第五章

质点系动力学

§5.1 质点系动力学方程

设质点系包含 N 个质点，质量分别为 $m_n,(n=1,\cdots N)$

质点 n 受力 $\boldsymbol{F}_n=\boldsymbol{F}_n^{(e)}+\boldsymbol{F}_n^{(i)}$

体系外的物体施加的力

体系内其他的质点施加的力

因此，质点系动力学方程为

$$m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n=\boldsymbol{F}_n^{(e)}+\boldsymbol{F}_n^{(i)},\quad n=1,\cdots,N$$

注：这是一个含 $3N$ 个标量的方程组．

§5.2 质点系的内力

[推论] 质点系所有质点所受内力矢量和为 0.

证明：记质点 n 受到来自质点 l 的作用力为 $\boldsymbol{F}_{nl}$

并令 $\boldsymbol{F}_{nn}=0$，则 $$\boldsymbol{F}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{F}_{n}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{F}_{nl}$$

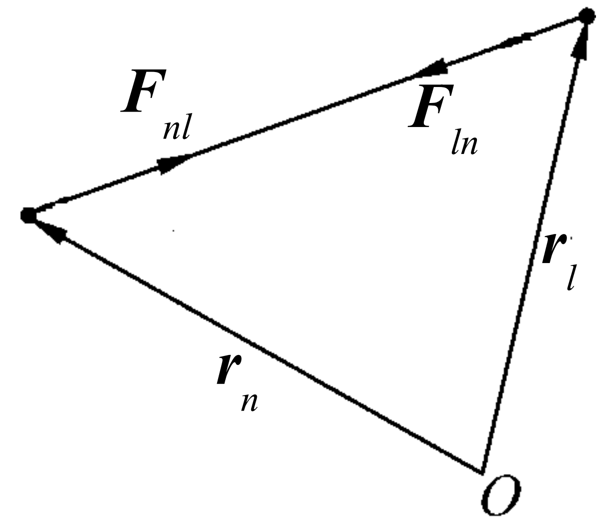
由于 nl 在求和式中是哑标，所以用什么字母都可以，于是

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{F}^{(i)}=\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ln}\\ \text{求和可交换顺序}\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{F}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ln}$$

根据牛顿第三定律 : $\boldsymbol{F}_{nl}=-\boldsymbol{F}_{ln}\Rightarrow 2\boldsymbol{F}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(\boldsymbol{F}_{nl}+\boldsymbol{F}_{ln})=0$

$\Rightarrow \boldsymbol{F}^{(i)}=0$ （证毕）

[推论]对任意参考点，质点系所有质点所受全部内力矩的矢量和为零0.



证明：

$$\boldsymbol{M}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{M}_n^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{nl}$$

交换哑标： $$\boldsymbol{M}^{(i)}=\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{r}_l\times\boldsymbol{F}_{ln}$$

交换求和顺序： $$\boldsymbol{M}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{r}_l\times\boldsymbol{F}_{ln}$$

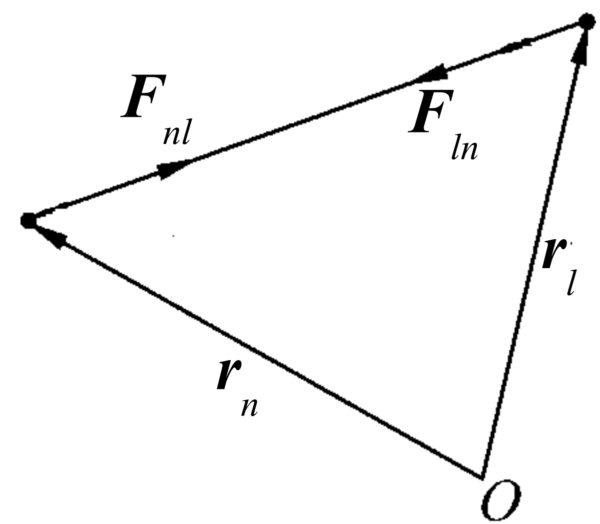
根据牛顿第三定律: $\boldsymbol{F}_{nl}=-\boldsymbol{F}_{ln}\Rightarrow 2\boldsymbol{M}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)\times\boldsymbol{F}_{nl}$

$$(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)\parallel\boldsymbol{F}_{nl}\Rightarrow(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)\times\boldsymbol{F}_{nl}=0$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{M}^{(i)}=0$$

（证毕）

[推论]刚体内所有质点所受全部内力做功和为零0.



证明： $W^{(i)}=\sum_{n=1}^{N} W_n^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{F}_{nl}\cdot d\,\boldsymbol{r}_n$

交换哑标： $W^{(i)}=\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ln}\cdot d\,\boldsymbol{r}_l$

交换求和顺序： $\boldsymbol{W}^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ln}\cdot d\,\boldsymbol{r}_l$

根据牛顿第三定律 : $\boldsymbol{F}_{nl}$=-$\boldsymbol{F}_{ln}$ $\Rightarrow 2\,W^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{F}_{nl}\cdot d\,(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)$

$(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)\parallel\boldsymbol{F}_{nl}\Rightarrow\boldsymbol{F}_{nl}=(f_{nl})(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)$

$$\Rightarrow 4\,W^{(i)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} f_{nl}\,d\left[(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)^2\right]$$

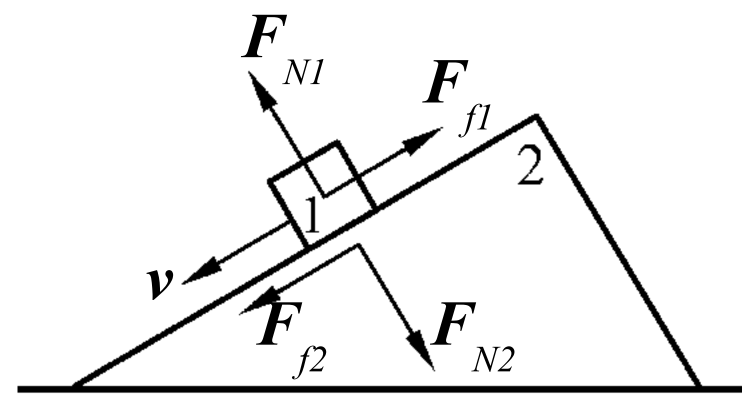
刚体上任意两点距离不变，故 $d\left[(\boldsymbol{r}_n-\boldsymbol{r}_l)^2\right]=0\Rightarrow W^{(i)}=0$

注： $\boldsymbol{F}_{nl} \parallel (\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_l)$，但是$\boldsymbol{F}_{nl}$可以$\nparallel d(\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_l)$

由上述证明可见：质点系所有质点所受全部内力做功之和一般不为零

当两质点间距离不变或者相对速度与它们之间内力正交时做功和为零

例题 1 可在水平面上滑动的尖劈 2 上，有一可沿斜面以相对尖劈的速度 $\boldsymbol{v}$ 滑动的重物 1. 以重物和尖劈为质点系，试分析两者间内力做功情况.



解：它们之间的内力可分解成图示成对的摩擦力和正压力.

一对摩擦力做功为:

$$\boldsymbol{F}_{f1} \cdot d\,\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_{f2} \cdot d\,\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{F}_{f1} \cdot d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{F}_{f1} \cdot \boldsymbol{v}\,dt < 0$$

一对正压力做功为:

$$\boldsymbol{F}_{N1} \cdot d\,\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_{N2} \cdot d\,\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{F}_{N1} \cdot d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{F}_{N1} \cdot \boldsymbol{v}\,dt = 0$$

[推论] 一对作用力与反作用力做功和与参考系无关 .

证明：一对力与反作用力与坐标系无关，而相对速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{d(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{dt}=\frac{d'(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$

$$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2\Rightarrow\frac{d'(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{dt}=\frac{d'(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}'_2)}{dt}=\boldsymbol{v}'$$

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\parallel\boldsymbol{F}_{12}\Rightarrow\boldsymbol{F}_{12}=(f_{12})(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\Rightarrow\boldsymbol{F}_{12}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]=0$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{F}_{12}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_{12}\cdot\boldsymbol{v}'$$

故这对力做功与参考系无关 . （证毕）

注：如果一对力始终做负功，通常把这对力称为耗散力 .
例如滑动摩擦力

§5.3 动力学基本定理和守恒定律

- 动量定理和动量守恒定律　　注：本节只考虑惯性参考系

[定义]质点系动量　$\boldsymbol{p}=\sum_n \boldsymbol{p}_n$

质点系动量定理：　$\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}^{(e)}=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}$

证明：

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{p}=\sum_n \boldsymbol{p}_n \Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}}=\sum_n \dot{\boldsymbol{p}}_n \\ \dot{\boldsymbol{p}}_n=\boldsymbol{F}_n^{(e)}+\boldsymbol{F}_n^{(i)} \\ \boldsymbol{F}^{(i)}=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}^{(e)}=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}$$

（证毕）

[推论]质点系动量守恒定律：若某一过程中质点系所受合外力为零，则该过程质点系动量守恒；若合外力沿某固定方向分量为零，则在该方向上动量守恒.

（请自证）

[定义]质点系质量：$m_t = \sum_n m_n$

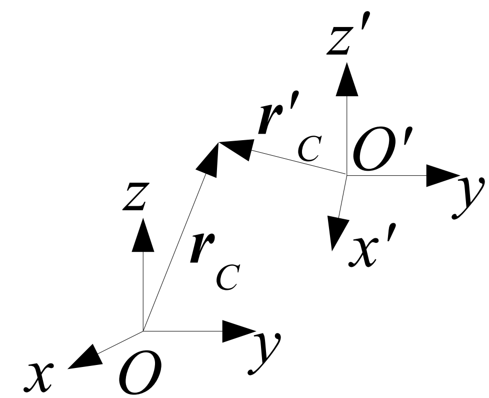
[定义]质点系质心：位于$\boldsymbol{r}_C = \dfrac{\sum_n m_n \boldsymbol{r}_n}{m_t}$处的几何点.

注：质心只是几何点，质心处可能并无任何质点存在

[推论]质心的定义不依赖于参考系.

证明：假定S为静止系，S'为运动参考系，

在S系中质心位于



$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_n m_n \boldsymbol{r}_n}{m_t}$$

在S'中，$\boldsymbol{r}_C$表示为$\boldsymbol{r}'_C = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{OO}'$

$$= \frac{\sum_n m_n \boldsymbol{r}_n}{m_t} - \boldsymbol{OO}' \frac{\sum_n m_n}{m_t} = \frac{\sum_n m_n (\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{OO}')}{m_t}$$

$$= \frac{\sum_n m_n \boldsymbol{r}'_n}{m_t}$$ （证毕）

[定义] 质心速度和加速度：$\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C$, $\boldsymbol{a}_C = \dot{\boldsymbol{v}}_C = \ddot{\boldsymbol{r}}_C$

[引理] 质点系动量可表示为：$\boldsymbol{p} = m_t \boldsymbol{v}_C$

证明：由质心定义可知 $\sum_n m_n \boldsymbol{r}_n = m_t \boldsymbol{r}_C \;\Rightarrow \sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n = m_t \dot{\boldsymbol{r}}_C$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p} = \sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n = m_t \boldsymbol{v}_C$$ （证毕）

质心运动定理： $m_t \boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{F}^{(e)}$ （请自证）

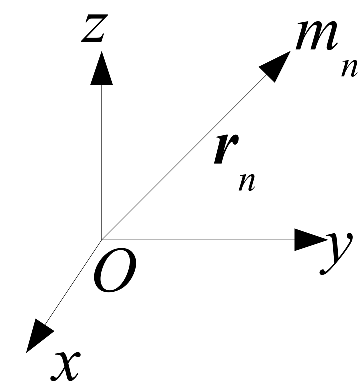
[推论] 若质点系所受合外力为零，则质心速度为常量；若质点系所受合外力在某固定方向分量为零，则质心速度在该方向上的分量不变.

