frac{GMm}{2a}$ 故 $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{GMm^2 a}}$

$$\Rightarrow b = a \sqrt{1-e^2} = \frac{L}{m} \sqrt{\frac{a}{GM}} \Rightarrow T = \frac{2\pi m ab}{L} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \quad \text{证毕.}$$

• α 粒子散射

研究 α 粒子（带正电 $2e$ ）入射到重金属核附近发生偏转现象，由于重金属核质量远远大于 α 粒子质量，可视为质点在平方反比斥力场中运动。

假定 α 粒子以速度 v_0 从无穷远处射向具有正电荷 Ze 的重金属核 (O 点)， O 点到速度延长线距离记为 b （瞄准距离）。

$$\text{势能函数 } V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} \Rightarrow k = -\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} < 0$$

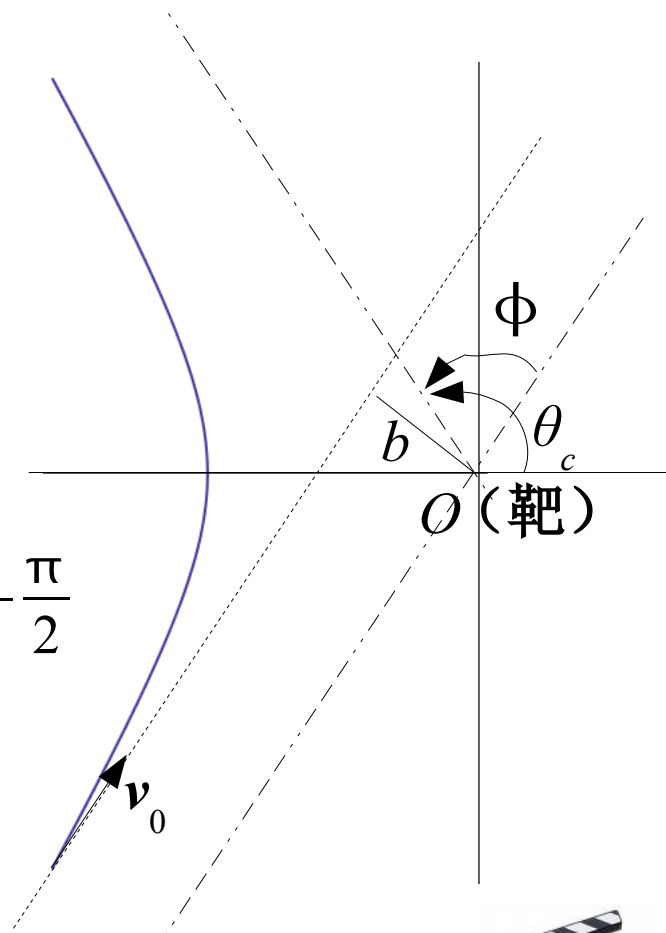
[推论] α 粒子偏转角 ϕ 满足 $\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{-k/b}{mv_0^2}$

证明：我们已经证明过 $k < 0$ 时轨道为双曲线，那么

$$\text{偏转角 } \phi \text{ 与渐近线方向对应角度 } \theta_c \text{ 满足 } \frac{\phi}{2} = \theta_c - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{角动量 } L = mv_0 b \quad \text{机械能 } E = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{m^2 v_0^4 b^2}{k^2}}$$



渐近线方向 $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow 1 + e \cos \theta_c = 0$ 注意到 $\phi/2 = \theta_c - \pi/2$ 即可得证。



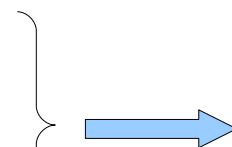
• 轨道封闭性

【推论】质点在有心力场中的径向运动等效于一维势场中运动

证明：

$$m \rho^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{常量})$$

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + V(\rho) = E \quad (\text{常量})$$



$$\longrightarrow \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V(\rho) + \frac{L^2}{2 m \rho^2} = E$$

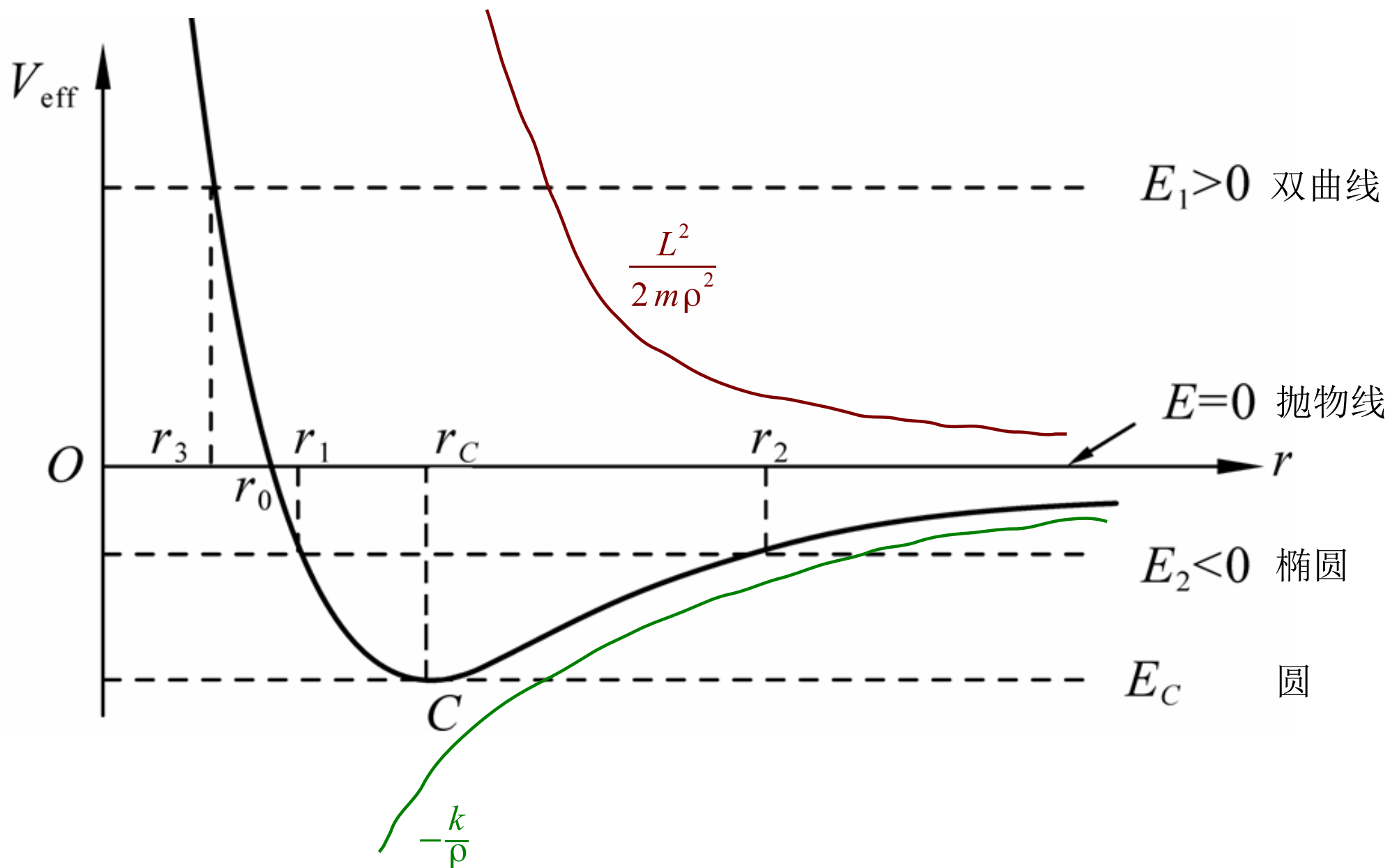
令：

$$V_{eff}(\rho) \equiv V(\rho) + \frac{L^2}{2 m \rho^2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) = E$$

