第一部分

运动学

基本公设

- 机械运动发生于空间和时间之中
- 存在绝对空间，它是三维均匀各向同性的欧氏空间
- 存在绝对时间，它从过去到未来连续变化，在空间的所有点都是均匀流逝的、单值的，它的流逝不依赖于运动快慢

注：这里我们没有去定义时间和空间，而是直接假定它们是存在。关于时间和空间的概念性讨论请阅读我的博客中《时空论战》相关文章

基本定义

- 参考系：为了描述运动的方便，通常把某个具有一定大小且形状不变的物体假定为不动的，从而描述其他物体相对于这个物体的运动，这个不动的物体称为参考系。

  注：一个点是不能作为参考系的。

- 本征坐标系：固连在参考系上且刻度不随时间变化的坐标系。可用其代表参考系。

- 质点：有质量而没有大小的点。(理想模型)
- 质点系：质点以某种方式组成的集合。有时被称为力学系统或简称系统。
- 刚体：一种特殊的质点系，其中的质点间相对位置不发生改变。（理想模型）

注 1：只要运动过程中物体的变形小到可以忽略，即可视为刚体

注 2：当两个被研究物体的尺寸与其间隔相比足够小，则均可视为质点，如地球与太阳

- 约束：系统运动时，其中各点的位置或速度常常因为受到限制不能任意变化，这种限制称为约束。如果系统不受约束，则称为自由的。
- 自由度 (DOF)：确定力学系统位置所需要的独立坐标数目

一个自由质点：$DOF=3$　　　N 个自由质点：$DOF=3N$

受一个约束的自由质点：$DOF=3-1=2$

受 M 个约束的 N 个自由质点：$DOF=3N-M$

如果刚性细杆相连，$DOF=?$

如果弹性细杆相连，$DOF=?$

运动学的任务及数学结构

- 任务：确定质点或质点系的运动，即给出质点或质点系在任意时刻的位置
- 数学结构：

运动学 ⟷ 欧氏空间中的微分几何学

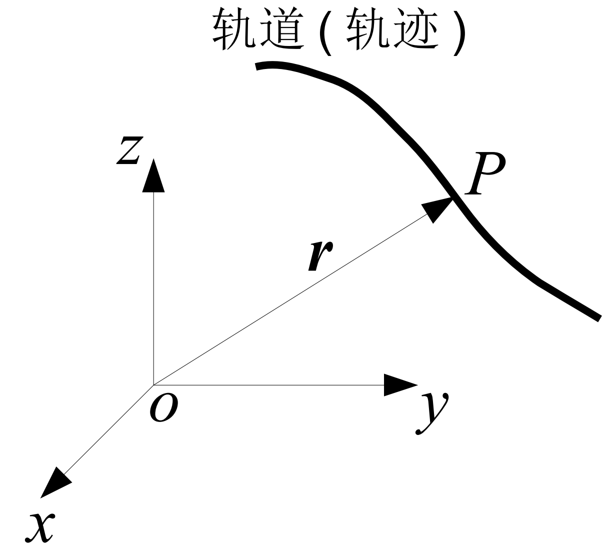
第一章

质点运动学

§1.1 运动学量的定义

$Oxyz$ 为本征坐标系，用其代表参考系

P 代表质点



- 位置矢量： $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$

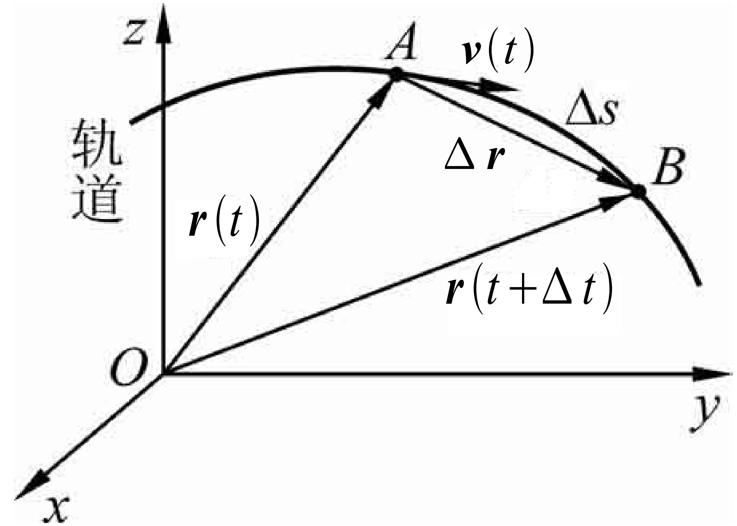
$\boxed{P\text{运动}} \Longleftrightarrow \boxed{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)}$ （运动学方程）

注：它包含质点运动的全部信息

- 轨道：位置矢量矢端随时间的演化曲线

- **位移：位置矢量的增量**

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$



- **路程：质点沿轨道走过的弧长**

$$\Delta s = \overset{\frown}{AB}$$

注： $\Delta s \geq |\Delta \boldsymbol{r}|$， $\Delta s \to |\Delta \boldsymbol{r}|$ for $\Delta s \to 0$, i.e., $ds = |d\boldsymbol{r}|$