证明： $\boldsymbol{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_C = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{v}_C = const.$

如果对于固定方向 $\boldsymbol{e}_l$, 有 $\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{a}_C = 0$

即 $\boldsymbol{e}_l \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_C = 0 \;\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{v}_C) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{v}_C = const.$ （证毕）

- 角动量定理和角动量守恒定律



[定义] 质点系对 O 点角动量

$$\boldsymbol{L}_O=\sum_n \boldsymbol{L}_{nO}=\sum_n \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{p}_n$$

[定义] 质点系对过 O 点固定轴 $\boldsymbol{e}_l$ 的角动量 $L_l=\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{L}_O$

质点系对 O 点角动量定理：$\dot{\boldsymbol{L}}_O=\boldsymbol{M}_O^{(e)}=\sum_n \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n^{(e)}$

证明：

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{L}_O=\sum_n \boldsymbol{L}_{nO}\Rightarrow\dot{\boldsymbol{L}}_O=\sum_n \dot{\boldsymbol{L}}_{nO}\\ \text{质点角动量定理 }\dot{\boldsymbol{L}}_{nO}=\boldsymbol{r}_n\times[\boldsymbol{F}_n^{(e)}+\boldsymbol{F}_n^{(i)}]\\ \boldsymbol{M}^{(i)}=\sum_n \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n^{(i)}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\dot{\boldsymbol{L}}_O=\boldsymbol{M}_O^{(e)}=\sum_n \boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n^{(e)}$$

（证毕）

质点系对固定轴 $\boldsymbol{e}_l$ 的角动量定理：$\dot{L}_l=\boldsymbol{M}_l^{(e)}=\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{M}_O$

（请自行证明）

[推论]质点系角动量守恒定律：若某一过程中质点系所受外力对 O 点合力矩为零，则该过程质点系对 O 角动量守恒；若外力对固定轴合外力矩为零，质点系对该轴角动量守恒.

- 动能定理和机械能守恒定律

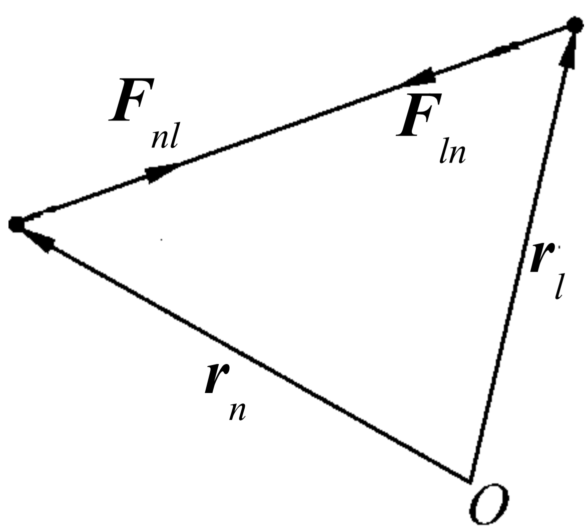
[定义]质点系动能：$T=\sum_n T_n=\sum_n \frac{1}{2}m_n v_n^2$

质点系动能定理：$dT=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_n+\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_n$

证明：这是质点动能定理的自然推论.（证毕）

[定义]一对保守内力的势能：它满足

$$\boldsymbol{F}_{nl}\cdot d\boldsymbol{r}_n+\boldsymbol{F}_{ln}\cdot d\boldsymbol{r}_l=-dV_{nl}^{(i)}$$



[定义]质点系内势能：$V^{(i)}=\sum_n \sum_{l>n} V_{nl}^{(i)}$

[定义] 质点系外势能 $V^{(e)}$：质点系所受保守外力的势能之和

[定义] 质点系总势能： $V=V^{(i)}+V^{(e)}$

[推论] 质点系机械能守恒定律：若某一过程中质点系所受非保守内力和外力均不做功，则该过程机械能守恒 . 即

$$E=T+V=\text{常量}$$

证明：如果非保守内外力均不做功，则动能定理

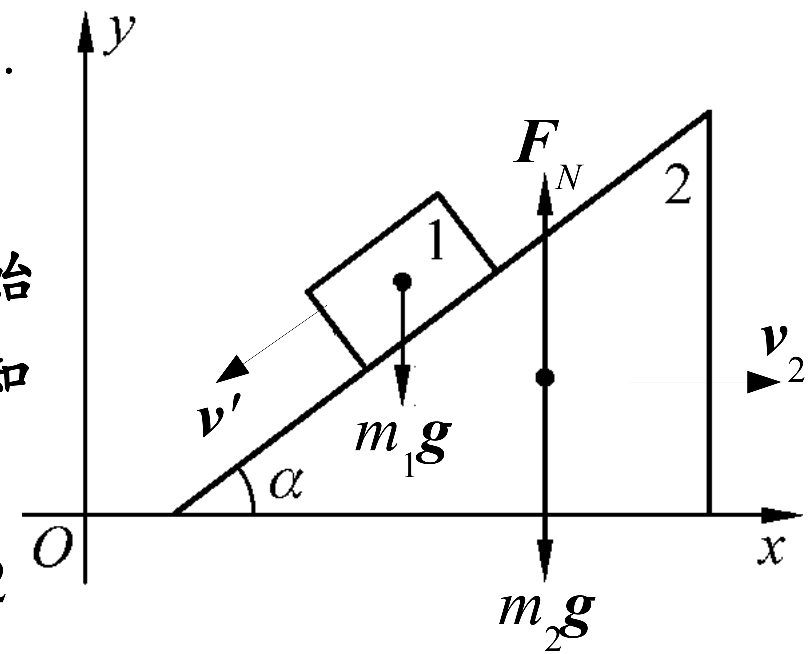
$$dT=\underbrace{\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_n}_{-dV^{(e)}}+\underbrace{\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_n}_{-dV^{(i)}}$$

右端项只与保守内外力有关，

$$\Rightarrow d\left[T+V^{(e)}+V^{(i)}\right]=0 \Rightarrow E=T+V^{(e)}+V^{(i)}=\text{const.}$$ （证毕）

例题 2 质量 m_1 的滑块 1，放在质量 m_2 、倾角 α 的光滑尖劈 2 上，尖劈放在光滑水平面上；初始时滑块与尖劈均静止，在重力作用下滑块沿斜面下滑，求尖劈的加速度和桌面对尖劈的支撑力 .

解：系统受图示外力 $m_1 g, m_2\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{F}_N$ 作用 .



建立图示坐标系 $Oxyz$.

所有内力和外力均在 Oxy 面内，且初始根据两物体均静止，根据动量定理可知两个物体始终无 z 方向运动。

设 2 以速度 $\boldsymbol{v}_2$ 向 x 正向运动， 1 相对 2 以速度 $\boldsymbol{v}'$ 沿斜面方向下滑 . 则 1 的速度可表示为

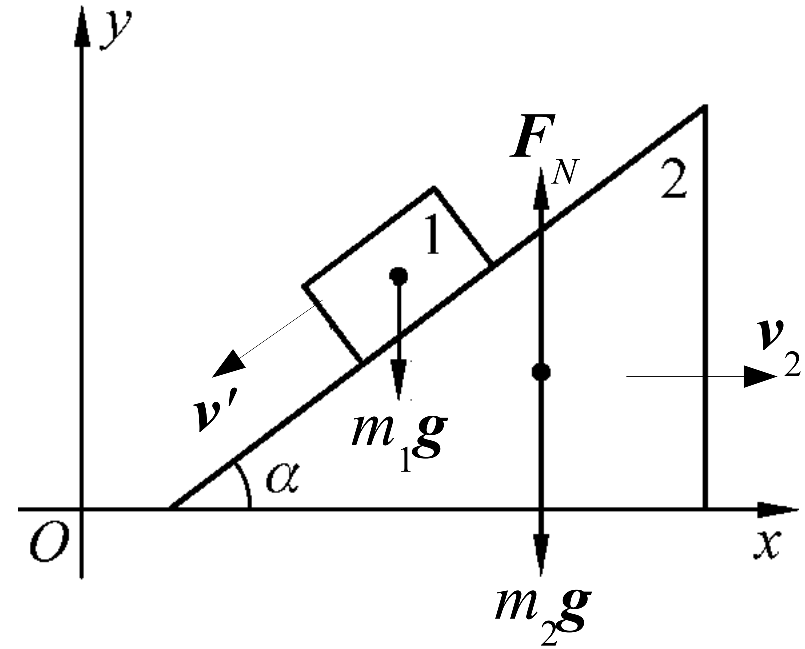
$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}'=(v_2-v'\cos\alpha)\hat{\boldsymbol{x}}-v'\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

由于 x 方向系统不受外力，所以 x 方向动量守恒，即

$$m_1(v_2-v'\cos\alpha)+m_2 v_2=0$$

由于作用在 2 上的外力与速度垂直，故不做功

由于 1 与 2 间的内力与相对速度垂直，故也不做功.



只有作用在 1 上的外力 $m_1 g$ 做功.

