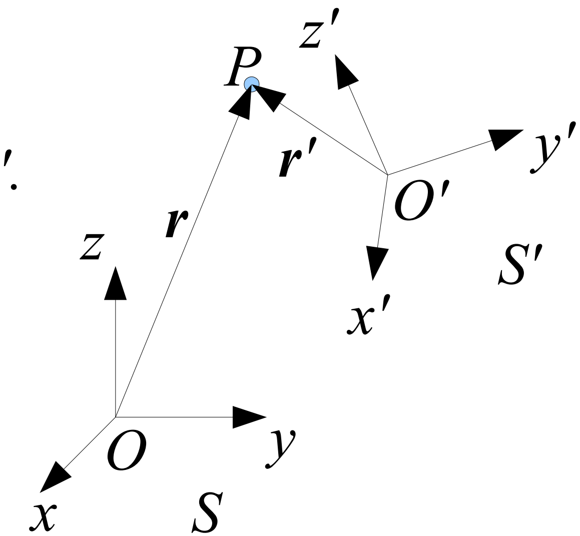
第三章

复合运动

§3.1 点的复合运动

- 基本定义

有时需要同时研究质点相对两个参考系的运动。



设 $Oxyz$ 为静止参考系 S， $O'x'y'z'$ 为运动参考系 S'.
设 P 为被研究的运动质点

绝对运动： P 相对于 S 的运动

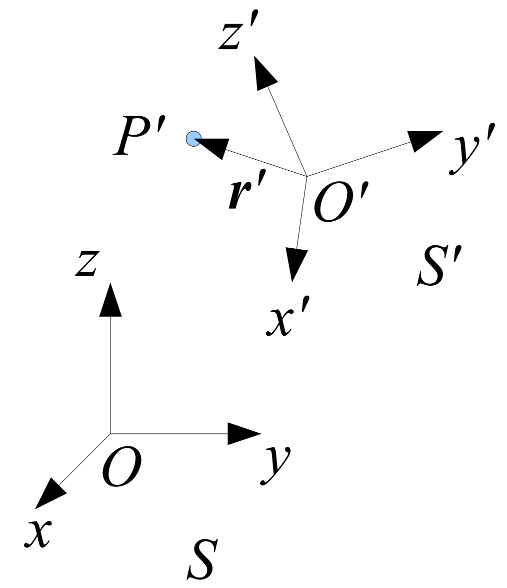
相对运动： P 相对于 S' 的运动

牵连运动： S' 上与 P 瞬时重合的点相对于 S 的运动

绝对（加）速度： P 相对于 S 的（加）速度. $\boldsymbol{v}=\dfrac{d\,\boldsymbol{r}}{dt}$, $\boldsymbol{a}=\dfrac{d\,\boldsymbol{v}}{dt}$

相对（加）速度： P 相对于 S' 的（加）速度. $\boldsymbol{v}_r=\dfrac{d'\boldsymbol{r}'}{dt}$, $\boldsymbol{a}_r=\dfrac{d'\boldsymbol{v}'}{dt}$

牵连（加）速度：瞬时与 P 重合并固连于 S' 的点 P' 的（加）速度



启发： S' 本身可以看作是一个刚体，刚体上任意点 P' 的运动行为已经在第二章讨论，其速度与加速度即牵连速度与加速度。因此

牵连速度 $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$

牵连加速度 $\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$

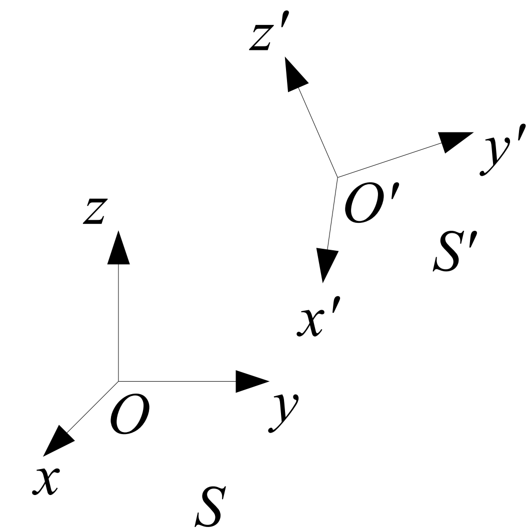
其中 $v_{O'}$ 和 $a_{O'}$ 分别为 O' 点的速度和加速度，

$\boldsymbol{\omega}$ 为 S' 相对 S 的转动角速度

- # 任意矢量的绝对变率、相对变率和牵连变率

设 S 的基矢为 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_{2,} \boldsymbol{e}_3]^T$

设 S' 的基矢为 $\boldsymbol{e}'=[\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3']^T$



根据第二章讨论，我们知道存在如下关系

$$\boldsymbol{e}'(t)=\mathfrak{R}(t)\boldsymbol{e},\ \ \mathfrak{R}(t)\mathfrak{R}^T(t)=I$$

引理：$\dot{\boldsymbol{e}}_j'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_j',(j=1,2,3)$, 其中 ω 为 S' 相对 S 的转动角速度

证明：因为基矢是单位向量，长度不变，根据第二章欧拉定理可证引理.