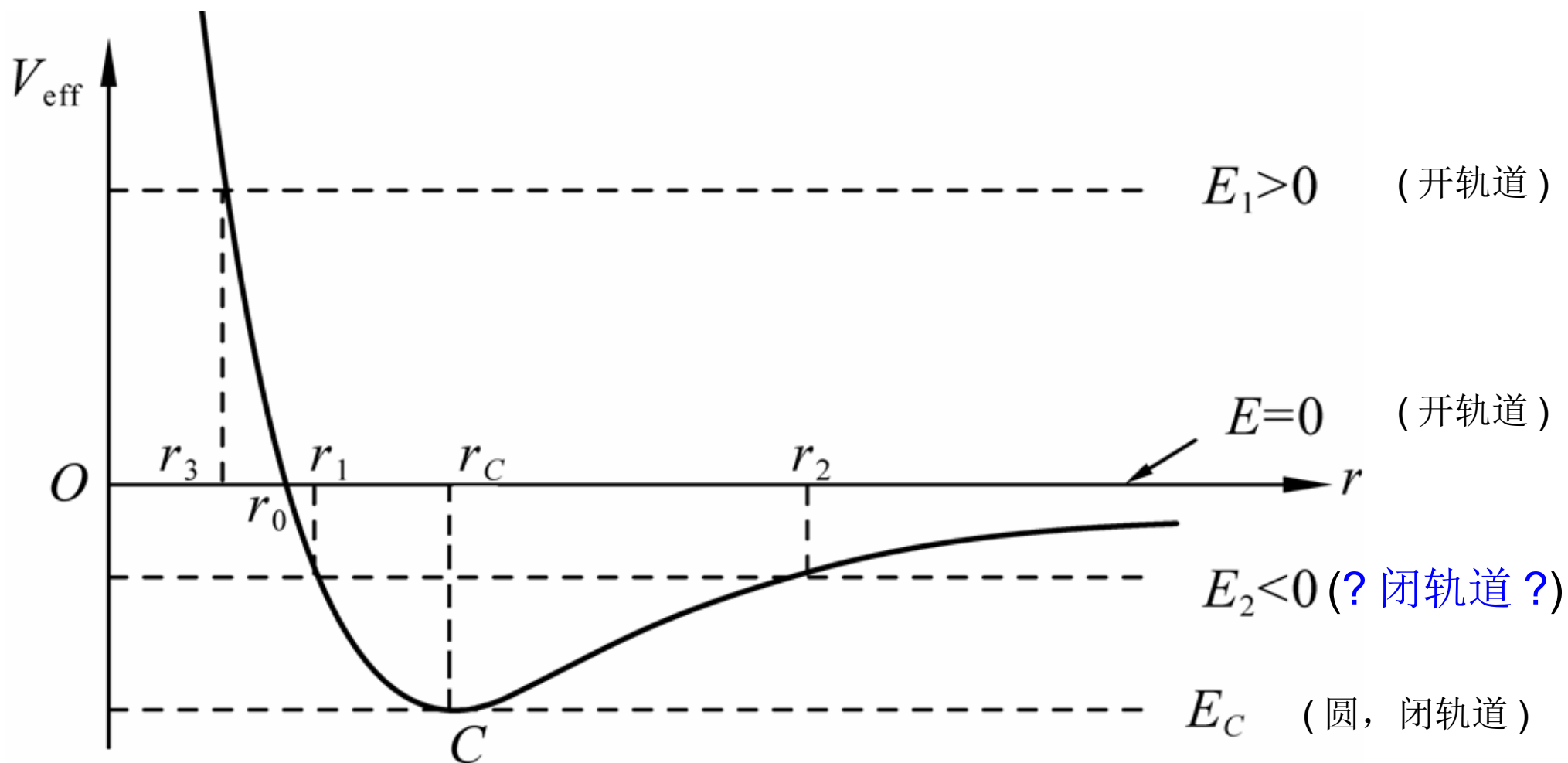
故径向运动等价于质点在一维势场 $V_{eff}(\rho) \equiv V(\rho) + \frac{L^2}{2 m \rho^2}$ 中的运动！

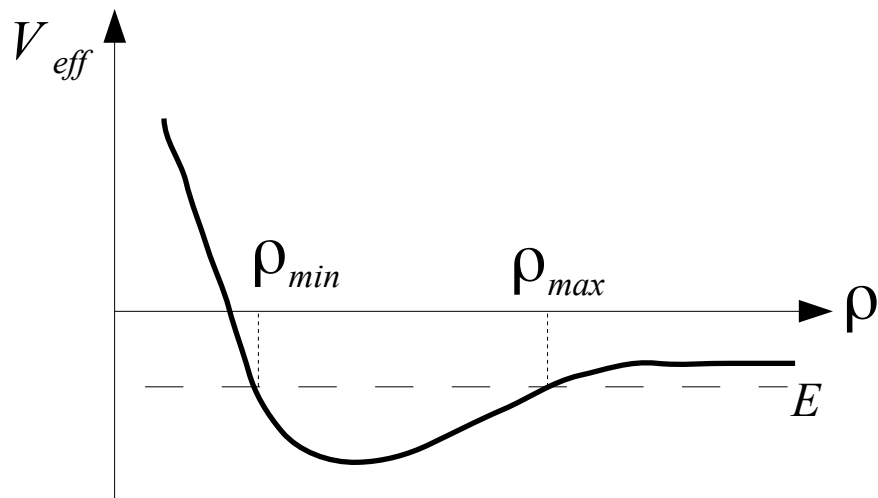
例：平方反比引力场 $V(\rho) = -\frac{k}{\rho}$, $k > 0 \Rightarrow V_{\text{eff}}(\rho) \equiv -\frac{k}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$



例：平方反比引力场 + 微扰（考虑太阳系其他行星的修正）

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{\epsilon}{\rho^3}, \quad k > 0, \quad \epsilon \text{ 小量} \quad \Rightarrow V_{\text{eff}}(\rho) \equiv -\frac{k}{\rho} + \frac{\epsilon}{\rho^3} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$