根据动能定理

$$d\left(\frac{1}{2}m v_1^2+\frac{1}{2}m_2 v_2^2\right)=-m_1 g\, dy_1$$

注意到关系式 $\dot{y}_1=v_{1y}=-v'\sin\alpha$

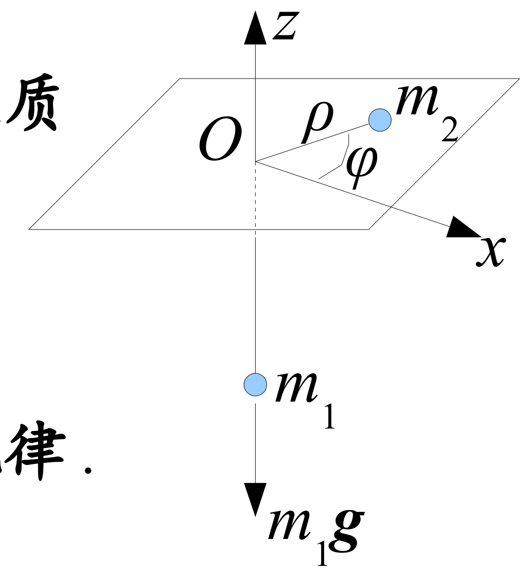
可求得 $\cdots$，$\boldsymbol{a}_1=\dot{\boldsymbol{v}}_1=-\dfrac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2}g\,\hat{\boldsymbol{x}}-\dfrac{(m_1+m_2)\sin^2\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2}g\,\hat{\boldsymbol{y}}$，$\boldsymbol{a}_2=\dot{\boldsymbol{v}}_2=\dfrac{m_1\sin\alpha\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2}g\,\hat{\boldsymbol{x}}$

（请在极限情况下检查上式有错误没有）

利用动量定理 $\boldsymbol{F}_N+m_1\boldsymbol{g}+m_2\boldsymbol{g}=m_1\boldsymbol{a}_1+m_2\boldsymbol{a}_2$

可求得 $\cdots$，$\boldsymbol{F}_N=\dfrac{m_2(m_1+m_2)}{m_1\sin^2\alpha+m_2}g\,\hat{\boldsymbol{y}}$，$F_N<(m_1+m_2)g$

例题 3 光滑水平面上 O 点有一小孔，不可伸长的轻质光滑细线穿过该孔，两端分别系上质量 m_1 和 m_2 的小球 m_2 始终限制在水平面内运动，初始时 m_1 静止，而 m_2 运动，试求两个球的运动规律.



解：建立图示柱坐标系 (ρ, φ, z).

质点 m_1 所受内、外力均沿 z 方向，初始静止，根据质点动量定理，其后运动只能在 z 方向上.

两质点组成的体系受如下外力作用：重力 $m_1\boldsymbol{g}$, $m_2\boldsymbol{g}$, 水平面对 m_2 支撑力 $\boldsymbol{F}_2$. 这些力均平行于 z 轴，所以 $M_z^{(e)}=0 \Rightarrow L_z=const. \Rightarrow \rho^2\dot{\varphi}=const.$

外力 $m_2\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 不做功，内力为绳张力，对二质点做功刚好抵消（请自己证明这一点）， $m_1\boldsymbol{g}$ 为保守力，所以体系机械能守恒

$$\frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\frac{1}{2}m_2[\dot{\rho}^2+(\rho\dot{\varphi})^2]+m_1 g z_1=const.$$

（想想还缺什么？）

$$\rho - z_1 = const.$$ （线不可伸长条件）

于是：

$$\left\{\begin{aligned} & m_2\rho^2\dot{\varphi} = L_0 \Rightarrow \rho\dot{\varphi} = L_0/\rho m_2 \\ & \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2] + m_1 g z_1 = E_0 \\ & \rho - z_1 = l_0 \ \Rightarrow z_1 = \rho - l_0 \ \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{\rho} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

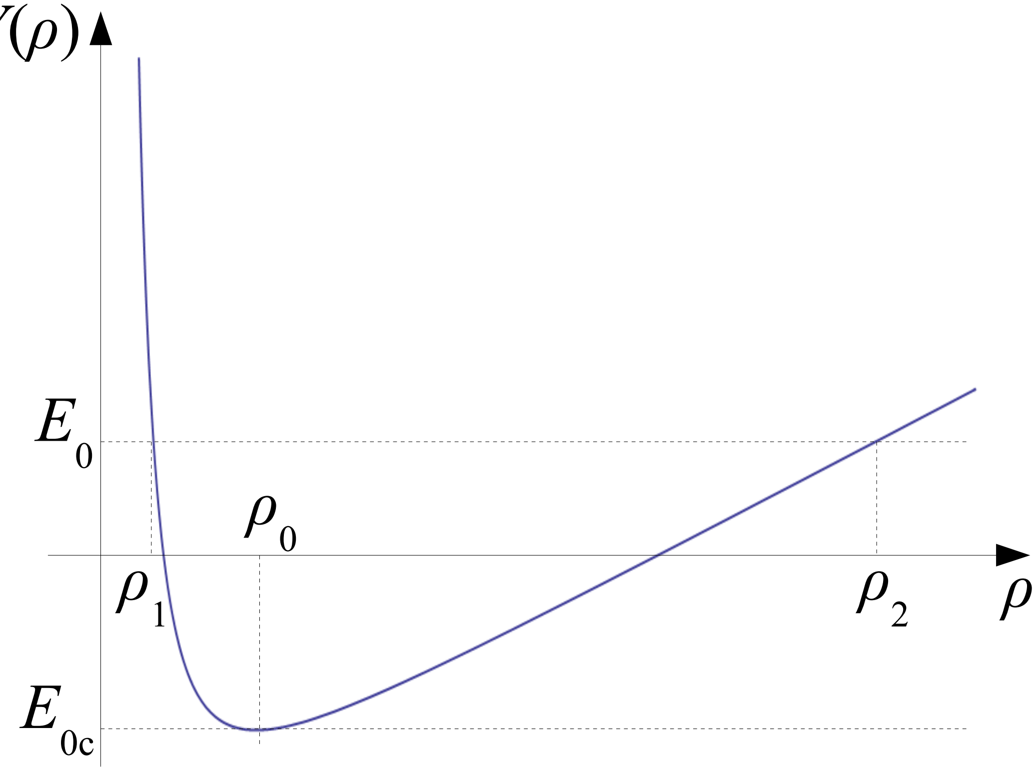
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{L_0^2}{2m_2\rho^2} + m_1 g(\rho - l_0) = E_0$$

与平方反比中心力场不同的是，上述方程一般情况下不可解。但可通过图像分析解的特征。可等价为质量 $m=m_1+m_2$ 的质点在如下势场中的一维运动：

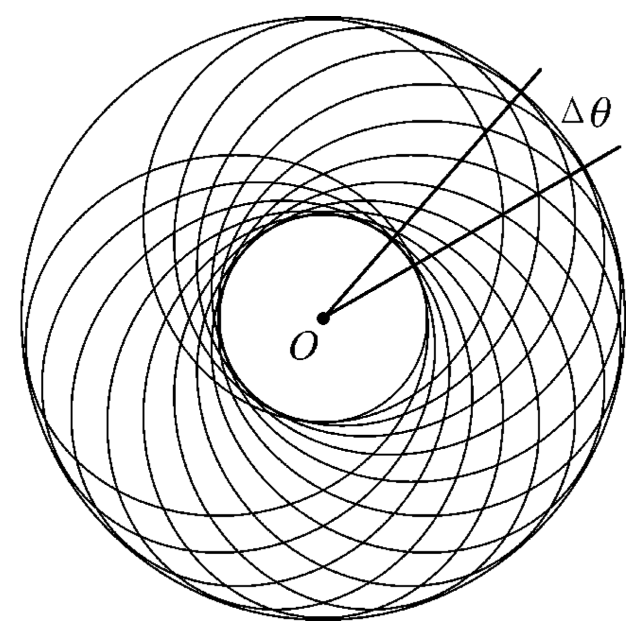
$$V(\rho) = \frac{L_0^2}{2m_2\rho^2} + m_1 g(\rho - l_0)$$

当 $E_0=E_{0c}$ 时，与势能曲线只有一个交点 $\rho=\rho_0$=> 质点“静止”

对应于实际运动为质点 2 以半径 ρ_0 作匀速圆周运动，而质点 1 静止 .



当 $E_0>E_{0c}$ 时，与势能曲线有 2 个交点 ρ_1 和 ρ_2=> 质点“在 ρ_1 和 ρ_2 之间往复运动”



对应于实际运动为质点 2 以作复杂轨道运动（可能闭合可能不闭合），轨道极径在 ρ_1 和 ρ_2 之间；而质点 1 沿竖直方向做往复运动，z 坐标在在 ρ_1-l_0 和 ρ_2-l_0 之间 .

例题 4 分析例题 3 匀速圆周运动的轨道稳定性 .

解：

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+V(\rho)=E_0\Rightarrow m\ddot{\rho}=-V'(\rho)$$

令圆轨道有一个小扰动，使得： $\rho=\rho_0+\epsilon(t)$，$|\epsilon|\ll\rho_0$

则，

$$\left.\begin{aligned}&V'(\rho_0)=0\\&m\ddot{\epsilon}=-V'(\rho_0+\epsilon)\end{aligned}\right\}\Rightarrow m\ddot{\epsilon}=-V''(\rho_0)\epsilon$$

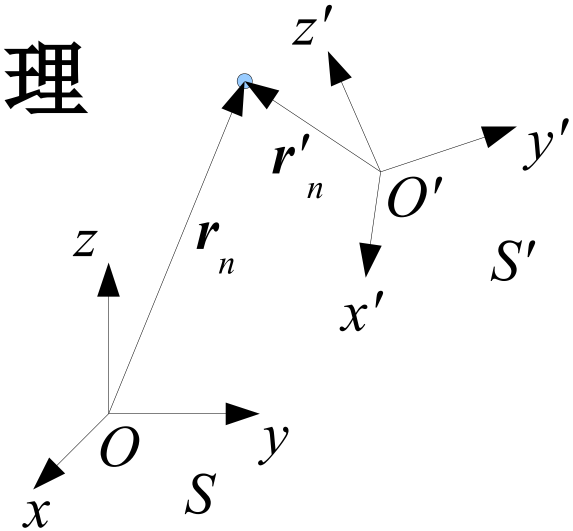
$$V(\rho)=\frac{L_0^2}{2m_2\rho^2}+m_1g(\rho-l_0)\Rightarrow V''(\rho_0)=\frac{3L_0^2}{m_2\rho_0^4}$$

$$\Rightarrow\ddot{\epsilon}=-\frac{3L_0^2}{mm_2\rho_0^4}\epsilon\equiv-\omega_0^2\epsilon\Rightarrow\epsilon(t)=\epsilon_0\cos\omega_0t+\dot{\epsilon}_0\sin\omega_0t\Rightarrow|\epsilon(t)|\leq\sqrt{\epsilon_0^2+\dot{\epsilon}_0^2}$$

即，对圆轨道初始的小扰动，它演化后仍然是小的，轨道只偏离圆很小，所以例题 3 中的圆周轨道是稳定的 .

§5.4 质心系中的动力学基本定理

- 非惯性系中的质点系动力学基本定理



设 S 为惯性系， S' 为非惯性系

设质点 n 在 S 和 S' 中分别用位置矢量 $\boldsymbol{r}_n$ 和 $\boldsymbol{r}_n'$ 表示.