或者，如下：$\boldsymbol{e}_1'=\alpha_{11}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{12}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{13}\boldsymbol{e}_3=[1,0,0]\mathfrak{R}\boldsymbol{e}$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_1'=[1,0,0]\dot{\mathfrak{R}}\boldsymbol{e}=[1,0,0]\mathfrak{R}\mathfrak{R}^T\dot{\mathfrak{R}}\boldsymbol{e}$$

根据第二章结果 $\mathfrak{R}^T(t)\dot{\mathfrak{R}}(t)=\begin{pmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix}$ 对上式简单计算得到 $\dot{\boldsymbol{e}}_1'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_1'$

同理可证， $\dot{\boldsymbol{e}}_2'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_2'$, $\dot{\boldsymbol{e}}_3'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_3'$ （证毕）

对于任意矢量 V，它既可以用 S 的基矢表示，也可以用 S' 的基矢表示 .

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\rho}\, e = \boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{e}'$$

[定义]V 的绝对变率和相对变率分别为

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{e} \qquad\qquad \frac{d'\boldsymbol{V}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\rho}}'\boldsymbol{e}'$$

定理：矢量 V 的绝对变率与相对变率满足 $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}$

证明： $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{e}' \quad \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\rho}}'\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{\rho}'\dot{\boldsymbol{e}}' \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{V}}{dt} + \boldsymbol{\rho}'\dot{\boldsymbol{e}}'$

根据引理 $\quad \dot{\boldsymbol{e}}_j' = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_j', (j=1,2,3)$, 可得

$$\boldsymbol{\rho}'\dot{\boldsymbol{e}}' = \sum_j \rho_j'\dot{\boldsymbol{e}}_j' = \sum_j \rho_j'\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_j' = \boldsymbol{\omega}\times\sum_j \rho_j'\boldsymbol{e}_j' = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}$$

故定理成立 .　　　　　　　　　　（证毕）

注：矢量可以平移到空间的任何位置，其方向和大小不改变．

注：就算是同一参考系内，如果取一个坐标系为本征坐标系，还可以在这个参考系内取另外一个以角速度 ω 转动的坐标系，转动坐标系本身就可以看成是一个刚体，所以坐标系基矢在本征坐标系的变化规律满足 $\dot{\boldsymbol{e}}_j'(t)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_j'(t),(j=1,2,3)$，如果有一任意矢量 $\boldsymbol{V}$ 在本征坐标系中直接对时间求微商不方便，可以将其在转动坐标系中表示为 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{e}'$

于是我们有，

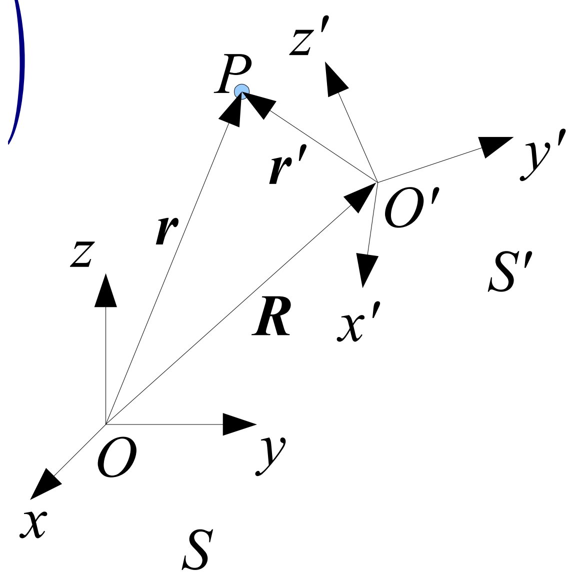
$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\underbrace{\dot{\boldsymbol{\rho}}'\boldsymbol{e}'}_{\frac{d'\boldsymbol{V}}{dt}}+\underbrace{\boldsymbol{\rho}'\dot{\boldsymbol{e}}'}_{\dot{\boldsymbol{e}}_j'(t)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_j'(t)}\Rightarrow\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{V}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}$$

也就是说这个公式不仅仅是对于不同参考系成立；对同一参考系内的不同坐标系也是成立的．

- S 与 S' 之间的速度和加速度变换关系

速度合成定理：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r=(\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')+\left(\dfrac{d'\boldsymbol{r}'}{dt}\right)$

即绝对速度 = 牵连速度 + 相对速度



证明：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}'\Rightarrow\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\\&\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\equiv\boldsymbol{v}_{O'}\\&\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\boxed{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}}_{\boldsymbol{v}}=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'}}_{\boldsymbol{v}_e}+\underbrace{\boxed{\frac{d'\boldsymbol{r}'}{dt}}}_{\boldsymbol{v}_r}$$

加速度合成定理：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_c$ （科里奥利定理）

$$=\left[\boldsymbol{a}_{O'}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\right]+\left(\frac{d'\boldsymbol{v}_r}{dt}\right)+(2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r)$$

即绝对加速度 = 牵连加速度 + 相对加速度 + 科氏加速度

证明：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_o+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}_r\Rightarrow\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}_{O'}}{dt}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_{O'}}{dt}\equiv\boldsymbol{a}_{O'}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}=\frac{d'\boldsymbol{v}_r}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