若存在 $\rho = \rho_{min}$ 或 ρ_{max}

$$\dot{\rho} = 0 \Rightarrow V_{eff}(\rho_{min, max}) = E$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 \left[\frac{2m}{L^2} (E - V) \rho^2 - 1 \right] \Rightarrow \theta = \int \frac{L/\rho^2}{\sqrt{2m[E - V_{eff}(\rho)]}} d\rho$$

$\rho_{max} \rightarrow \rho_{min} \rightarrow \rho_{max}$ 矢径转过的角度

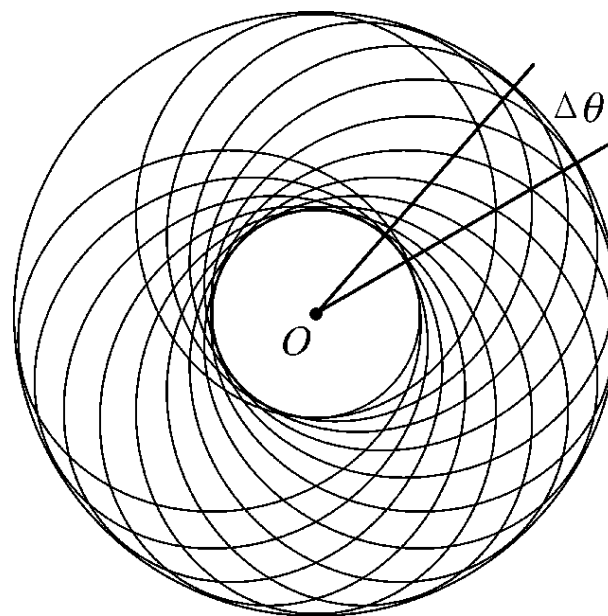
$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{L/\rho^2}{\sqrt{2m[E - V_{eff}(\rho)]}} d\rho$$

当 $n\Delta\theta = 2m\pi$ 时轨道闭合

研究表明：

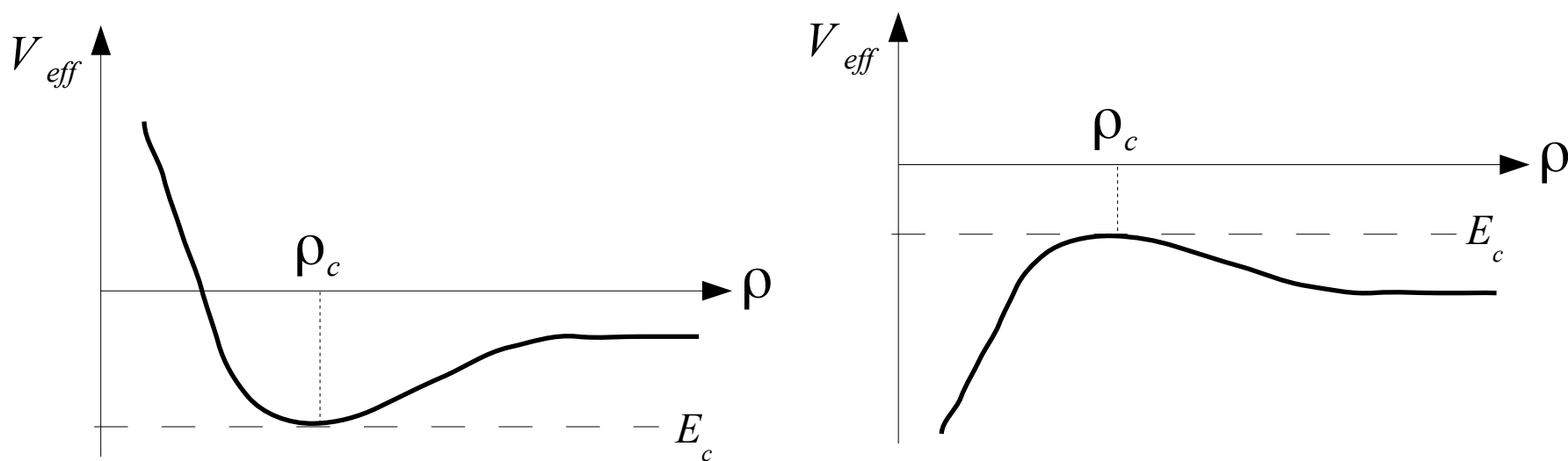
$V \propto \rho^2$ 或 $\propto -1/\rho$ 时轨道闭合

一般情况下不闭合



• (圆) 轨道稳定性

对于某个临界点 E_c $V_{eff}(\rho) = E_c$ 的二个根相等 $\rho_{min} = \rho_{max} \equiv \rho_c$



[推论] 二维圆轨道运动等价于一维静平衡问题

证明： 让 E_c 增大（前一种情况）或减小（后一种情况）一点点，解出

$$\left. \begin{aligned} V_{eff}(\rho_{min}) &= V_{eff}(\rho_{max}) = E_c + \Delta E \\ V_{eff}(\rho_{min}) &= V_{eff}(\rho_c) + V_{eff}'(\rho_c)(\rho_{min} - \rho_c) \\ V_{eff}(\rho_{max}) &= V_{eff}(\rho_c) + V_{eff}'(\rho_c)(\rho_{max} - \rho_c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{eff}'(\rho_c)(\rho_{max} - \rho_{min}) = 0 \Rightarrow V_{eff}'(\rho_c) = 0$$

[推论] 二维圆轨道稳定性等价于一维静平衡的稳定性

证明：将上面证明中的公式展开到二阶即可，略。

[定理] 当 $n < 2$ 时，有心力场 $V(\rho) = -k/\rho^n$ 中的圆轨道稳定

$$\left. \begin{array}{l} V_{eff}'(\rho_c) = 0 \\ V_{eff}''(\rho_c) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow n < 2$$

§4.6 非惯性系内质点动力学

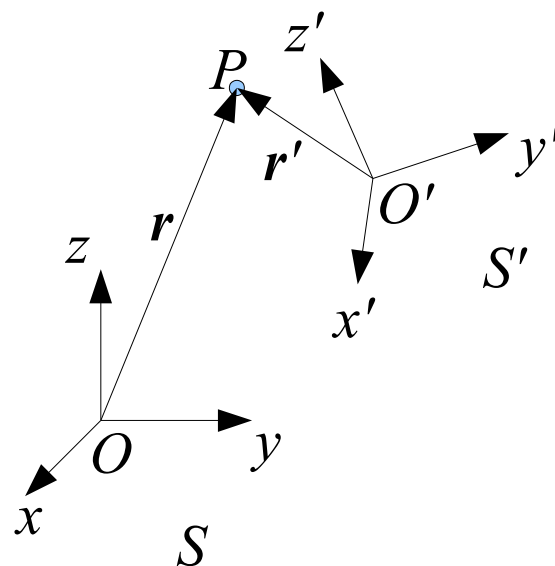
设 $Oxyz$ 为静止惯性系 S ， $O'x'y'z'$ 为运动参考系 S' 。

设 P 为被研究的运动质点

第三章科里奥利定理给出

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$$

$$= [\mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] + \left(\frac{d' \mathbf{v}_r}{dt} \right) + (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$$



[定义] 牵连惯性力: $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$

[定义] 科里奥利惯性力 (科氏力): $\mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c$

注: 在牛顿力学中惯性力只是形式上的定义, 不是真实的力, 它可以产生动力学效果, 但不存在施力物体.