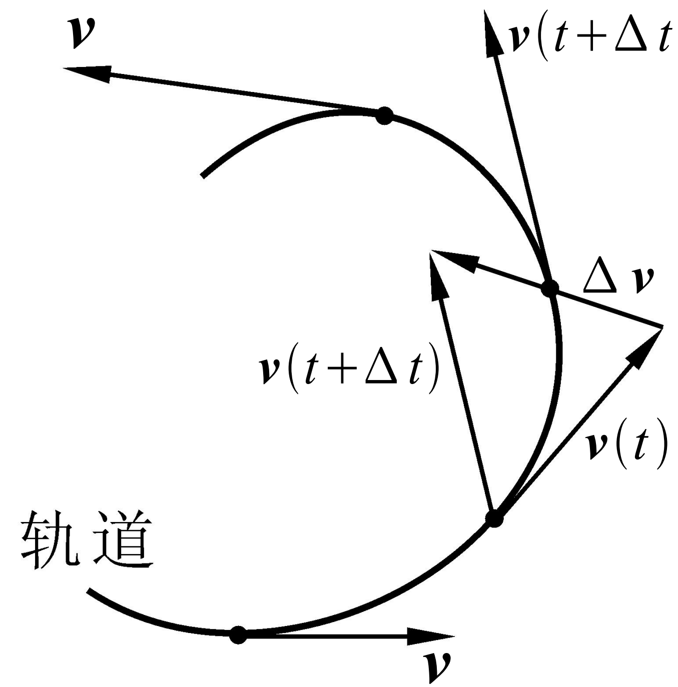
- **速度：** $\boldsymbol{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \equiv \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$ 注 :$\boldsymbol{v}$ 沿轨道切线方向

- **速率：** $v(t) = |\boldsymbol{v}(t)|$ 求证： $v(t) = \dot{s}$

- 加速度：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\equiv\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\equiv\dot{\boldsymbol{v}}$$

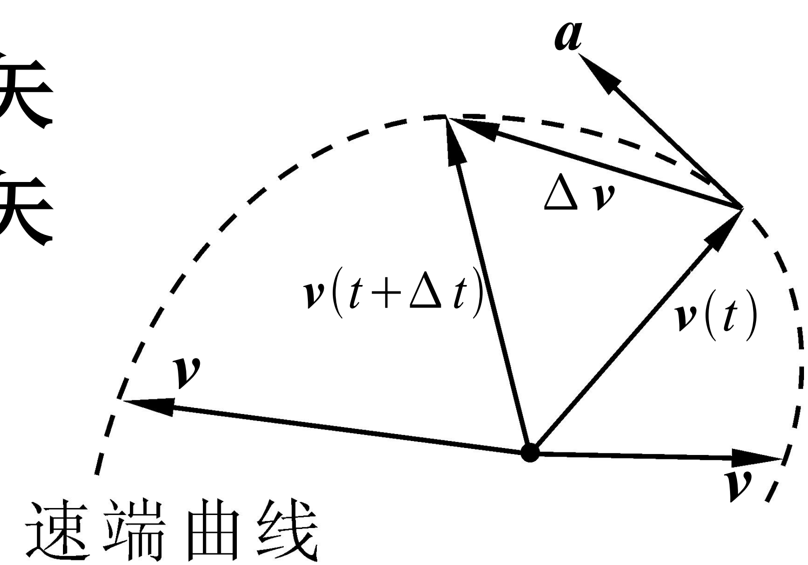
特点：指向轨道的凹侧



求证：$\boldsymbol{a}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\equiv\ddot{\boldsymbol{r}}$

- 速端曲线：将不同时刻速度矢量的矢尾集中于一点，速度矢量矢端生成的曲线

求证：$\boldsymbol{a}$ 沿速端曲线切线方向并指向 $\boldsymbol{v}$ 沿速端曲线运动的前方

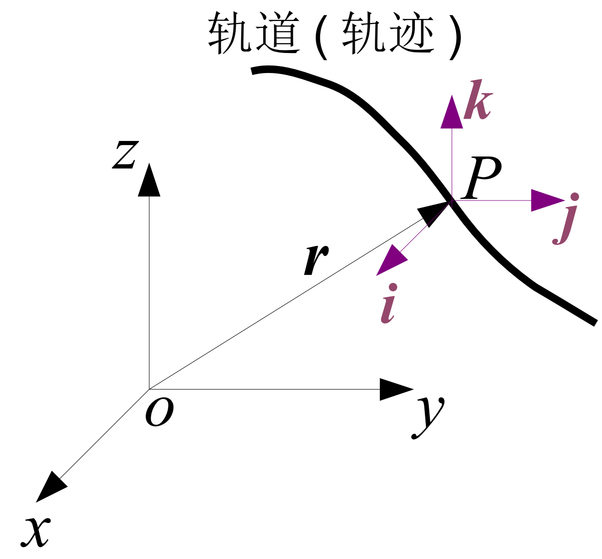


§1.2 质点运动的坐标表示

- 几点说明
  - §1.1中矢量形式的定义不依赖于坐标系
  - 为了研究问题的方便我们通常取合适的坐标系来表示这些运动学量
  - 在不同坐标系中运动学量的表现形式可能非常不同，但是它们对应的运动学行为是相同的