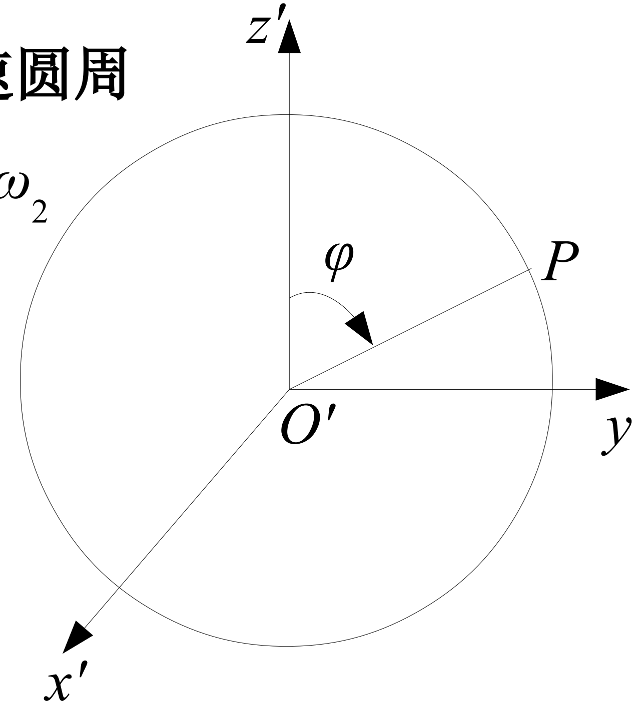
$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{a}_{O'}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')}}_{\boldsymbol{a}_e}+\underbrace{\boxed{\frac{d'\boldsymbol{v}_r}{dt}}}_{\boldsymbol{a}_r}+\underbrace{\boxed{(2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r)}}_{\boldsymbol{a}_c}$$

注： (1). 速度和加速度变换公式是利用运动系 S' 把质点 P 相对静系 S 的运动进行分解的结果—采用不同的运动系 S'，分解的结果不同 .

(2). S' 中观察者只能观测到 $\boldsymbol{v}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_r$, 观测不到 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_e$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_e$ 和 $\boldsymbol{a}_c$. S 中观察者只能观测到 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$, 无法区分 $\boldsymbol{v}$ 中的 $\boldsymbol{v}_e$ 和 $\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{a}$ 中的 $\boldsymbol{a}_e$, $\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_c$. 只有站在理论工作者的角度, 同时考虑到 S 系和 S' 系, 才能把 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 理性地分解出来 .

(3). 有时可以利用运动系把质点的复杂运动分解成为几个比较简单的运动，这对研究质点复杂运动和建立运动图像是有利的 .

例题 1. 设 P 点以常角速度 ω_1 沿半径为 R 的圆环作匀速圆周运动，该圆环同时绕其一直径为轴以常角速度 ω_2 转动，求圆环上任一点的速度和加速度



解：建立右图所示固连于圆环的动系 $O'x'y'z'$，并使得 z' 沿圆环转动轴方向。静止系 $(Oxyz)$ 未画出，假定在我们考察的时刻动系恰好与静系重合.

以 φ 表示点 P 的位置， $\boldsymbol{O'P}=R(\sin\varphi\boldsymbol{e}_2+\cos\varphi\boldsymbol{e}_3)$

动系绕定系转动角速度矢量为 $\omega_2\boldsymbol{e}_3$

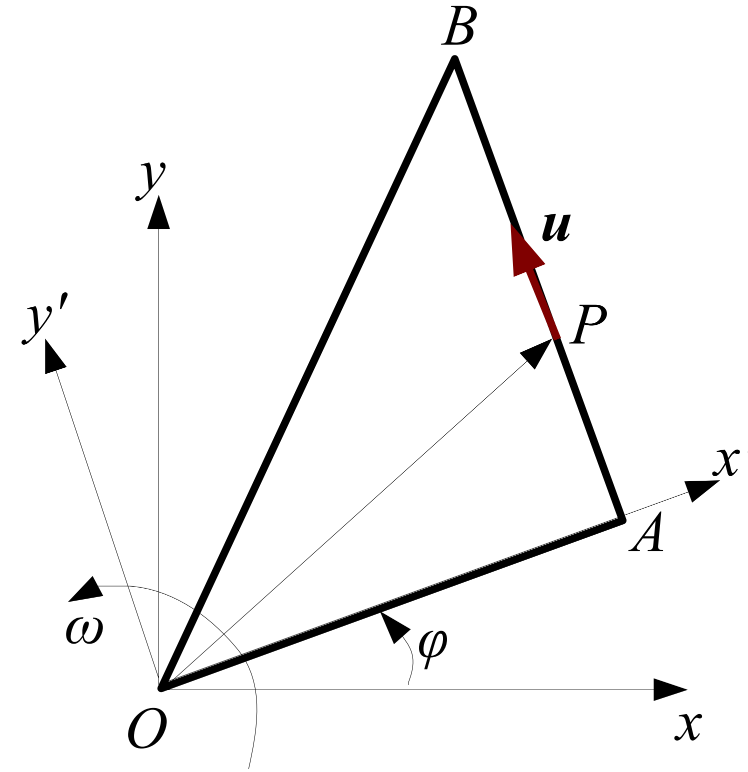
$$\left.\begin{aligned}&\omega_2\boldsymbol{e}_3\\ &\boldsymbol{v}_{O'}=0\\ &\boldsymbol{a}_{O'}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{v}_e=\omega_2\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{O'P}=-\omega_2R\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{a}_e=\omega_2\boldsymbol{e}_3\times(\omega_2\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{O'P})=-\omega_2^2R\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2\end{cases}$$