[定理] 非惯性系中质点动力学方程为:

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

证明: 在惯性系中 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$
而 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$ } $\Rightarrow m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$

[推论] 非惯性系中质点动量定理成立, 即

$$\frac{d'}{dt} \mathbf{p}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

[推论] 非惯性系中质点角动量定理成立, 即

$$\frac{d'}{dt} (\mathbf{r}' \times \mathbf{p}_r) = \mathbf{r}' \times (\mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c)$$

[推论] 非惯性系中质点动能定理成立, 即

$$\frac{d'}{dt} \left(\frac{m v_r^2}{2} \right) = (\mathbf{F} + \mathbf{F}_e) \cdot \mathbf{v}_r \quad \text{注: } \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_r = 0$$

例题 3'. 一内壁光滑的直管，在水平面内绕过其端点 O 的竖直轴以角速度 ω_0 做匀速转动。管内有一质量为 m 的质点，初始时距 O 点的距离为 ρ_0 ，相对管静止。试求质点沿管的运动规律和质点对管在水平方向的压力。

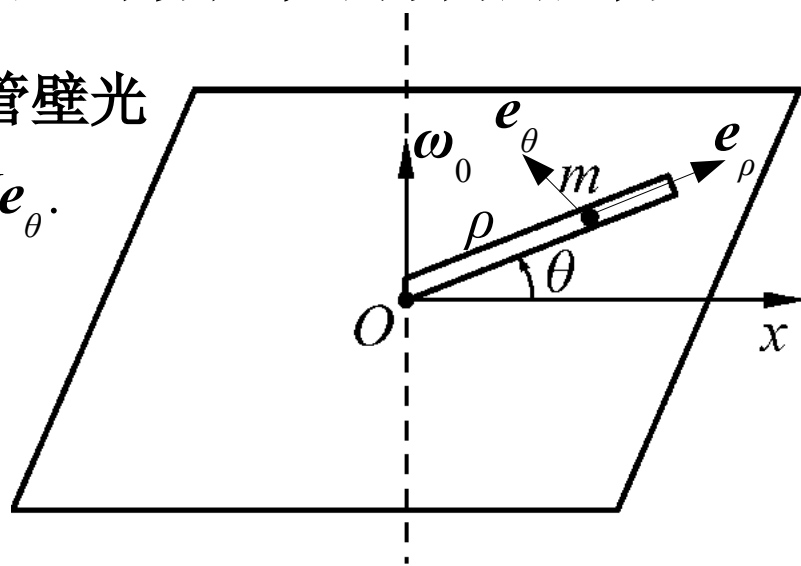
解：在图示极坐标系 (ρ, θ) 内求解。由于内管壁光滑，所以可假定管壁对质点作用力 $N = N e_\theta$ 。

动力学方程：

$$m[(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) e_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta}) e_\theta] = N$$

约束方程： $\dot{\theta} = \omega_0$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\rho} = \rho \omega_0^2 + \text{初始条件} \Rightarrow \rho = \rho_0 \cosh \omega_0 t \\ N = 2 m \dot{\rho} \omega_0 \end{array} \right\} \rightarrow N = 2 m \omega_0^2 \rho \sinh \omega_0 t$$



根据牛顿第三定律，质点对管的水平作用力大小为 $2 m \omega_0^2 \rho \sinh \omega_0 t$

方向垂直于管且指向转动反方向

(现在要求：非惯性系中求解)

例题 7. 质量为 m 的小环，套在半径为 R 的光滑水平圆圈上，并可沿圆圈滑动．圆圈在水平面内以匀角速度 ω 绕圈上 O 点转动．试求小环沿圆圈切线方向的运动微分方程．

解一：如图所示，取静止系 S 和与圆环固定的参考系 S' ，使得原点重合．并假定 $t=0$ 时刻 S' 与 S 重合．在 S' 系中可用 θ 表示小环位置．

$$\mathbf{r}' = R(1 + \cos \theta) \hat{\mathbf{x}}' + R \sin \theta \hat{\mathbf{y}}'$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{d' \mathbf{r}'}{dt} = (-\sin \theta \hat{\mathbf{x}}' + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}') R \dot{\theta}$$

$$\mathbf{a}_{O'} = 0,$$

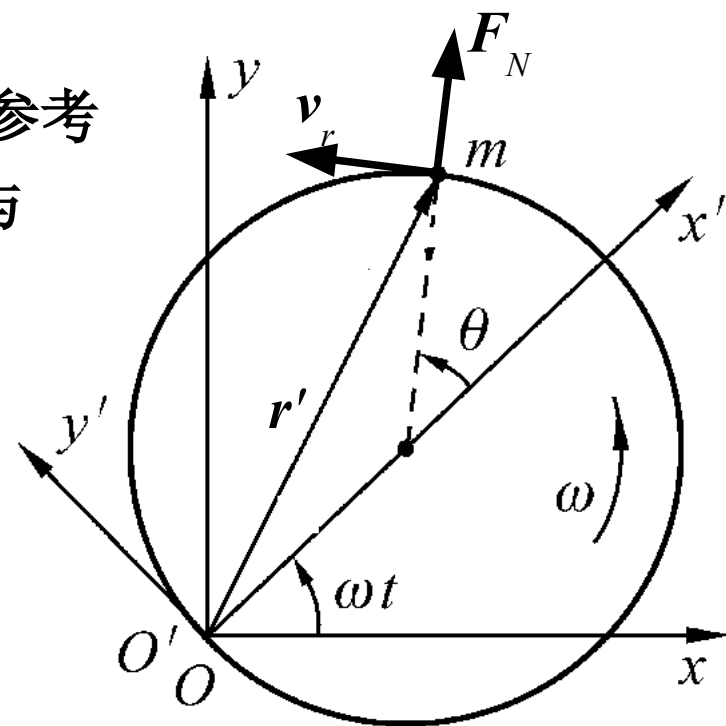
$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}'$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

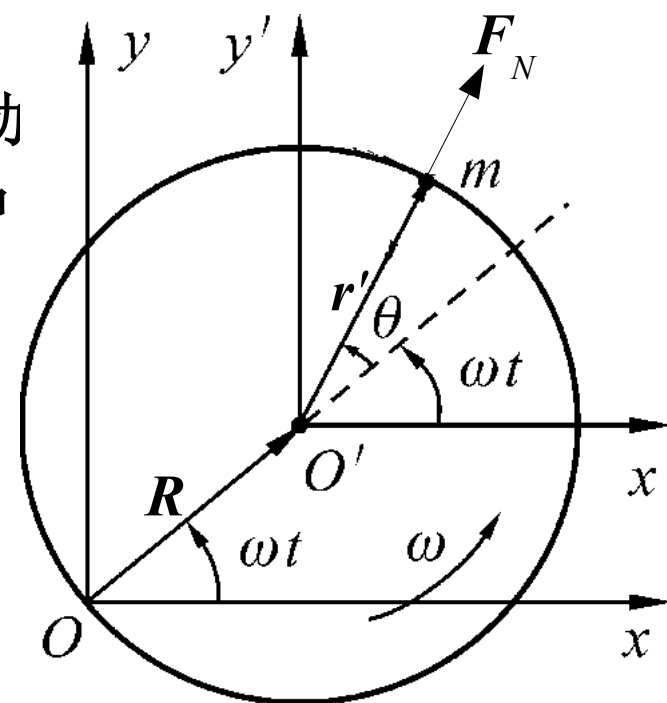
$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_{O'} = 0, \\ \boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}' \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -\omega^2 \mathbf{r}' \Rightarrow \mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e = m \omega^2 \mathbf{r}'$$

