第二章

刚体运动学

§2.1 刚体基本运动

- 刚体及其运动自由度

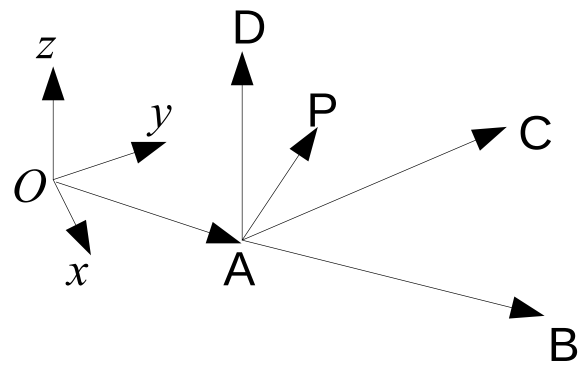
[定义]刚体：质点间距离保持不变的质点系

[定理]刚体的空间位置由任意与刚体固连的不共线三点决定

证明：假定 A, B,C 相对本征参考系 **Oxyz** 给定，定义向量 **AB, AC.**

由于三点不共线，所以 **AB, AC** 线性无关.

构造向量： **AD=AB×AC,** 则 **{AB, AC, AD}** 构成一组线性无关基. 刚体上任意 P 点可表示为 **OP=OA+AP**，给定 A 点则 **OA** 确定，而 **AP** 可以由线性无关基 **{AB, AC, AD}** 唯一决定.



所以一旦给定 A, B, C 的空间位置，刚体上任意点的位置就确定了，即刚体空间位置被确定.（证毕）

[定义] 自由刚体：除任两点间距离不变外，不受其它额外约束

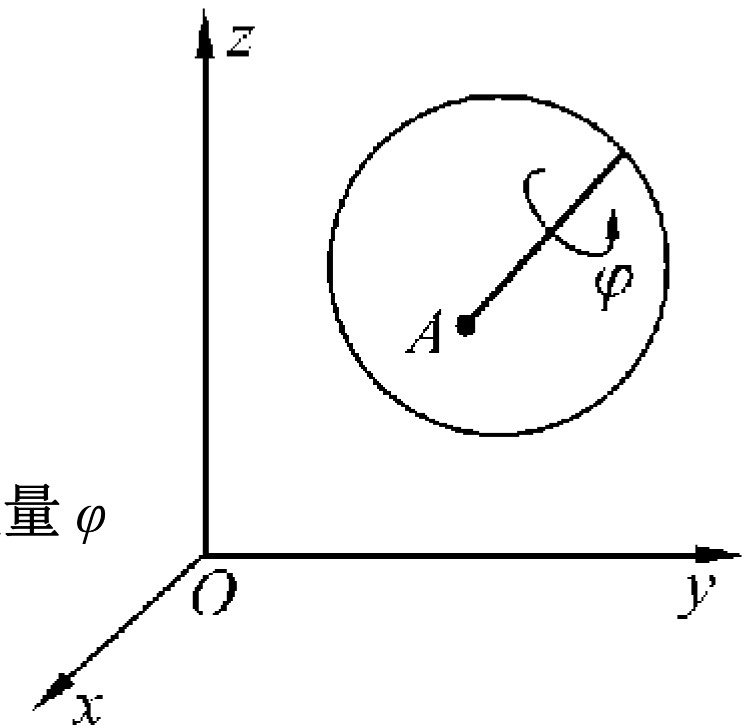
[推论] 自由刚体的自由度 DOF=6.

证明：根据上述定理，我们可以任取与刚体固连的不共线的三点代表刚体 .

这三个点只受到三个独立约束，保持任两点间距离不变 . 所以自由度为

$$DOF = 3 \times 3 - 3 = 6$$ 证毕 .