[定义]质点系牵连惯性力： $\boldsymbol{F}_e = -\sum_n m_n \boldsymbol{a}_{ne}$

[定义]质点系科氏力： $\boldsymbol{F}_c = -\sum_n m_n \boldsymbol{a}_{nc}$

[定义]质点系牵连惯性力矩： $\boldsymbol{M}_e = -\sum_n \boldsymbol{r}'_n \times m_n \boldsymbol{a}_{ne}$

[定义]质点系科氏力矩： $\boldsymbol{M}_c = -\sum_n \boldsymbol{r}'_n \times m_n \boldsymbol{a}_{nc}$

[定义]非惯性系中质点系动量：$\boldsymbol{p}_r=\sum_n \boldsymbol{p}_{nr}=\sum_n m_n \boldsymbol{v}_{nr}$

[定义]非惯性系中质点系角动量：$\boldsymbol{L}_{O'}=\sum_n \boldsymbol{r}'_n\times\boldsymbol{p}_{nr}$

[定义]非惯性系中质点系动能：$T_r=\sum_n \frac{1}{2}m_n v_{nr}^2$

非惯性系中质点系动量定理：$\dot{\boldsymbol{p}}_r=\boldsymbol{F}^{(e)}+\boldsymbol{F}_e+\boldsymbol{F}_c$

非惯性系中质点系角动量定理：$\dot{\boldsymbol{L}}_{O'}=\boldsymbol{M}_{O'}^{(e)}+\boldsymbol{M}_e+\boldsymbol{M}_c$

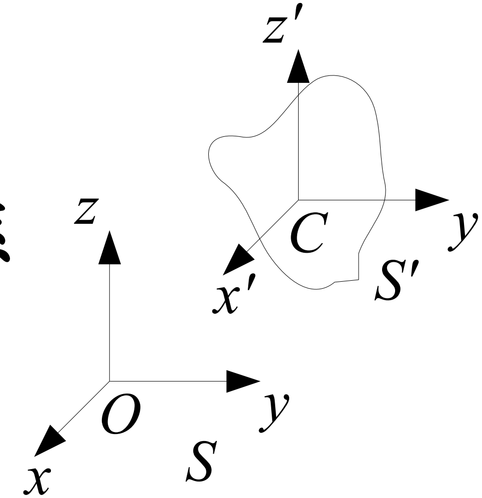
非惯性系中质点系动能定理：

$$dT_r=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_{ne}\cdot d\boldsymbol{r}'_n$$

注：科氏力不做功．请自己证明上述三个定理．

• 质心系（柯尼希坐标系）

[定义]质心系：原点位于质心的平动坐标系



[推论]在质心系中 $\boldsymbol{r}'_C=\dfrac{\sum_n m_n \boldsymbol{r}'_n}{m_t}=0$

[推论]对任意矢量有：$\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\dfrac{d'\boldsymbol{A}}{dt}$

证明：一般情况为 $\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\dfrac{d'\boldsymbol{A}}{dt}+\omega\times A$，$\boldsymbol{\omega}$ 为 S' 相对 S 的角速度.

质心系是平动系，$\boldsymbol{\omega}=0$，得证.

注：以下在质心系中讨论问题时不再区分 $\dfrac{d}{dt}$ 和 $\dfrac{d'}{dt}$.

[定理]在质心系中质点系动量为零

证明：$\boldsymbol{p}_r=\sum_n m_n \boldsymbol{v}_{nr}=\sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}'_n=\dfrac{d}{dt}\sum_n m_n \boldsymbol{r}'_n=\dfrac{d}{dt}(m_t \boldsymbol{r}'_C)=0$

[定理]质点系对于静止系的 O 点和对于质心系的 C 点角动量满足 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{p}_C+\boldsymbol{L}_C'$

证明：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}_n&=\boldsymbol{v}_{ne}+\boldsymbol{v}_{nr}\\ \boldsymbol{v}_{ne}&=\boldsymbol{v}_C\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{L}_O=\sum_n\boldsymbol{r}_n\times m_n\boldsymbol{v}_n=\sum_n\boldsymbol{r}_n\times m_n(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{nr})$$

$$=\sum_n\boldsymbol{r}_n\times m_n\boldsymbol{v}_C+\sum_n\boldsymbol{r}_n\times m_n\boldsymbol{v}_{nr}$$

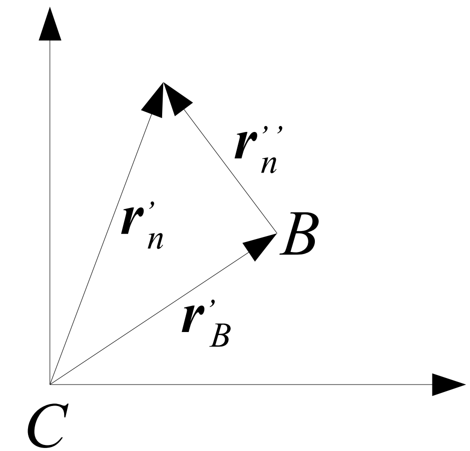
$$=\left(\frac{\sum_n m_n\boldsymbol{r}_n}{m_t}\right)\times m_t\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{p}_C$$

$$=\sum_n(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_n')\times m_n\boldsymbol{v}_{nr}=\sum_n\boldsymbol{r}_C\times m_n\boldsymbol{v}_{nr}+\sum_n\boldsymbol{r}_n'\times m_n\boldsymbol{v}_{nr}$$

$$=\boldsymbol{r}_C\times\Big(\underbrace{\sum_n m_n\boldsymbol{v}_{nr}}_{\boldsymbol{p}_r=0}\Big)+\boldsymbol{L}_C'$$

（证毕）

[定理]质点系对于质心系的任意固定点的角动量均相等



证明：在右图所示质心系中考虑问题.

设 B 为质心系中任意固定点.

令： $\boldsymbol{r}''_n = \boldsymbol{r}'_n - \boldsymbol{r}'_B \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}''_n = \dot{\boldsymbol{r}}'_n$

$$\boldsymbol{L}'_B = \sum_n \boldsymbol{r}''_n \times m_n \dot{\boldsymbol{r}}''_n$$

$$= \sum_n (\boldsymbol{r}'_n - \boldsymbol{r}'_B) \times m_n \dot{\boldsymbol{r}}'_n$$

$$= \underbrace{\sum_n \boldsymbol{r}'_n \times m_n \dot{\boldsymbol{r}}'_n}_{\boldsymbol{L}'_C} - \underbrace{\sum_n \boldsymbol{r}'_B \times m_n \dot{\boldsymbol{r}}'_n}_{= \boldsymbol{r}'_B \times \left(\sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}'_n\right) = \boldsymbol{r}'_B \times \boldsymbol{p}_r = 0}$$

因此有，$\boldsymbol{L}'_B = \boldsymbol{L}'_C$ （证毕）

[柯尼希定理]质点系相对于 S 和质心系 S' 的动能满足：

$$T=\frac{1}{2}m_t v_C^2+T_r$$

证明：

$$\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{nr} \Rightarrow v_n^2=\boldsymbol{v}_n\cdot\boldsymbol{v}_n=(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{nr})\cdot(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{nr})$$

$$=\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_C+2\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{nr}+\boldsymbol{v}_{nr}\cdot\boldsymbol{v}_{nr}$$

$$=v_C^2+2\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{nr}+v_{nr}^2$$

$$T=\sum_n\frac{1}{2}m_n v_n^2=\sum_n\frac{1}{2}m_n\left(v_C^2+2\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{nr}+v_{nr}^2\right)$$

$$=\sum_n\frac{1}{2}m_n v_C^2+\sum_n m_n\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{v}_{nr}+\sum_n\frac{1}{2}m_n v_{nr}^2$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_n m_n\right)}_{m_t}v_C^2+\boldsymbol{v}_C\cdot\underbrace{\left(\sum_n m_n\boldsymbol{v}_{nr}\right)}_{\boldsymbol{p}_r=0}+T_r$$

（证毕）

- 质心系中的动力学基本定理

[动量定理]质心系中，$\dot{\boldsymbol{p}}_r = \boldsymbol{F}^{(e)} - m_t \boldsymbol{a}_c = 0$

证明：质心系中 $\boldsymbol{p}_r = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}}_r = 0$

另一方面，非惯性系中的动量定理 $\dot{\boldsymbol{p}}_r = \boldsymbol{F}^{(e)} + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_c$

在质心系中，$\omega=0$，所以 $\boldsymbol{a}_{ne} = \boldsymbol{a}_C$，$\boldsymbol{a}_{nc} = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{nr} = 0$

$$\boldsymbol{F}_e = -\sum_n m_n \boldsymbol{a}_{ne} = -\left(\sum_n m_n\right)\boldsymbol{a}_C = -m_t \boldsymbol{a}_C$$

$$\boldsymbol{F}_c = -\sum_n m_n \boldsymbol{a}_{nc} = 0$$ 故有，$\dot{\boldsymbol{p}}_r = \boldsymbol{F}^{(e)} - m_t \boldsymbol{a}_c$ （证毕）

[推论]任意平动参考系 S'，$\dot{\boldsymbol{p}}_r = \boldsymbol{F}^{(e)} - m_t \boldsymbol{a}_{O'}$

证明：$\boldsymbol{F}_c = 0$，$\boldsymbol{F}_e = -\sum_n m_n \boldsymbol{a}_{ne} = -\left(\sum_n m_n\right)\boldsymbol{a}_{O'}$ （证毕）

注：这个结果相当于在质心处加一个惯性力

[角动量定理] 在质心系中，$\dot{\boldsymbol{L}}'_C = \boldsymbol{M}_C^{(e)}$

证明：根据非惯性系中的角动量定理，相对质心我们应该有

$$\dot{\boldsymbol{L}}'_C = \boldsymbol{M}_C^{(e)} + \boldsymbol{M}_e + \boldsymbol{M}_c$$

质心系：$\boldsymbol{a}_{ne} = \boldsymbol{a}_C$，$\boldsymbol{a}_{nc} = 0$，$\boldsymbol{r}'_C = 0$

牵连惯性力矩 $\boldsymbol{M}_e = -\sum_n \boldsymbol{r}'_n \times m_n \boldsymbol{a}_{ne} = -\left(\sum_n m_n \boldsymbol{r}'_n\right) \times \boldsymbol{a}_C$

$$= -m_t \boldsymbol{r}'_C \times \boldsymbol{a}_C = 0$$

科氏力矩 $\boldsymbol{M}_c = -\sum_n \boldsymbol{r}'_n \times m_n \boldsymbol{a}_{nc} = 0$ （证毕）

[推论] 如果外力合力矩为零，则在质心系中角动量守恒.

[推论] 对于任意平动参考系 S'，$\dot{\boldsymbol{L}}_{O'} = \boldsymbol{M}_{O'}^{(e)} - \boldsymbol{r}'_C \times m_t \boldsymbol{a}_{O'}$

证明：$\boldsymbol{M}_c = 0$，$\boldsymbol{M}_e = -\sum_n \boldsymbol{r}'_n \times m_n \boldsymbol{a}_{ne} = -\left(\sum_n m_n \boldsymbol{r}'_n\right) \times \boldsymbol{a}_{O'} = -\boldsymbol{r}'_C \times m_t \boldsymbol{a}_{O'}$

（证毕） 注：这一结果相当于在质心加上惯性力

[动能定理]在质心系中，$dT_r=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n$

证明：非惯性系中的动能定理

$$dT_r=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_{ne}\cdot d\boldsymbol{r}'_n$$

质心系： $\boldsymbol{a}_{ne}=\boldsymbol{a}_C \Rightarrow \sum_n \boldsymbol{F}_{ne}\cdot d\boldsymbol{r}'_n=-\sum_n m_n\boldsymbol{a}_C\cdot d\boldsymbol{r}'_n$

$$=-\boldsymbol{a}_C\cdot\left(\sum_n m_n d\boldsymbol{r}'_n\right)=-\boldsymbol{a}_C\cdot d\left(\sum_n m_n\boldsymbol{r}'_n\right)=0$$（证毕）

注：质心系中的动能定理和惯性系中的动能定理形式上是一样的.