根据动能定理 $\frac{d'}{dt} \left(\frac{m v_r^2}{2} \right) = (\mathbf{F} + \mathbf{F}_e) \cdot \mathbf{v}_r$ 以及 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_N$ 垂直于 \mathbf{v}_r ，可得

$$\dots\dots (\text{学生课堂演算}) \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$



解二：建立图示静系 S 以及动系 S' ，其中 S' 原点在圆环中心且坐标轴始终与 S 平行，即 S' 为平动坐标系。设初始时刻 x' 轴在 x 轴上。那么在 S' 中小环的位置可由图示 θ 表示。



O' 相当于绕 O 作匀速圆周运动，所以

$$\mathbf{a}_{O'} = -\omega^2 R \hat{\mathbf{R}} = -\omega^2 R (\hat{\mathbf{x}}' \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}}' \sin \omega t)$$

S' 作平动，所以其转动角速度 $\boldsymbol{\Omega} = 0$

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{a}_{O'} \Rightarrow \mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_{O'}$$

$$\mathbf{r}' = R [\hat{\mathbf{x}}' \cos(\omega t + \theta) + \hat{\mathbf{y}}' \sin(\omega t + \theta)]$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{d' \mathbf{r}'}{dt} = R(\omega + \dot{\theta}) [-\hat{\mathbf{x}}' \sin(\omega t + \theta) + \hat{\mathbf{y}}' \cos(\omega t + \theta)]$$

$$\mathbf{F}_N \perp \mathbf{v}_r \quad \text{动能定理变为} \quad \frac{d'}{dt} \left(\frac{m v_r^2}{2} \right) = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v}_r$$

$$\text{经计算可得} \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

§4.7 地球自转的动力学效应

- 有关地球运动的几个量

自转周期: $T=86164\text{ s}$

自转角速度的大小: $\omega=7.292\times 10^{-5}\text{ rad/s}$

自转角速度的变率: $|\dot{\omega}|\simeq 10^{-16}\text{ rad/s}^2$

地球半径: $R\approx 6400\text{ km}$

日地平均距离: $R_{SE}=1.5\times 10^{11}\text{ m}$

地球公转周期: 1 year

太阳 / 地球质量比: 33000

• 质点相对地球运动的动力学方程

假定日心系为惯性系，由于地球的公转和自转，所以地球为非惯性系。

研究地表附近质点 P 的运动，且运动范围的尺度远小于地球半径时，一般建立如图坐标系 $Oxyz$ （即地面参考系）

O ：地表某点

z ：地心 D 到地表点 O 连线

xy ：地表切平面， y 指东方， x 指南方

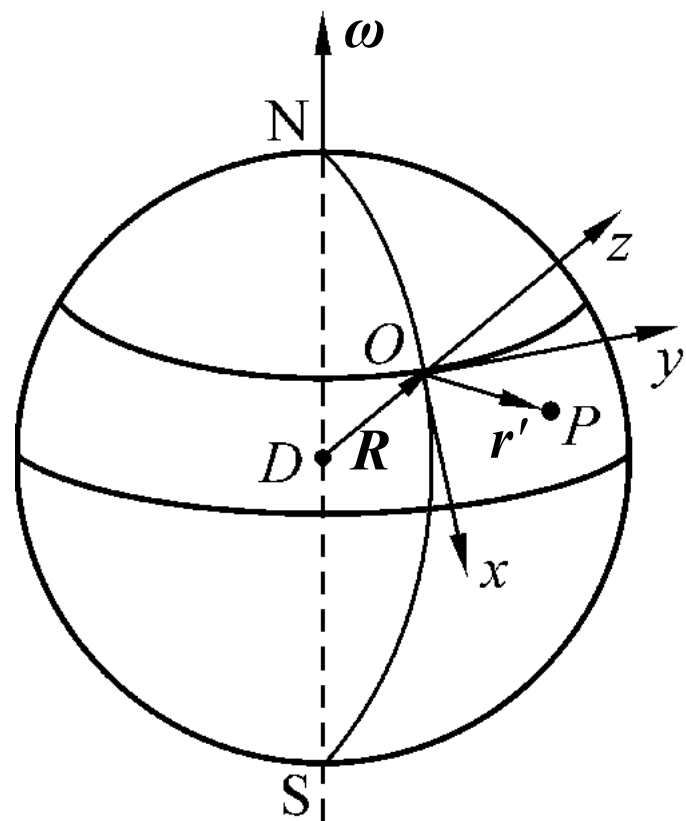
注：这里我们没有画出日心系。

记 $R=DO$ ； $r'=OP$ 。这里 $r' \ll R$

[定义] 引力加速度：
$$\mathbf{g}_0 = -\frac{GM}{R^2} \hat{\mathbf{z}}$$

[定义] 表观重力加速度：
$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

注：表观重力加速度近似为 10 m/s^2



[推论] 质点在地面参考系中运动的动力学方程近似为

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} + m \mathbf{g} - 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

证明：在日心系中，地球可以看成是一个刚体，以地心 D 为基点，可以将 O 点加速度表示为

$$\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

而 P 点的牵连加速度

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}') + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')] \end{aligned}$$

$$r' \ll R, \dot{\omega} \ll \omega^2 \Rightarrow \mathbf{a}_e \approx \mathbf{a}_D + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

科氏加速度

$$\mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

动力学方程：
$$m \mathbf{a}_r = \sum \mathbf{F} - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c$$

这里合外力包含地球引力 $m \mathbf{g}_0$ ，太阳引力 \mathbf{F}_S 及其他主动力 \mathbf{F} ，故

$$m \mathbf{a}_r = (\mathbf{F}_S - m \mathbf{a}_D) + \mathbf{F} + m [\mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})] - 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

由于 a_D 是地心处太阳引力加速度，如果质点在地心处恰好 $F_s = m a_D$

故对于地表处的质点，
$$F_s \approx \frac{GM_s m}{(R_{SE} + R)^2} = \frac{GM_s m}{R_{SE}^2} \left(1 - \frac{2R}{R_{SE}}\right) = m a_D \left(1 - \frac{2R}{R_{SE}}\right)$$

$$\frac{|F_s - m a_D|}{mg} \approx \frac{2R}{R_{SE}} \frac{a_D}{g} \approx \frac{2R}{R_{SE}} \frac{GM_s / R_{SE}^2}{GM / R^2} = \frac{2R^3}{R_{SE}^3} \frac{M_s}{M} \approx 4 \times 10^{-9} \ll 1$$