- 直角坐标 $\{x, y, z\}$ 表示

基矢 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 是右手正交的单位常矢量



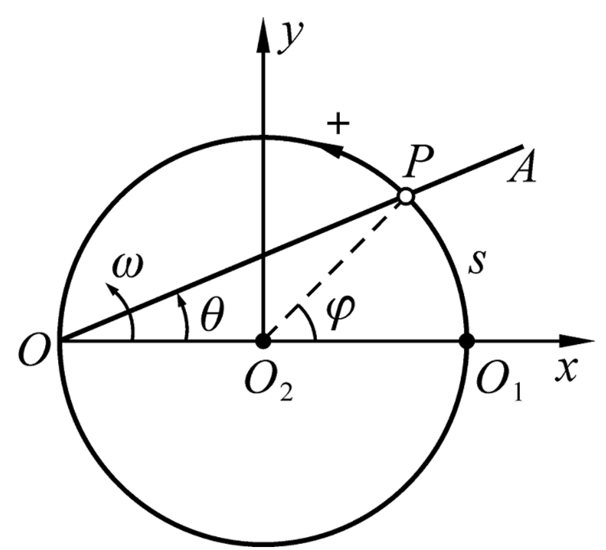
运动学方程：$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$

定理：速度、速率和加速度分别表示为

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k} \qquad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \qquad \boldsymbol{a}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}$$

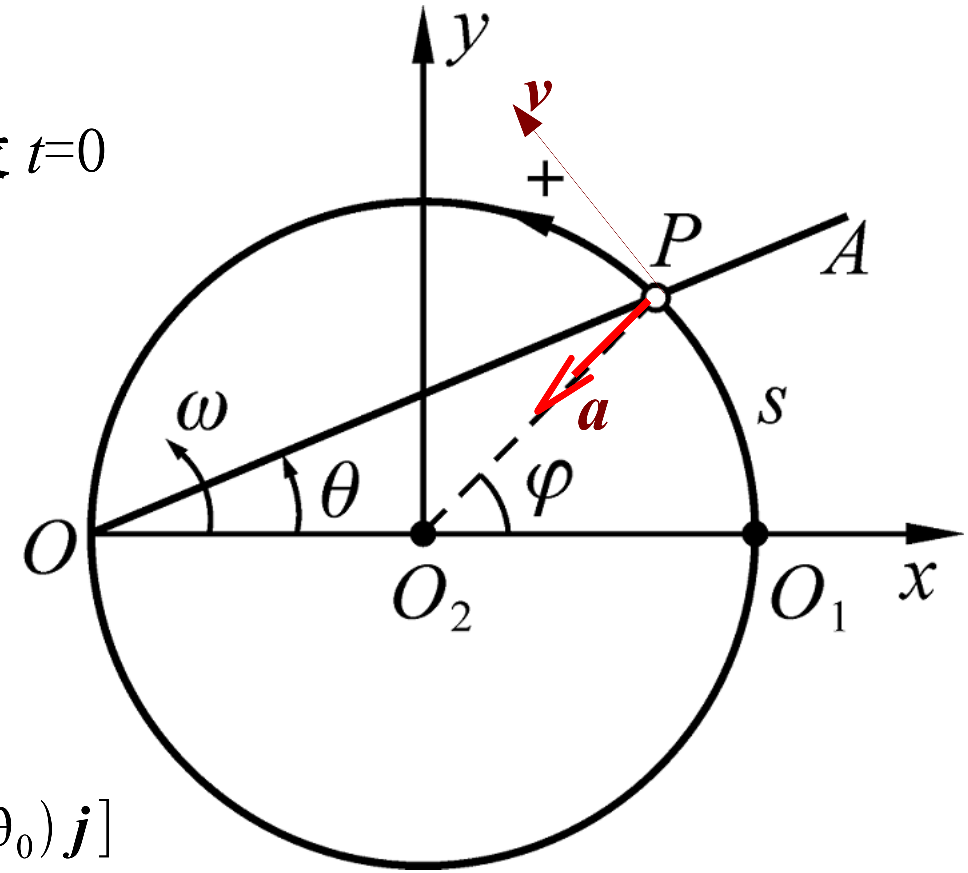
证明：注意到基矢是常矢量即可

例题 1：半径为 R 的铁圈上套一小环 P，直杆 OA 穿过小环并绕铁圈上 O 点以匀角速度 ω 转动．求小环的运动学方程、轨道方程、速度、速率和加速度．



解答：取图示直角坐标系 O_2xyz，设 $t=0$ 时 $\theta=\theta_0$, 则 . . . .

（中间过程见板书）



$$\boldsymbol{r}=R[\cos(2\omega t+2\theta_0)\boldsymbol{i}+\sin(2\omega t+2\theta_0)\boldsymbol{j}]$$

$$|\boldsymbol{r}|=R$$

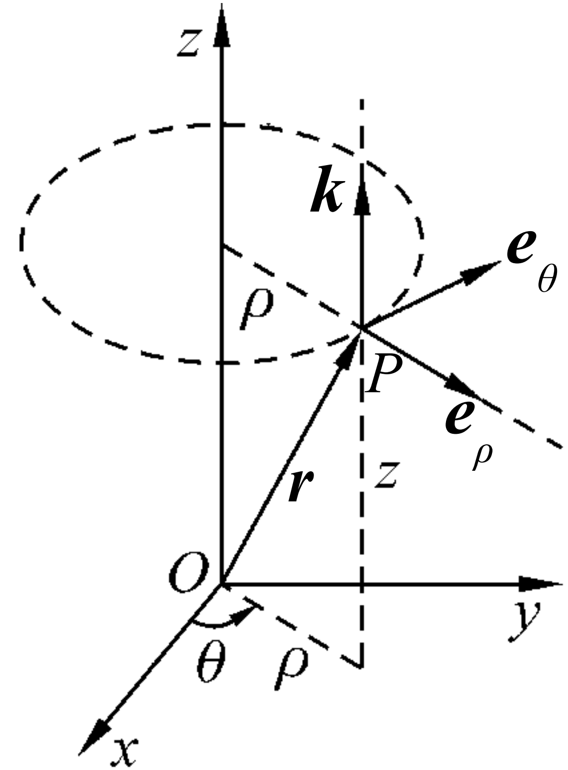
$$\boldsymbol{v}=2\omega R[-\sin(2\omega t+2\theta_0)\boldsymbol{i}+\cos(2\omega t+2\theta_0)\boldsymbol{j}]$$

