第八章

拉格朗日动力学

§8.1 基本方程及其简单应用

- 基本方程

$$L=T-V$$

理想约束的完整有势系统

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \quad , \quad (\alpha=1,2,\cdots,s)$$

存在非有势力的理想约束的完整系统

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\tilde{Q}_\alpha \quad , \quad (\alpha=1,2,\cdots,s)$$

注：通常约束力不出现在动力学方程中；方程组的数目等于自由度数；每一个方程都是二阶常微分方程

- 简单应用

处理问题的基本步骤（套路固定）：

(1) 判断是否为理想约束的完整有势系统

(2) 判断系统自由度并选择合适的广义坐标

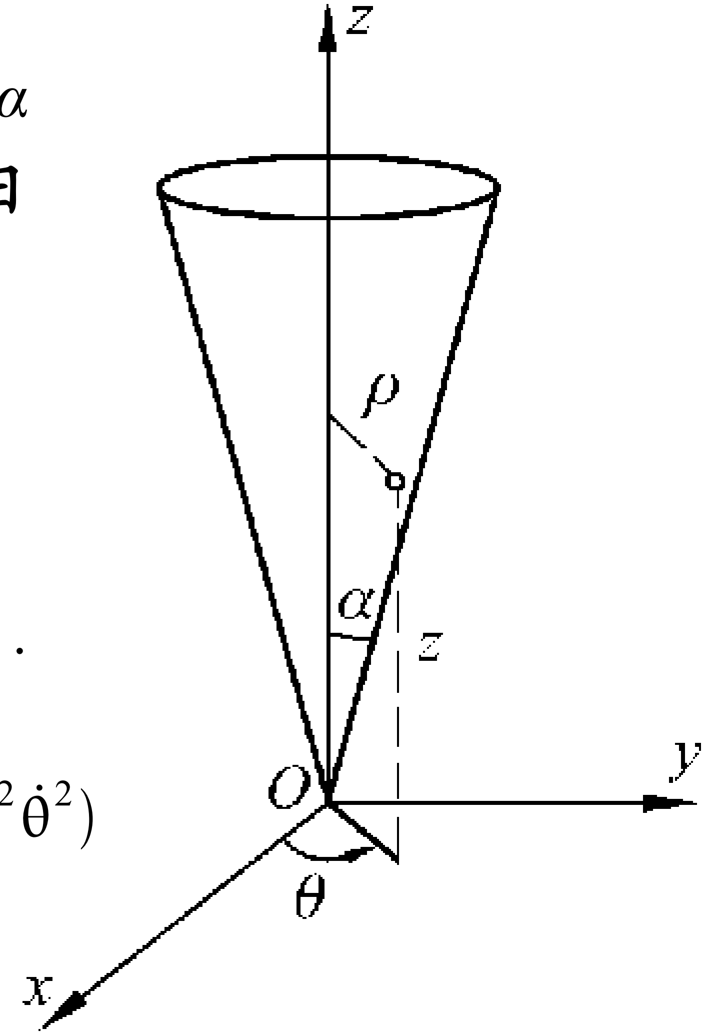
(3) 将 $L=T-V$ 表示成只含广义坐标、广义速度和时间的函数 *

(4) 对于有势系统，将 L 代入拉格朗日方程得到系统的运动微分方程

(5) 对于非有势系统，还通过定义要求出非有势力对应的广义力，连同 L 一起代入拉格朗日方程得到系统的运动微分方程

注：从处理问题角度来看，拉格朗日方法比较规范，不需要太多的技巧。不像牛顿方法对同一个问题的处理可以采用多种方案.

例题 1 质量为 m 的质点，被约束在半顶角为 α 的光滑固定圆锥面上运动，试通过拉格朗日方程，写出质点的运动微分方程.



解：此为理想约束完整有势系.

建立图示本征系 $Oxyz$ 以及取柱坐标 ρ,θ,z

面内运动自由度为 2，可选 ρ,θ 为广义坐标.