对于地球上的宏观运动，取 $v_r = 1-100 \text{m/s}$
$$\frac{|2\omega \times v_r|}{g} = 10^{-5} \sim 10^{-3}$$

于是
$$\frac{|F_s - m a_D|}{m |2\omega \times v_r|} = \frac{|F_s - m a_D|}{mg} \frac{g}{|2\omega \times v_r|} = 10^{-6} \sim 10^{-4} \ll 1$$

所以
$$m a_r = (F_s - m a_D) + F + m [g_0 - \omega \times (\omega \times R)] - 2 m \omega \times v_r$$

$$\approx F + m g - 2 m \omega \times v_r \quad (\text{证毕})$$

注：此方程相对于将地面视为惯性系时多出了科氏力。

• 落体偏东

定性分析

当考虑地表附近（ $<1000\text{m}$ ）物体自由下落

$$v_r < \sqrt{2gh} < 100 \text{ m/s}$$

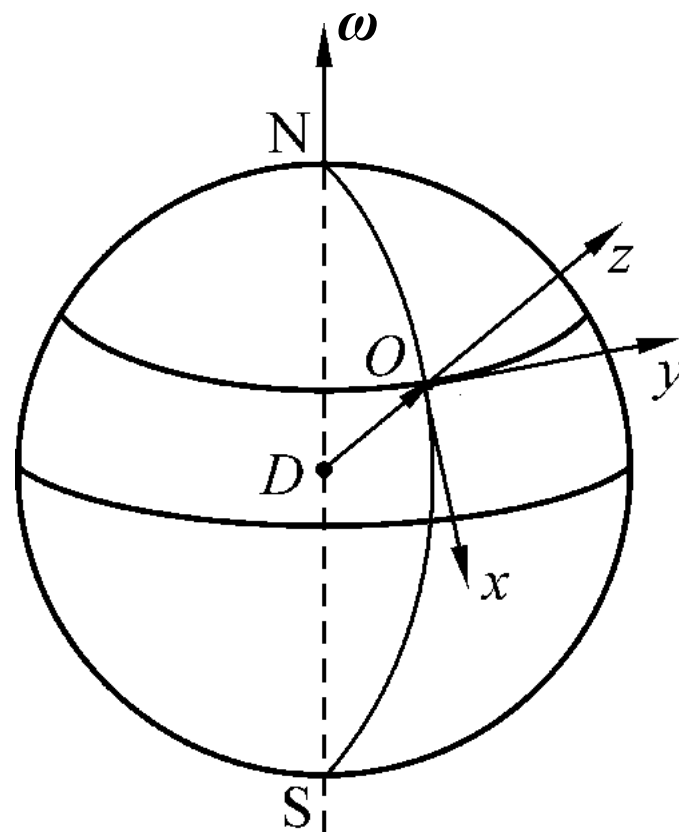
$$\frac{|2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r|}{g} < 10^{-3} \ll 1$$

故物体下落几乎沿 g 方向。

由于 $\omega^2 R/g = 10^{-3} \ll 1$ ，所以 g 方向几乎与 g_0 方向重合，即沿 $-z$ 方向。

当 \mathbf{v}_r 几乎沿 $-z$ 方向时，科氏力 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2m\boldsymbol{\omega} \times (-\mathbf{v}_r)$ 沿 y 方向

这个力的存在使得物体下落略为向 y 方向偏，即向东偏。



[推论] 自经度 θ 高度 h 处下落的物体落地后偏东量近似为

$$y_m = \frac{2\omega h}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \theta$$

证明：考虑自由落体， $F=0$.

$$\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{v}_r = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}$$

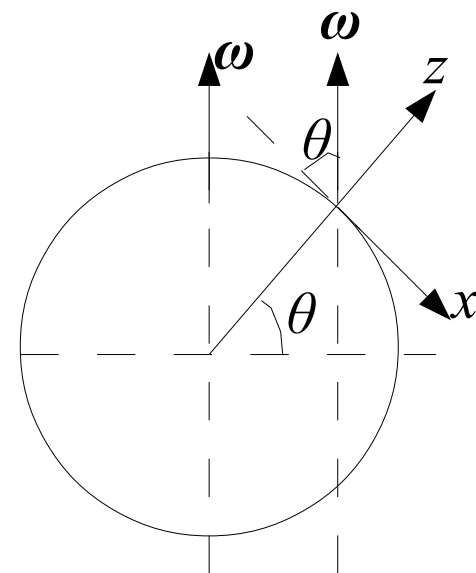
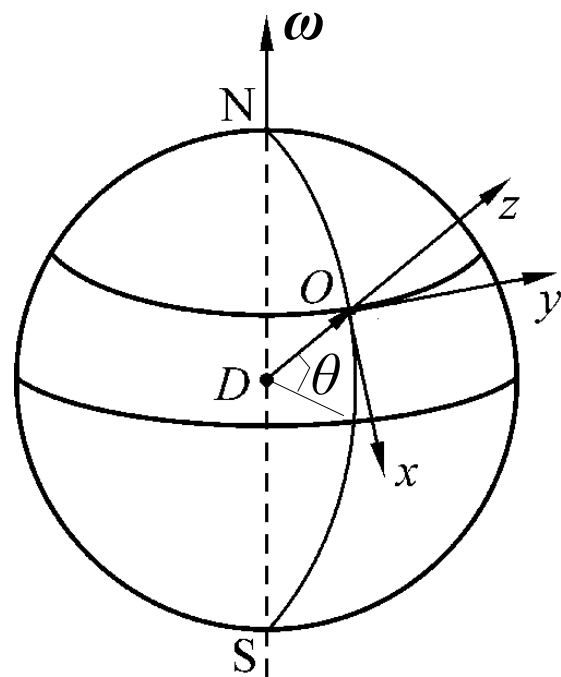
$$\boldsymbol{\omega} = \omega (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta)$$

$$m \mathbf{a}_r = \mathbf{F} + m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \Rightarrow \dots$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \dot{y} \sin \theta \\ \ddot{y} = -2\omega (\dot{x} \sin \theta + \dot{z} \cos \theta) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \theta \end{cases}$$

前面已经证明科氏加速度相对于重力加速度是小量。
即包含 ω 的项是小量

近似到一级： $x = x_0 + \omega x_1$, $y = y_0 + \omega y_1$, $z = z_0 + \omega z_1$,



初始: $x_0(0)=0, \dot{x}_0(0)=0, x_1(0)=0, \dot{x}_1(0)=0, \dots, z_0(0)=h, \dot{z}_0(0)=0, z_1(0)=0, \dot{z}_1(0)=0$

