第十章

刚体动力学 II

—定点运动

§10.1 动力学基本定理

- 刚体的惯量张量

【定义】张量：坐标旋转下的不变量，它与任意矢量的点积结果是矢量

在给定坐标系下，设坐标系的基矢为 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}}$, **矢量** $\boldsymbol{u}$ **可表示为** $\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i$, **张量** $\underline{\boldsymbol{T}}$ **可表示为** $\underline{\boldsymbol{T}}=T_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l$，**它们的点积**

$$\underline{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{u}=T_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\cdot(u_i\boldsymbol{e}_i)=T_{kl}u_i\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_i=T_{kl}u_i\boldsymbol{e}_k\delta_{li}=\underbrace{T_{kl}u_l\boldsymbol{e}_k}_{\text{矢量}}$$

$$=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

如果 $T_{kl}=T_{lk}$ **则称** $\underline{\boldsymbol{T}}$ **为对称张量**

注意：当 $j\neq k$ **时** $\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$ **和** $\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j$ **是不同的**

【定义】单位张量（或球形张量）$\underline{\boldsymbol{I}}$：满足 $\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$，$\forall\ \boldsymbol{v}$

注：在坐标基矢 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}}$ 下，可表示为 $\underline{\boldsymbol{I}} = \delta_{kl} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l$

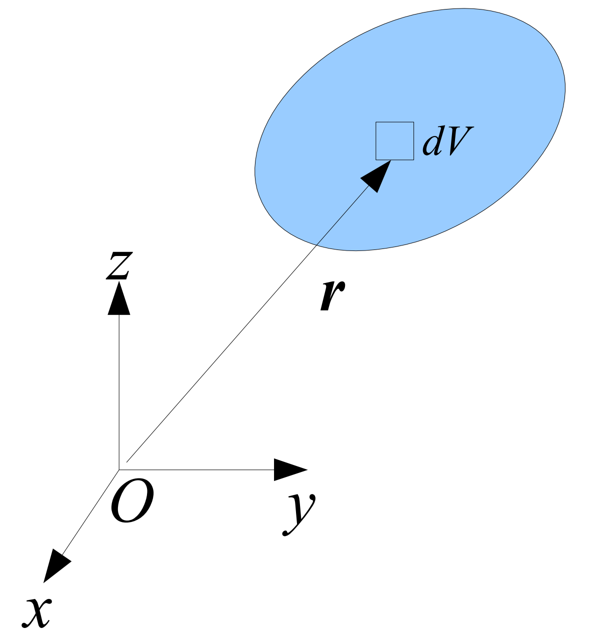
【定义】刚体 (相对于 O 点) 惯量张量：

$$\underline{\boldsymbol{J}}_O = \int [r^2 \underline{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}] \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

注：在 $Oxyz$ 坐标基矢 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}}$ 下，

$$\boldsymbol{r} = r_1 \boldsymbol{e}_1 + r_2 \boldsymbol{e}_2 + r_3 \boldsymbol{e}_3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} &= (r_1 \boldsymbol{e}_1 + r_2 \boldsymbol{e}_2 + r_3 \boldsymbol{e}_3)(r_1 \boldsymbol{e}_1 + r_2 \boldsymbol{e}_2 + r_3 \boldsymbol{e}_3) \\
&= r_1^2 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + r_1 r_2 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 + r_1 r_3 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_3 \\
&\quad + r_2 r_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_1 + r_2^2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + r_2 r_3 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3 \\
&\quad + r_3 r_1 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_1 + r_3 r_2 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_2 + r_3^2 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$



$Oxyz$：任意坐标系

O: 为定点

参考系未画出

【推论】刚体惯量张量 $\underline{J}_O$ 是对称张量．

证明：在 $Oxyz$ 坐标基矢 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]^{\mathrm{T}}$ 下，

$$J_{lk}=\int[r^2\delta_{lk}-r_l r_k]\rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$\Rightarrow J_{kl}=\int[r^2\delta_{kl}-r_k r_l]\rho(\boldsymbol{r})dV$$

因为：$\delta_{lk}=\delta_{kl}, r_l r_k=r_k r_l$

$$\Rightarrow J_{lk}=J_{kl}$$

（证毕）

注：一般把 J_{lk} 称为惯量系数，由于对称性，只有 6 个是独立的

注：如果 $Oxyz$ 不是固连在刚体上的坐标系，则 $\boldsymbol{r}$ 相对 $Oxyz$ 有转动，那么在 $Oxyz$ 上看到的质量分布一般会随时间改变，故在这个坐标系中惯量系数依赖于时间．

注：如果 $Oxyz$ 不是固连在刚体上的坐标系，在少数有良好对称性的情况下 $Oxyz$ 上看到的质量分布可能不随时间改变，此时在这个坐标系中惯量系数是常数．

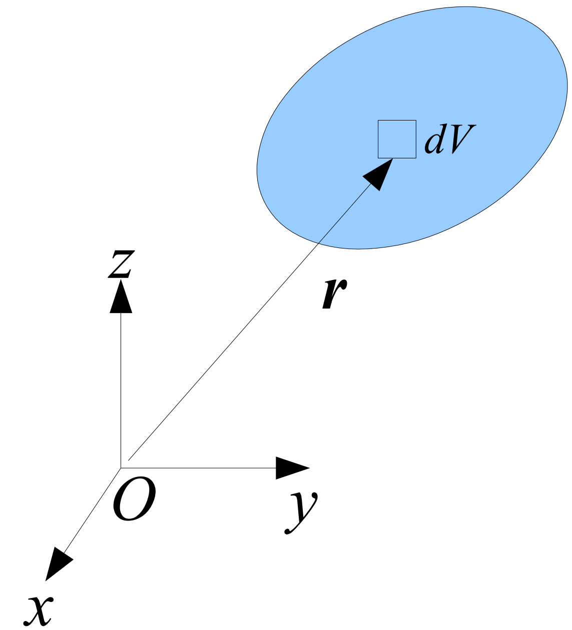
- 定点运动刚体基本动力学量

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

【定理】动量：$\boldsymbol{p}=m_t\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C$

证明：$\boldsymbol{p}=\int\boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{r})dV\quad=\int\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV$

$$=\boldsymbol{\omega}\times\int\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})dV\quad=\boldsymbol{\omega}\times m_t\boldsymbol{r}_C$$ （证毕）



$Oxyz$：任意坐标系

O: 为定点

参考系未画出

【定理】刚体角动量：$\boldsymbol{L}_O=\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$

证明：$\boldsymbol{L}_O=\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{r})dV=\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})dV$

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\ =r^2\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}\ =(r^2\underline{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{L}_O=\int(r^2\underline{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\omega}\,\rho(\boldsymbol{r})dV\ =\left[\int(r^2\underline{\boldsymbol{I}}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})dV\right]\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$=\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$$ （证毕）

【定理】刚体动能： $T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}_O=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$

证明：$T=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{v}^2\rho(\boldsymbol{r})dV \quad =\frac{1}{2}\int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\rho(\boldsymbol{r})dV$

$$=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})dV =\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\rho(\boldsymbol{r})dV$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\left[\int (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\rho(\boldsymbol{r})dV\right] =\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}_O=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$$ （证毕）

【推论】刚体惯量系数构成的矩阵 $[J_{lk}]_{3\times 3}$ 是正定的.

证明：一方面 $T=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{v}^2\rho(\boldsymbol{r})dV>0$

另一方面，由上一定理知道 $2T=[\omega_1,\omega_2,\omega_3]\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}$

故对于任意角速度矢量，均有 $T>0$. 说明 $[J_{lk}]_{3\times 3}$ 是正定的.

（证毕）

【定理】存在一组特殊的坐标基矢 $\boldsymbol{e}^*=[\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*]^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\underline{\boldsymbol{J}}_O = J_{11}^* \boldsymbol{e}_1^* \boldsymbol{e}_1^* + J_{22}^* \boldsymbol{e}_2^* \boldsymbol{e}_2^* + J_{33}^* \boldsymbol{e}_3^* \boldsymbol{e}_3^*,$$

且上述三个惯量系数均大于 0.