一种等价的看法：



任取 A 作为基点— **3 个独立变量**

再确定某一过 A 点且与刚体固连的轴线，其三个方位角只有 2 个独立

再确定刚体绕该轴线转过的角度— 1 个变量 φ

DOF=3+2+1=6

- 两种基本运动：平动和转动

[定义] 平动：刚体中任何两点的连线在运动中保持方向不变

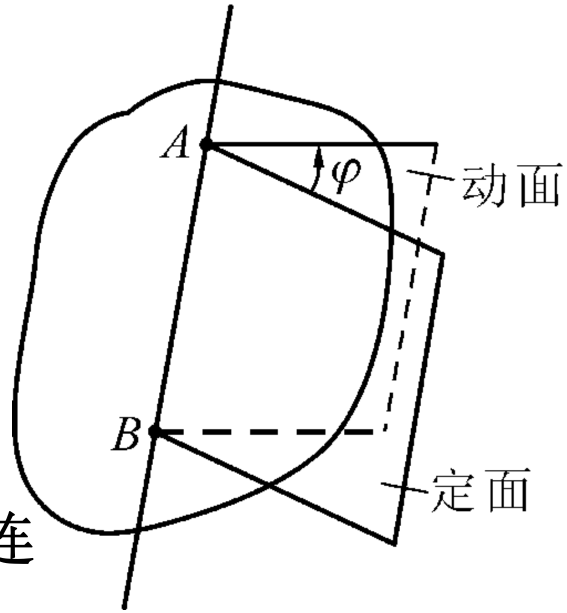
[推论] 平动刚体 $DOF=3$

证明：任取三不共线点代表刚体运动，三点连线保持方向不变，又多了 3 个约束，所以 $DOF=6-3=3$. 证毕

注：平动刚体的运动可由基点运动确定

[定义] 转动：刚体运动中有两点 (例如 A,B) 的连线不动

注：AB 称为转动轴，如果它始终不动，则称为固定转动轴（或固定轴）；如果它只是瞬时不动，则称为瞬时转动轴（或瞬时轴）



注：基点或转动轴可在刚体之外，只需与刚体固连

§2.2 刚体运动基本定理

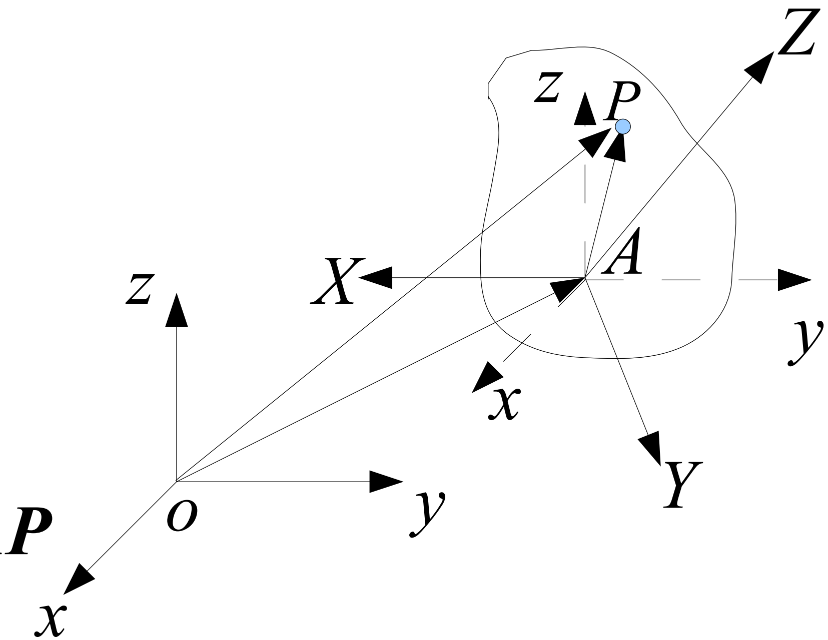
- 刚体运动的矢量-矩阵描述

本征坐标系 $Oxyz$

基点 A 及平动坐标系 $Axyz$

与刚体固连（直角）坐标系 $AXYZ$

刚体上任意点 P 满足 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}$



[定理]：设平动坐标系和固连坐标系的正交归一基分别为

$\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]^T$ 和 $\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3]^T$，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{\Re}$

使得 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\Re}\,\boldsymbol{e}$

证明： $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_{1,}\boldsymbol{e}_{2,}\boldsymbol{e}_{3}]^T$ 是一组基，则任意向量均可由其线性表示，设 $\boldsymbol{E}_j$ 表示为 $\boldsymbol{E}_j=\sum_k \alpha_{jk}\boldsymbol{e}_k$. 设 $\mathfrak{R}$ = 矩阵 $[\alpha_{jk}]_{3\times 3}$ ，则基矢之间关系简记为

$$\boldsymbol{E}=\mathfrak{R}\,\boldsymbol{e}$$

另外，正交归一基满足 $\delta_{jl}=\boldsymbol{E}_j\cdot\boldsymbol{E}_l=\sum_k \alpha_{jk}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\cdot\sum_m \alpha_{lm}\boldsymbol{e}_m$

$$=\sum_k\sum_m \alpha_{jk}\alpha_{lm}\delta_{km}=\sum_k \alpha_{jk}\alpha_{lk}$$

$\Leftrightarrow \mathfrak{R}\mathfrak{R}^T=I$ (单位矩阵). 所以 $\mathfrak{R}$ 对应于正交变换. 证毕.

[推论] 如果 $\boldsymbol{AP}$ 用刚体固连坐标系表示为 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\rho E}$, 其中 $\boldsymbol{\rho}=[\rho_1,\rho_2,\rho_3]$，则 $\boldsymbol{AP}$ 用平动坐标系表示为

$$\boldsymbol{AP}=\rho\,\mathfrak{R}\,\boldsymbol{e}$$

注：在刚体固连的坐标系中观察，$\boldsymbol{AP}$ 的分量 ρ_1, ρ_2, ρ_3 是不随时间改变的，所以 $\boldsymbol{\rho}$ 是定常矩阵。但是 $\boldsymbol{AP}$ 在平动坐标系中观察是随时间变化的，所以矩阵 $\mathfrak{R}$ 与时间相关，由于固连坐标系跟随刚体绕基点运动，所以该矩阵随时间的变化关系刻画了刚体绕基点 A 的定点运动。

[定理] 设基点 A 和任意点 P 在本征坐标系中分别表示为 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{\gamma}_A\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{\gamma e}$ 其中 $\boldsymbol{\gamma}_A=[x_A, y_A, z_A]$, $\boldsymbol{\gamma}=[x, y, z]$，则有

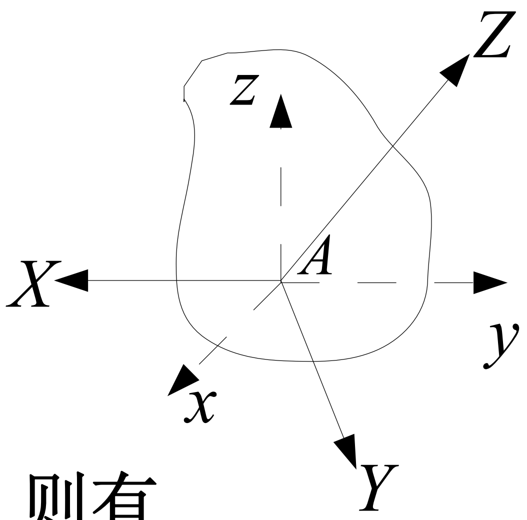
$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\gamma}_A(t)+\boldsymbol{\rho}\mathfrak{R}(t)$$

证明：利用上一推论及 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}$ 即可得证． 证毕

[推论] 刚体的运动可以表示为基点 A 的运动 (平动) 加上刚体绕基点 A 的定点运动

- 欧拉定理 & 夏莱 (Chasles) 定理

考察右图所示绕 A 点的定点运动，设 $Axyz$ 为本征坐标系，$AXYZ$ 是固连在刚体上的坐标系，我们已经证明基矢之间满足



$$\boldsymbol{E}(t)=\Re(t)\boldsymbol{e}$$

[引理] 假定 t=0 时刻， $AXYZ$ 与 $Axyz$ 重合，则有

$$\forall\ t,\quad \det[\Re(t)]=1$$

证明：由于 t=0 时刻， $AXYZ$ 与 $Axyz$ 重合，即 $\boldsymbol{E}(0)=\boldsymbol{e}$

$$\Rightarrow \Re(0)=I\Rightarrow \det[\Re(0)]=1$$

另外， $\Re\Re^T=I\Rightarrow 1=\det[\Re(t)\Re^T(t)]=\det[\Re(t)]\det[\Re^T(t)]$

注意到， $\det[\Re^T(t)]=\det[\Re(t)]$，于是，$\forall\ t, \det[\Re(t)]=\pm 1$

由于运动是连续的，所以 $\Re(t), \det[\Re(t)]$ 是时间的连续函数

t=0 时刻 $\det[\Re(t)]$ 取 1 ，所以那么任意 t 它不会突变为 -1 ，只能取 1

[引理] 假定 $t=0$ 时刻，*AXYZ* 与 *Axyz* 重合，刚体上任意矢量表示为 $\boldsymbol{\chi}_0\boldsymbol{e}$，则该点（相对于 *Axyz*）的运动方程可表示为

$$\chi(t)=\chi_0\Re(t)$$

证明：假定刚体上任意矢量在 *AXYZ* 与 *Axyz* 表示分别为 $\boldsymbol{\rho E}(t), \boldsymbol{\chi}(t)\boldsymbol{e}$

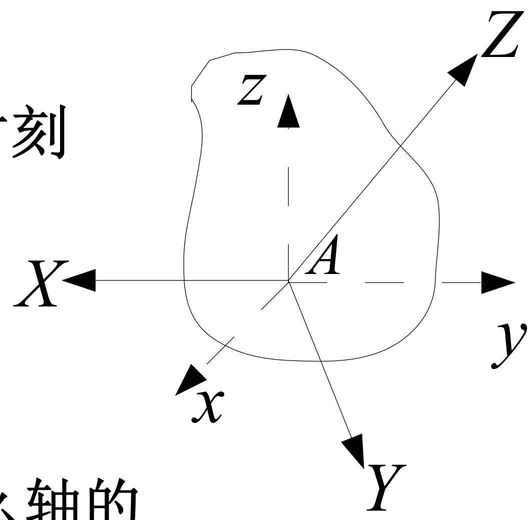
$$\left.\begin{array}{l}\text{则}\quad \chi(t)=\rho\,\Re(t)\\[2em] \text{当 } t=0\text{，}\quad \Re(0)=I,\ \chi(0)=\chi_0\end{array}\right\} \Longrightarrow \rho=\chi_0\text{（这很显然，细想）}$$

$$\Rightarrow\chi(t)=\rho\,\Re(t)=\chi_0\Re(t)$$

证毕.