[推论]在任意平动参考系 S' 中，动能定理可表述为

$$dT_r=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n-m_t\boldsymbol{a}_{O'}\cdot d\boldsymbol{r}'_C$$

证明：只需证明 $\sum_n \boldsymbol{F}_{ne}\cdot d\boldsymbol{r}'_n=-m_t\boldsymbol{a}_{O'}\cdot d\boldsymbol{r}'_C$ （请自己补充）

注：这一结果相当于在质心加上惯性力

§5.5 二体问题

- 关于质点系动力学基本定理的讨论

动量定理	矢量形式	3 个标量方程
角动量定理	矢量形式	3 个标量方程
动能定理	标量形式	1 个标量方程

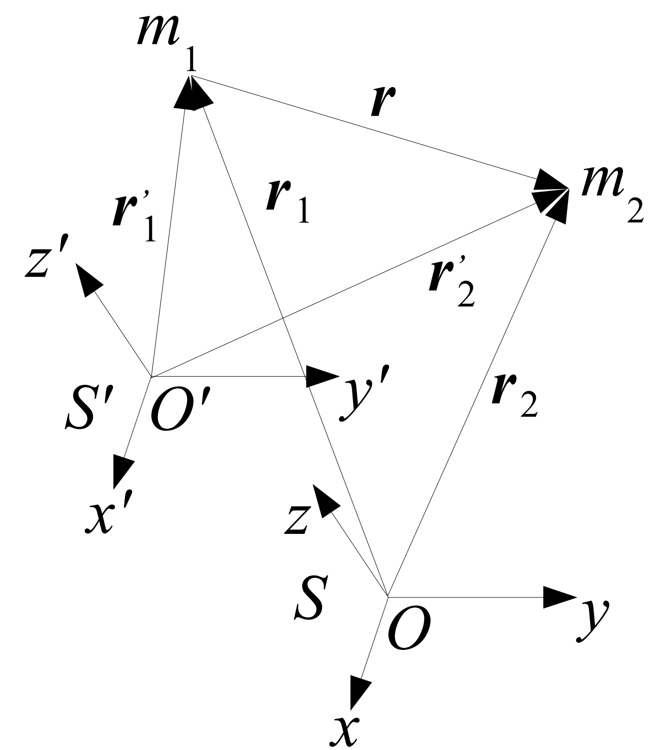
共 7 个标量方程

故：利用它们原则上能解决自由度小于 7 的质点系的运动问题.

比如二体问题 $DOF=6$，刚体运动问题 $DOF\leq 6$

对于一般的质点系问题，三个定理只能对运动进行整体描述，而不能确定每个质点运动的细节.

- 二体问题约化为单体问题



考虑质点 m_1 和 m_2 组成的孤立体系，

它们的位置矢量分别记为 r_1 和 r_2.

[定义] m_2 对 m_1 的相对位矢： $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$

[定义] m_2 对 m_1 的相对速度： $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1$

[引理] 对于任意平动参考系 S'，有

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1=\boldsymbol{r},\quad \dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{\boldsymbol{r}}'_2-\dot{\boldsymbol{r}}'_1=\dot{\boldsymbol{r}}$$

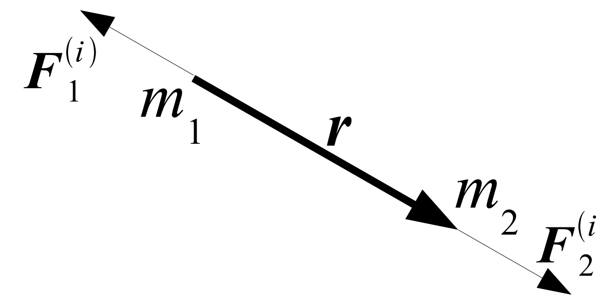
证明： $\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1=(\boldsymbol{r}'_2+\overrightarrow{OO'})-(\boldsymbol{r}'_1+\overrightarrow{OO'})=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 \Rightarrow \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$

S' 是平动坐标系，所以

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\boldsymbol{r}}_1=\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{v}'_1\\ \dot{\boldsymbol{r}}_2=\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{v}'_2\end{array}\right\}\Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1=\boldsymbol{v}'_2-\boldsymbol{v}'_1=\dot{\boldsymbol{r}}'_2-\dot{\boldsymbol{r}}'_1\Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{\boldsymbol{r}}$$ （证毕）

注：这说明 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$ 与平动坐标系的选取无关，以下在 S' 中仍记为 $\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}$.

[引理]假定二质点间相互作用大小只与它们之间的距离有关，则这对内力是保守力.



证明：根据牛顿第三定律，二质点间相互作用共线，大小相等，方向相反，故

$$\boldsymbol{F}_1^{(i)}=-\boldsymbol{F}_2^{(i)}$$

$$\Rightarrow \sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\,\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{F}_1^{(i)}\cdot d\,\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_2^{(i)}\cdot d\,\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_2^{(i)}\cdot d\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)=\boldsymbol{F}_2^{(i)}\cdot d\,\boldsymbol{r}$$

假定相互作用大小只与距离有关，即 $\boldsymbol{F}_2^{(i)}=\dfrac{F(r)\boldsymbol{r}}{r}$

注意到 $\boldsymbol{r}\cdot d\,\boldsymbol{r}=\dfrac{1}{2}d\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)=r\,dr \Rightarrow \boldsymbol{F}_2^{(i)}\cdot d\,\boldsymbol{r}=F(r)dr$

故存在势能函数 $V(r)=-\int F(r)dr$ => 内力是保守力.（证毕）

注：以下我们讨论的二体问题均假定质点间相互作用只与相互间距离 r 有关，故存在势能函数，使得 $\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\,\boldsymbol{r}_n=-dV(r)$

[定义] m_2 和 m_1 的约化质量：$\mu=\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

[定理] 在任意平动参考系 S' 中， m_2 对 m_1 的相对位矢和相对速度满足

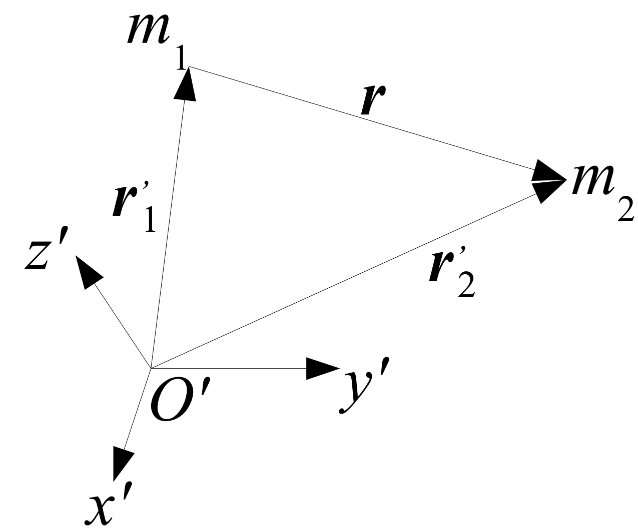
$$\begin{cases} \boldsymbol{r}\times\mu\,\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{L}_0 & \text{（不依赖于 } S' \text{ 的常矢量）} \\ \dfrac{1}{2}\mu\,\dot{\boldsymbol{r}}^2+V(r)=E_0 & \text{（不依赖于 } S' \text{ 的常数）} \end{cases}$$

证明一：注意到等式左边的量在任意平动参考系中都是一样的．所以如果它们是常量，那么必然不依赖于 S'.

于是可以选一个特殊的平动参考系证明它们在该参考系中为常量即可．当然最简单的选择就是选择惯性系 S.

质点系不受外力，故质点系动量守恒，角动量守恒；内力为保守力，故质点系机械能守恒．利用它们即可（证明略）．

证明二：直接在平动参考系 S' 证明.



质点系不受外力，根据 S' 中的动量定理

$$\dot{\boldsymbol p}_r=\boldsymbol F^{(e)}-m_t\boldsymbol a_{O'}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+m_2\dot{\boldsymbol r}'_2\right)=-m_t\boldsymbol a_{O'}$$

角动量定理

$$\dot{\boldsymbol L}_{O'}=\boldsymbol M^{(e)}_{O'}-\boldsymbol r'_C\times m_t\boldsymbol a_{O'}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol r'_1\times m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+\boldsymbol r'_2\times m_2\dot{\boldsymbol r}'_2\right)=-\boldsymbol r'_C\times m_t\boldsymbol a_{O'}$$

质心定义 $\boldsymbol r'_C=(m_1\boldsymbol r'_1+m_2\boldsymbol r'_2)/m_t$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol r'_1\times m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+\boldsymbol r'_2\times m_2\dot{\boldsymbol r}'_2\right)$$

$$=\frac{m_1\boldsymbol r'_1+m_2\boldsymbol r'_2}{m_t}\times\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+m_2\dot{\boldsymbol r}'_2\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{(m_1\boldsymbol r'_1+m_2\boldsymbol r'_2)\times(m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+m_2\dot{\boldsymbol r}'_2)}{m_t}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol r'_1\times m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+\boldsymbol r'_2\times m_2\dot{\boldsymbol r}'_2-\frac{(m_1\boldsymbol r'_1+m_2\boldsymbol r'_2)\times(m_1\dot{\boldsymbol r}'_1+m_2\dot{\boldsymbol r}'_2)}{m_t}\right]=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\mu\,\boldsymbol r\times\dot{\boldsymbol r}\right)=0\Rightarrow\mu\,\boldsymbol r\times\dot{\boldsymbol r}=\boldsymbol L_0$$ （常矢量）

与平动参考系 S' 的选取无关 =>$\boldsymbol L_0$ 也不依赖于 S' 的选取.

动能定理 $dT_r=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n+\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}'_n-m_t\boldsymbol{a}_{O'}\cdot d\boldsymbol{r}'_C$

势能函数 $\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_n=-dV(r)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}'^2_1+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}'^2_2+V(r)]=-m_t\boldsymbol{a}_{O'}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_C$$

动量定理 $\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{\boldsymbol{r}}'_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}'_2\right)=-m_t\boldsymbol{a}_{O'}$

质心定义 $\boldsymbol{r}'_C=(m_1\boldsymbol{r}'_1+m_2\boldsymbol{r}'_2)/m_t$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}'^2_1+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}'^2_2+V(r)]=\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}'_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}'_2}{m_t}\cdot\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{\boldsymbol{r}}'_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}'_2\right)=\frac{d}{dt}\frac{(m_1\dot{\boldsymbol{r}}'_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}'_2)^2}{2m_t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}'^2_1+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}'^2_2-\frac{(m_1\dot{\boldsymbol{r}}'_1+m_2\dot{\boldsymbol{r}}'_2)^2}{2m_t}+V(r)]=0\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2+V(r)\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2+V(r)=E_0\text{（常数）}$$

与 S' 选取无关 $=>E_0$ 也不依赖于 S' 的选取.（证毕）

[推论] 在任意平动参考系 S' 中，m_2 对 m_1 的运动等价与质量为 μ 的质点在中心力场 $V(r)$ 中的运动.