证明：根据线性代数的知识，我们知道对于任意对称矩阵，总存在一个正交矩阵将其对角化. 由于 $[J]$ 是对称矩阵，所以存在正交矩阵 $[K]$ 使得

$$[K][J][K]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^* \end{bmatrix} \text{ 或 } [J] = [K]^{-1} \begin{bmatrix} J_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & J_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^* \end{bmatrix} [K]$$

只需令 $\boldsymbol{e}^*=[K]\,\boldsymbol{e}$ 并注意到 $[K]^{\mathrm{T}}= [K]^{-1}$ 即有

$$\underline{\boldsymbol{J}}_O = J_{11}^* \boldsymbol{e}_1^* \boldsymbol{e}_1^* + J_{22}^* \boldsymbol{e}_2^* \boldsymbol{e}_2^* + J_{33}^* \boldsymbol{e}_3^* \boldsymbol{e}_3^*$$

由于 $[J]$ 是正定的，那么经正交变换后的矩阵也正定，故

$$J_{11}^* > 0,\ J_{22}^* > 0,\ J_{33}^* > 0$$

（证毕）

【定义】坐标基矢 $\boldsymbol{e}^*=[\boldsymbol{e}_1{}^*, \boldsymbol{e}_2{}^*, \boldsymbol{e}_3{}^*]^{\mathrm{T}}$ 所对应的坐标系称为主轴坐标系，相应的惯量系数 $J_{11}^*, J_{22}^*, J_{33}^*$ 称为主转动惯量

思考题：怎样寻找主轴坐标系和主转动惯量？（特征向量和特征值）

【推论】任意两个主转动惯量之和大于剩余的第三个

证明：直接在主轴坐标系内用惯量系数的定义即可得证．略

【定义】惯量椭球：由下面方程决定的椭球

$$[x, y, z]\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=1$$

【推论】惯量椭球的主轴与主轴坐标系的坐标轴重合，椭球的三个半长轴分别是主转动惯量的 (-1/2) 次方．

证明：对角化 $[J]$ 的过程就是将坐标轴转到惯量椭球的主轴上．略

【推论】匀质刚体如果有一过 O 的镜像对称面，则过 O 且与该镜像面垂直的轴是主轴；如果过 O 有两个正交的镜像面，则两镜像面过 O 点的法线以及镜像面的交线构成主轴系；匀质旋转体的旋转轴和任意与之正交的两正交轴构成主轴系．（请自己根据定义证明）

【定理】假定角速度在主轴坐标系下表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1 \boldsymbol{e}_1^*+\omega_2 \boldsymbol{e}_2^*+\omega_3 \boldsymbol{e}_3^*$$

则在主轴坐标系下角动量和动能分别表示为

$$\boldsymbol{L}_O=J_{11}^*\omega_1 \boldsymbol{e}_1^*+J_{22}^*\omega_2 \boldsymbol{e}_2^*+J_{33}^*\omega_3 \boldsymbol{e}_3^*$$

$$T=\frac{1}{2}\left(J_{11}^*\omega_1^2+J_{22}^*\omega_2^2+J_{33}^*\omega_3^2\right)$$

证明：直接将主坐标系中的角速度和惯量张量表达式代入角动量 $\boldsymbol{L}_O=\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$ 和动能表达式 $T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$ 即可．（证毕）

• 刚体定点运动 动力学基本定理

【动量定理】

$$m_t[\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C)]=\boldsymbol{F}^{(e)}$$

证明：动量 $\boldsymbol{p}=m_t\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C$，应用质点系动量定理即可．（证毕）

【角动量定理】 $\dfrac{d}{dt}(\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{M}_O^{(e)}$

证明：根据质点系角动量定理以及 $\boldsymbol{L}_O=\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}$ 即可得证．（证毕）

【动能定理】 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}\right)=\boldsymbol{M}_O^{(e)}\cdot\boldsymbol{\omega}$

注：刚体的动能定理与角动量定理不独立

证明：应用质点系的动能定理，并注意到内力不做功

$$\frac{dT}{dt}=\sum_n\boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot\frac{d\,\boldsymbol{r}_n}{dt}=\sum_n\boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_n)=\sum_n\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n^{(e)})=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{M}_O^{(e)}$$

（证毕）

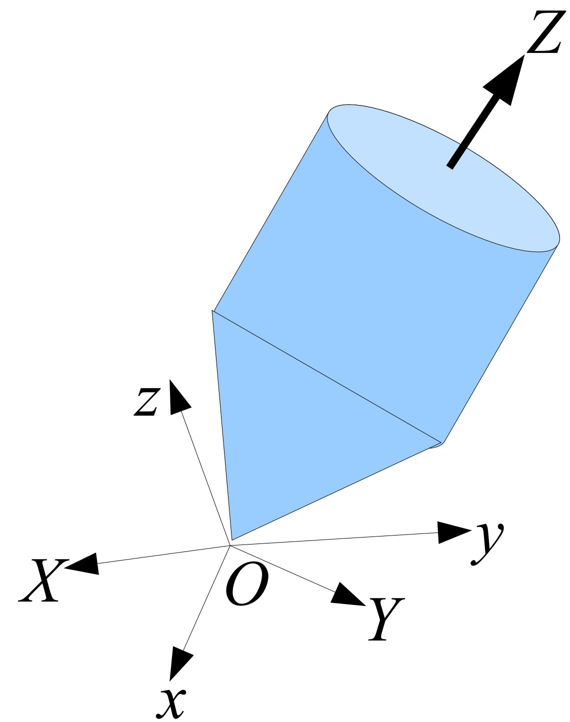
- 欧拉动力学方程

O 为定点， $Oxyz$ 为本征坐标系

$OXYZ$ 为固连于刚体的主轴坐标标系，

相应的主转动惯量记为 $J_X, J_Y, J_Z.$

刚体角速度矢量可表示为 $\boldsymbol{\omega}=\omega_X\hat{X}+\omega_Y\hat{Y}+\omega_Z\hat{Z}$



【定理】定点运动刚体满足欧拉动力学方程

$$\begin{cases} J_X\dot{\omega}_X-(J_Y-J_Z)\omega_Y\omega_Z=M_X \\ J_Y\dot{\omega}_Y-(J_Z-J_X)\omega_Z\omega_X=M_Y \\ J_Z\dot{\omega}_Z-(J_X-J_Y)\omega_X\omega_Y=M_Z \end{cases}$$

证明：利用定点运动刚体对 O 点的角动量定理

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}\right] = \boldsymbol{M}_O^{(e)}$$

$\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = J_X \omega_X \hat{X} + J_Y \omega_Y \hat{Y} + J_Z \omega_Z \hat{Z}$ 是矢量 =>

$$\frac{d}{dt}(\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{d'}{dt}(\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega})$$

$$\frac{d'}{dt}(\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}) = J_X \dot{\omega}_X \hat{X} + J_Y \dot{\omega}_Y \hat{Y} + J_Z \dot{\omega}_Z \hat{Z}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\underline{\boldsymbol{J}}_O \cdot \boldsymbol{\omega}) = \begin{vmatrix} \hat{X} & \hat{Y} & \hat{Z} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ J_X \omega_X & J_Y \omega_Y & J_Z \omega_Z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} -(J_Y - J_Z)\omega_Y \omega_Z \hat{X} \\ + \\ -(J_Z - J_X)\omega_Z \omega_X \hat{Y} \\ + \\ -(J_X - J_Y)\omega_X \omega_Y \hat{Z} \end{array} \right.$$

将它们代入角动量定理即得证. （证毕）

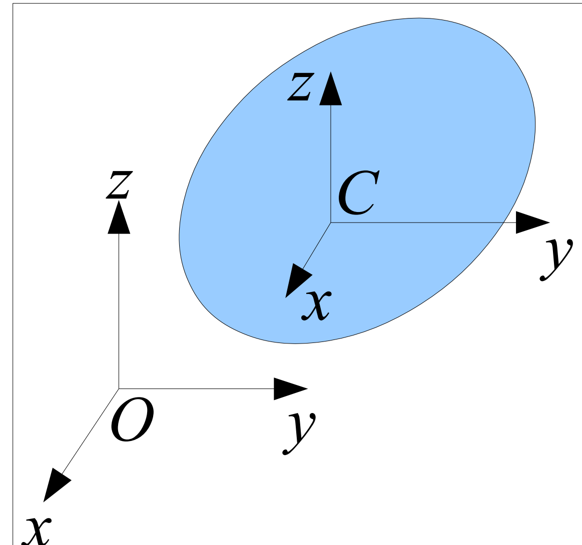
- 推广：刚体一般运动的动力学基本定理

【动量定理】 $m_t \boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{F}^{(e)}$

【角动量定理】 $\dfrac{d}{dt}[\underline{\boldsymbol{J}}_C \cdot \boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{M}_C^{(e)}$

【动能定理】 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\boldsymbol{J}}_C \cdot \boldsymbol{\omega}\right) = \boldsymbol{M}_C^{(e)} \cdot \boldsymbol{\omega}$

证明：请自己补充以上三个定理证明.