动系中，P 点运动角速度矢量为 $-\omega_1\boldsymbol{e}_1\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{v}_r=-\omega_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{O'P}=\omega_1R[\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_3]\\ \boldsymbol{a}_r=-\omega_1^2R[\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2+\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_3]\end{cases}$

$$\boldsymbol{a}_c=2\omega_2\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{v}_r=2\omega_2\boldsymbol{e}_3\times\omega_1R[\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_3]=-2\omega_1\omega_2R\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1$$

下略.

例题 2. 等腰直角三角形 OAB，在自身平面内以匀角速 $\boldsymbol{\omega}$ 绕顶点 O 转动．质点 P 在 $t=0$ 时刻由 A 点出发，以不变的速度 $\boldsymbol{u}$ 相对三角形沿 AB 边运动．已知 $OA=AB=b$, 求 P 点的速度和加速度．



解：建立静止系 $Oxyz$ 以及与三角形固连的动系 $Ox'y'z$. 并假定 $t=0$ 时刻二者重合．

$$\boldsymbol{r}'=b\,\boldsymbol{e}_1'+ut\,\boldsymbol{e}_2' \qquad \boldsymbol{v}_r=u\,\boldsymbol{e}_2'$$

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=\omega[b\,\boldsymbol{e}_2'-ut\,\boldsymbol{e}_1'] \qquad \Rightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r=(\omega b+u)\boldsymbol{e}_2'-\omega ut\,\boldsymbol{e}_1'$$

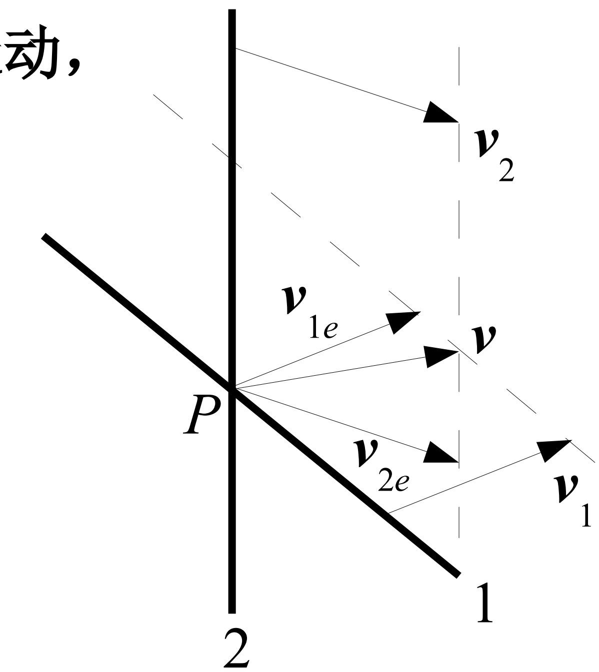
$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=-\omega^2(b\,\boldsymbol{e}_1'+ut\,\boldsymbol{e}_2') \qquad \boldsymbol{a}_r=0\\&\boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=2\omega\,\boldsymbol{e}_3'\times(u\,\boldsymbol{e}_2')=-2\omega u\,\boldsymbol{e}_1'\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a}=-(\omega^2 b+2\omega u)\boldsymbol{e}_1'-\omega^2 ut\,\boldsymbol{e}_2'$$

其中：$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1'\\\boldsymbol{e}_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\-\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}$

$$\varphi=\omega t$$

例题 3. 图示两共面直线分别以匀速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 沿面内运动，求两直线交点 P 的运动速度和加速度



解：建立静止系 S, 固连于 1 动系的动系 S_1'，以及固连于 2 动系的动系 S_2'。（未画出）

对于动系 S_1'，$\boldsymbol{v}_{1e}=\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_{1r}$ 只能沿直线 1 方向。

对于动系 S_2'，$\boldsymbol{v}_{2e}=\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_{2r}$ 只能沿直线 2 方向。