[欧拉定理] 刚体定点运动的任意位移可以通过绕该定点的某个轴的一次转动实现

证明：设 $Axyz$ 为本征系， $AXYZ$ 是固连系 , 初始时刻二者重合 , 那么刚体上任意点的运动方程为



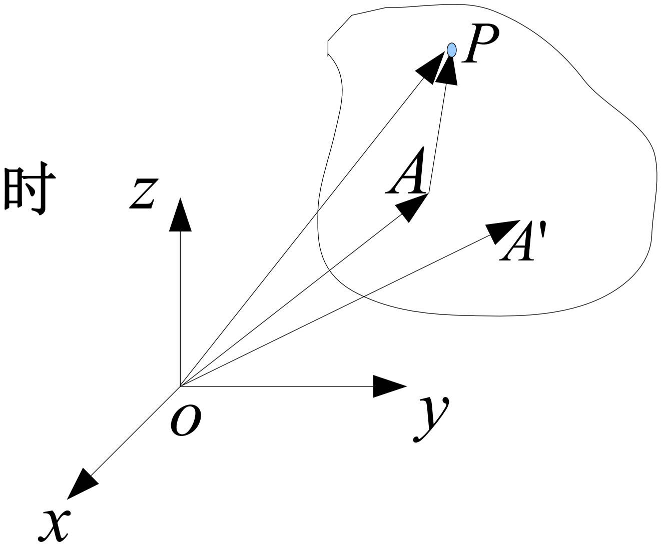
$$\boldsymbol{\chi}(t)=\boldsymbol{\chi}_0\mathfrak{R}(t)$$

假定存在某个轴将刚体由初状态转到末状态，那么轴的对应矢量 $\zeta\boldsymbol{e}$ 相对 $Axyz$ 是不动的 . 也就是满足

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}\mathfrak{R}(t)\Leftrightarrow\mathfrak{R}^T(t)\boldsymbol{\zeta}^T=\boldsymbol{\zeta}^T$$

也就是说 ζ^T 是矩阵 $\mathfrak{R}^T$ 的特征值 1 对应的特征向量。所以只要证明该矩阵确实存在特征值 1. （以下见板书）证毕 .(另一证明参见课本 p53)

[夏莱定理]刚体一般运动可以分解为任选基点的平动和绕通过基点的某个轴的转动。
选择不同基点时得到的平动位移是不同的，
但转动轴的方向和转角不依赖于基点的选择.



证明：选基点 A, 建立平动坐标系 $Axyz$（未画出）和固连坐标系 $AXYZ$（未画出），假定初始时刻二坐标系重合， $\boldsymbol{AP}(0)=\chi_0\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{OP}(t)=\gamma\boldsymbol{e}$

可表示为 $$\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\gamma}_A(t)+\boldsymbol{\chi}_0\mathfrak{R}(t)$$

根据欧拉定理，绕基点运动部分$\boldsymbol{\chi}_0\mathfrak{R}(t)$

总可以看成是绕过该点的某个轴的转动实现，定理前半部分得证。

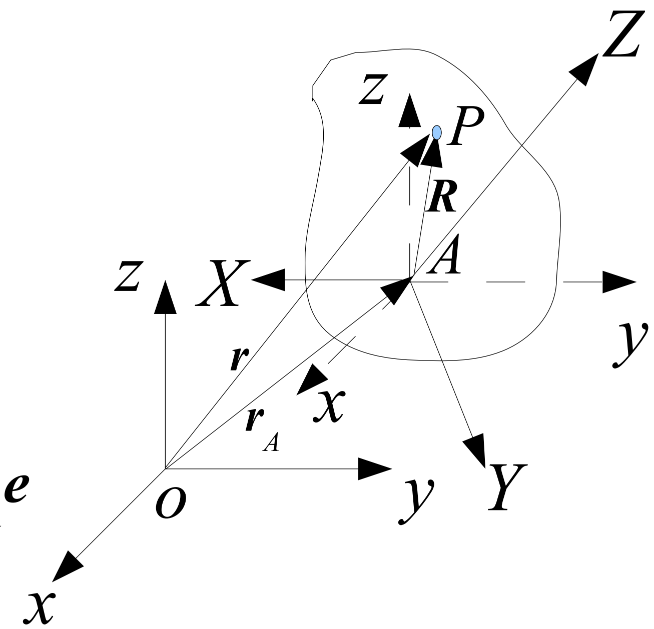
假定 $\boldsymbol{A'P}(0)=\boldsymbol{\chi}_0'\boldsymbol{e}, \boldsymbol{AA'}(0)=\boldsymbol{\delta e}$=> $\boldsymbol{\chi}_0=\boldsymbol{\chi}_0'+\boldsymbol{\delta}$ $\Rightarrow\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\gamma}_A(t)+(\boldsymbol{\chi}_0'+\boldsymbol{\delta})\mathfrak{R}(t)$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\gamma}(t)=[\boldsymbol{\gamma}_A(t)+\boldsymbol{\delta}\mathfrak{R}(t)]+\boldsymbol{\chi}_0'\mathfrak{R}(t)\equiv\boldsymbol{\gamma}_{A'}(t)+\boldsymbol{\chi}_0'\mathfrak{R}(t)$$

所以如果选 A' 作基点, 则平动部分 $\boldsymbol{\gamma}_{A'}(t)\neq\boldsymbol{\gamma}_A(t)$.

而体现转动的矩阵 $\mathfrak{R}(t)$是一样的, 故转轴方向和转角不变. 证毕.

- # 刚体上点的速度与加速度



$Oxyz$ 为本征系，任选基点 A, 建立平动系 $Axyz$ 和刚体固连系 $AXYZ$，假定初速时刻 $Axyz$ 和 $AXYZ$ 重合，记：

$$\boldsymbol{AP}(0)=\chi_0\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{R}=\boldsymbol{AP}(t)=\chi(t)\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{OP}(t)=\gamma\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{r}_A=\boldsymbol{OA}(t)=\gamma_A\boldsymbol{e}$$

[定理] 存在唯一的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$，使得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$$

其中 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_A$ 分别为 P 点和基点 A 的速度 .