$Oxyz$：本征参考系

$Cxyz$：质心系

注：感兴趣的同学还可以写出过任意基点的平动坐标系中的动量定理、角动量定理和动能定理

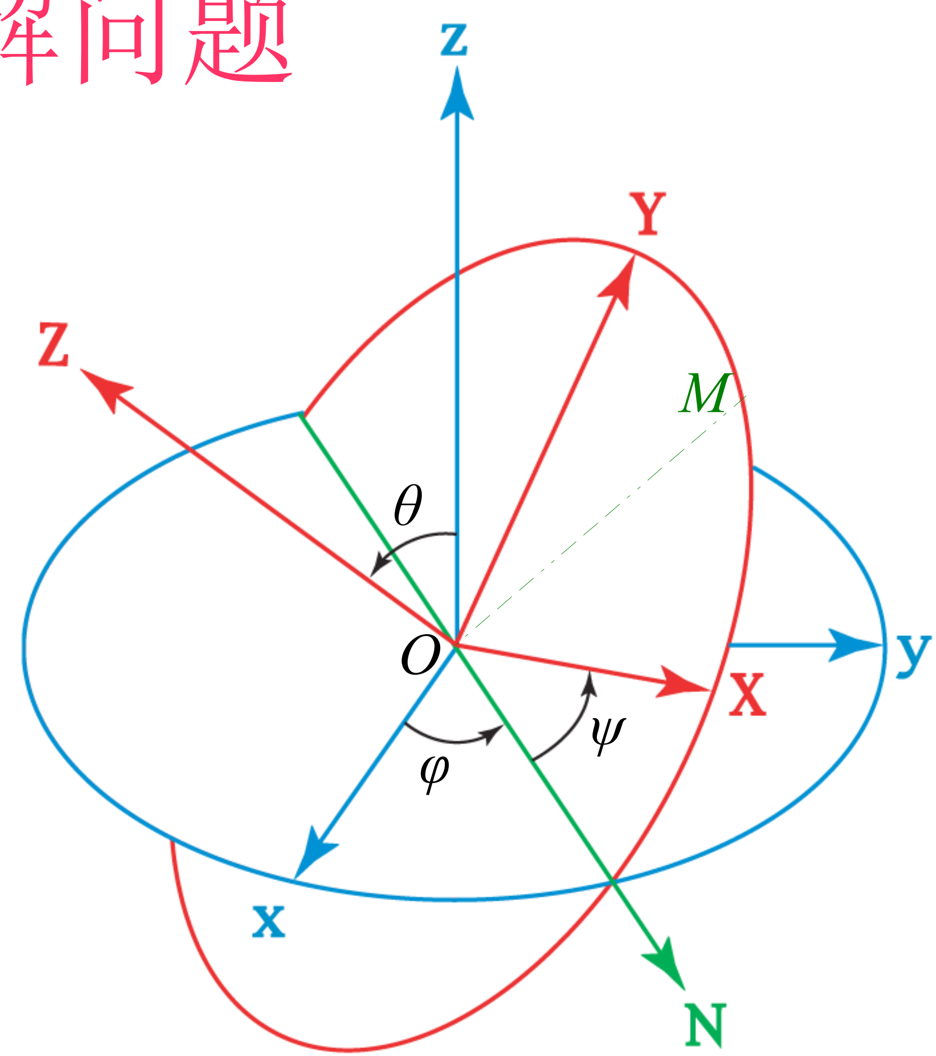
§10.2 可解问题

- 欧拉运动学方程（复习）

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\,\hat{z}+\dot{\theta}\,\hat{N}+\dot{\psi}\,\hat{Z}$$

$$\equiv\omega_X\hat{X}+\omega_Y\hat{Y}+\omega_Z\hat{Z}$$

$$\begin{cases}\omega_X=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_Y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_Z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{cases}$$



注：欧拉动力学方程中的力矩通常与欧拉角有关，所以动力学方程与上述运动学方程通常是耦合的．需要联合求解上述 6 个非线性方程．数学上是困难的．

$0\le\theta\le\pi$----- 章动角

$0\le\varphi<2\pi$----- 进动角

$0\le\psi<2\pi$----- 自转角

- 欧拉 - 潘索问题 $\boldsymbol{M}_O^{(e)}=0$

【推论】角动量是常矢量，动能是常量

证明：根据角动量定理 $\dot{\boldsymbol{L}}_O=\frac{d}{dt}[\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}]=\boldsymbol{M}_O^{(e)}=0 \Rightarrow \boldsymbol{L}_O=$ 常矢量

动能定理 $\dot{T}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}\right)=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{M}_O^{(e)}=0 \Rightarrow T=$ 常量

【推论】存在如下两个（代数形式的）运动积分

$$L_O^2=J_X^2\omega_X^2+J_Y^2\omega_Y^2+J_Z^2\omega_Z^2=const.$$

$$2T=J_X\omega_X^2+J_Y\omega_Y^2+J_Z\omega_Z^2=const.$$

证明：将角动量和动能用主转动惯量和角速度在 $OXYZ$ 中的分量表示出来，然后根据角动量和动能是常量即可得证．（证毕）

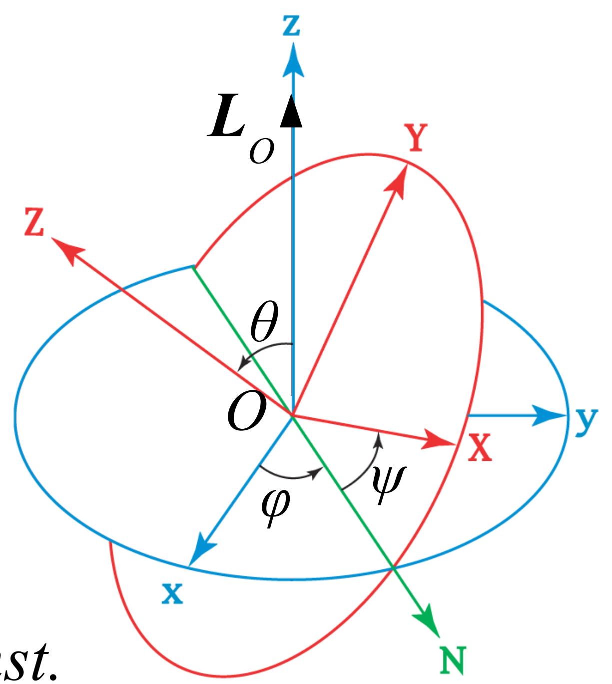
【推论】如果三个主转动惯量相等，则刚体角速度为常矢量

证明：令 $J_X=J_Y=J_Z=\lambda$，则

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{L}_O=\underline{\boldsymbol{J}}_O\cdot\boldsymbol{\omega}=J_X\omega_X\hat{X}+J_Y\omega_Y\hat{Y}+J_Z\omega_Z\hat{Z}=\lambda\boldsymbol{\omega}\\ \text{我们已经证明欧拉-潘索问题中，角动量是常矢量}\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{\omega}=const.$$

【推论】如果 $J_X=J_Y\neq J_Z$，则刚体以恒定角速度绕 Z 轴自转，

同时 Z 轴以恒定角速度绕 $\boldsymbol{L}_O$ 轴进动.



证明：由于 $\boldsymbol{L}_O$ 是常矢量，故取本征坐标系

$Oxyz$ 的 z 轴与 $\boldsymbol{L}_O$ 重合. 即 $\boldsymbol{L}_O=L_O\hat{z}$

另一方面 $\boldsymbol{L}_O=J_X\omega_X\hat{X}+J_Y\omega_Y\hat{Y}+J_Z\omega_Z\hat{Z}$

所以有 $J_Z\omega_Z=\hat{Z}\cdot\boldsymbol{L}_O=L_O\hat{Z}\cdot\hat{z}=L_O\cos\theta$

$$J_Z\dot{\omega}_Z-(J_X-J_Y)\omega_X\omega_Y=0\Rightarrow\dot{\omega}_Z=0\Rightarrow\omega_Z=const.$$

因此 $\theta=\theta_0=const.$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_X=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi=\dot{\varphi}\sin\theta_0\sin\psi \\ \omega_Y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi=\dot{\varphi}\sin\theta_0\cos\psi\end{array}\right\}\Rightarrow \omega_X^2+\omega_Y^2=\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_0$$

由于 $2T=J_X\omega_X^2+J_Y\omega_Y^2+J_Z\omega_Z^2=const.$

$$\left.\begin{array}{l}2T=J_X\omega_X^2+J_Y\omega_Y^2+J_Z\omega_Z^2=const. \\ \omega_Z=const.,\quad J_X=J_Y\end{array}\right\}\Rightarrow \omega_X^2+\omega_Y^2=const.$$

因此有进动角速度 $\dot{\varphi}=const$

利用 $\omega_Z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}=\dot{\varphi}\cos\theta_0+\dot{\psi}$

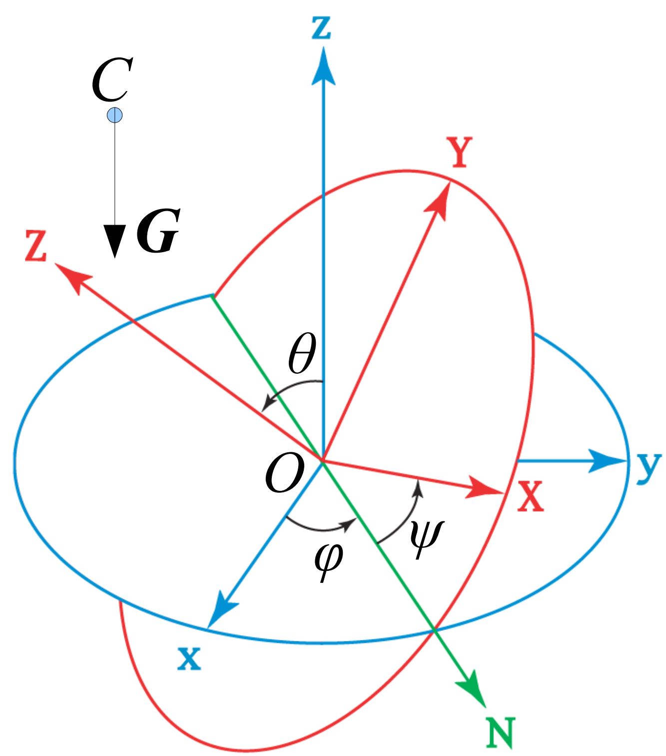
$\Rightarrow$ 自转角速度 $\dot{\psi}=const.$

（证毕）

注：在一般情况下，例如 $J_X>J_Y>J_Z$ 时的欧拉 - 潘索问题，可以通过雅可比椭圆函数求解欧拉动力学方程．如果 $L_O^2=2TJ_Y$，欧拉动力学方程可以通过初等函数解出来．感兴趣的同学请查相关参考书．

- 重力场中刚体定点运动（概述）

$Oxyz$ 为本征坐标系，重力场沿 $-z$ 方向； $OXYZ$ 为刚体固连系，刚体（未画出）重心在 C 点，重力为 $\boldsymbol{G}$.