从运动微分方程可得 $\ddot{x}_0=\ddot{y}_0=0, \ddot{z}_0=-g \Rightarrow x_0=0, y_0=0, z_0=h-\frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1=2\dot{y}_0\sin\theta=0 \\ \ddot{y}_1=-2(\dot{x}_0\sin\theta+\dot{z}_0\cos\theta)=2gt\cos\theta \\ \ddot{z}_1=2\dot{y}_0\cos\theta=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1=0 \\ y_1=\frac{1}{3}gt^3\cos\theta \\ z_1=0 \end{array} \right.$$

所以, 直到一级近似解为
$$\left\{ \begin{array}{l} x=x_0+\omega x_1=0 \\ y=y_0+\omega y_1=\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\theta \\ z=z_0+\omega z_1=h-\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$$

落地时间由 $z=0$ 求得 $t_m=\sqrt{2h/g}$ 落地偏东量: $y_m=\frac{1}{3}\omega g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3\cos\theta$

注: 在赤道附近 $h=200\text{m}$ 下落, 偏东量可达 6 cm. (证毕)

• 科氏力对水平运动的影响

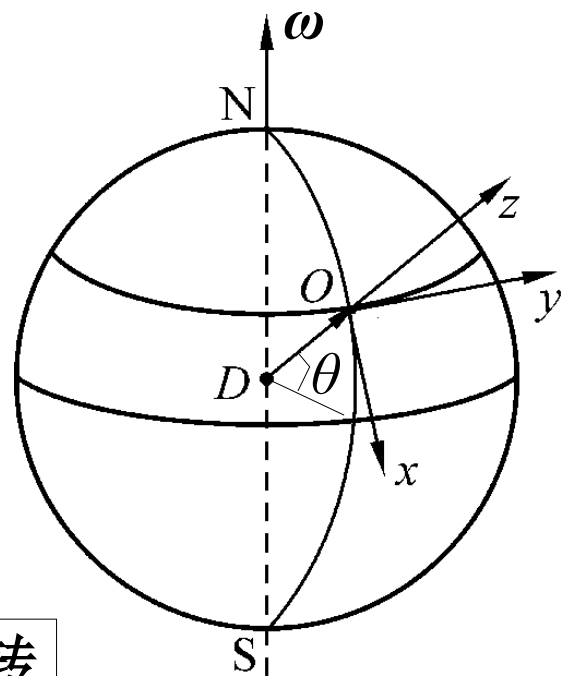
设质点 m 限制在 Oxy 面内运动, $\mathbf{v}_r = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}}$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta)$$

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \underbrace{2m\omega \cos \theta \dot{y} \hat{\mathbf{z}}}_{\text{与重力和水平}} + \underbrace{2m\omega \sin \theta (-\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{v}_r}_{\text{面支撑力平衡}}$$

与重力和水平
面支撑力平衡

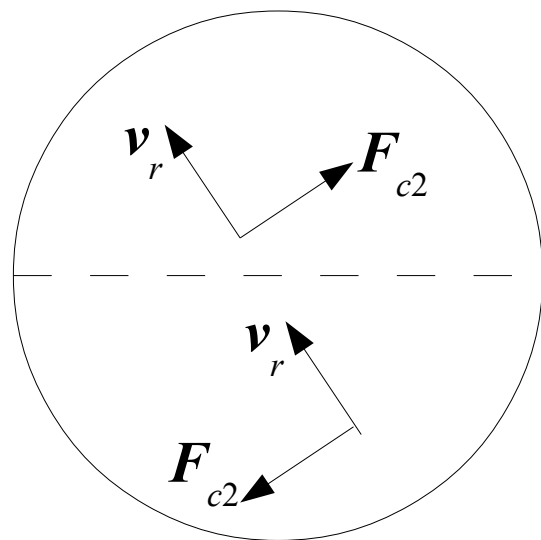
F_{c2} : 造成水平运动偏转



(i): 赤道处 $\theta=0$, $\sin\theta=0$, 无影响 ;

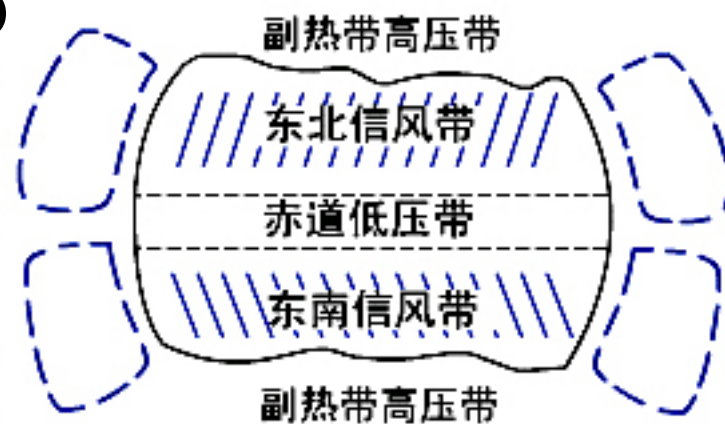
(ii): 北半球 $\theta>0$, 使得运动相对前进方向右偏 ;

(iii): 南半球 $\theta<0$, 使得运动相对前进方向左偏 ;

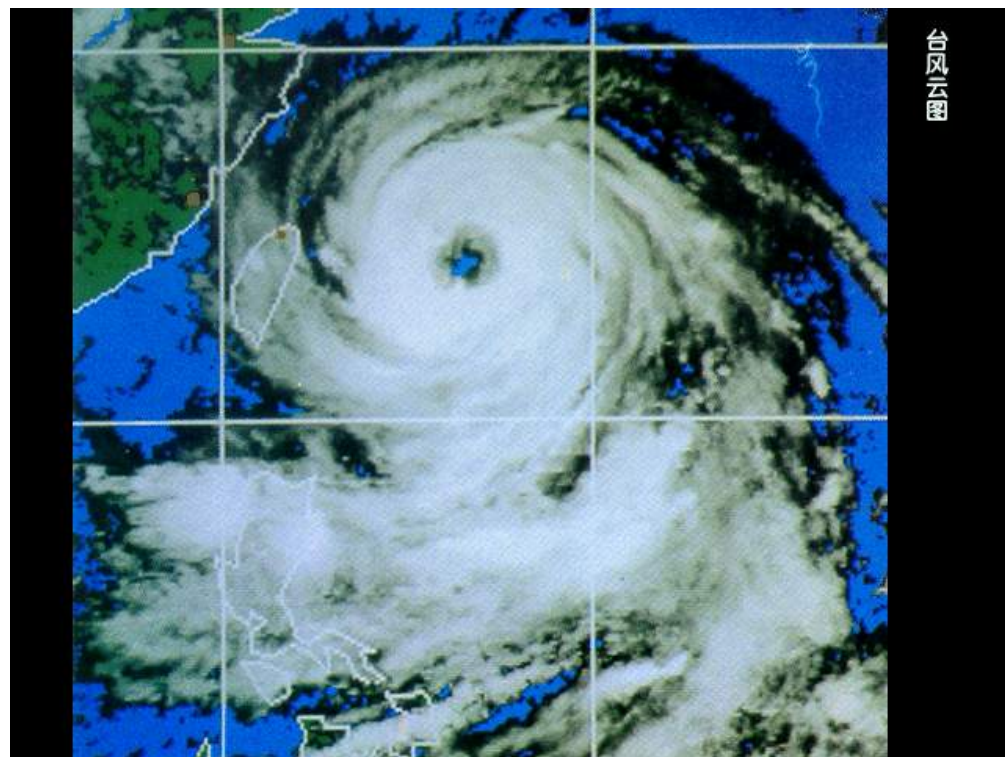
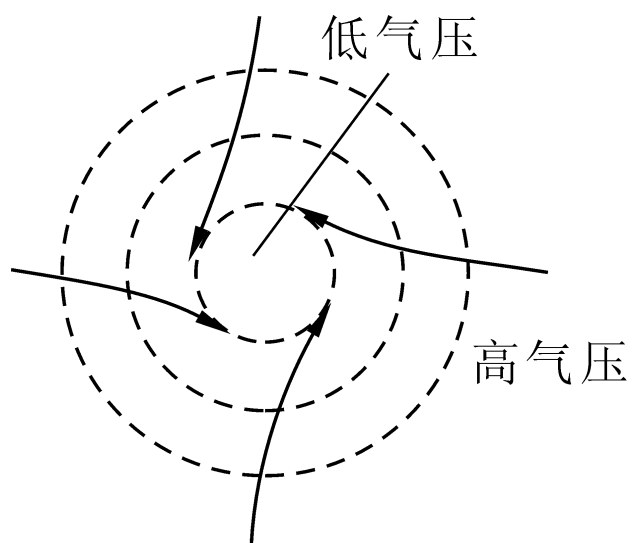