$$v=|\boldsymbol{v}|=2\omega R$$

$$\boldsymbol{a}=-4\omega^2 R[\cos(2\omega t+2\theta_0)\boldsymbol{i}+\sin(2\omega t+2\theta_0)\boldsymbol{j}]$$

- 柱坐标 $\{\rho, \theta, z\}$ 表示

P 点处的基矢表示为 $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{k}$, 它们分别沿圆周径向，周向及柱的轴向



注： $\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho(\theta), \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta(\theta)$

运动学方程：$\boldsymbol{r}(t) = \rho(t)\boldsymbol{e}_\rho[\theta(t)] + z(t)\boldsymbol{k}$

定理：速度、速率和加速度分别表示为

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\,\boldsymbol{k}\,, \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\,\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\,\boldsymbol{k}$$

证明：关键点在于证明以下恒等式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\rho\\ \boldsymbol{e}_\theta\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \dot{\theta} & 0\\ -\dot{\theta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\rho\\ \boldsymbol{e}_\theta\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}$$

简记为 $\dot{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{e}$

(以下略，见板书) 证毕

观察 $\boldsymbol{\Omega}$ 矩阵特征 :

$$\boldsymbol{\Omega}^T=-\boldsymbol{\Omega}$$ 反对称

推论：对于限制在 z=constant 平面上运动的质点，有

$$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_{\rho}+\rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_{\theta}$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\theta}^{2})\boldsymbol{e}_{\rho}+(\rho\,\ddot{\theta}+2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta})\boldsymbol{e}_{\theta}$$

注：这一结果对应于用 (ρ, θ) 极坐标表示

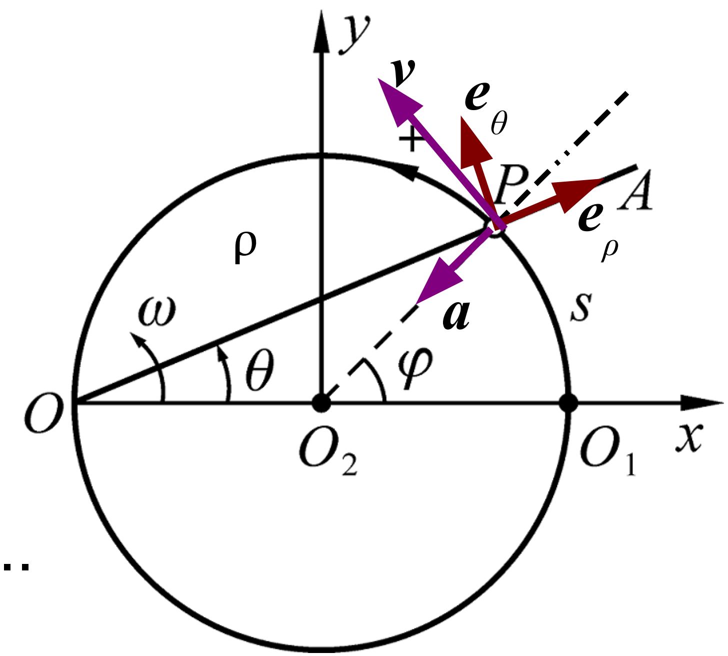
定义：径向速度与横向速度分别为

$$v_{\rho}=\dot{\rho}\,, \quad v_{\theta}=\rho\,\dot{\theta}$$

定义：径向加速度与横向加速度分别为

$$a_{\rho}=\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\theta}^{2}\,, \qquad a_{\theta}=\rho\,\ddot{\theta}+2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}$$

例题 1(新解)：半径为 R 的铁圈上套一小环 P，直杆 OA 穿过小环并绕铁圈上 O 点以匀角速度 ω 转动．求小环的运动学方程、轨道方程、速度、速率和加速度．



解：采用如图所示极坐标系 (ρ, θ)，则有 …

(中间过程见板书)

运动方程：$\rho(t)=2R\cos(\omega t+\theta_0)$，$\theta(t)=(\omega t+\theta_0)$

轨道方程：$\rho=2R\cos\theta$

速度：$\boldsymbol{v}=2\omega R[-\sin(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_\rho+\cos(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_\theta]$