记： $\boldsymbol{OC}=c_1\hat{X}+c_2\hat{Y}+c_3\hat{Z}$

$\hat{z}=\gamma_1\hat{X}+\gamma_2\hat{Y}+\gamma_3\hat{Z}$， $\boldsymbol{G}=-G\hat{z}$

【推论】基本运动方程为

$$\dot{\gamma}_1=\omega_Z\gamma_2-\omega_Y\gamma_3,\quad \dot{\gamma}_2=\omega_X\gamma_3-\omega_Z\gamma_1,\quad \dot{\gamma}_3=\omega_Y\gamma_1-\omega_X\gamma_2$$

$$J_X\dot{\omega}_X-(J_Y-J_Z)\omega_Y\omega_Z=G(\gamma_2 c_3-\gamma_3 c_2)$$

$$J_Y\dot{\omega}_Y-(J_Z-J_X)\omega_Z\omega_X=G(\gamma_3 c_1-\gamma_1 c_3)$$

$$J_Z\dot{\omega}_Z-(J_X-J_Y)\omega_X\omega_Y=G(\gamma_1 c_2-\gamma_2 c_1)$$

证明：前三式来源于

$$0=\frac{d\hat{z}}{dt}=\frac{d'\hat{z}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\hat{z}$$

后三式显然. （证毕）

【推论】重力场中刚体定点运动存在以下 3 个代数形式的运动积分 .

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$$

$$\hat{z}\cdot \boldsymbol{L}_O=J_X\omega_X\gamma_1+J_Y\omega_Y\gamma_2+J_Z\omega_Z\gamma_3=const.$$

$$E=\frac{1}{2}\left(J_X\omega_X^2+J_Y\omega_Y^2+J_Z\omega_Z^2\right)+G\left(c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3\right)=const.$$

证明： $\hat{z}\cdot\hat{z}=1\Rightarrow$第一式

重力沿 $-z$ 轴，故对 z 轴力矩为 0，关于 z 轴角动量守恒 => 第二式

重力是有势力，机械能守恒 => 第三式 . （证毕）

注：重力场中刚体的基本运动方程是 6 个一阶微分方程，根据雅可比乘子理论（请查参考书），只要找到了 6-2=4 个独立的代数形式的运动积分 , 则基本运动方程可以解析解 .

【推论】拉格朗日 - 泊松问题 ($J_X=J_Y\neq J_Z$，重心在 Z 轴上)

存在第 4 个代数形式的运动积分 .

证明：重心在 Z 轴上，则 $c_1=c_2=0.$

惯量椭球是旋转椭球 $J_X=J_Y$

$$J_Z\dot{\omega}_Z-(J_X-J_Y)\omega_X\omega_Y=G(\gamma_1c_2-\gamma_2c_1)$$

$\Rightarrow \dot{\omega}_Z=0\Rightarrow\omega_Z=const.$

（证毕）

【推论】柯娃列夫斯卡娅问题 ($J_X=J_Y=2J_Z$，重心在 XY 面上)

存在第 4 个代数形式的运动积分 .

证明：由于 $J_X=J_Y$，则 XY 面内任何正交轴都是主轴，重心在 XY 面上，故可以旋转 XY 把重心放到 X 轴上，这样我们有 $c_2=c_3=0.$

于是有 $2\dot{\omega}_X-\omega_Y\omega_Z=0,\ 2\dot{\omega}_Y+\omega_X\omega_Z=\dfrac{Gc_1}{J_Z}\gamma_3,\ \dot{\omega}_Z=-\dfrac{Gc_1}{J_Z}\gamma_2$

可以验证运动积分 $\left(\omega_X^2-\omega_Y^2-\dfrac{Gc_1}{J_Z}\gamma_1\right)^2+\left(2\omega_X\omega_Y-\dfrac{Gc_1}{J_Z}\gamma_2\right)^2=const.$（证毕）

§10.3 陀螺

- 陀螺规则进动力矩

【定义】陀螺：惯量椭球是旋转椭球的定点运动刚体

$Oxyz$： 本征参考系

$OXYZ$: 与陀螺（未画出）固连的主轴坐标系

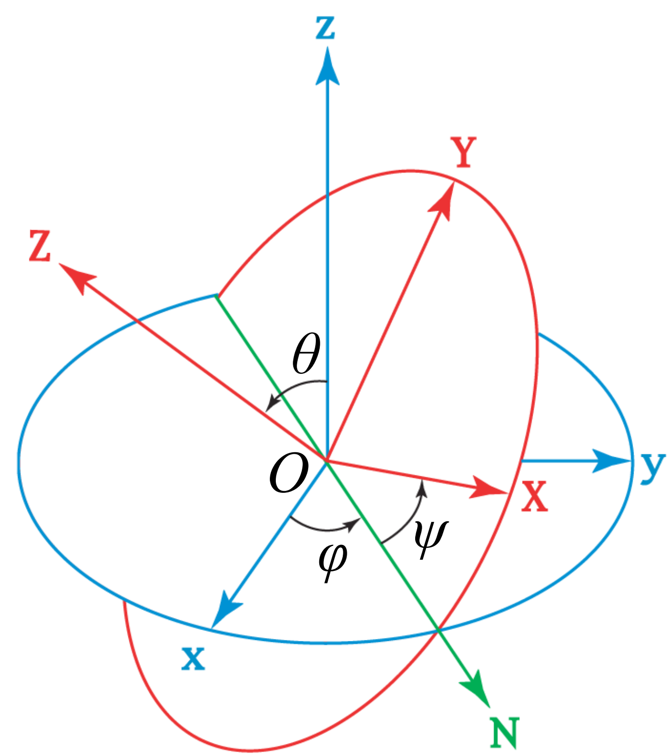
主转动惯量： $J_X = J_Y \neq J_Z$

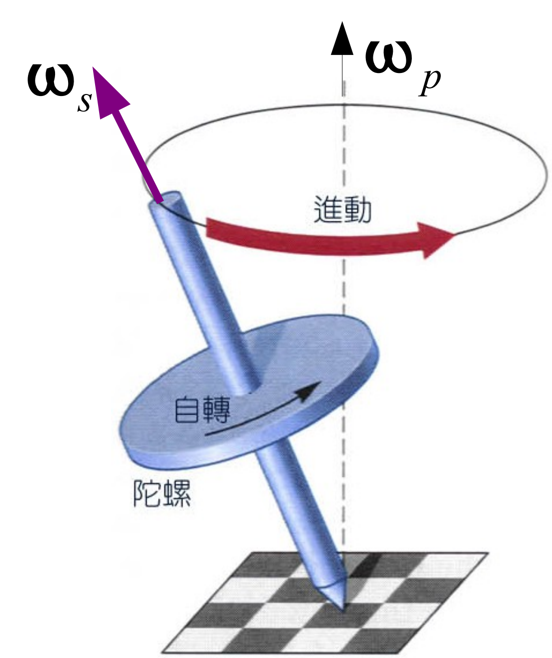
【定义】陀螺规则进动：该过程满足

$$\theta = \theta_0 = const.\,,\ \dot{\psi} = const.\,,\ \dot{\varphi} = const.$$

【定义】自旋角速度: $\omega_s = \dot{\psi}\,\hat{Z}$

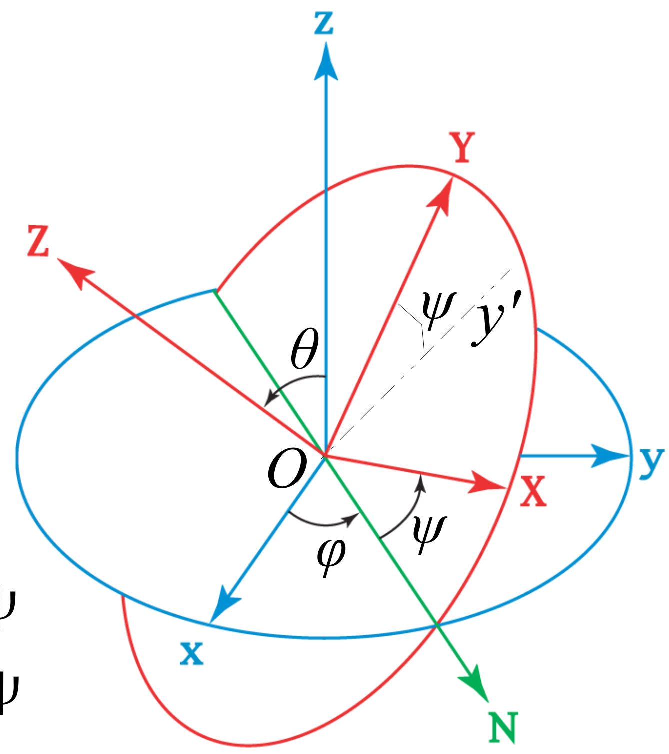
【定义】进动角速度: $\omega_p = \dot{\varphi}\,\hat{z}$