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho+\rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\,\boldsymbol{e}_z\\&\rho=z\tan\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow T=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2\csc^2\alpha+\rho^2\dot{\theta}^2)$$

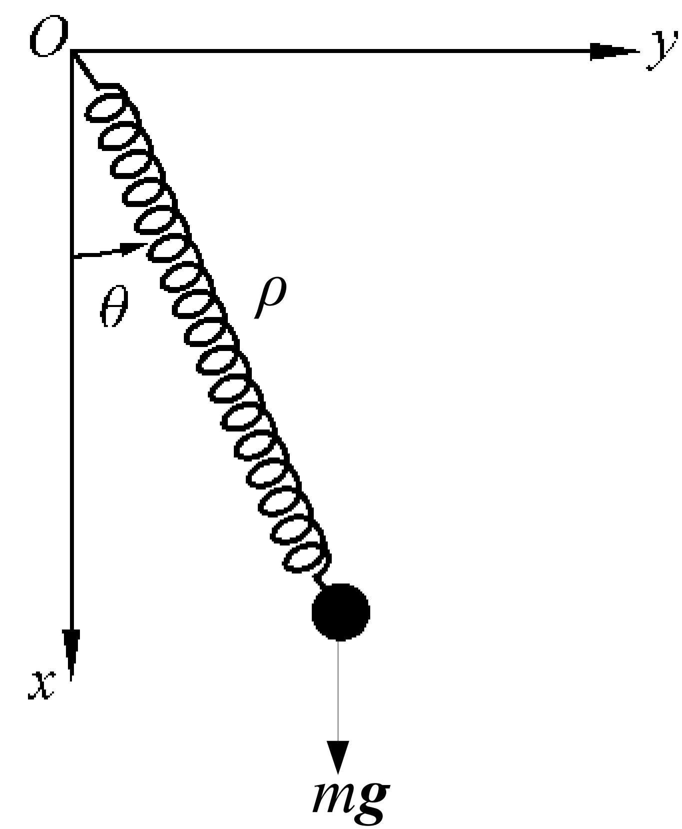
$$V=mgz=mg\,\rho\cot\alpha$$

$$L=T-V=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2\csc^2\alpha+\rho^2\dot{\theta}^2)-mg\,\rho\cot\alpha$$

代入拉格朗日方程得到

$$\left\{\begin{aligned}&\ddot{\rho}\csc^2\alpha-\rho\,\dot{\theta}^2+g\cot\alpha=0\\&\frac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt}=0\Rightarrow\rho^2\dot{\theta}=const.\end{aligned}\right.$$

例题 2 求弹簧摆的振动方程．已知质量为 m 的摆锤挂在轻弹簧上，弹簧一端固定于点 O 并能在 xy 面内自由旋转．弹簧的自然长度为 l ，劲度系数为 k.



解：理想约束完整有势系．

自由度为 2，选极坐标 ρ,θ 为广义坐标．

$$T=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2),\ V=-mg\,\rho\cos\theta+\frac{k}{2}(\rho-l)^2$$

将 $L=T-V$ 代人拉格朗日方程可得 ...

$$\begin{cases}\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\theta}^2-g\cos\theta+\dfrac{k}{m}(\rho-l)=0\\ \rho\,\ddot{\theta}+2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}+g\sin\theta=0\end{cases}$$

大角度摆

对于在小角度平衡位置附近的微振动，上述方程可化为 ...

$$\ddot{\theta}+\frac{g\,\theta}{l_0}=0,\ \ddot{\xi}+\frac{k\,\xi}{m}=0,\ 其中\ l_0=l+\frac{mg}{k},\ \xi=\rho-l_0$$

§8.2 守恒定律

- 对称性与守恒量的关系

【定义】对称性：力学系统在坐标或时间的变换下的不变性。反映为在该变换下系统的拉格朗日函数不变．

例如：若 $\forall\, \epsilon, L(x+\epsilon, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$