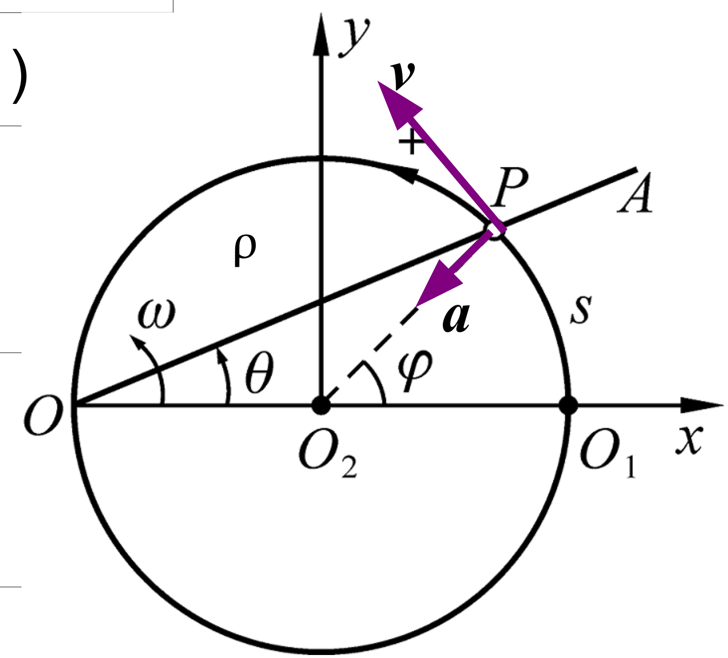
速率：$v=2\omega R$

加速度：$\boldsymbol{a}=-4\omega^2 R[\cos(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_\rho+\sin(\omega t+\theta_0)\boldsymbol{e}_\theta]$

直角坐标和极坐标结果比较

	直角坐标	极坐标
运动方程	$x(t)=R\cos(2\omega t+2\theta_0)$ $y(t)=R\sin(2\omega t+2\theta_0)$	$\rho(t)=2R\cos(\omega t+\theta_0)$ $\theta(t)=(\omega t+\theta_0)$
$\boldsymbol{v}$	$v_x=-2\omega R\sin(2\omega t+2\theta_0)$ $v_y=2\omega R\cos(2\omega t+2\theta_0)$	$v_\rho=-2\omega R\sin(\omega t+\theta_0)$ $v_\theta=2\omega R\cos(\omega t+\theta_0)$
$\boldsymbol{a}$	$a_x=-4\omega^2 R\cos(2\omega t+2\theta_0)$ $a_y=-4\omega^2 R\sin(2\omega t+2\theta_0)$	$a_\rho=-4\omega^2 R\cos(\omega t+\theta_0)$ $a_\theta=-4\omega^2 R\sin(\omega t+\theta_0)$
轨道	$x^2+y^2=R^2$ (圆)	$\rho=2R\cos\theta$ (圆)
速度特征	大小：$2\omega R$ 方向：图示切向	大小：$2\omega R$ 方向：图示切向
加速度特征	大小：$4\omega^2 R$ 方向：指向圆心	大小：$4\omega^2 R$ 方向：指向圆心

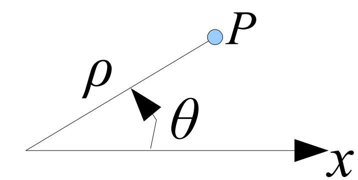
不同坐标表示下，*r*,*v*,*a* 表达式不同，但它们对描述 *P* 点运动是等价的；*r* 对应的轨道、 *v*,*a* 的大小和方向是唯一的！



例题 2. 已知一质点做平面运动，其速率为常量 c，位置矢量转动的角速度为常量 ω_0>0，求质点的运动学方程及轨道方程 .

解：建立右图所示极坐标系，设 t=0 时， ρ=0 , θ=0. 则有

$$v=\sqrt{\dot{\rho}^2+(\rho\dot{\theta})^2}=c,\quad \dot{\theta}=\omega_0$$



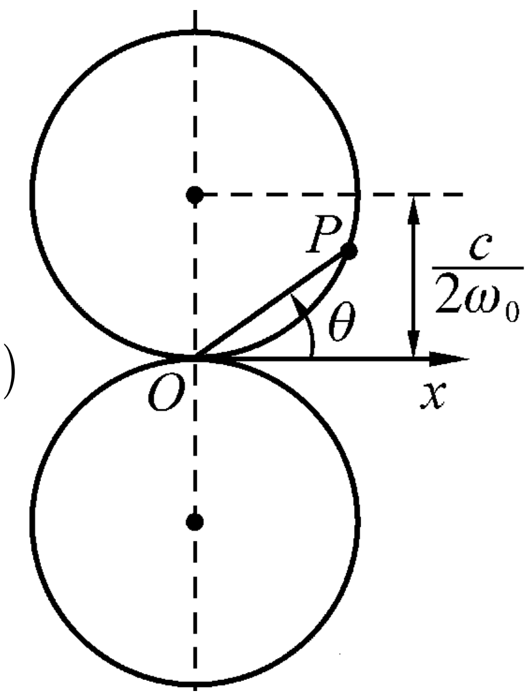
(以下见板书)

运动方程：

$$\theta(t)=\omega_0 t,\quad \rho(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{\omega_0}\sin\omega_0 t,\left(2n<\dfrac{\omega_0 t}{\pi}<2n+1\right)\\ -\dfrac{c}{\omega_0}\sin\omega_0 t,\left(2n+1<\dfrac{\omega_0 t}{\pi}<2n+2\right)\end{cases}$$