证明：因为基 $\boldsymbol{e}$ 是常量 , 所以 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{v}_A=\dot{\boldsymbol{r}}_A=\dot{\boldsymbol{\gamma}}_A\boldsymbol{e}$

$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{\gamma}_A(t)+\boldsymbol{\chi}_0\mathfrak{R}(t)\Rightarrow\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\dot{\boldsymbol{\gamma}}_A(t)+\boldsymbol{\chi}_0\dot{\mathfrak{R}}(t)$$

$$\boldsymbol{\chi}(t)=\boldsymbol{\chi}_0\mathfrak{R}(t)\Rightarrow\boldsymbol{\chi}_0=\boldsymbol{\chi}(t)\mathfrak{R}^T(t)$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\chi}(t)\mathfrak{R}^T(t)\dot{\mathfrak{R}}(t)\boldsymbol{e}$$

（转下页）.

由 $\mathfrak{R}\mathfrak{R}^T=I$ 可证明 $\mathfrak{R}^T\mathfrak{R}=I$ 以及 $\mathfrak{R}^T(t)\dot{\mathfrak{R}}(t)$ 是反对称矩阵．（见板书）

可记

$$\mathfrak{R}^T(t)\dot{\mathfrak{R}}(t)=\begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t)=[\chi_1,\chi_2,\chi_3] \Rightarrow \boldsymbol{R}=\chi(t)\boldsymbol{e}=\chi_1\boldsymbol{e}_1+\chi_2\boldsymbol{e}_2+\chi_3\boldsymbol{e}_3$$

定义向量 $\omega=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$

可证明(见板书) $\chi(t)\mathfrak{R}^T(t)\dot{\mathfrak{R}}(t)\boldsymbol{e}=\omega\times\boldsymbol{R}$

在给定基点 A 时，如果还存在 $\boldsymbol{\omega}'$，使得 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\omega'\times\boldsymbol{R}\Rightarrow(\omega'-\omega)\times\boldsymbol{R}=0$

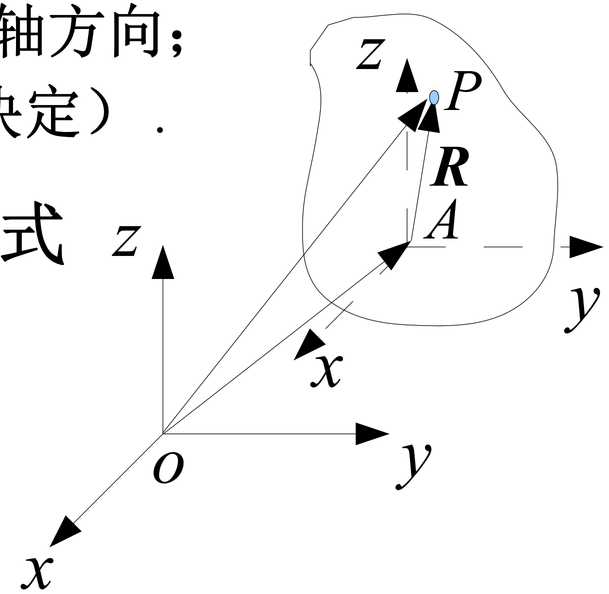
由于 P 是任意点，所以 $\boldsymbol{R}$ 具有任意性，上式要求 $\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}$，具有唯一性

由于 $\boldsymbol{\omega}$ 由 $\mathfrak{R}^T(t)\dot{\mathfrak{R}}(t)$ 决定，所以它也不依赖于基点选择．

故对于任选基点 A 定理成立．（证毕）

注：角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 本身随时间变化，它的方向即瞬时轴方向；

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{AP}(t)$ 也随时间变化，但长度不变（刚体特性决定）.



[推论]$\boldsymbol{R}$ 随时间变化规律与 $\boldsymbol{\omega}$ 之间满足欧拉公式

$$\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$$

证明：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}=\frac{d\,\boldsymbol{OP}}{dt},\quad \boldsymbol{v}_A=\frac{d\,\boldsymbol{OA}}{dt}\\ &\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{R}\\ &\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

得证

[推论] 以 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的任意恒模矢量 $\boldsymbol{u}$ 均满足欧拉公式 $\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$

证明：在上图刚体上找一点 P，使得其对应矢量 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 同向即可.

[定理]P 点加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A+\underbrace{\overset{\text{角加速度}}{\dot{\boldsymbol{\omega}}}\times\boldsymbol{R}}_{\text{转动加速度}}+\underbrace{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})}_{\text{向轴加速度}}$$

证明：直接对速度公式求导，

并利用欧拉公式即可.