【定理】陀螺规则进动时外力合力矩为

$$\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{\omega}_s\left[J_Z+(J_Z-J_X)\frac{\omega_p}{\omega_s}\cos\theta_0\right]$$



证明： $\theta=\theta_0,\ \dot{\psi}=\omega_s=const.,\ \dot{\varphi}=\omega_p=const.$

$$\omega_X=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi=\omega_p\sin\theta_0\sin\psi$$

$$\omega_Y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi=\omega_p\sin\theta_0\cos\psi$$

$$\omega_Z=\omega_p\cos\theta_0+\omega_s$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{L}_O=\underline{J}_O\cdot\boldsymbol{\omega}=\cdots=J_X\omega_p\sin\theta_0\hat{y}'+J_Z\omega_Z\hat{Z}\\&\boldsymbol{\omega}=\cdots=\omega_p\sin\theta_0\hat{y}'+\omega_Z\hat{Z}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{M}_O=\dot{\boldsymbol{L}}_O=J_X\omega_p\sin\theta_0\frac{d\hat{y}'}{dt}+J_Z\omega_Z\frac{d\hat{Z}}{dt}$$

$\hat{Z}$ 是单位矢量，且与刚体固连，它的转动角速度即 $\boldsymbol{\omega}$

$$\Rightarrow\frac{d\hat{Z}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\hat{Z}=\omega_p\sin\theta_0\hat{N}$$

单位矢量 $\hat{y}'$没有与刚体固连，少了刚体自旋部分，故角速度为

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}-\omega_s\hat{Z}=\omega_p\sin\theta_0\hat{y}'+\omega_p\cos\theta_0\hat{Z}$$

$$\Rightarrow\frac{d\hat{y}'}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\hat{y}'=\omega_p\cos\theta_0(-\hat{N})$$

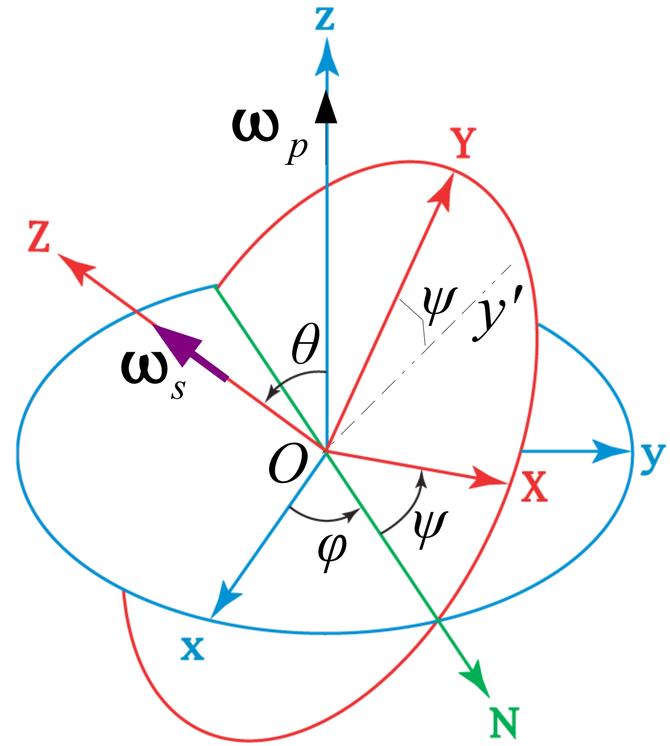
$$\Rightarrow\boldsymbol{M}_O=J_X\omega_p\sin\theta_0\frac{d\hat{y}'}{dt}+J_Z\omega_Z\frac{d\hat{Z}}{dt}$$

$$=J_X\omega_p\sin\theta_0\omega_p\cos\theta_0(-\hat{N})$$

$$+J_Z(\omega_p\cos\theta_0+\omega_s)\omega_p\sin\theta_0\hat{N}$$

$$=\left[J_Z+(J_Z-J_X)\frac{\omega_p}{\omega_s}\cos\theta_0\right]\underbrace{\omega_p\omega_s\sin\theta_0\hat{N}}_{\boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{\omega}_s}$$

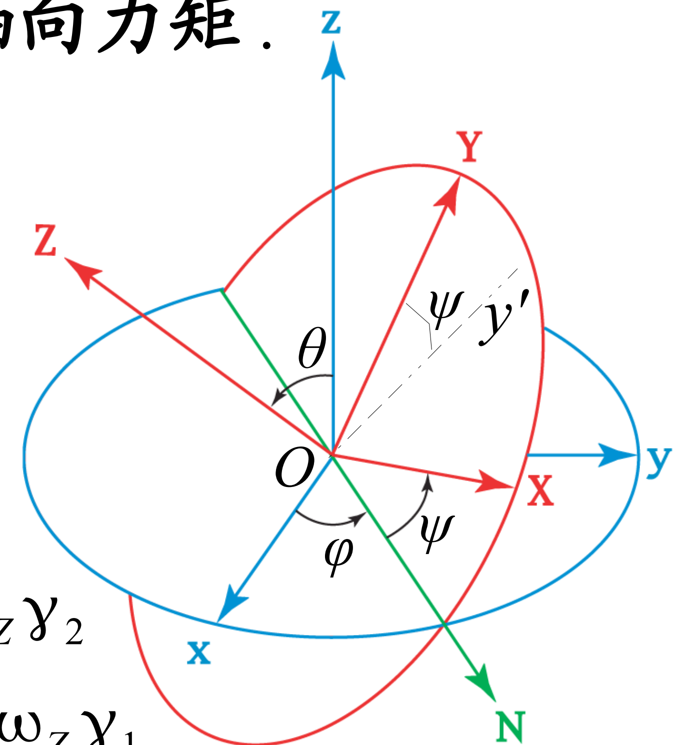
（证毕）



注：可见外力合力矩大小恒定，由主转动惯量、章动角、进动角速度和自旋角速度的大小决定，方向沿节线 ON.

- 高速回转器

【定义】高速回转器：自旋角速度远远大于进动和章动角速度的定点运动陀螺，且无自旋轴向力矩．



【引理】高速回转器章动角几乎为常数

证明：$\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ 中只有 ω_Z 含自旋角速度．

$$\Rightarrow \omega_X \ll \omega_Z,\quad \omega_Y \ll \omega_Z$$

令 $\hat{z}=\gamma_1\hat{X}+\gamma_2\hat{Y}+\gamma_3\hat{Z}$

$$0=\frac{d\hat{z}}{dt}=\frac{d'\hat{z}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\hat{z}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\gamma}_1=\omega_Z\gamma_2-\omega_Y\gamma_3\approx\omega_Z\gamma_2\\ \dot{\gamma}_2=\omega_X\gamma_3-\omega_Z\gamma_1\approx-\omega_Z\gamma_1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow(d/dt)(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\approx0\quad\Rightarrow\gamma_3^2=1-(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\approx const.\\ \text{注意到}\quad \gamma_3=\hat{z}\cdot\hat{Z}=\cos\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\theta\approx const.$$

（证毕）

注：这表明高速旋转陀螺尽管受力矩，也不会很快倒下．

【引理】若回转器的陀螺自旋角速度为常数，则做规则进动

证明：高速回转器（陀螺）主转动惯量 $J_X = J_Y \neq J_Z$

无自旋轴向力矩 $\Rightarrow M_Z = 0$

欧拉动力学方程 $J_Z\dot{\omega}_Z - (J_X - J_Y)\omega_X\omega_Y = M_Z$

$$\left.\begin{array}{l} J_X = J_Y \neq J_Z \\ M_Z = 0 \\ J_Z\dot{\omega}_Z - (J_X - J_Y)\omega_X\omega_Y = M_Z \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\omega}_Z = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \omega_Z = const. \\ \omega_Z = \omega_p\cos\theta_0 + \omega_s \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_p = (\omega_Z - \omega_s)/\cos\theta_0 = const.$$

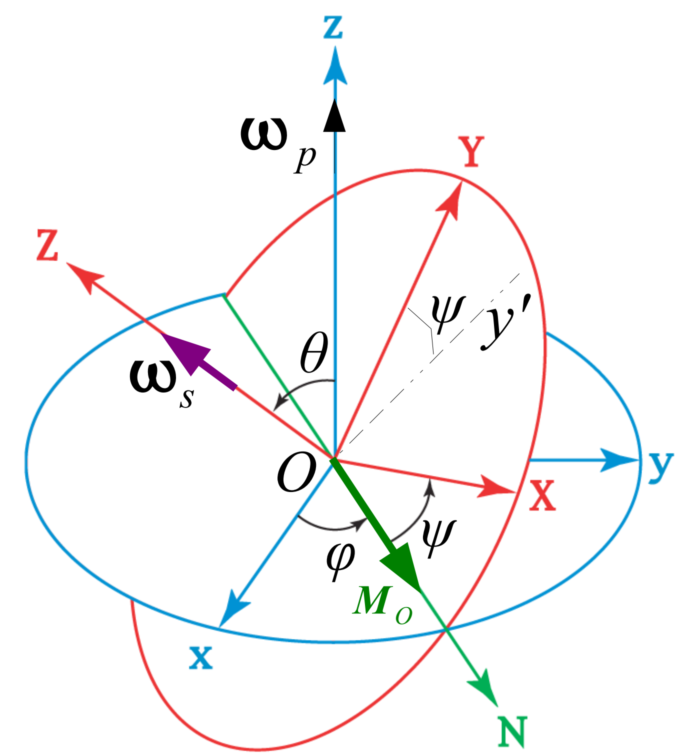
（证毕）

注：现代技术通常能保证陀螺高速自旋，且自旋角速度几乎为常数

【定理】维持高速回转器规则进动的力矩为 $\boldsymbol{M}_O = J_Z\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s$

证明：可直接用维持陀螺规则进动的力矩公式，并注意到 $\omega_p \ll \omega_s$ 即可.