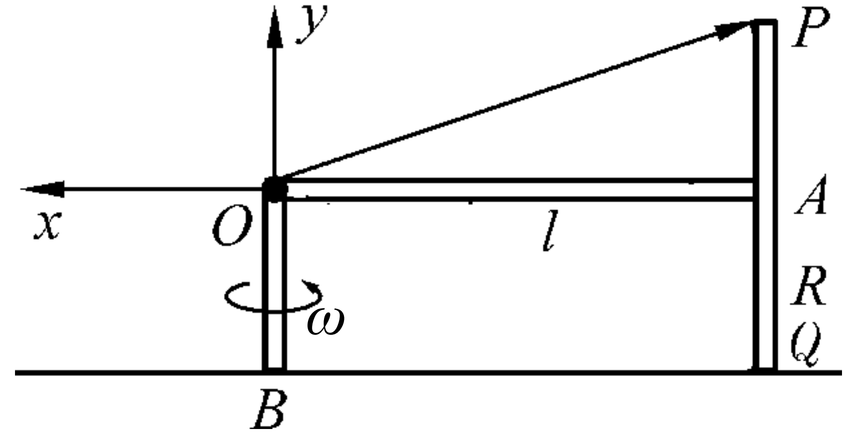
P 点速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{1e}+\boldsymbol{v}_{1r}$ 矢端只能沿图示平行于直线 1 的虚线方向滑动

P 点速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{2e}+\boldsymbol{v}_{2r}$ 矢端只能沿图示平行于直线 2 的虚线方向滑动

只有图示虚线交点才能使等式同时成立，此即求得的 P 点速度 $\boldsymbol{v}$

由于 $\boldsymbol{v}$ 是常量，所以 $\boldsymbol{a}=0$

例题 4. 半径为 R 的碾盘在水平面上做无滑滚动，长为 l 的水平轴 OA 绕竖直轴 OB 以匀角速度 ω 转动 . 求碾盘最高点 P 的速度和加速度 .



解：以地面为静止系 S（未画出），图示 $Oxyz$ 为

动系 S', x 固连 AO, y 固连于 BO 。假定图示瞬时 S' 与 S 坐标轴恰好重合 .

那么 P,Q 的牵连速度分别为 $\boldsymbol{v}_{Pe}=\boldsymbol{v}_{Qe}=\omega l\,\boldsymbol{e}_3$

设碾盘相对于 S' 以速度 Ω 转动，则 $\boldsymbol{v}_{Pr}=-\boldsymbol{v}_{Qr}=\Omega R\,\boldsymbol{e}_3$

Q 点无滑条件 $\boldsymbol{v}_Q=\boldsymbol{v}_{Qe}+\boldsymbol{v}_{Qr}=0\Rightarrow\Omega=(l/R)\omega\ \Rightarrow\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{Pe}+\boldsymbol{v}_{Pr}=2\omega l\,\boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{a}_{Pe}=\omega\boldsymbol{e}_2\times(\omega\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{OP})=\omega^2 l\,\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{a}_{Pr}=\Omega\boldsymbol{e}_1\times(\Omega\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{OP})=-\Omega^2 R\,\boldsymbol{e}_2=-\frac{\omega^2 l^2}{R}\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{a}_{Pc}=2\omega\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{v}_{pr}=2\omega\Omega R\,\boldsymbol{e}_1=2\omega^2 l\,\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_{Pe}+\boldsymbol{a}_{Pr}+\boldsymbol{a}_{Pc}=3\omega^2 l\,\boldsymbol{e}_1-\frac{\omega^2 l^2}{R}\boldsymbol{e}_2$$

§3.2 刚体复合运动

- ## 问题的提法

设刚体相对于参考系 $S_1(O_1x_1y_1z_1)$ 运动，而 S_1 相对静止参考系 $S(Oxyz)$ 运动，我们称刚体相对于静止系 S 作复合运动。该运动由 2 个运动合成，类似可以定义由 n 个运动合成的复合运动。

- ## 瞬时平动的合成

[定理] 设刚体对于 S_1 瞬时平动速度 $\boldsymbol{v}_1$，而 S_1 相对于 S 瞬时平动速度为 $\boldsymbol{v}_2$，则刚体相对于 S 的瞬时平动速度为

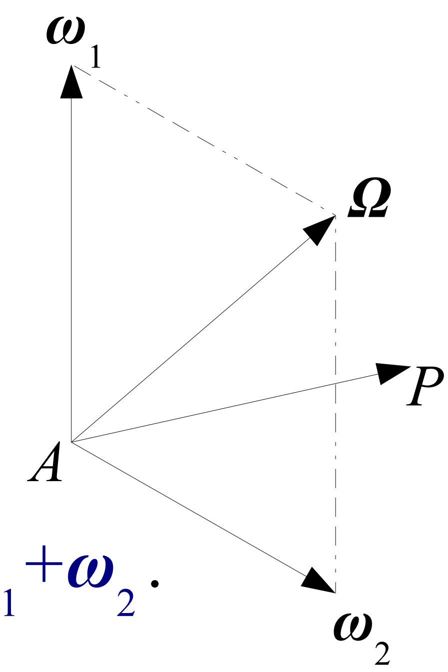
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$

证明：刚体上任一点的平动可代表刚体平动行为，利用质点速度合成定理既可。(请自己补充)

注：对于 n 个运动合成，类似可得到瞬时平动速度 $\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{v}_j$

- **瞬时定轴转动的合成**

［定理］设刚体相对于 S_1 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 瞬时转动，设 S_1 对于 S 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 瞬时转动，设二瞬时轴交于 A 点，设给定时刻 A 的速度为零，于是合成运动是绕过 A 点的轴的转动，角速度为 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$.