证明：上一定理告诉我们，在任意平动参考系 S' 中，m_2 对 m_1 的相对位矢和相对速度满足的方程恰好与中心力场 $V(r)$ 中质量为 μ 的运动质点相对力心的位矢和速度满足的方程相同.（证毕）

[推论] 二体问题可约化为单体问题来处理.

证明：质点系不受外力，根据质心运动定理，质心速度恒定，那么

$$\boldsymbol{r}_C(t)=\boldsymbol{r}_{C0}+\boldsymbol{v}_C t$$

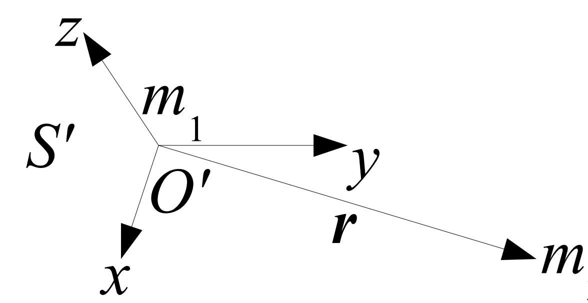
根据质心定义和 m_2 对 m_1 的相对位矢 $\boldsymbol{r}$ 可求得

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_C-(\mu/m_1)\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_C+(\mu/m_2)\boldsymbol{r}$$

故只要解出了 m_2 对 m_1 的相对位矢 $\boldsymbol{r}$ 即可解决二体问题.

上一推论告诉我们这相当于解中心力场中的单体问题.（证毕）

- # 双星问题



将双星简化为两个质点，在 m_1 建立图示平动参考系 S'，考察的 m_2 运动，则有

[推论] m_2 相对 m_1 的运动仍满足开普勒三定律.

证明：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\mu\,\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\right)=0\\&\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(m_2\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\right)=0$$

$$\left.\begin{aligned}&d\left[\frac{1}{2}\mu\,\dot{\boldsymbol{r}}^2+V(r)\right]=0\\&V(r)=-\frac{Gm_1 m_2}{r}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&d\left[\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}^2+\tilde{V}(r)\right]=0\\&\tilde{V}(r)=-\frac{G(m_1+m_2)m_2}{r}\end{aligned}\right.$$

于是 m_2 相当于在一个等效的引力场 $\tilde{V}(r)$ 中运动，因此有

开普勒三定律成立，即

(1) 在 S' 中观察，m_2 的轨道是椭圆，m_1 在其一焦点上.

(2) 在 S' 中观察，m_2 和 m_1 的连线在单位时间内扫过的面积相等.

(3) 在 S' 中观察，m_2 运动周期的平方正比于轨道半长轴的立方，

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$$

唯一的小修正在上式右边分母上，以 m_1+m_2 代替原先的 m_1（证毕）

注：二体问题中两个质点的地位是对等的，即如果以 m_2 为原点建立平动坐标系，则在其中观察 m_1 的运动也满足开普勒三定律.

注：日心说比地心说简单是考虑了太阳系其它行星运行规律而言.

注：在日心系中，太阳质量 m_1 远远大于行星质量 m_2，故开普勒第三定律的修正量很小.

• 二体弹性散射问题　弹性 <=> 内力为保守力 <=> $V(r)=k/r$

[定义] 实验室系：相对实验室静止的惯性参考系 S

考虑在 S 系中，质量 m_2 的粒子 2 以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 从无穷远处射向质量为 m_1 的粒子 1，瞄准距离为 b；散射后，二粒子运动，最终相距无穷远.

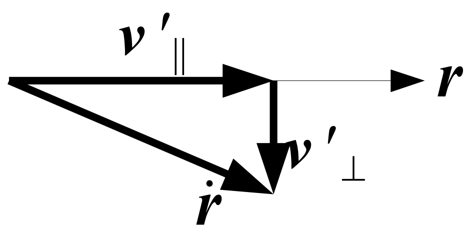
[定义] 靶粒子系：原点建立在 m_1 上的平动参考系

[引理] 在任意平动参考系中观察入射态和出射态，粒子 2 相对于粒子 1 的速度平行于二粒子的相对位矢.

证明：$\mu\,\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{L}_0$　（常矢量不依赖于平动参考系的选取）

在实验室系中 $L_0=|\boldsymbol{L}_0|=\mu b v_0 \Rightarrow |\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|=bv_0$（任意平动参考系）

相对速度的分解　$v'_\perp=|\boldsymbol{v}'_\perp\times\hat{\boldsymbol{r}}|=|\dot{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}|=\dfrac{bv_0}{r}$



入射态和出射态 $r=\infty$

$\Rightarrow v'_\perp=0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}'_\parallel$

（证毕）

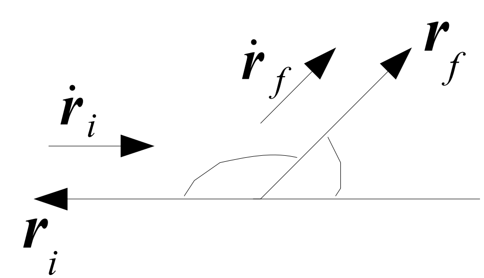
[定义] 偏转角：在平动参考系中，从入射态到出射态粒子 2 对 1 的相对速度的转角 .

[推论] 偏转角的定义不依赖于平动参考系的选取，即在任意平动参考系中观察到的偏转角相同 .

证明：因为我们已经证明粒子 2 对 1 的相对速度不依赖于平动参考系的选取，所以这个推论是显然的 .

[推论] 偏转角等于从入射态到出射态粒子 2 对 1 的相对位矢转角的补角 .

证明：前一引理告诉我们在任意平动参考系中入射态和出射态粒子 2 对 1 的相对速度与相对位矢平行，可在靶粒子系中观察



图像如右图所示，偏转角与相对位矢转角互补 .（证毕）

[定理] 在任意平动参考系中偏转角 φ 满足 $\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)=\frac{k/b}{\mu v_0^2}$

证明：根据引理，任意平动参考系中偏转都相同，故选择特殊的平动参考系，在靶粒子系中讨论问题.

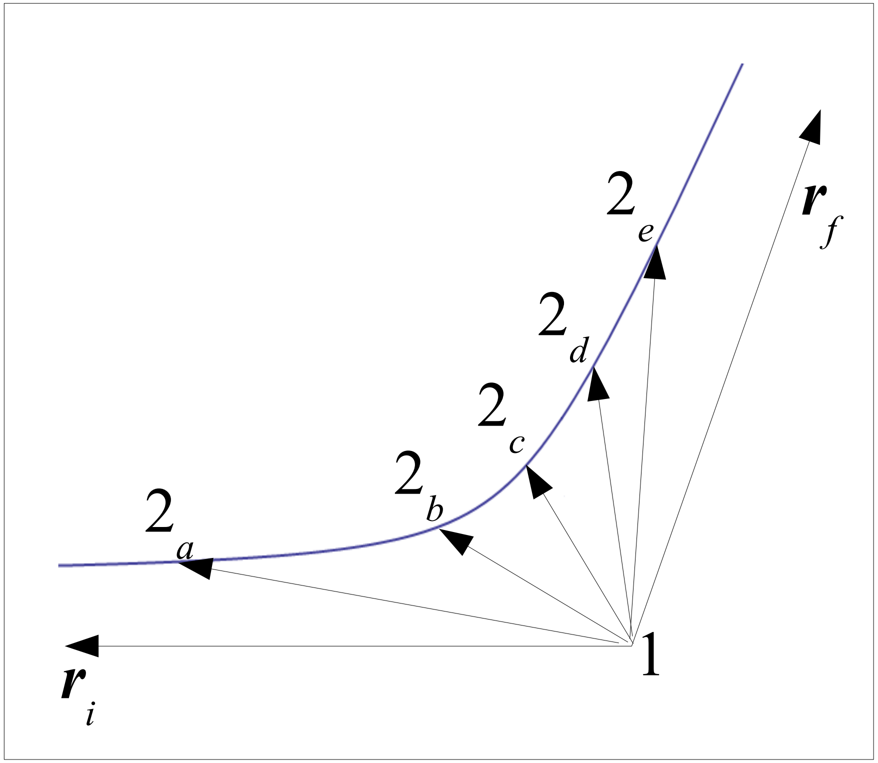
基本方程 $\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{r}\times\mu\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{L}_0 \\ &\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{k}{r}=E_0 \end{aligned}\right\}$ ⟺ 质量为 μ 的粒子在平方反比斥力场中运动

这一单体问题我们已经在第四章已经解决，偏转角满足

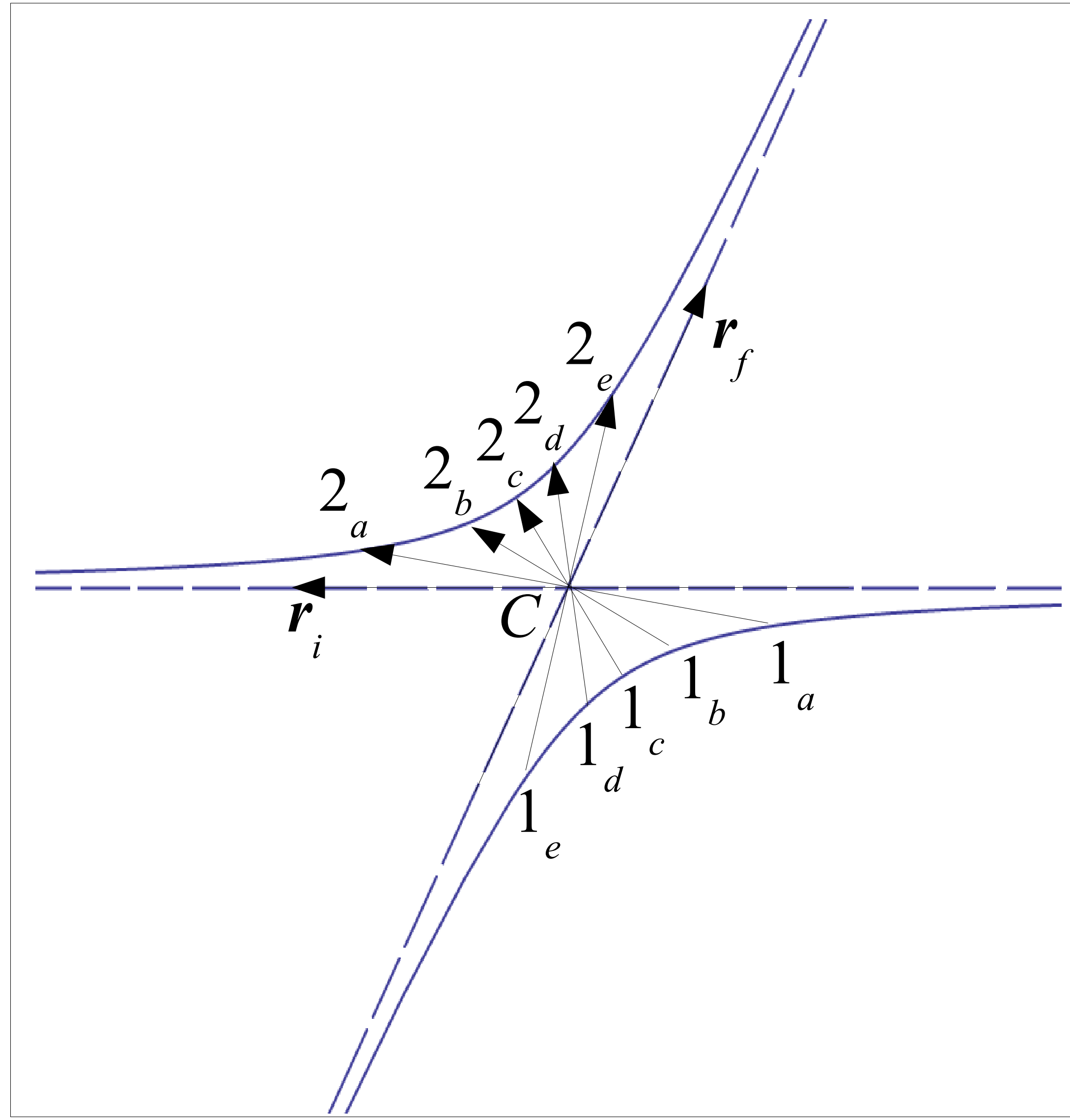
$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)=\frac{k/b}{\mu v_0^2}$$ （证毕）