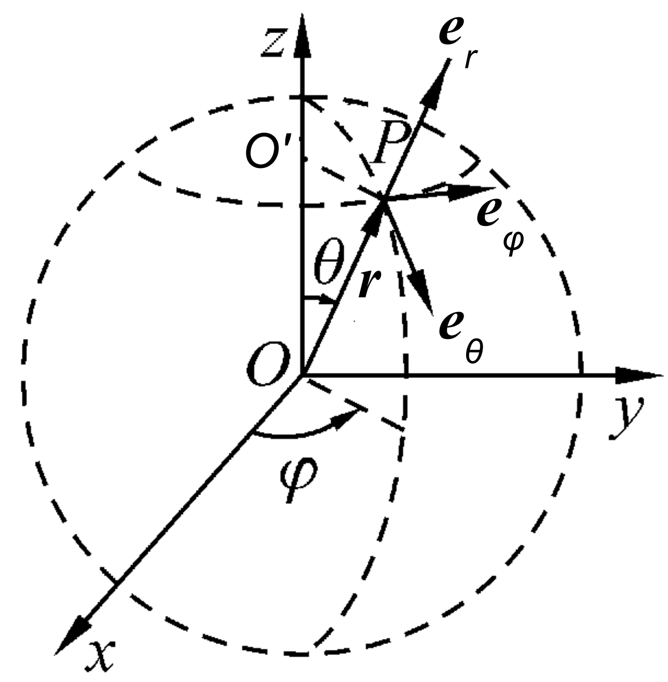
轨道方程：

$$\rho=\begin{cases}\dfrac{c}{\omega_0}\sin\theta,\left(2n<\dfrac{\theta}{\pi}<2n+1\right)\\ -\dfrac{c}{\omega_0}\sin\theta,\left(2n+1<\dfrac{\theta}{\pi}<2n+2\right)\end{cases}$$



- 球坐标 $\{r, \theta, \varphi\}$ 表示

右手正交基矢 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ 分别沿球面的径向，经向，和纬向，如右图。



θ 极角 ;φ 方位角

运动方程：

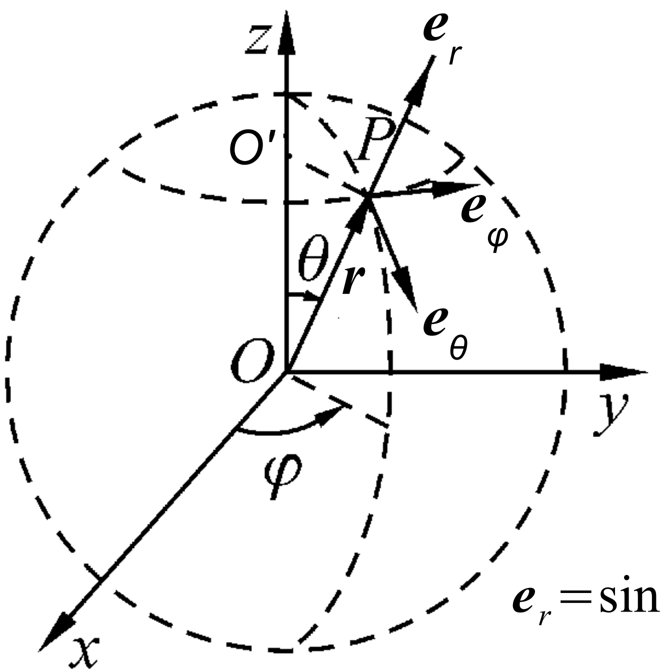
$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r[\theta(t), \varphi(t)]$$

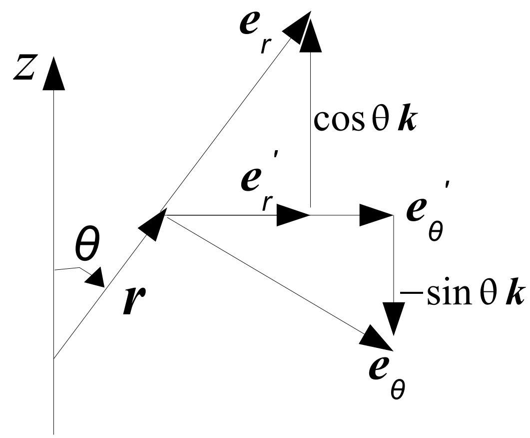
定理：速度和加速度分别表示为

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

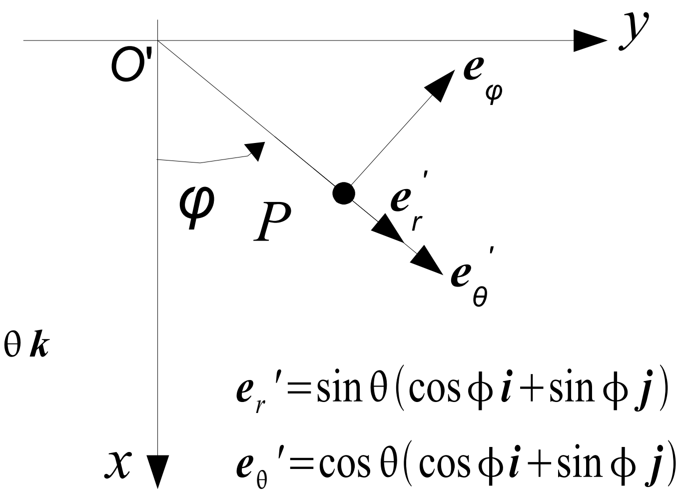
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\theta \\ &+ (r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