证明：在刚体上任取一点 P，则牵连速度 $\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{AP}$

相对速度 $\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{AP}$ 那么绝对速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r=(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{AP}$

由于 A 点速度为零，所以 P 点速度来源于绕 A 转动，角速度为

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2 \qquad \text{证毕}.$$

注：对于 n 个瞬时转动的合成，类似可得到合成的角速度 $\boldsymbol{\Omega}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\omega}_j$

［推论］刚体“绕” n 个相交轴的瞬时转动等价于角速度为 n 个角速度之和的瞬时转动.

• 刚体定点运动的欧拉描述

设 $Oxyz$ 为静止系，$OXYZ$ 为与刚体固连的坐标系，初始时刻二者重合.

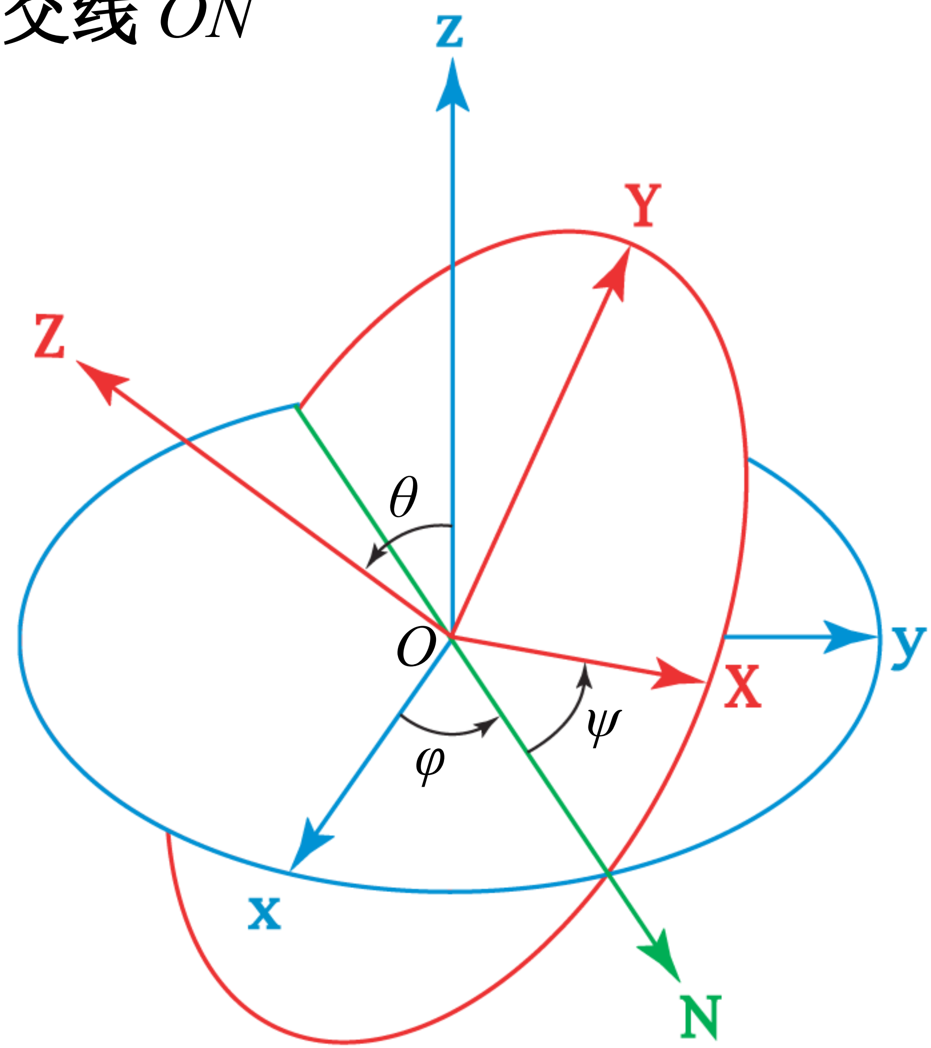
[定义] 节线：平面 Oxy 与 OXY 的交线 ON

[定义] 欧拉角：θ, φ, ψ

$0\leq\theta\leq\pi$----- 章动角

$0\leq\varphi<2\pi$----- 进动角

$0\leq\psi<2\pi$----- 自转角



$Oxyz$-->$OXYZ$ 动作分解

将 $Oxyz$ 绕 Oz 轴转动 φ, Ox 转到 ON

再绕 ON 轴转动 θ, Oz 转到 OZ

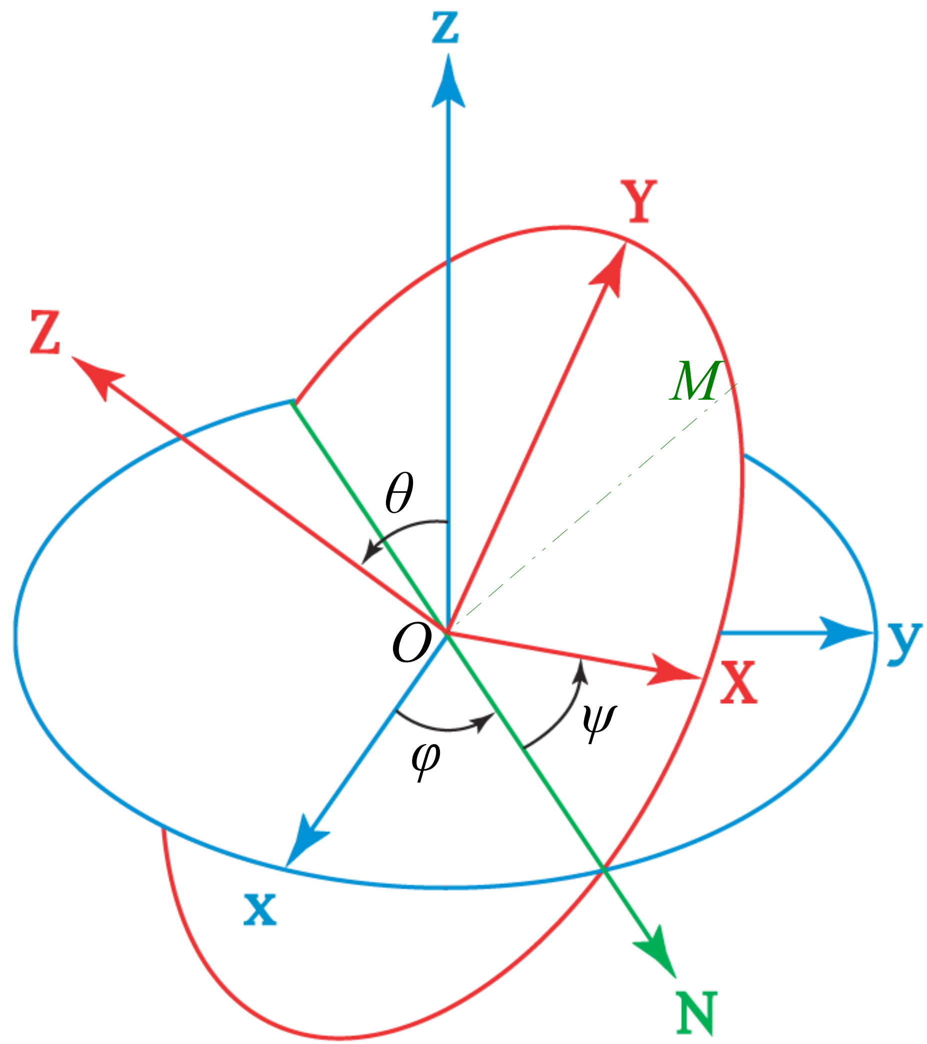
再绕 OZ 轴转动 ψ, ON 转到 OX

这样我们有三个过 O 点的角速度矢量