§2.3 刚体定轴转动和定点运动

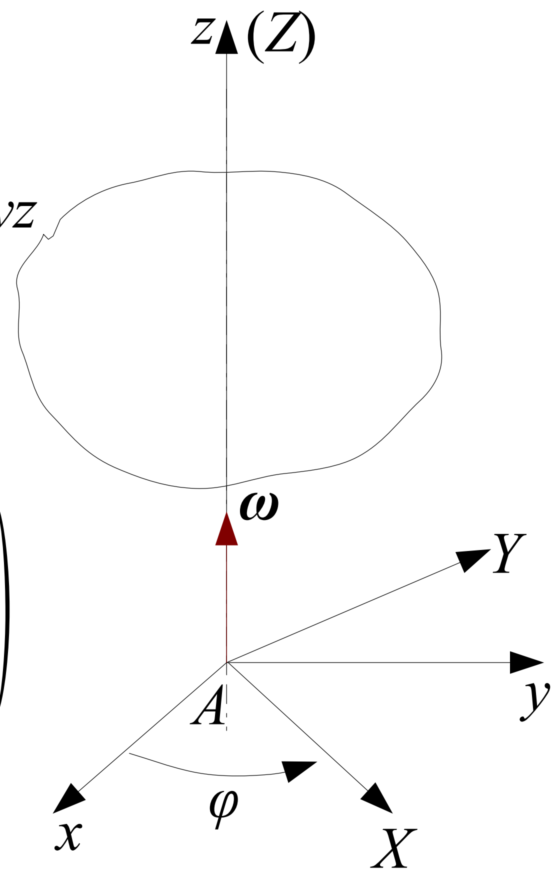
- 定轴转动

如图，以刚体转轴上任意点 A 为原点建立本征系 $Axyz$

以 A 为原点建立固连于刚体的坐标系 $AXYZ$

记 $Axyz$ 转到 $AXYZ$ 的角为 φ

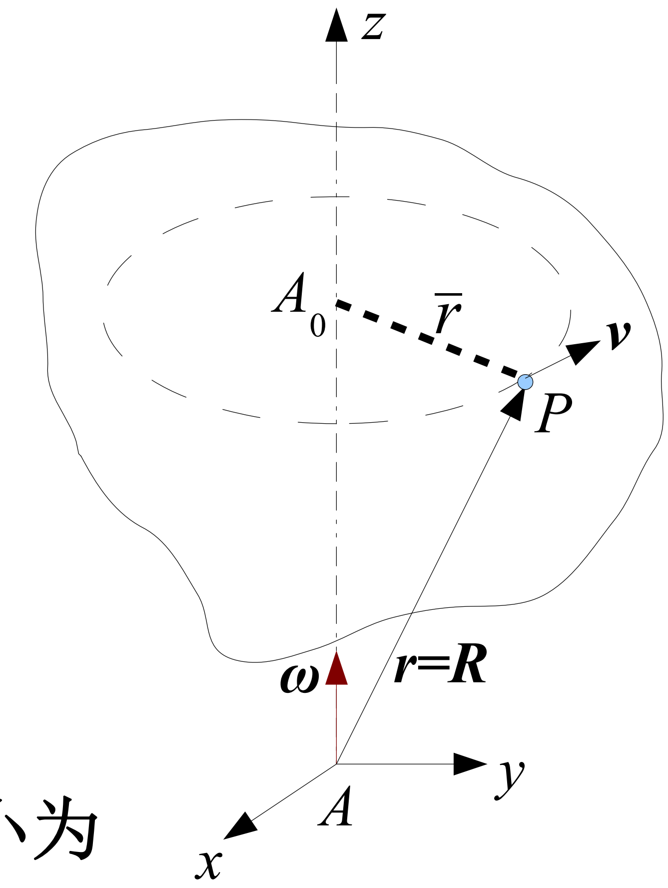
两个坐标系基矢之间满足 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Re} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$



$$\Rightarrow \Re^T \dot{\Re} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_3$ 　　故角速度矢量沿定轴 z 方向，大小为 $\dot{\varphi}$

如右图，刚体上任意点 P，过其作垂直于转轴的平面，该平面与轴的交点 A_0 到 P 距离记为 $\bar{r}$



[定理] P 点速度在垂直于转轴的平面内，沿以 A_0 为圆心，$\bar{r}$ 为半径的圆的切线方向，大小等于 $\dot{\varphi}\bar{r}$

证明：取 A 为基点，由于 $\boldsymbol{v}_A=0 \Rightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

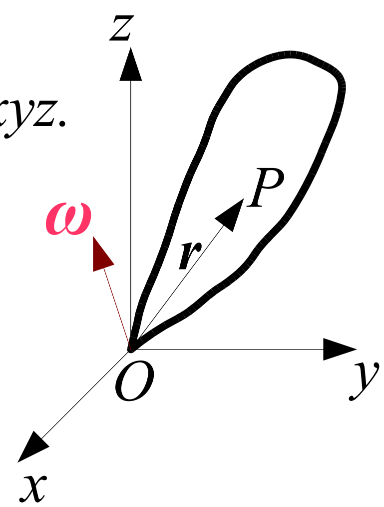
[定理] P 点转动加速度也在该切线上，大小为 $\ddot{\varphi}\bar{r}$；向轴加速度指向 A_0，大小为 $\dot{\varphi}^2\bar{r}$

证明：取 A 为基点，$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\underbrace{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{v}})$

$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}}=\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$ 转动加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}=\ldots$

向轴加速度 $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\ldots$ （板书分析）证毕

- 定点运动



设刚体绕定点 O(不要求在刚体上) 运动，建立本征系 $Oxyz$.

设刚体瞬时角速度为 $\boldsymbol{\omega}$, 任意点 P 用矢量 $\boldsymbol{r}(=\boldsymbol{R})$ 标记

定理： P 点的速度和加速度表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

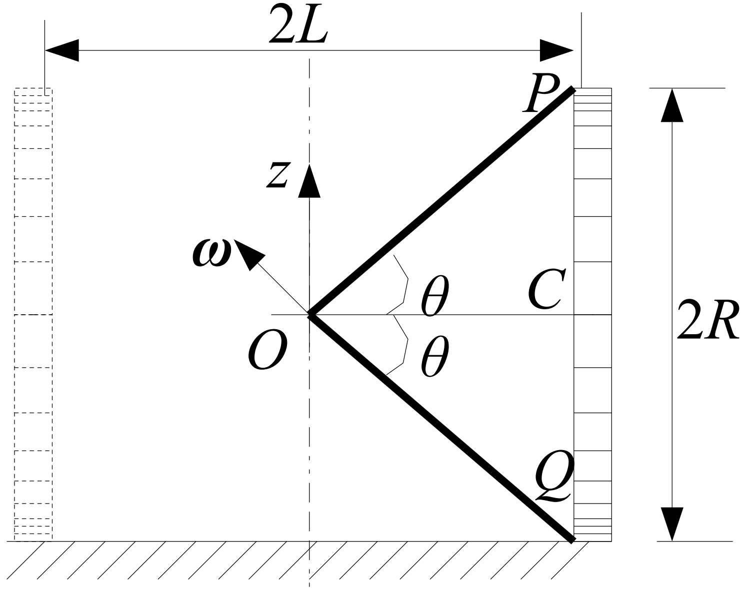
$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

[证明] 选择定点 O 为基点，它的速度和加速度均为 0. 因而得证.

特别注意：尽管上式与定轴转动相同，但 $\boldsymbol{\omega}$ 是瞬时角速度，它沿瞬时轴的方向。它的大小和方向都是随时间改变的。它的大小也不能简单的写成某个角度对时间求导形式。

特别注意：$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 不一定沿瞬时轴方向，因此转动加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$ 不一定在过 P 点且垂直于瞬时轴的圆周切线上，而向轴加速度 $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 仍然指向该圆周的圆心

例题 1. 直径为 $2R$ 的刚性薄圆盘在水平地面上作无滑滚动，它自身保持竖直，盘心 C 以匀角速度 ω_0 在与地面平行的水平面内画出直径为 $2L$ 的圆。求圆盘最高点的速度和加速度。



解：记薄圆盘轴线与水平面上画出的圆的轴线交点为 O，圆盘与水平面接触点为 Q，圆盘最高点为 P。该问题可以转化为椎体 OPQ 绕 O 点的定点运动.

取水平面和过 O 的 z 轴作为本征系,根据题意，可知矢量 $\boldsymbol{OC}$ 转动角速度为 $\omega_0\boldsymbol{e}_3$. 根据无滑条件，接触点 Q 的速度必瞬时为 0. 所以瞬时轴为 OQ.