例题 5 分别在靶粒子系、质心系和实验室系中定性画出粒子运动图像

解：在靶粒子系中，粒子 1 是不动的，粒子 2 的运动轨道是双曲线，且粒子 1 在双曲线的异测焦点上. 图像如下



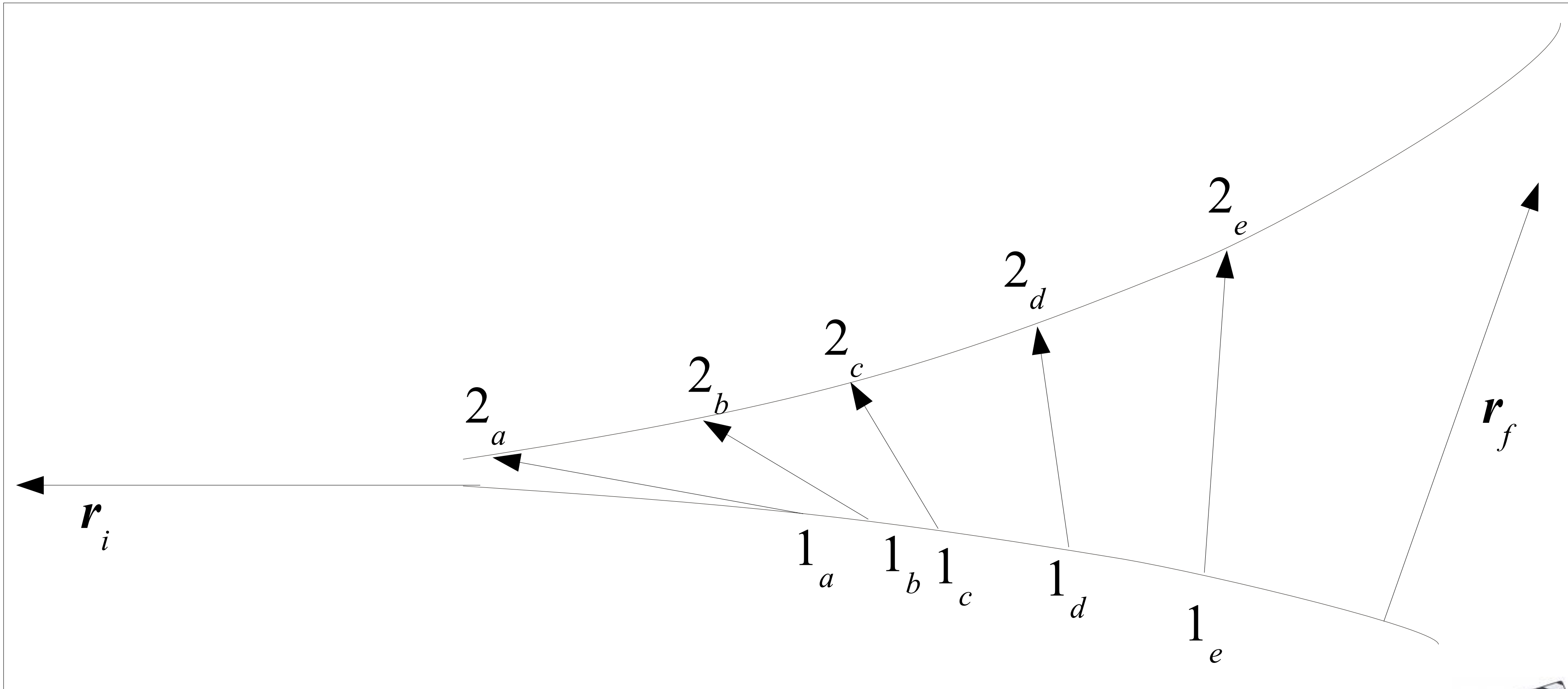
靶粒子系



质心系

注意到质心系中质心不动，
并且质心在两质点连线上，
同一时刻相对位矢应平行于
靶粒子系中相对位矢方向，
于是可以根据靶粒子系中的相对位矢画出质心系中相对位矢的图像

在实验室系中，质心以恒定速度 $\boldsymbol{v}_C=(m_2/m_t)\boldsymbol{v}_0$ 运动，故只需将质心系中两粒子的位置叠加上位移 $\boldsymbol{v}_C t$ 即可．



实验室系

课堂练习题：在实验室系中求解出射态二粒子的速度．

提示：先在质心系中求解，然后转换到实验室系中．

- N 体问题
  - 求解 N 个质点在万有引力作用下的运动规律问题
  - 解 $3N$ 个二阶微分方程— $6N$ 个积分常数—解析求解几乎不可能—数值计算求解

$$\left\{\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= \sum_{l\neq n} \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{F}_{nl} \\ m_n \ddot{y}_n &= \sum_{l\neq n} \hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{F}_{nl} \\ m_n \ddot{z}_n &= \sum_{l\neq n} \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{F}_{nl} \end{aligned}\right. \qquad n=1,2,\cdots,N$$

或 $$m_n \ddot{\boldsymbol{r}}_n = \sum_{l\neq n} \boldsymbol{F}_{nl}, \quad n=1,2,\cdots,N$$

[定义] 运动积分：如果质点系在运动过程中，某个依赖于质点位置、质点速度以及时间的函数保持不变，则该函数成为质点系的运动积分（或首次积分，第一积分）

[推论] $N \geq 3$ 体问题至少存在 10 个独立运动积分，它们分别是动量的三个分量、角动量的三个分量、系统的总能量、以及质点系质心的初始位置．

证明：质点系不受外力，故动量守恒 $\boldsymbol{p}=\sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n=\boldsymbol{p}_0 \equiv (c_1 \hat{\boldsymbol{x}}+c_2 \hat{\boldsymbol{y}}+c_3 \hat{\boldsymbol{z}})$

角动量守恒 $\boldsymbol{L}=\sum_n \boldsymbol{r}_n \times m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n=\boldsymbol{L}_0 \equiv (c_4 \hat{\boldsymbol{x}}+c_5 \hat{\boldsymbol{y}}+c_6 \hat{\boldsymbol{z}})$

万有引力是保守力，故机械能守恒 $E=\sum_n \left(\frac{1}{2} m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n\right)+V(\boldsymbol{r}_{1,} \boldsymbol{r}_{2,} \cdots, \boldsymbol{r}_N)=c_7$

质心运动定理 $\dot{\boldsymbol{r}}_C=\frac{\boldsymbol{p}_0}{m_t} \Rightarrow \boldsymbol{r}_C=\frac{\boldsymbol{p}_0 t}{m_t}+\boldsymbol{r}_{C0} \Rightarrow \boldsymbol{r}_C-\frac{\boldsymbol{p}_0 t}{m_t}=\boldsymbol{r}_{C0} \equiv (c_8 \hat{\boldsymbol{x}}+c_9 \hat{\boldsymbol{y}}+c_{10} \hat{\boldsymbol{z}})$

在无额外限制下十个常数中任何一个都不是其它九个的函数，故它们是相互独立的．（证毕）

假如 N 体问题中存在 $6N$ 个独立的运动积分—问题得到完全解决 .

[勃隆斯 - 庞加莱定理] 当 $N\geq 3$ ，不存在上述 10 个运动积分以外的运动积分 .

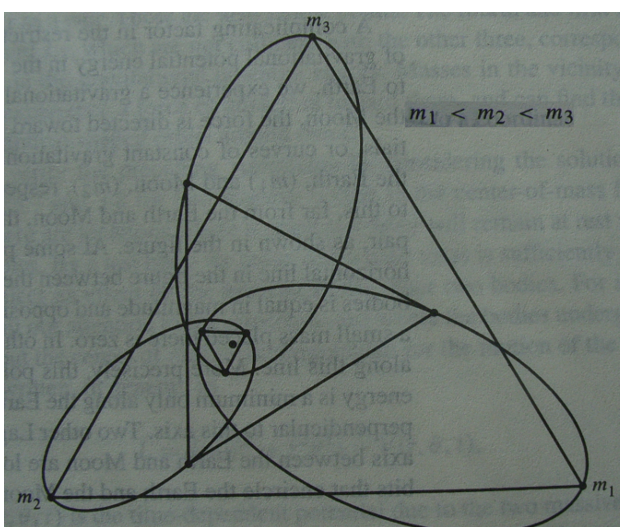
因此对于 $N(\geq 3)$ 体问题，没有寻找解析解的普遍方法 .