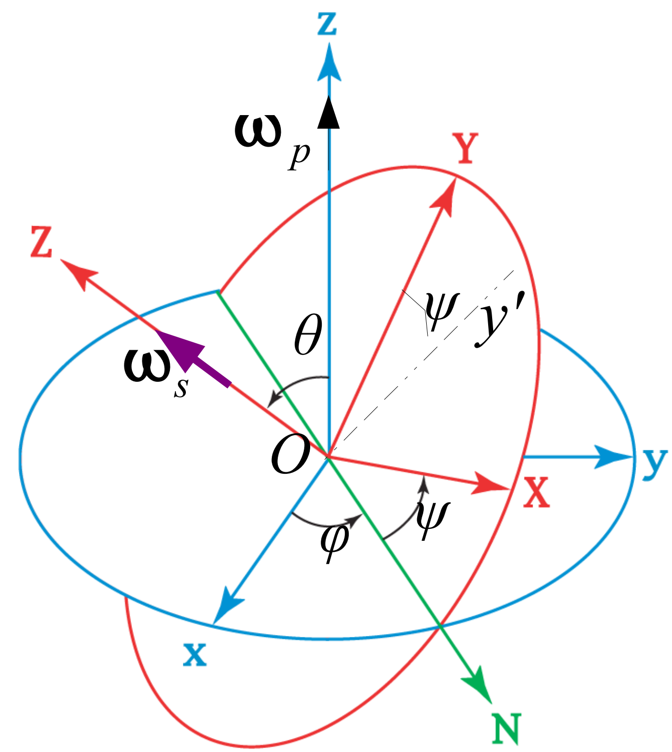
可采用另外一种简单证明（见下页）



由于章动角近似为常数，故总角速度

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_s+\boldsymbol{\omega}_p \\ \omega_p \ll \omega_s\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \approx \boldsymbol{\omega}_s=\omega_s \hat{Z}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{L}_O \approx J_Z \omega_s \hat{Z}$$

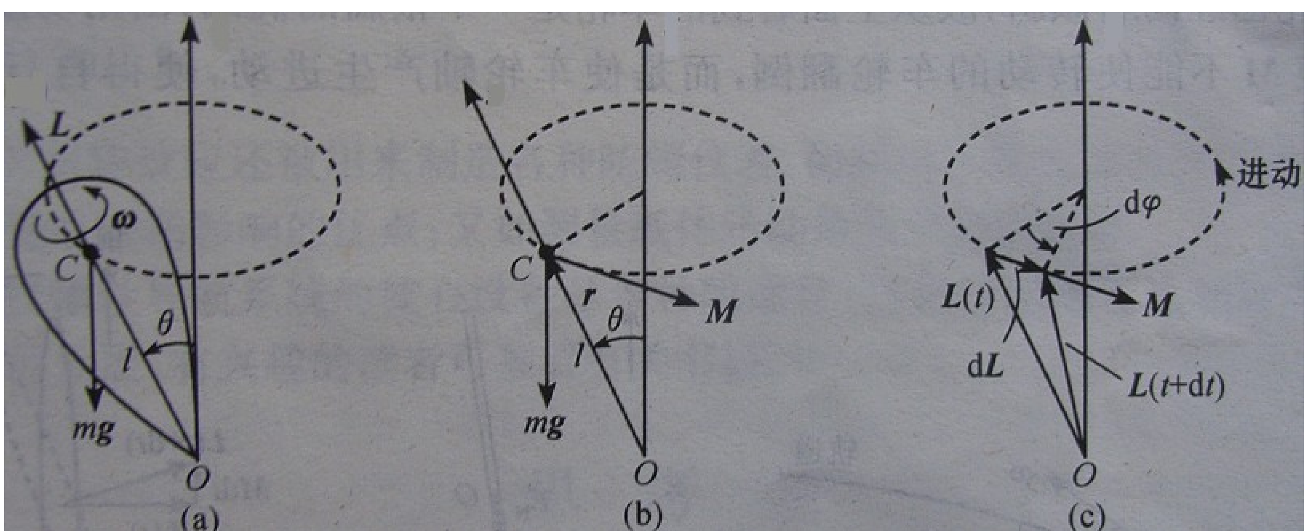


即高速自旋陀螺的角速度和角动量（几乎）在自旋轴 Z 上.

$$\boldsymbol{M}_O=\dot{\boldsymbol{L}}_O=J_Z \omega_s (d/dt)\hat{Z}=J_Z \omega_s \boldsymbol{\omega}\times\hat{Z}$$

$$=J_Z(\boldsymbol{\omega}_s+\boldsymbol{\omega}_p)\times(\omega_s \hat{Z})=J_Z \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s \quad \text{（证毕）}$$

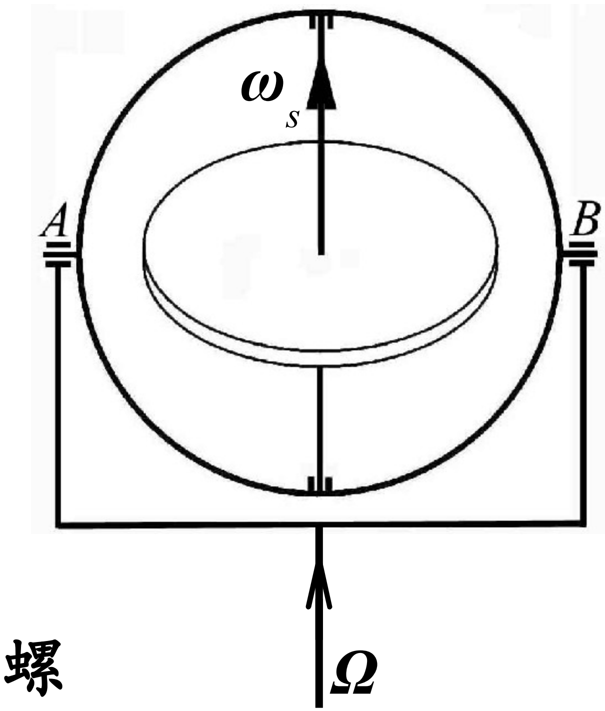
例题 8 定性分析重力场中高速自旋陀螺“不倒”原因



$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times m\,\boldsymbol{g} \perp ZoZ-plane$

（请自己补充文字）

例题 9 回转罗盘：定性说明右图回转罗盘的陀螺自旋轴倾向于支架角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向



分析：罗盘轴是光滑的，当支架以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动时，可能提供给罗盘系统的力矩也沿 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向。

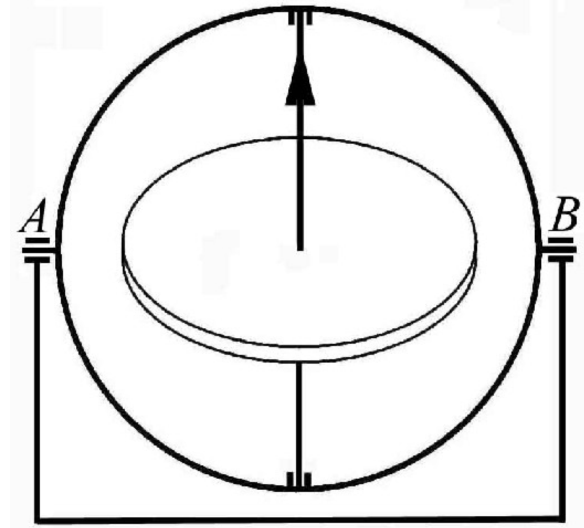
当陀螺自旋轴在 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向时，由于陀螺轴是光滑的，支架提供的 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向力矩不会传给陀螺而改变其运动. 陀螺自由旋转.