我们说系统在 x 方向的平移（变换）下不变，即具有对称性

容易证明，这等价于说 $\partial L/\partial x = 0.$

【定义】连续变换：变换过程中系统的坐标或时间可以表示成随某个参数连续变化的形式．

例如：$q_\alpha \to Q_\alpha^\epsilon$，$Q_\alpha^0 = q_\alpha$ ，且 $\lim\limits_{\Delta\epsilon \to 0} Q_\alpha^{\epsilon+\Delta\epsilon} = Q_\alpha^\epsilon$

$t \to \tau^\epsilon$，$\tau^0 = t$ ，且 $\lim\limits_{\Delta\epsilon \to 0} \tau^{\epsilon+\Delta\epsilon} = \tau^\epsilon$

【诺特定理】对于系统相应于连续变换的对称性，总有一个系统的守恒量与之对应．

证明：首先就空间对称性部分证明．即考虑变换

$q_\alpha \to Q_\alpha^\epsilon,\ Q_\alpha^0 = q_\alpha$ 而不对时间进行变换，即时间与参数ϵ无关

我们无非是选了另外一套广义坐标而已

记号：$\dot{Q}_\alpha^\epsilon \equiv \dfrac{dQ_\alpha^\epsilon}{dt},\ Q'_\alpha \equiv \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{Q_\alpha^\epsilon - Q_\alpha^0}{\epsilon},\ \dot{Q}'_\alpha \equiv \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{\dot{Q}_\alpha^\epsilon - \dot{Q}_\alpha^0}{\epsilon}$

$$L^\epsilon = L\left(Q_\alpha^\epsilon, \dot{Q}_\alpha^\epsilon, t\right), L^0 = L\left(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t\right)$$

对称性意味着变换前后系统的拉格朗日函数不变，即 $L(\epsilon)=L(0)$

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\left(L^\epsilon - L^0\right)}{\epsilon} = \cdots = \sum\nolimits_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} Q'_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{Q}'_\alpha \right)$$

拉格朗日方程 $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum\nolimits_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} Q'_\alpha \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum\nolimits_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} Q'_\alpha = const.$$

下面考虑对时间的变换，为了用上面证明已有的结果，我们可以把时间看成某个假想的变量 χ 的函数 : $t=t(\chi)$

记 $t'=dt/d\chi$, $\tilde{q}_\alpha(\chi)=q_\alpha(t(\chi))$, 则 $\dfrac{d\tilde{q}_\alpha}{d\chi}=\dfrac{dq_\alpha}{dt}t'=\dot{q}_\alpha t' \Rightarrow \dot{q}_\alpha=\dfrac{1}{t'}\dfrac{d\tilde{q}_\alpha}{d\chi}$

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)\,dt=\int_{\chi_1}^{\chi_2}L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)\,t'\,d\chi\equiv\int_{\chi_1}^{\chi_2}\tilde{L}\left(\tilde{q}_\alpha,\frac{d\tilde{q}_\alpha}{d\chi},t,t',\chi\right)d\chi$$

于是我们得到了一个扩展的力学系统，它以 $\tilde{q}_\alpha$ 和 t 为广义坐标，新的拉格朗日函数为 $\tilde{L}$.

考虑对时间的变换 $t\to\tau^\epsilon$，$\tau^0=t$ ，上页的证明思路仍然有效，可得

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t'}\tau'=const. \qquad \text{其中}\quad \tau'\equiv\lim_{\epsilon\to0}\frac{\tau^\epsilon-\tau^0}{\epsilon}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{L}=L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)t'\Rightarrow\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t'}=\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\frac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial t'}t'+L\\&\dot{q}_\alpha=\frac{1}{t'}\frac{d\tilde{q}_\alpha}{d\chi}\Rightarrow\frac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial t'}=-\frac{1}{t'^2}\frac{d\tilde{q}_\alpha}{d\chi}=-\frac{\dot{q}_\alpha}{t'}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(L-\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\tau'=const.$$

证毕.