证明思路：





侧视图



俯视图

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

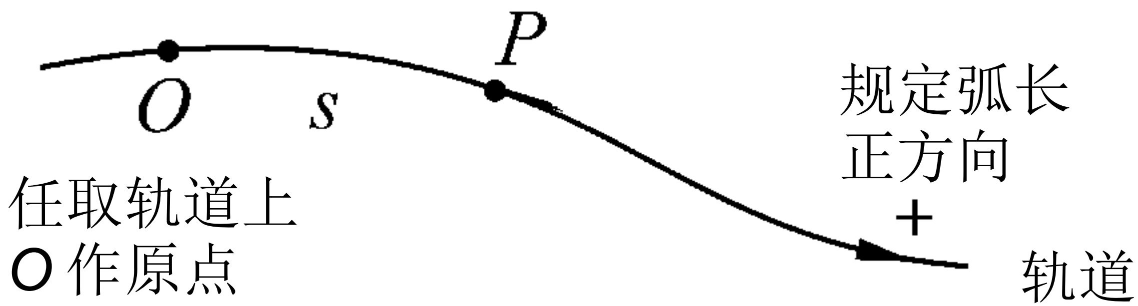
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}$$

可证明：$\dot{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{e}$　　其中：$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot\theta & \dot\varphi\sin\theta \\ -\dot\theta & 0 & \dot\varphi\cos\theta \\ -\dot\varphi\sin\theta & -\dot\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$

利用此结果可以证明上述定理。（证毕）

- # 自然坐标表示

利用质点运动轨道本身的几何特性 (如切线、法线方向等) 来描述质点的运动 .



记 O 到 P 的弧长为 s ，随着时间变化， P 运动， s 发生变化

[定义] 弧长方程 : $s=s(t)$

[定理] 轨道方程 + 弧长方程 <=> 运动方程

证明：在已知轨道前提下质点 P 的位置可由 O 到 P 的弧长 s 决定 ,

所以 : 轨道方程 + 弧长方程 => 运动方程

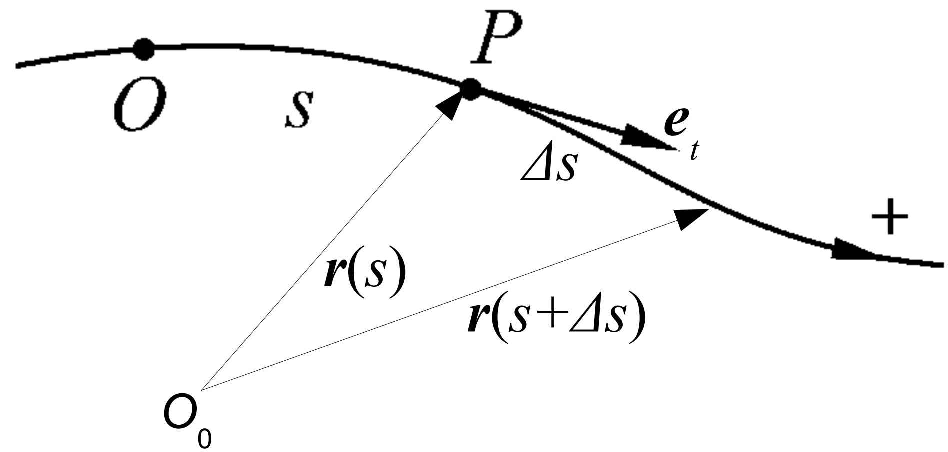
运动方程包含全部运动信息，原则上可由它计算轨道和弧长，

所以 : 运动方程 => 轨道方程 + 弧长方程

证毕。

轨道上的点可以用弧长为参数记为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$$



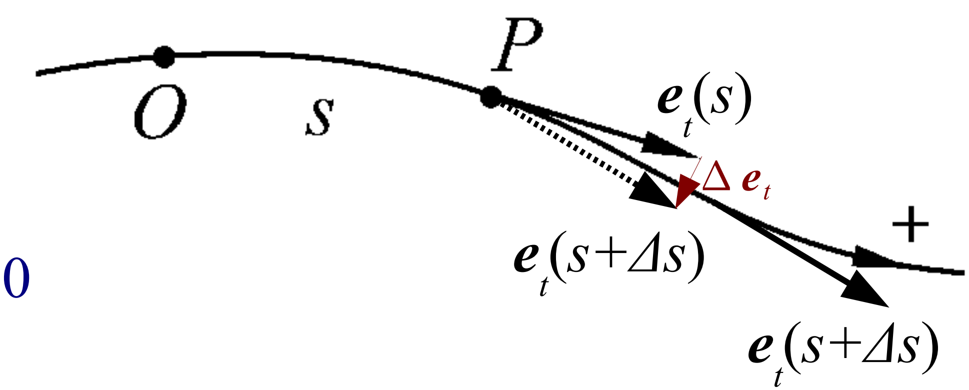
[定义] 切向量：

$$\boldsymbol{e}_t=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}\equiv\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

思考题： $|\boldsymbol{e}_t|=1$?