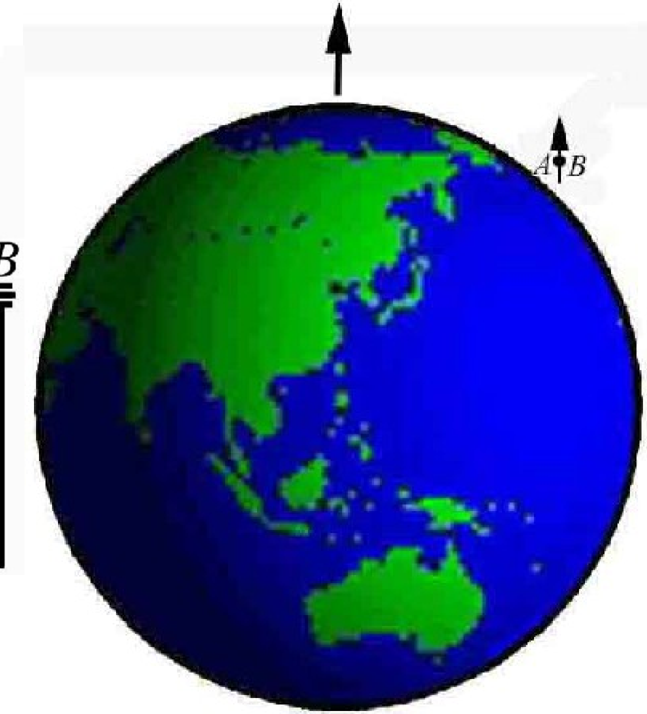
当陀螺自旋轴与 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向有夹角时，支架提供的 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向力矩有垂直于自旋轴和 AB 轴的分量 M，根据上一定理知，陀螺会产生沿 AB 方向的进动角速度，大小为 $M/J_Z\omega_s$. 它使得陀螺进动，直到自旋轴沿 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向. 在存在空气阻力的情况下，最终会停在 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向.

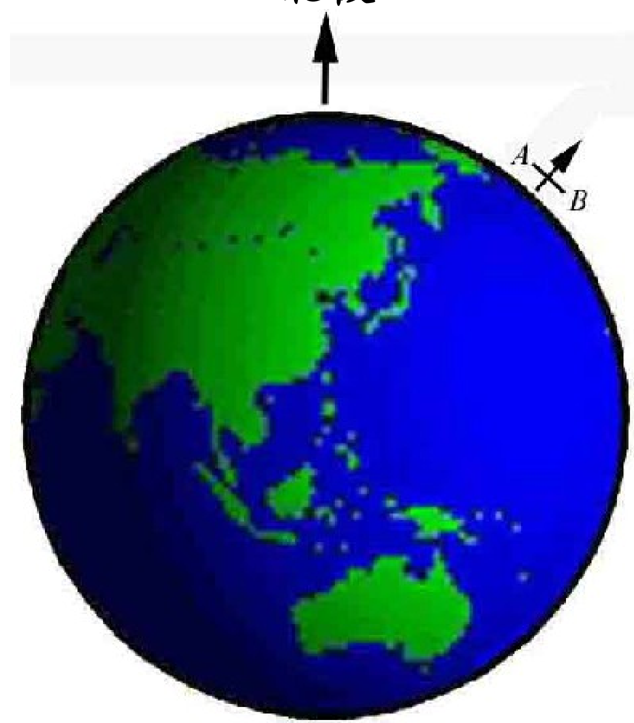
注：也可以建立非惯性系 $Ox'y'z'$，使 O 是中心，z' 沿 $\boldsymbol{\Omega}$，x' 过 AB 可分析出自旋轴与 $\boldsymbol{\Omega}$ 有夹角时惯性力矩使得夹角变小.

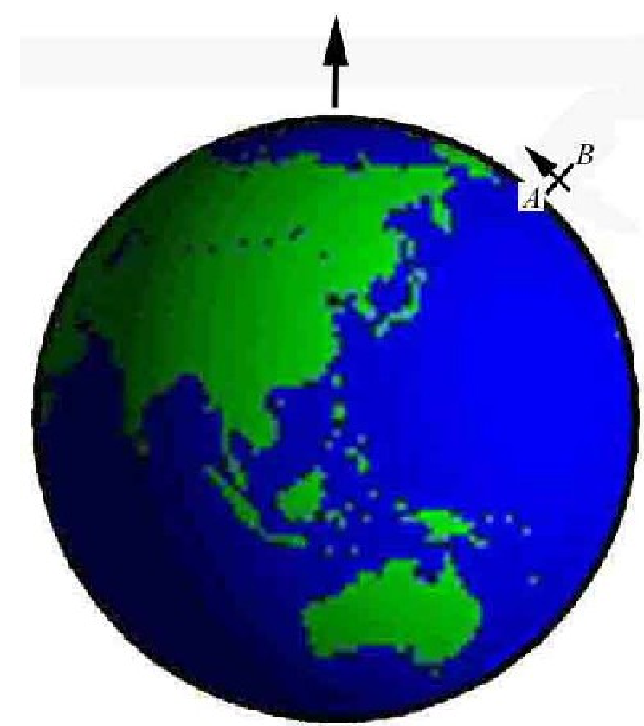
应用：惯性导航

注：将地球自转角速度沿 AB 和垂直于 AB 分解，由于 AB 轴是光滑的，平行于 AB 方向的转动不会产生力矩，故只需考虑垂直于 AB 的地球自转角速度.





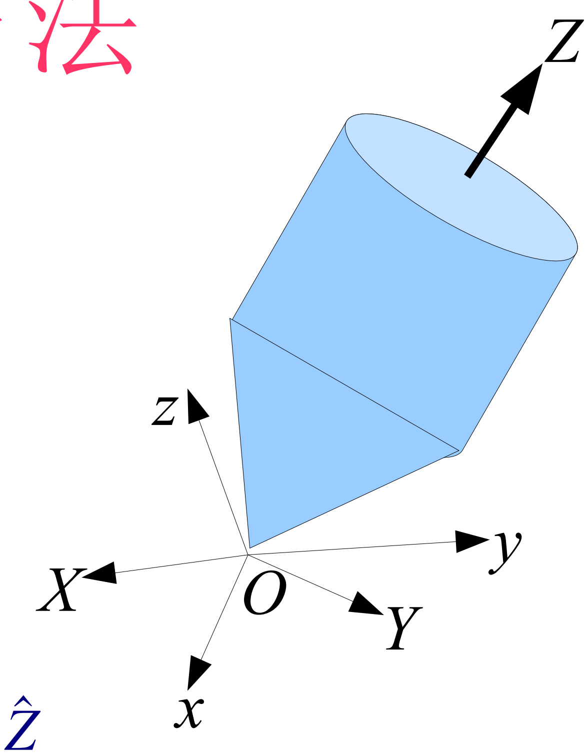




§10.4 拉格朗日方法

- 动能表达式

O 为定点， $Oxyz$ 为本征坐标系



$OXYZ$ 为固连于刚体的主轴坐标标系，

相应的主转动惯量记为 J_X, J_Y, J_Z.

刚体角速度矢量可表示为 $\boldsymbol{\omega}=\omega_X\hat{X}+\omega_Y\hat{Y}+\omega_Z\hat{Z}$

刚体定点运动自由度为 3. 可选欧拉角为广义坐标

$$\left.\begin{aligned}\omega_X&=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_Y&=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_Z&=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned}\right\}\Rightarrow T=\frac{J_X}{2}\omega_X^2+\frac{J_Y}{2}\omega_Y^2+\frac{J_Z}{2}\omega_Z^2$$

特别是当 $J_Y=J_X$时， $T=\frac{J_X}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{J_Z}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$

- 自由陀螺

陀螺满足 $J_Y=J_X$. 自由陀螺除 O 点受力外不受其它外力．故

$$L=T=\frac{J_X}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{J_Z}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$

【定理】存在如下 3 个运动积分（即守恒量）：

$$p_\psi=J_Z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})$$

$$p_\varphi=J_X\sin^2\theta\,\dot{\varphi}+p_\psi\cos\theta$$

$$E=\frac{J_X}{2}\dot{\theta}^2+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2J_X\sin^2\theta}+\frac{p_\psi^2}{2J_Z}$$

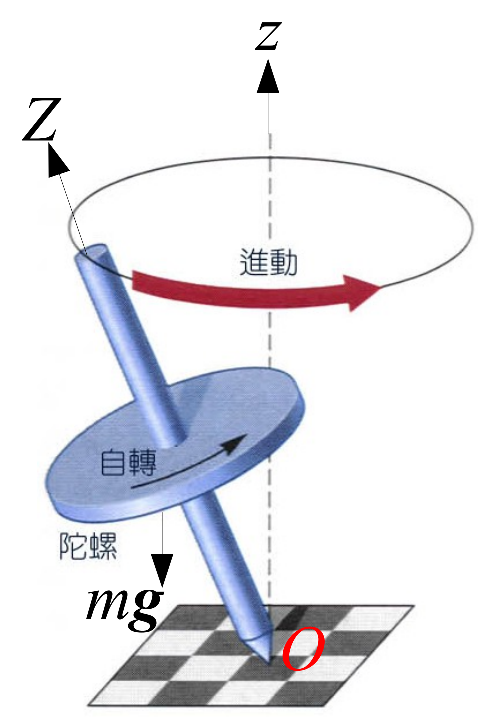
证明： L 不含 ψ, φ, t, 所以存在守恒量

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}},\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}},\quad H$$

由于 T 是广义速度二次型，所以广义能量 $H=$ 机械能 E.（证毕）

- 重力场中的陀螺

假定重心在 Z 轴上，且离 O 点距离 l.