例子：赤道附近贸易风（*Trade wind*）

注：气流从高压流向低压产生风



例子：旋风（北方球）



• 傅科 (FR, 1851) 摆

$$l = 67 \text{ m} \Rightarrow T_0 = 16 \text{ s}$$

$$m = 28 \text{ kg}$$

大摆长：使得小摆动时摆锤近似在水平面内运动，且摆动尺度易于观察

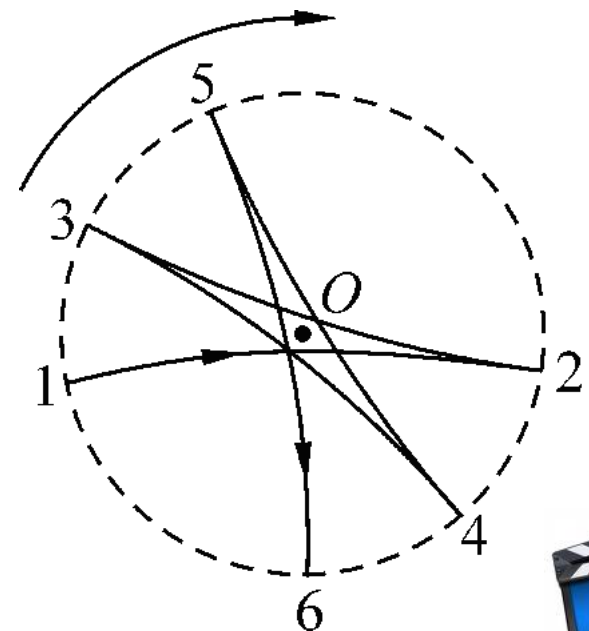
重摆锤：使得小摆动时能量足够大，在存在空气阻力时也可以长时间摆动。

现象：摆动平面绕竖直轴顺时针转动，周期约 32 小时。

注：顺时针转动可由北半球水平运动右偏解释。



巴黎万胜殿（又名先贤祠）



俯视图

[推论] 傅科摆摆动平面转动角速度为 $\Omega = -\omega \sin \theta \hat{z}$

证明: $m \mathbf{a}_r = \mathbf{F}_T + m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$

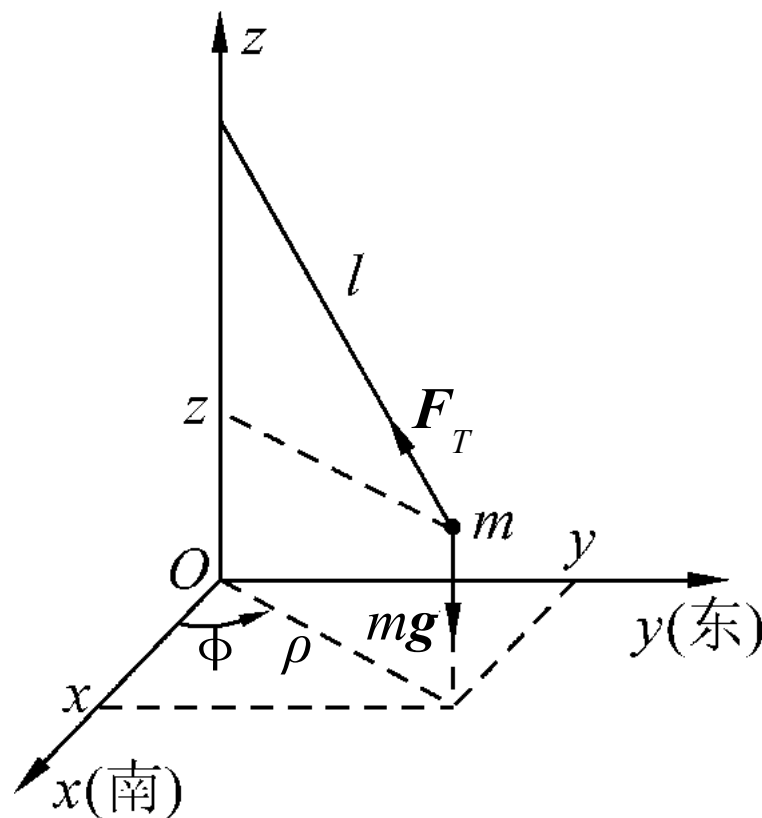


$$\dot{L}_z = \hat{z} \cdot [\mathbf{r} \times (-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)]$$

$$L_z = m \rho^2 \dot{\phi}$$

$$\begin{aligned} \hat{z} \cdot [\mathbf{r} \times (-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)] &= \dots \\ &= -2m \omega \rho (\dot{\rho} \sin \theta + \dot{z} \cos \phi \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\dot{z} \ll \dot{\rho}$$



$$\Rightarrow \frac{d(m \rho^2 \dot{\phi})}{dt} = -2m \omega \sin \theta \rho \dot{\rho} \Rightarrow d(\rho^2 \dot{\phi}) = -2 \omega \sin \theta \rho d\rho = -\omega \sin \theta d(\rho^2)$$

$$\Rightarrow \rho^2 \dot{\phi} = -\omega \sin \theta \rho^2 + c \quad \text{取 } \rho=0 \text{ 可确定常数 } c=0. \Rightarrow \rho^2 \dot{\phi} = -\omega \sin \theta \rho^2$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = -\omega \sin \theta \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} = -\omega \sin \theta \hat{z} \quad (\text{证毕})$$