- 广义动量和广义动量积分

【定义】广义动量 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 注：可证明 $p_\alpha = \sum_n m_n \boldsymbol{v}_n \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$

【定义】广义坐标平移变换：$q_\alpha \to Q_\alpha^\epsilon = q_\alpha + \epsilon$， $q_{\beta\neq\alpha} \to q_\beta$

【推论】若力学系统具有某广义坐标的平移不变性，则该广义坐标相应的广义动量守恒.

证明：若系统在某广义坐标 q_α 的变换 $q_\alpha \to Q_\alpha^\epsilon = q_\alpha + \epsilon$ 下保持不变

根据诺特定理有 $\sum_\beta \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} Q_\beta' = const.$

因为 $Q_\alpha' \equiv \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{Q_\alpha^\epsilon - Q_\alpha^0}{\epsilon} = 1$， $Q_{\beta\neq\alpha}' = 0$

$$\Rightarrow p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = const.$$ 证毕.

广义动量积分

注：也可直接用拉格朗日方程证明 ......(可遗坐标、循环坐标)

例题 3 自由质点在重力场中运动，试分析其广义动量积分

解：建立 $Oxyz$ 本征系， z 轴竖直向上。广义坐标可取 x,y,z ，则

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

由于 L 不含 x 和 y ，所以沿 x 和 y 具有平移不变性，故

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}=const. \qquad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}=const.$$

上两式分别表示质点在 x 和 y 方向的动量守恒 .

如果选取球坐标 (r, θ, φ) ，则

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-mgr\cos\theta$$

由于 L 不含 φ ，所以沿 φ 具有平移不变性，故

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}=const.$$

此式表示对 z 轴角动量守恒

可以看到：

(1) 广义动量积分存在与否和数量多少，与广义坐标的选取有关，故选取适当的广义坐标可以找到较多的广义动量积分.

(2) 广义坐标不同，对应的广义动量的物理意义也不同。如 x 对应的广义动量即 x 方向的动量，而 φ 对应的广义动量为对质点 z 轴的角动量. 也可能选择某种广义坐标，其对应的广义动量无简单的物理意义.

【推论】若力学系统具有沿空间固定方向平移不变性，则系统沿该固定方向的动量守恒.

证明：假定该固定方向单位向量为 $\boldsymbol{l}$，系统沿 $\boldsymbol{l}$ 平移无穷小量ϵ之后

$$q_\alpha \rightarrow Q_\alpha^\epsilon$$

系统平移前位矢 $\boldsymbol{r}_n(q_\alpha, t)$

系统平移后位矢 $\boldsymbol{r}_n(Q_\alpha^\epsilon, t)=\boldsymbol{r}_n(q_\alpha, t)+\epsilon\boldsymbol{l}$

$$\Rightarrow \sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}(Q_\alpha^\epsilon - q_\alpha)=\epsilon\boldsymbol{l}$$

$$\Rightarrow \sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}Q_\alpha' = \boldsymbol{l}$$

诺特定理 $\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} Q'_\alpha = const. \Rightarrow \sum_\alpha \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial \dot{q}_\alpha} Q'_\alpha = const.$

注意到 $\dot{\boldsymbol{r}}_n = \sum_\beta \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\beta}} \dot{q}_\beta + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial t}}$ 是 $q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t$ 的函数 $\Rightarrow \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$,

只是 q_α, t 的函数

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_\alpha \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha} Q'_\alpha = const. \\ &\sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha} Q'_\alpha = \boldsymbol{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n} \cdot \boldsymbol{l} = const.$$

$$L = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_n^2 - V(\boldsymbol{r}_n, t) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n} = m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n$$

$$\Rightarrow p_l = \left(\sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n\right) \cdot \boldsymbol{l} = \sum_n m_n \dot{\boldsymbol{r}}_n \cdot \boldsymbol{l} = const.$$