[定义] 曲率及曲率半径：

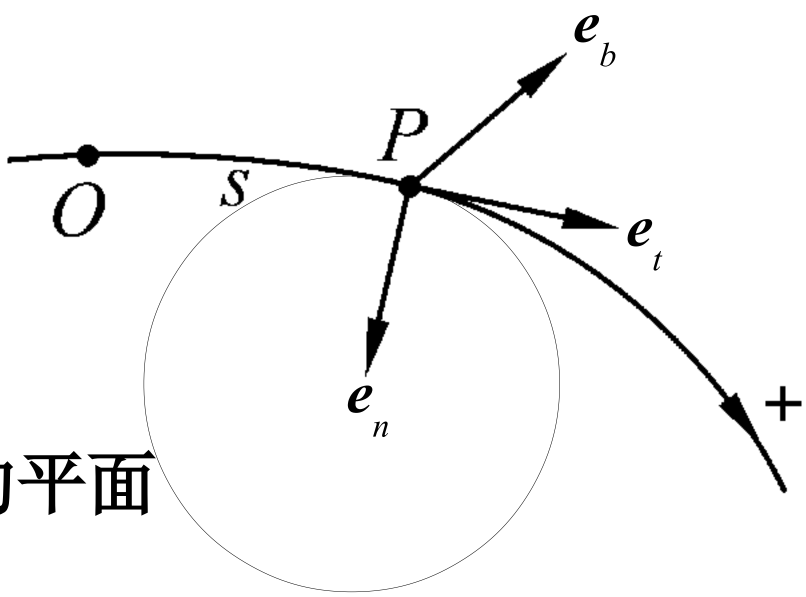
$$\kappa=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{e}_t}{\Delta s}\right|\equiv\left|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{ds}\right|,\quad \sigma=\frac{1}{\kappa}\geq 0$$



[定义] 主法向量： $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\boldsymbol{e}_t}{ds}$, for $\kappa\neq 0$; 注：它指向曲线凹侧

For κ=0， $\boldsymbol{e}_n$取任意垂直于$\boldsymbol{e}_t$的单位向量并与附近点的$\boldsymbol{e}_n$连续

$$\boldsymbol{e}_t\cdot\boldsymbol{e}_t=1\Rightarrow\boldsymbol{e}_t\cdot\frac{d\,\boldsymbol{e}_t}{ds}=0\Rightarrow\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_t=0\Rightarrow\boldsymbol{e}_n\perp\boldsymbol{e}_t$$



[定义]副法向量： $\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{e}_t\times\boldsymbol{e}_n$

[定义]密切面： 过 P 点由 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 决定的平面

[定义]密切圆： 密切面内过 P 点，与 $\boldsymbol{e}_t$ 相切，圆心在 $\boldsymbol{e}_n$ 正向上且半径为 $\sigma=1/\kappa$ 的圆

[定理]自然坐标下速度和加速度可表示为：

$$\boldsymbol{v}=\dot{s}\,\boldsymbol{e}_t,\qquad \boldsymbol{a}=\ddot{s}\,\boldsymbol{e}_t+\left(\dot{s}^2/\sigma\right)\boldsymbol{e}_n$$

a_t: 切向加速度

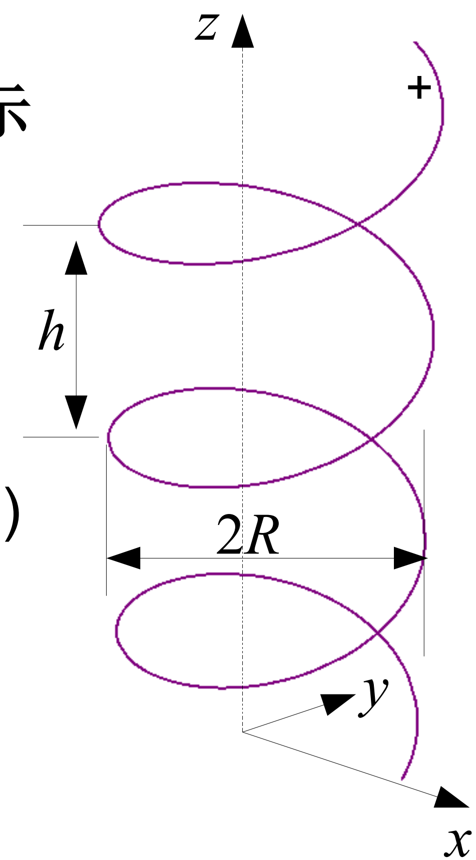
a_n: 法向(或向心)加速度

证明：对于质点位矢 $\boldsymbol{r}$，由于 $s=s(t)$ 使得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left[s\left(t\right)\right]$$

直接求导即可得证(见板书)

例题 3. 已知质点的运动学方程为 $x = R\cos\omega t\,,\ y = R\sin\omega t\,,\ z = (h/2\pi)\omega t$ 其中 R,ω,h 为常量，试分析质点的运动，求切向加速度、法向加速度及轨道的曲率半径



解 : 质点轨道为半径是 R 的的螺旋线，螺距为 h ，如图所示

$$d\boldsymbol{r} = (-\boldsymbol{i}R\sin\omega t + \boldsymbol{j}R\cos\omega t + \boldsymbol{k}h/2\pi)\omega\, dt$$

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = \omega\sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}\, dt \qquad \Rightarrow \dot{s} = \omega\sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}$$

$$\Rightarrow a_t = \ddot{s} = 0,\quad t = s/\omega\sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}$$ (assume s=0 when t=0)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_t \Rightarrow \boldsymbol{e}_t = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}} = \frac{-\boldsymbol{i}R\sin\omega t + \boldsymbol{j}R\cos\omega t + \boldsymbol{k}h/2\pi}{\sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\boldsymbol{e}_t}{ds} = -\frac{R(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t)}{R^2 + (h/2\pi)^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = \left|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{ds}\right| = \frac{R}{R^2 + (h/2\pi)^2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\dot{s}^2}{\sigma} = \omega^2 R,\quad \sigma = R\left[1 + \left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2\right]$$