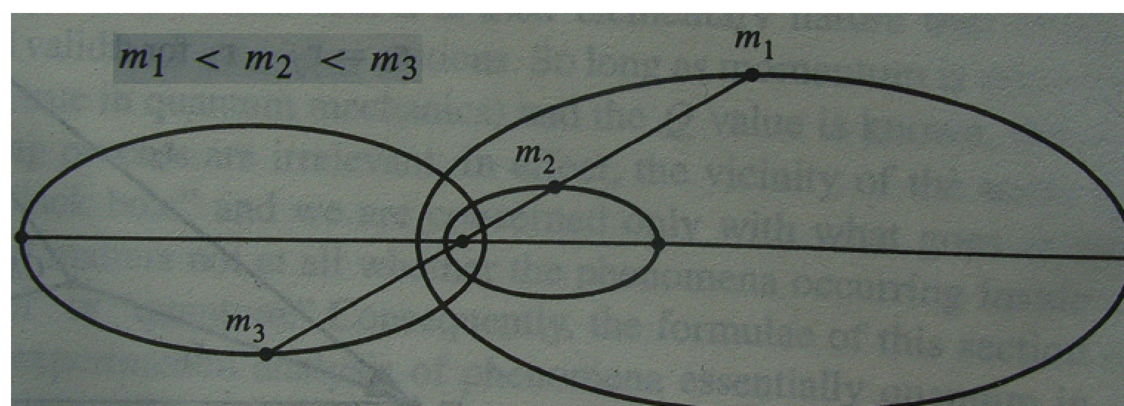
例子：三体问题定型解 (拉格朗日 , 欧拉)

质点的几何位形在运动中保持不变 , 3 质点绕质心做平面运动 .

(1) 等边三角形 : 3 质点位于等边三角形的顶点 . (稳定)

(2) 直线形 : 3 质点成一直线 , 一定条件下，做定型运动 . (不稳定，无实际意义)





§5.6 变质量系统

- 基本概念与假设

到目前为止，我们研究的质点系的质点数不随时间改变，因此质点系质量不变．而实际问题中，往往有新的质点加入被考察的质点系，或者有部分质点从被考察的质点系中分离．

[定义]变质量系统：质点数或总质量随时间变化的质点系．

注：前面讨论的质点系的动力学基本定理不适用于变质量系统．

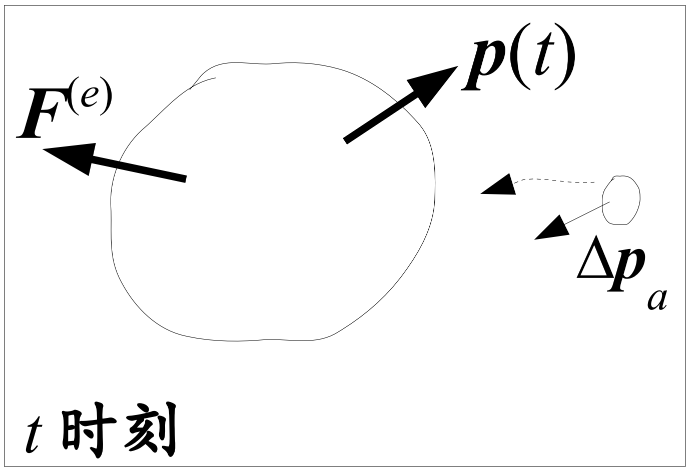
[假设]加入系统或从系统分离的质量（质点数）是小量．

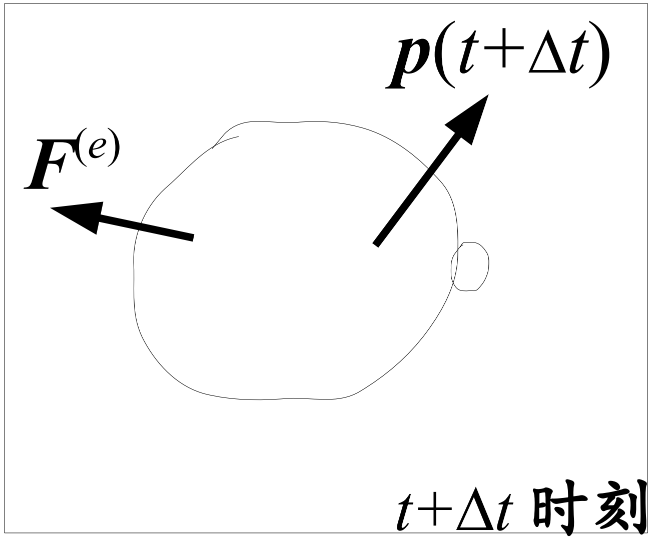
相邻两次发生加入或分离的时间间隔是小量．

注：在这一假定下，系统的质量是时间的连续可微函数．

- 变质量系统动量定理

考虑质点加入变质量系统的情形





[变质量系统动量定理]

$$\frac{d\,\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)}+\frac{d\,\boldsymbol{p}_a}{dt}$$

证明：变质量系统和新加入的质点构成的质点系是恒质量系统，应用质点系动量定理，

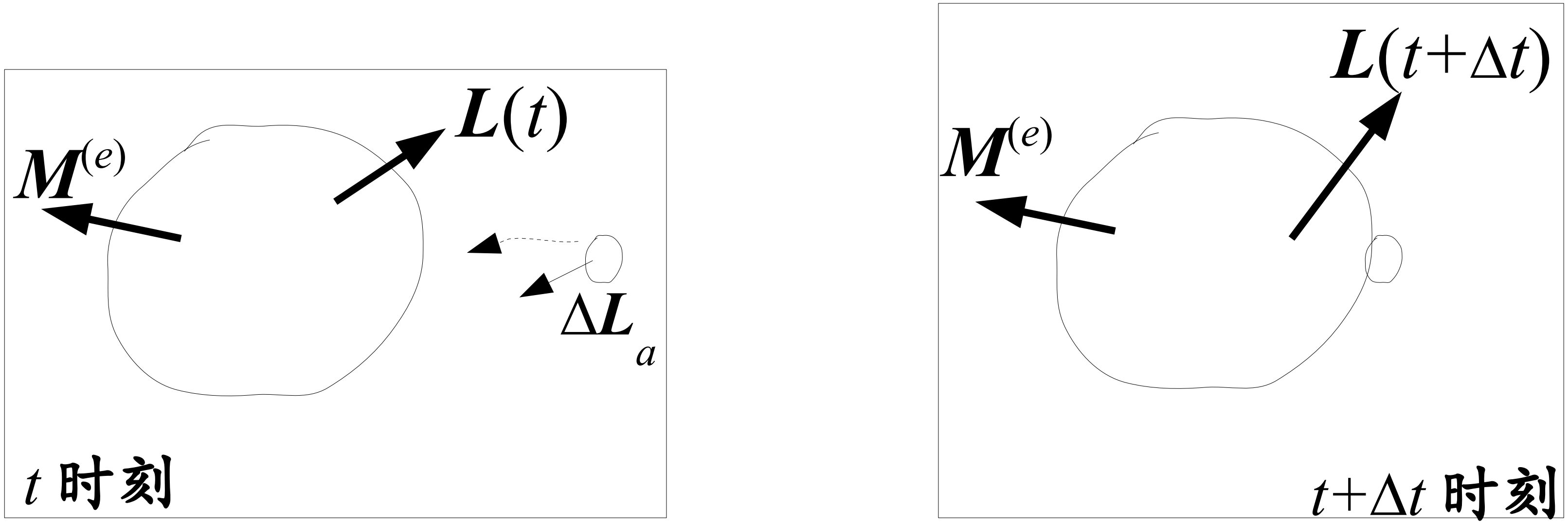
$$\boldsymbol{p}(t+\Delta t)-[\boldsymbol{p}(t)+\Delta\boldsymbol{p}_a]=\boldsymbol{F}^{(e)}\Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{p}(t+\Delta t)-\boldsymbol{p}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{F}^{(e)}+\frac{\Delta\boldsymbol{p}_a}{\Delta t}$$

（证毕）

• 变质量系统角动量定理



注：这里的角动量和外力合力矩是相对于惯性系的任意定点而言

[变质量系统角动量定理] $$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{M}^{(e)}+\frac{d\boldsymbol{L}_a}{dt}$$

证明：类似于动量定理的证明，对变质量系统和附加质点组成的质点系应用动量矩定理，

$$\boldsymbol{L}(t+\Delta t)-[\boldsymbol{L}(t)+\Delta\boldsymbol{L}_a]=\boldsymbol{M}^{(e)}\Delta t\Rightarrow\frac{\Delta\boldsymbol{L}}{\Delta t}=\boldsymbol{M}^{(e)}+\frac{\Delta\boldsymbol{L}_a}{\Delta t}$$ （证明）

- 变质量质点的运动

[定义]变质量质点：当只关心变质量系统的平动时，可以假想为一个位于质心的质量可变的点的运动，这个点被称为变质量质点.

设 t 时刻变质量质点质量为 m，速度为 $\boldsymbol{v}$； dt 时间内有质量为 dm 的小质点以速度 $\boldsymbol{u}$ 加入到该变质量质点上，则有

[推论]变质量质点的运动微分方程为 $\dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}^{(e)}+\boldsymbol{u}\dfrac{dm}{dt}$

证明：应用变质量系统的动量定理

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)}+\frac{d\boldsymbol{p}_a}{dt}$$ ，其中 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$,

dt 时间内有质量为 dm 的小质点以速度 $\boldsymbol{u}$ 加入到该变质量质点上，故 $d\boldsymbol{p}_a=(dm)\boldsymbol{u}\Rightarrow\dfrac{d\boldsymbol{p}_a}{dt}=\boldsymbol{u}\dfrac{dm}{dt}$ （证毕）

记附加质点相对于变质量质点的速度为：$\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$

[推论]变质量质点的运动微分方程也可以表示为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(e)}+\boldsymbol{u}_r\frac{dm}{dt} \qquad \text{（米歇尔斯基方程）}$$

证明：将上一推论中 $d(m\boldsymbol{v})$ 展开并将 dm 相关的项移到等号右边即可．（证毕）

注：以上两种形式的运动微分方程，具体用哪一个更方便视情况而定，一般 $\boldsymbol{u}$ 已知时用前者方便，$\boldsymbol{u}_r$ 已知时用后者方便．

注：dm 表示变质量质点的质量增量，可正可负，分别表示有质点附加到变质量质点上或从该变质量质点分离．

课堂习题：（齐奥尔科夫斯基第一问题）假定不受外力下火箭以恒定速度 $\boldsymbol{u}_r$ 相对火箭喷气，喷气方向与火箭速度 $\boldsymbol{v}$ 相反，求 $\boldsymbol{v}$ 与火箭质量 m 的关系．假定 $t=0$, $m=m_0$, $\boldsymbol{v}=0$.

例题 6 球形雨滴在重力场中下落，由于不断吸收水分而逐渐变大．设雨滴吸收水分的速率与表面面积成正比，开始下落时雨滴半径近似为零．试求雨滴的加速度．忽略空气阻力．空气中的水分近似看成静止的．

解：将空气中的水分看成是附加质点，且 $\boldsymbol{u}=0$, 用微分方程的前一种形式．

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=m\boldsymbol{g}+0$$

以竖直向下为运动正方向，上方程可化为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{m}v+m\dot{v}=mg\Rightarrow\frac{\dot{m}}{m}v+\dot{v}=g\\&\text{已知 }\dot{m}\propto S\propto m^{2/3},\text{ 令 }\dot{m}=\xi m^{2/3}\Rightarrow 3m^{1/3}=\xi t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{3v}{t}+\dot{v}=g$$

经观察，知 $v=\dfrac{g}{4}t\Rightarrow\dot{v}=\dfrac{g}{4}$．即雨滴将以 g/4 匀加速下落．