此即沿 l 方向的动量守恒． （证毕）

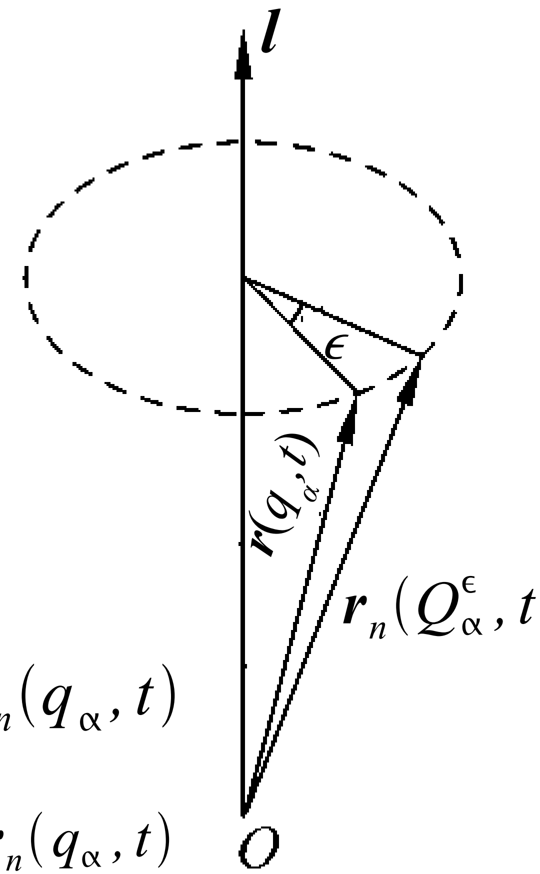
【推论】若力学系统具有绕空间固定轴的转动不变性，则系统对该固定轴的角动量守恒.

证明：设该固定轴对应单位矢量 $\boldsymbol{l}$. 在轴上取 O 为原点，把转动前第 n 质点位矢记为 $\boldsymbol{r}_n$

用广义坐标表示为 $\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t)$

假定转动无限小角度ϵ，广义坐标变化

$$q_\alpha \to Q_\alpha^\epsilon$$



位矢变化 $\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t) \to \boldsymbol{r}_n(Q_\alpha^\epsilon,t) = \boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t) + \epsilon\,\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t)$

$$\Rightarrow \sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}(Q_\alpha^\epsilon - q_\alpha) = \epsilon\,\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t) \Rightarrow \sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha} Q_\alpha' = \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t)$$

诺特定理 $\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} Q_\alpha' = const. \Rightarrow \sum_\alpha \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial \dot{q}_\alpha} Q_\alpha' = const.$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}\cdot[\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t)] = const. \Rightarrow\cdots\Rightarrow L_l = \boldsymbol{l}\cdot\left(\sum_n \boldsymbol{r}_n\times m_n\dot{\boldsymbol{r}}_n\right) = const.$$

- 广义能量和广义能量积分

【定义】广义能量 $H=\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L$

【定义】时间平移变换：$t \to \tau^\epsilon = t+\epsilon$

【推论】若力学系统具有时间平移不变性，则系统广义能量守恒.

证明：在时间平移变换下 $\tau' \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\tau^\epsilon-\tau^0}{\epsilon}=1$

诺特定理 $\left(L-\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\tau' = const.$

$$\Rightarrow H=\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = const.$$ （证毕）

广义能量积分

注：也可直接用拉格朗日方程证明 $dH/dt=-\partial L/\partial t$，然后得到结论.