$$\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3 \qquad \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{N}} \qquad \dot{\psi}\,\boldsymbol{E}_3$$

根据瞬时定轴转动的合成定理，有

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3+\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{N}}+\dot{\psi}\,\boldsymbol{E}_3$$



[定理] 刚体定点运动的（欧拉）运动学方程为

$$\omega_X=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_Y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_Z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

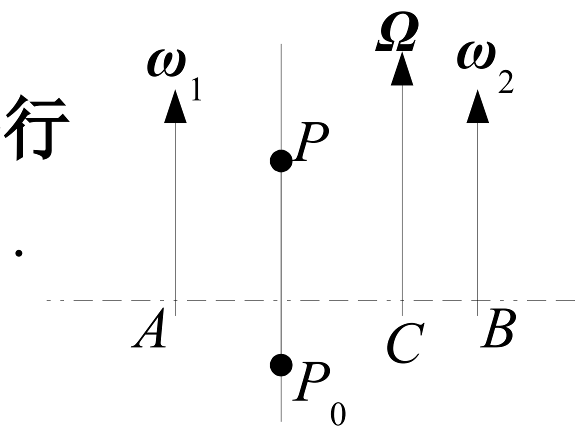
证明：在 OXY 平面上作 ON 的垂线 OM （空间想象）

利用 $\hat{\boldsymbol{M}}=\sin\psi\,\boldsymbol{E}_1+\cos\psi\,\boldsymbol{E}_2$， $\hat{\boldsymbol{N}}=\cos\psi\,\boldsymbol{E}_1-\sin\psi\,\boldsymbol{E}_2$

$\boldsymbol{e}_3=\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{M}}+\cos\theta\,\boldsymbol{E}_3$ 即可证明．（证毕）

- # 绕平行轴瞬时转动的合成

设刚体相对于 S_1 以角速度 ω_1 瞬时转动，而 S_1 相对 S 以角速度 ω_2 瞬时转动，且二转动轴平行 .



[定理] 复合运动是刚体的平面运动，即任意平行于转动轴方向的直线上的点有相同速度 .

复合运动的转动角速度为 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$.