那么瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 $\boldsymbol{QO}$ 方向.

$$\left.\begin{array}{l}\text{一方面，可以计算盘心 } C \text{ 速度大小为 } v_c=\omega_0 L \\ \text{另一方面，根据瞬时角速度可计算} \\ \qquad v_c=|\omega\times\boldsymbol{OC}|=\omega L\sin\theta \quad \text{with} \quad \tan\theta=R/L\end{array}\right\}\Rightarrow \omega=\omega_0/\sin\theta$$

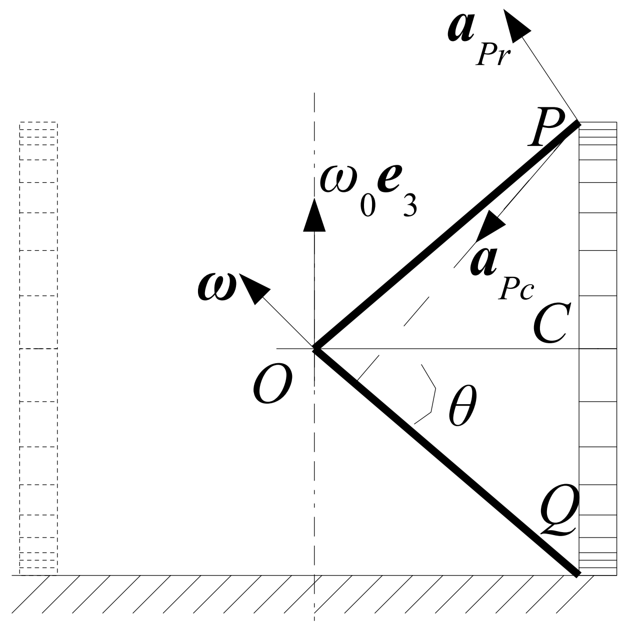
所以，P 点速度可以计算为

$$\boldsymbol{v}_P = \omega \times \boldsymbol{OP}$$

其方向指向纸面向里，大小为

$$v_P = \omega(2L\sin\theta) = 2\omega_0 L$$

向轴加速度 $\boldsymbol{a}_{Pc} = \omega \times (\omega \times \boldsymbol{OP}) = \omega \times \boldsymbol{v}_P$



其方向沿由 P 点到瞬时轴的垂线方向（图示虚线），大小为

$$a_{Pc} = \omega v_P = 2\omega_0^2 L/\sin\theta \quad (\text{note} \ \ \omega \perp \boldsymbol{v}_P)$$

注意到 $\boldsymbol{\omega}$ 始终在 z 轴 ($\boldsymbol{e}_3$) 和盘轴线 OC 确定的面内，而这个面绕 z 轴的转动角速度恰好是 $\omega_0 \boldsymbol{e}_3$. 所以矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 也以 $\omega_0 \boldsymbol{e}_3$ 角速度转动 . 另外 $|\boldsymbol{\omega}| = \omega_0/\sin\theta$ 是常量，利用欧拉公式可得 $\dot{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{e}_3 \times \omega$, 其方向指向纸面外 ,

大小为 $\omega_0 \omega \cos\theta = \omega_0^2 L/R$

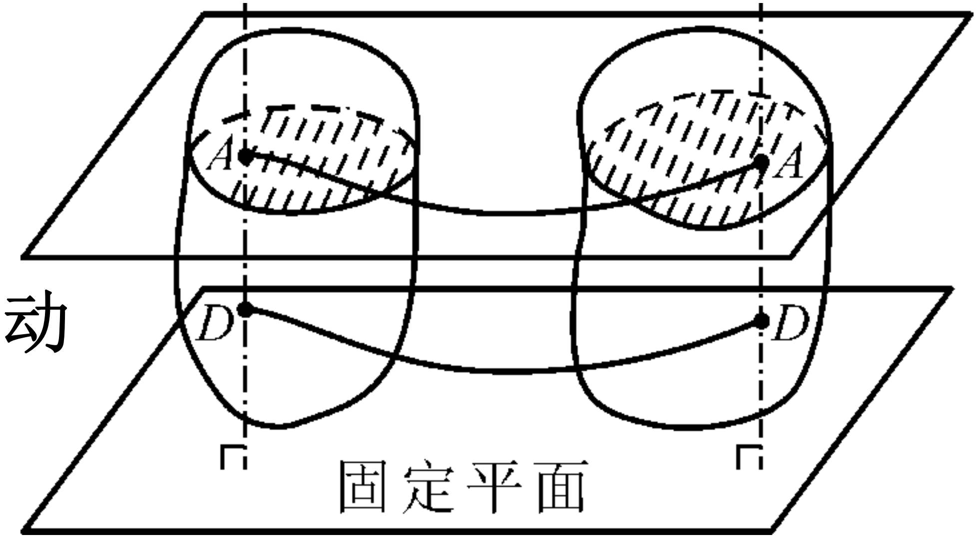
转动加速度 $\boldsymbol{a}_{Pr} = \dot{\omega} \times \boldsymbol{OP}$ 在图示面内垂直于 OP 方向 , 其大小为

$$a_{Pr} = (\omega_0^2 L/R)(OP) = \omega_0^2 L\sqrt{L^2 + R^2}/R$$

§2.4 刚体平面运动

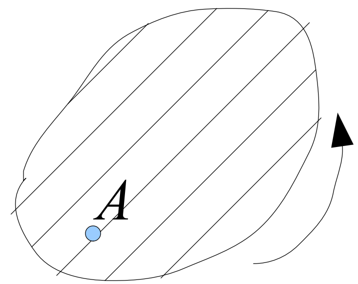
- 基本定义

平面运动：刚体上任何点都在一个平行于固定平面的平面内运动



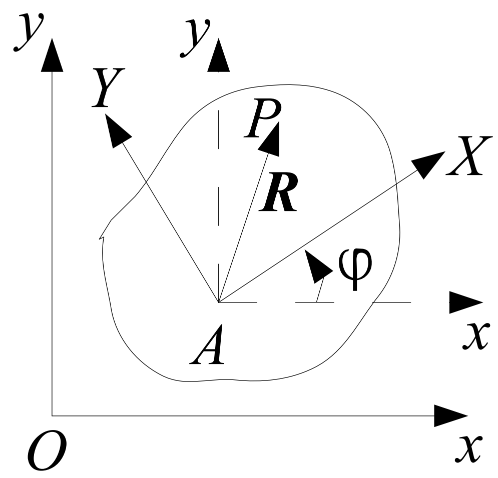
注：刚体上垂直于固定平面的任一直线永远与固定平面垂直。刚体的运动可以用一个平行于固定平面的截面在其自身平面内的运动来代表.

为了描述这个截面的运动，可以在其上选基点 A, 它有 2 个平动自由度；截面还可绕基点转动，增加一个自由度，所以



刚体平面运动自由度为 3

- 速度和加速度



建立本征系 $Oxyz$，基点 A 处平动系 $Axyz$ 以及刚体固连系 $AXYZ$，其中 z 和 Z 轴冲面外，未画出。设 Axy,AXY，均在所考察的截面上，X 与 x 夹角 φ.