问：广义能量是否就是牛顿力学中质点系的机械能呢？

$$\boldsymbol{r}_n(q_\alpha,t)\Rightarrow \boldsymbol{v}_n=\frac{d\,\boldsymbol{r}_n}{dt}=\sum_\alpha \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\sum_n m_n\boldsymbol{v}_n\cdot\boldsymbol{v}_n=\frac{1}{2}\sum_n m_n\left(\sum_\alpha \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}\right)\cdot\left(\sum_\beta \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n m_n\left[\left(\sum_\alpha \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\cdot\left(\sum_\beta \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\beta}\dot{q}_\beta\right)+2\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}\cdot\left(\sum_\beta \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\beta}\dot{q}_\beta\right)+\left(\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta\left(\sum_n m_n\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\alpha}\cdot\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \longrightarrow \text{广义速度二次齐次式 } T_2$$

$$+\sum_\beta\sum_n m_n\left(\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}\cdot\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,q_\beta}\right)\dot{q}_\beta \longrightarrow \text{广义速度一次齐次式 } T_1$$

$$+\frac{1}{2}\sum_n m_n\left(\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_n}{\partial\,t}\right)^2 \longrightarrow \text{广义速度零次齐次式 } T_0$$

【引理】齐次函数欧拉定理：若 $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^n f(x,y,z)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+\frac{\partial f}{\partial z}z=nf$$

证明：令 $\chi=\lambda x,\ \eta=\lambda y,\ \zeta=\lambda z$. 把定义式两边同时对 λ 求偏导可得

$$\frac{\partial f}{\partial \chi}x+\frac{\partial f}{\partial \eta}y+\frac{\partial f}{\partial \zeta}z=n\lambda^{n-1}f$$

然后令 $\lambda=1$ 即可得证 .

【定理】系统广义能量满足： $H=T_2-T_0+V$

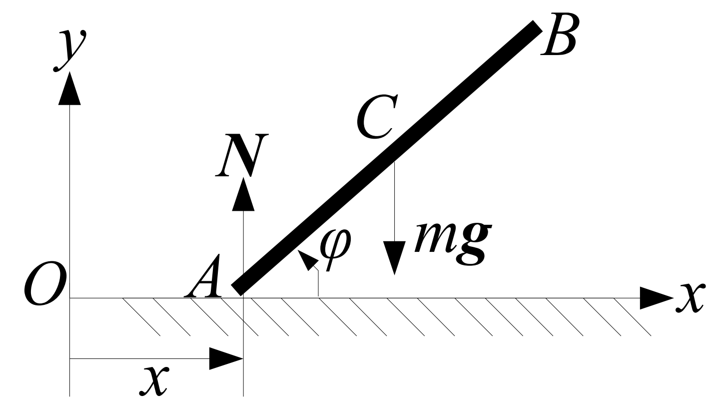
证明： $L=T-V=T_2+T_1+T_0-V$

$$\text{上一引理}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\sum_\alpha\frac{\partial T_2}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha=2T_2\\&\sum_\alpha\frac{\partial T_1}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha=T_1\\&\sum_\alpha\frac{\partial T_0}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow H=\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha-L=T_2-T_0+V$$

（证毕）

也就是说，写出 T 后，要看 T 是不是广义速度的二次齐次式。如果 $T=T_2$，（即 $T_1=0, T_0=0$ ），此时 $H=T_2+V=T+V$, 即广义能量等于系统的机械能．一般情况下，广义能量不是系统的机械能．