$$L=T-V=\frac{J_X}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{J_Z}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-mgl\cos\theta$$

【定理】存在如下 3 个运动积分（即守恒量）：

$$p_\psi=J_Z(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})$$

$$p_\varphi=J_X\sin^2\theta\,\dot{\varphi}+p_\psi\cos\theta$$

$$E=\frac{J_X}{2}\dot{\theta}^2+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2J_X\sin^2\theta}+\frac{p_\psi^2}{2J_Z}+mgl\cos\theta$$

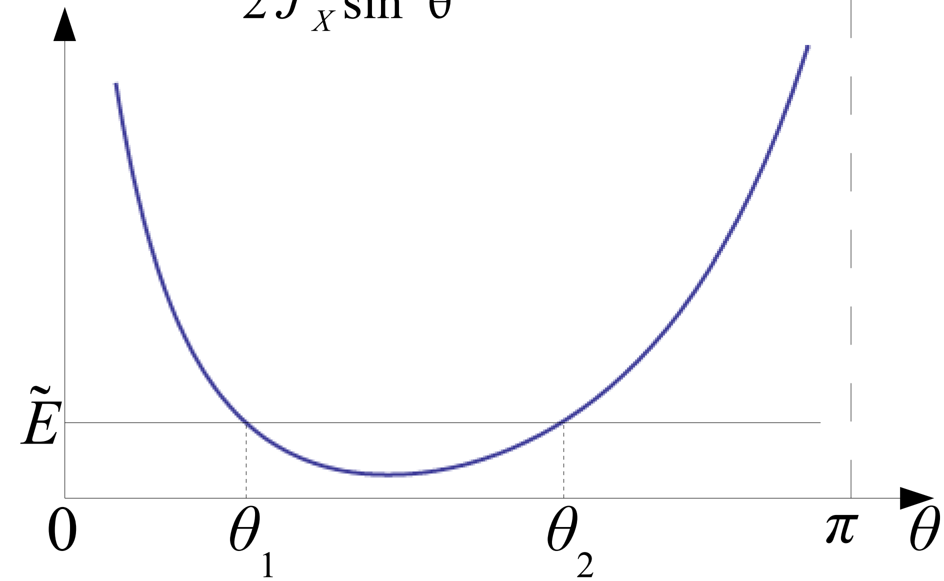
注：证明思路同自由陀螺（略）. 上述第二一三分别可求三个角速度

例题 10 试定性分析重力场中陀螺的运动.

解：令 $\tilde{E}=E-\dfrac{p_\psi^2}{2J_Z}$，$V_{eff}(\theta)=\dfrac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2J_X\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$ 则有

$$\tilde{E}=\frac{J_X}{2}\dot{\theta}^2+V_{eff}(\theta)$$

$$V_{eff}(\theta)=\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2J_X\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$$



若 $p_\varphi \neq p_\psi$，则

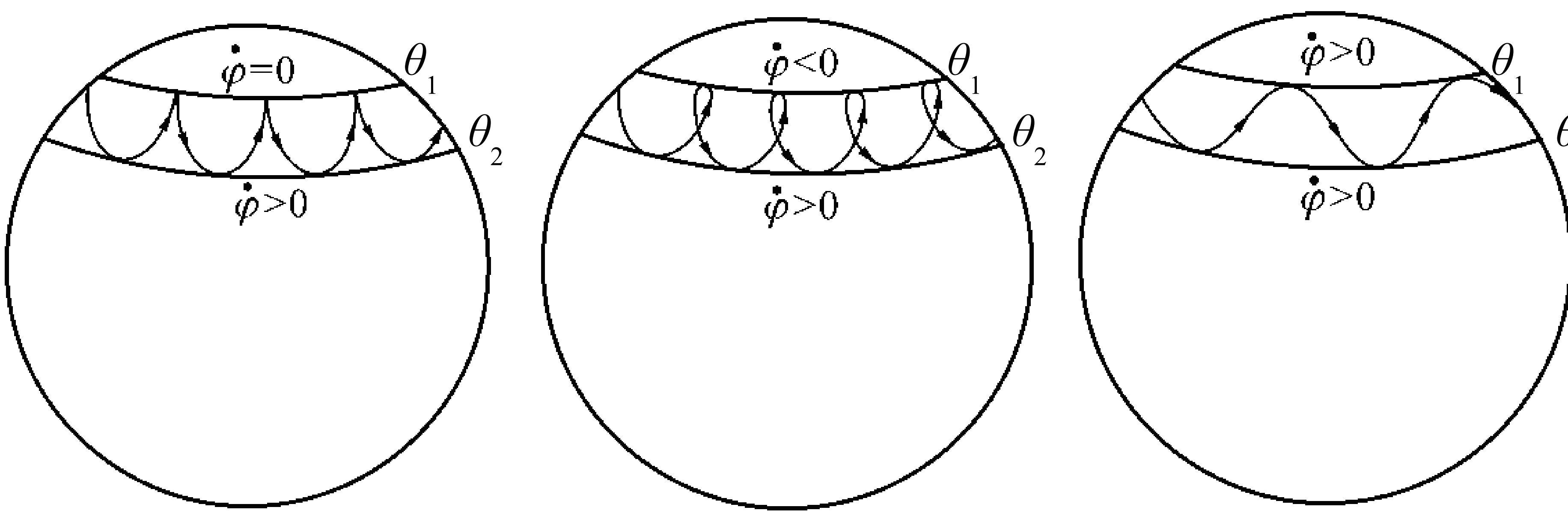
$V_{eff}(0)\to+\infty$，$V_{eff}(\pi)\to+\infty$

$V_{eff}(\theta)$ has a minimal

当 $\tilde{E}>min\{V_{eff}\}$，$\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$

根据进动角速度$\dot{\varphi}=(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)/J_X\sin^2\theta$

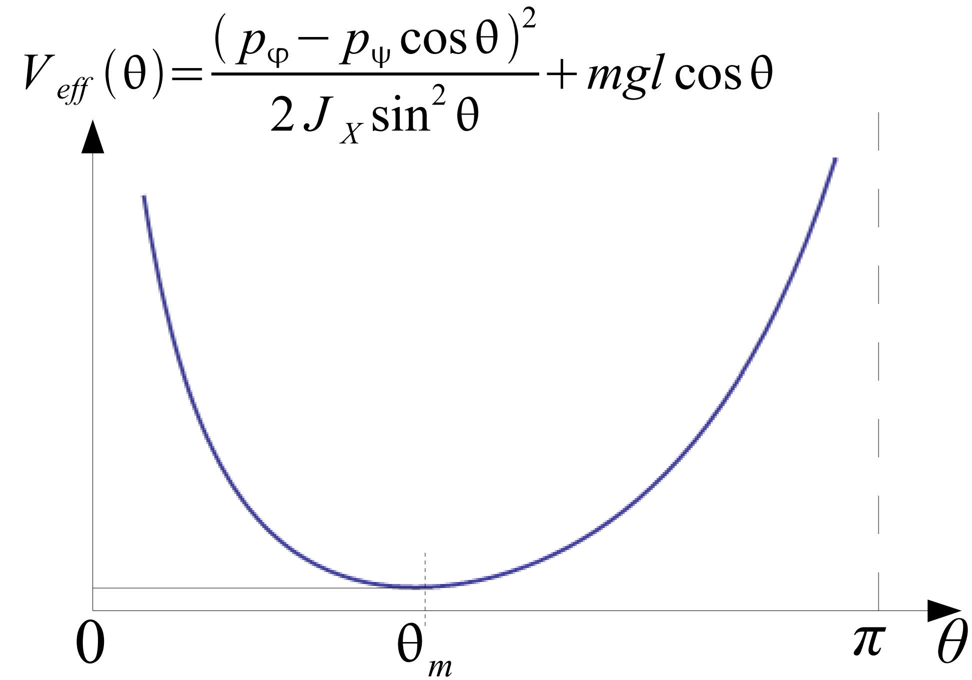
符号是否改变可画出陀螺轴的对应的三种不同轨迹



当 $\tilde{E}=min\{V_{eff}\}$，$\theta=\theta_m, \dot{\theta}=0$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta_m}{J_X\sin^2\theta_m}=const.$$

$$\dot{\psi}=\frac{p_\varphi}{J_Z}-\cos\theta_m\frac{p_\varphi-p_\psi\cos\theta_m}{J_X\sin^2\theta_m}=const.$$



即此时无章动，只有均角速度进动和自旋.

例题 11 试定性分析重力场中陀螺轴在竖直方向时运动稳定性.

解：此时 $\theta=0$，由第二个运动积分 $p_\varphi=J_X\sin^2\theta\dot{\varphi}+p_\psi\cos\theta\Rightarrow p_\varphi=p_\psi$

$$\Rightarrow V_{eff}(0)=mgl$$

当 θ 稍微偏离零时 $V_{eff}(\theta)-V_{eff}(0)=\left(\frac{p_\varphi^2}{8J_X}-\frac{mgl}{2}\right)\theta^2$

所以稳定转动条件是 $\frac{p_\varphi^2}{8J_X}>\frac{mgl}{2}\Leftrightarrow\dot{\psi}^2>\frac{4J_Xmgl}{J_Z^2}$