定理：截面上任意 P 点的速度和加速度表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_A+\omega\times\boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A+\dot{\omega}\times\boldsymbol{R}+\omega\times(\omega\times\boldsymbol{R})$$

其中 $\omega=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3$

证明：上面速度公式是普适的，所以只要证明 $\omega=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3$

由于角速度矢量不依赖于基点选择，所以刚体可视为绕过基点的定轴转动，根据定轴转动章节的分析，我们知道 $\omega=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3$ 证毕.

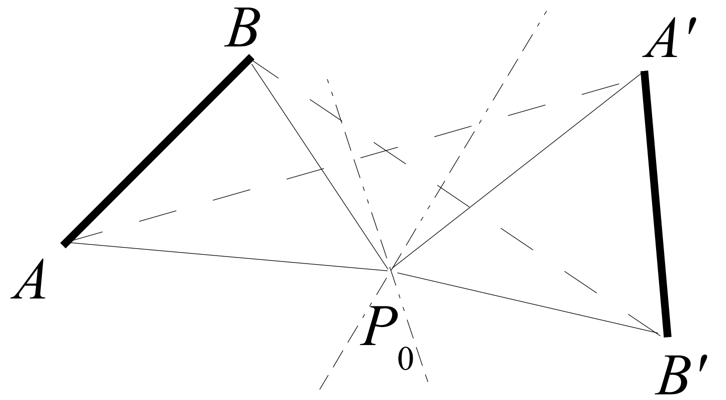
注：这里矢量 $\boldsymbol{R}$ 是 P 相对 A 的矢量，方向随时间变化

转动加速度 $\dot{\omega}\times\boldsymbol{R}$指向 AP 的面内垂线方向，大小为 $\ddot{\varphi}|\boldsymbol{R}|$

向轴加速度$\omega\times(\omega\times\boldsymbol{R})$指向基点 A，大小为 $\dot{\varphi}^2|\boldsymbol{R}|$

- **瞬心**

[定理]作平面运动刚体位置的变化总可由刚体绕某点的一次转动而完成.



证明：可由线段 AB 的运动代替刚体平面运动（想想为什么？）

设某时刻 AB 运动到 $A'B'$ 位置

连接 AA'， BB' 并作它们的中垂线交于点 P_0.

容易证明 $\Delta AP_0B \cong \Delta A'P_0B' \Rightarrow \angle AP_0B = \angle A'P_0B'$

均加上 $\angle BP_0A'$

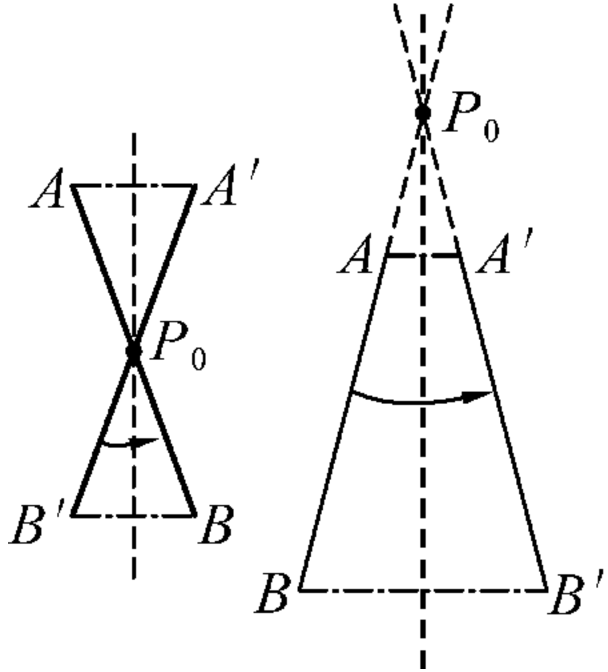
$\Rightarrow \angle AP_0A' = \angle BP_0B' = \theta$

所以，从 AB 到 $A'B'$ 可以看成是绕 P_0 的一次转动得到，转角为角 θ.

有两种不被上述证明包括的特殊情况：

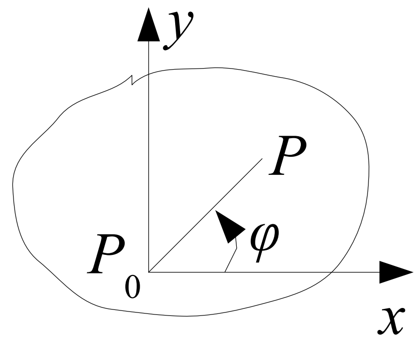
(1) $AB||A'B'$, 此时刚体为平动，可视为转动中心于无穷远处的转动.

(2) AA' 和 BB' 的中垂线重合，上述定理显然成立.



[定义] 将刚体平面运动分解为一系列无限小位置变化，对应每一瞬时的无限小转动的转动中心成为瞬心或瞬时转动中心.

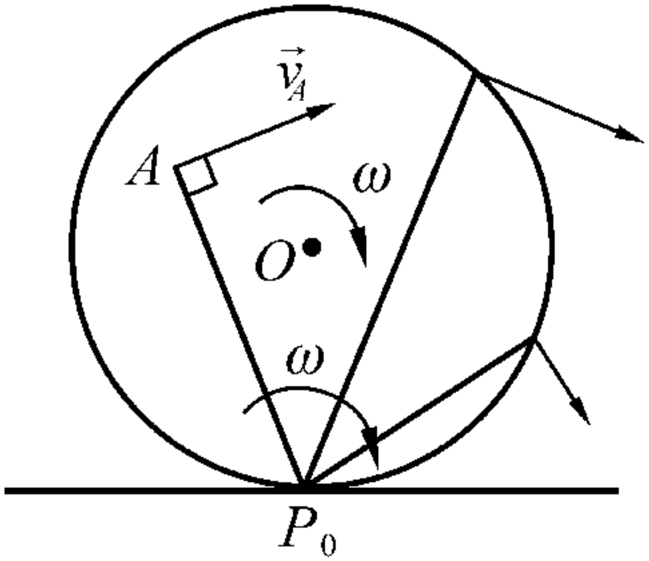
注：由于瞬心是瞬时不动的，所以其速度为0，但是其加速度可以不为0.



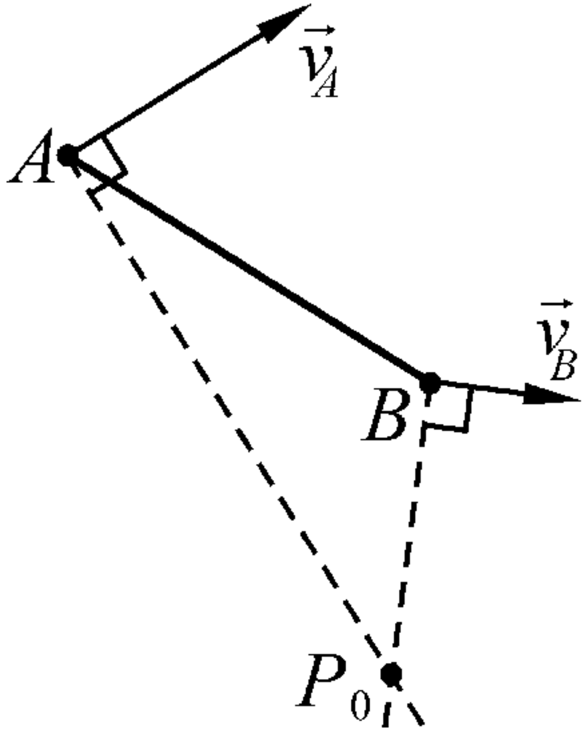
[定理] 假定瞬心为 P_0, 则刚体上任意 P 点速度大小为 $\dot{\varphi}|P_0P|$, 方向与 P_0P 垂直.