证明：在转动轴平面内取与其垂直的直线 , 它们交于 A,B

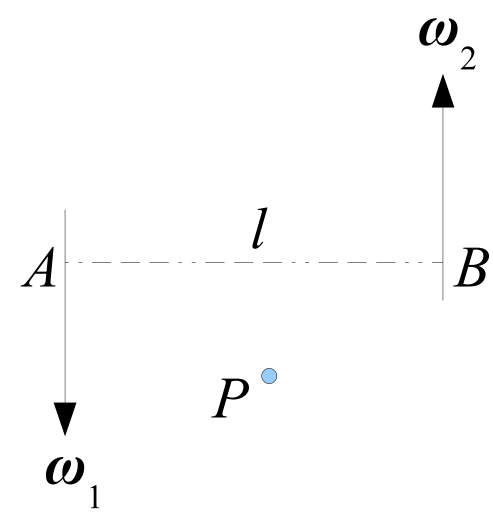
取刚体上任意平行于轴的直线及其上的任意点 P，该线与过 AB 且垂直于轴的平面交于 P_0.　　则 P 点牵连速度和相对速度分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}_e&=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{BP}_0\\ \boldsymbol{v}_r&=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{AP}_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_{P_0}=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{BP}_0+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{AP}_0\ \text{(why?)}$$

在 AB 上取 C 点，使得 $\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{AC}=0$

则存在过 C 点角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2$，使得 $\boldsymbol{v}_{P_0}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{CP}_0$（请补足证明）

[定义] 绕平行轴以大小相等且方向相反的角速度进行的转动称为转动偶. 轴间距离称为转动偶臂. 转动偶臂矢量 (***AB***) 与角速度 ($\boldsymbol{\omega}_2$) 的叉积称为转动偶矩.



[定理] 转动偶使刚体作瞬时平动，平动速度等于转动偶矩.

证明：由平行轴瞬时转动合成定理知复合运动的转动角速度为 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2=0$. 故为平动.

可取过 AB 且与转动轴正交的平面上任意点 P 代表刚体的平动。

$$\boldsymbol{v}_P=\omega_2\times\boldsymbol{BP}+\omega_1\times\boldsymbol{AP}$$

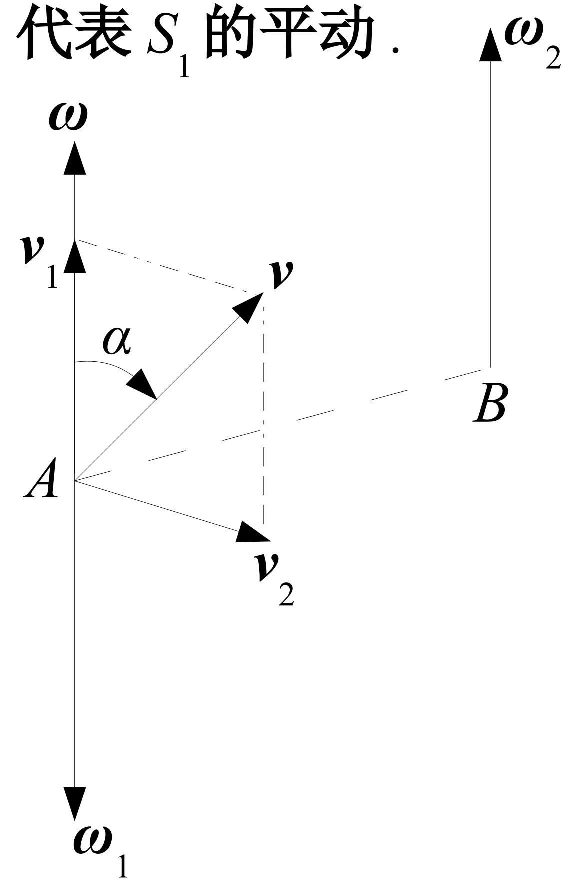
$$=\omega_2\times(\boldsymbol{BP}-\boldsymbol{AP})$$

$$=\omega_2\times\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}\times\omega_2$$

证毕.

- ## 瞬时平动与瞬时转动的合成

设刚体相对于 S_1 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 瞬时转动，而 S_1 相对于 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 瞬时平动，向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 α. 可以取瞬时转轴上的点 A 代表 S_1 的平动 .



[定理] 合成运动是瞬时螺旋运动，瞬时螺旋轴平行于 $\boldsymbol{\omega}$，螺旋轴与 $\boldsymbol{\omega}$ 距离为 $(v/\omega)\sin\alpha$. 平面（螺旋轴 &$\boldsymbol{\omega}$)⊥平面（$\boldsymbol{v}$&$\boldsymbol{\omega}$)

证明：将 $\boldsymbol{v}$ 速度分解为 $\boldsymbol{v}_1 \| \omega$，$\boldsymbol{v}_2 \perp \omega$

用 $\boldsymbol{\omega}_1(=-\boldsymbol{\omega})$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2(=\boldsymbol{\omega})$ 构成的转动偶代替平动速度 $\boldsymbol{v}_2$,

转动偶臂为 $AB=v_2/\omega=(v/\omega)\sin\alpha$ 且垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{v}_2$.

过 A 点角速度 $\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}=0$，所以最后合成结果为

以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的平动和过 B 点的轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}_2(=\boldsymbol{\omega})$ 的转动 .

由于 $\boldsymbol{v}_1 \| \omega$，所以合成运动是瞬时螺旋运动 (刚体上点瞬时轨迹为螺旋线).