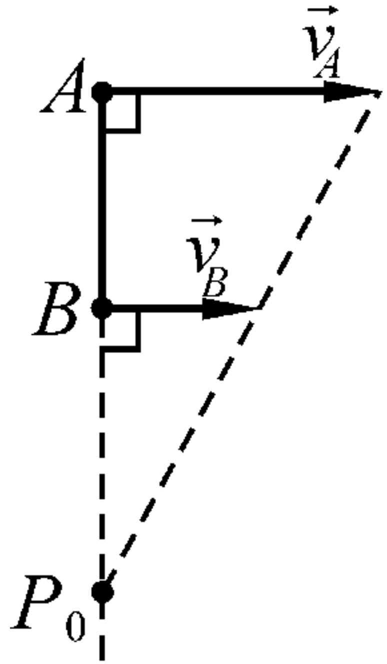
证明： $\boldsymbol{v}_{P_0}=0$, $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3 \Rightarrow \boldsymbol{v}_P=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}$ => 可证明定理（证毕）.

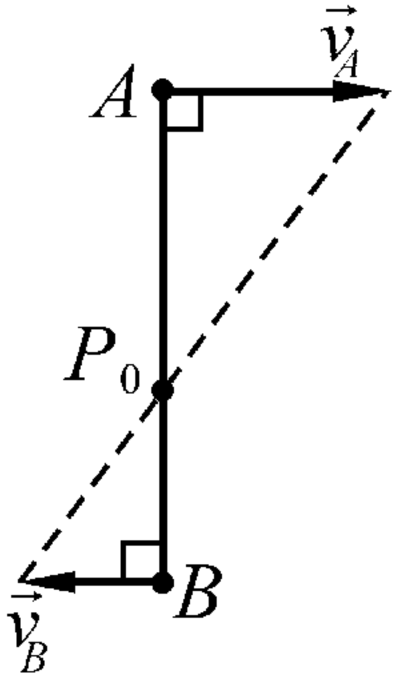
瞬心的几种求法

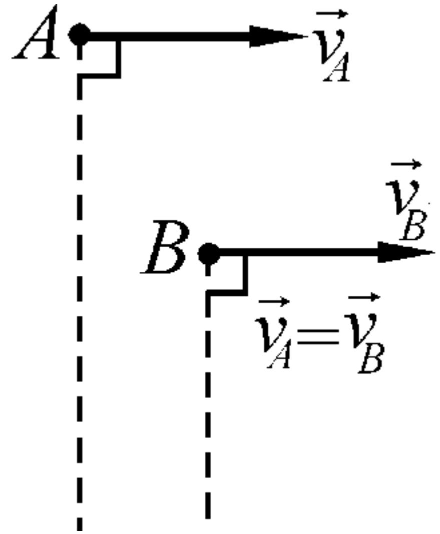


圆盘沿水平轨道无滑滚动接触点即为瞬心，如果知道滚动角速度，则可以求出圆盘上任意点的速度。



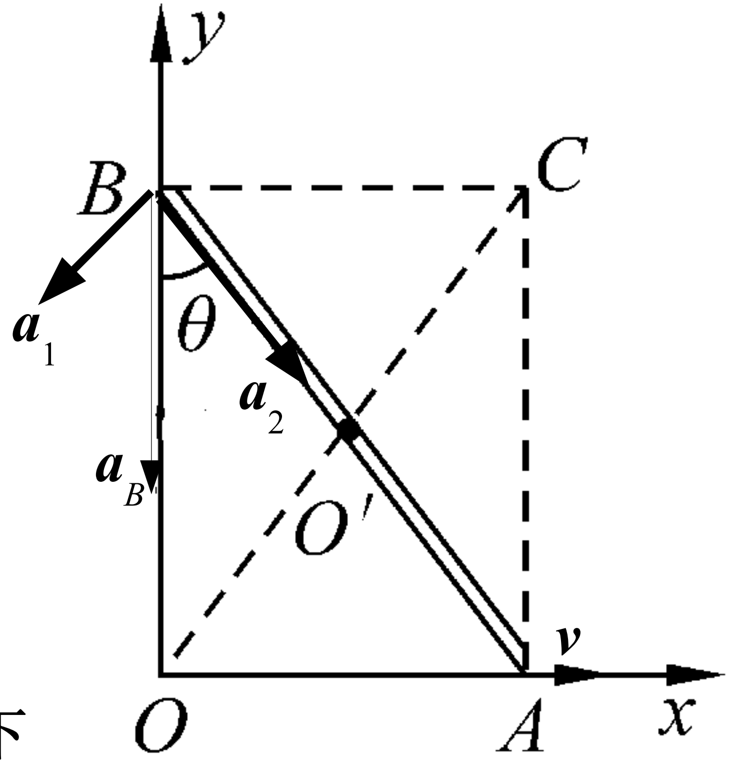






瞬心在无穷远

例题 2 长度为 l 的细杆 AB 的 A 端沿 x 轴以匀速率 v 向右滑动，B 端沿 y 轴滑动．求当杆与 y 轴夹角 $\theta=30^{\circ}$ 时 B 点速度和加速度．



解：第一步，用瞬心法求 B 点速度

根据 A,B 两点速度方向可判断 C 为瞬心

$$\omega l\cos\theta=v\Rightarrow\omega=v/l\cos\theta$$

$$\Rightarrow v_B=\omega l\sin\theta=v\tan\theta=\sqrt{3}v/3$$ 向下

第二步，加速度不能用瞬心求．取 A 作基点，由于其匀速滑动，所以 $\boldsymbol{a}_A=0$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_B=\dot{\omega}\times\boldsymbol{AB}+\omega\times(\omega\times\boldsymbol{AB})\equiv\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$$ (转动加速度 + 向轴加速度)

注意 B 点只能沿 y 轴下滑，且 $\boldsymbol{a}_2$ 向轴 A，所以 $\boldsymbol{a}_B$ 只能指向 $-y$ 方向．

$$\Rightarrow a_B\cos\theta=a_2=\omega^2 l\ \Rightarrow a_B=\frac{\omega^2 l}{\cos\theta}=\frac{v^2}{l\cos^3\theta}=\frac{8v^2}{3\sqrt{3}l}$$