例题 4 长 $2a$ 质量为 m 的匀质直杆 AB ， A 端与光滑水平面接触，在重力作用下从竖直位置被自由释放倒下．求杆落地瞬间的角速度．



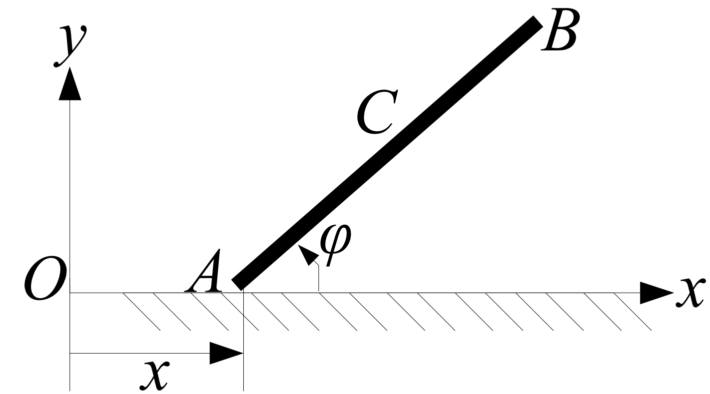
解：由于重力和水平面支持力在竖直面内，由对称性可知杆一直在竖直面内运动．

自由度为 2, 受理想约束的完整系．

建立图示本征系 $Oxyz$. 选 A 端在 x 轴上的坐标 x 以及杆与 x 轴夹角 φ 为广义坐标．

下面关键计算杆的拉格朗日函数，主动力是有势的，以 O 为势能零点，势能可写为 $V=mga\sin\varphi$

根据柯尼希定理，杆的动能可以写为



$$T=\frac{m}{2}v_C^2+\frac{I_C}{2}\dot{\varphi}^2$$

而质心速度可以用刚体速度公式求得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{AC}\\&\boldsymbol{v}_A=\dot{x}\,\hat{x}\\&\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\,\hat{z}\\&\boldsymbol{AC}=a(\cos\varphi\,\hat{x}+\sin\varphi\,\hat{y})\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{v}_C=(\dot{x}-a\dot{\varphi}\sin\varphi)\hat{x}+a\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow v_C^2=\dot{x}^2-2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi+a^2\dot{\varphi}^2$$

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi+a^2\dot{\varphi}^2)+\frac{ma^2}{6}\dot{\varphi}^2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)+\frac{2ma^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

$$L=T-V=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)+\frac{2ma^2}{3}\dot{\varphi}^2-mga\sin\varphi$$

首先看看有没有守恒量． L 不含 x，故有守恒量

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m(\dot{x}-a\dot{\varphi}\sin\varphi)=c_1\qquad\text{（水平方向动量守恒）}$$

利用初始条件 $t=0$ 时：$\dot{x}=0,\ \dot{\varphi}=0\Rightarrow c_1=0\quad\Rightarrow\dot{x}=a\dot{\varphi}\sin\varphi$

L 不显含 t，且 $T=T_2$，故机械能守恒

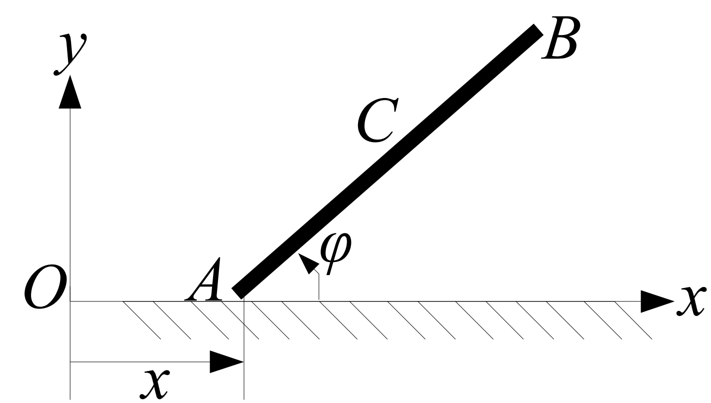
$$T+V=\frac{m}{2}(\dot{x}^2-2a\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi)+\frac{2ma^2}{3}\dot{\varphi}^2+mga\sin\varphi=E$$

利用初始条件 $t=0$ 时：$\varphi=\pi/2,\ \dot{x}=0,\ \dot{\varphi}=0\Rightarrow E=mga$

$$\dot{x}=a\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow\dot{\varphi}^2=\frac{6g(1-\sin\varphi)}{a(4-3\sin^2\varphi)}$$

$$\Rightarrow\dot{\varphi}=-\left[\frac{6g(1-\sin\varphi)}{a(4-3\sin^2\varphi)}\right]^{1/2}$$

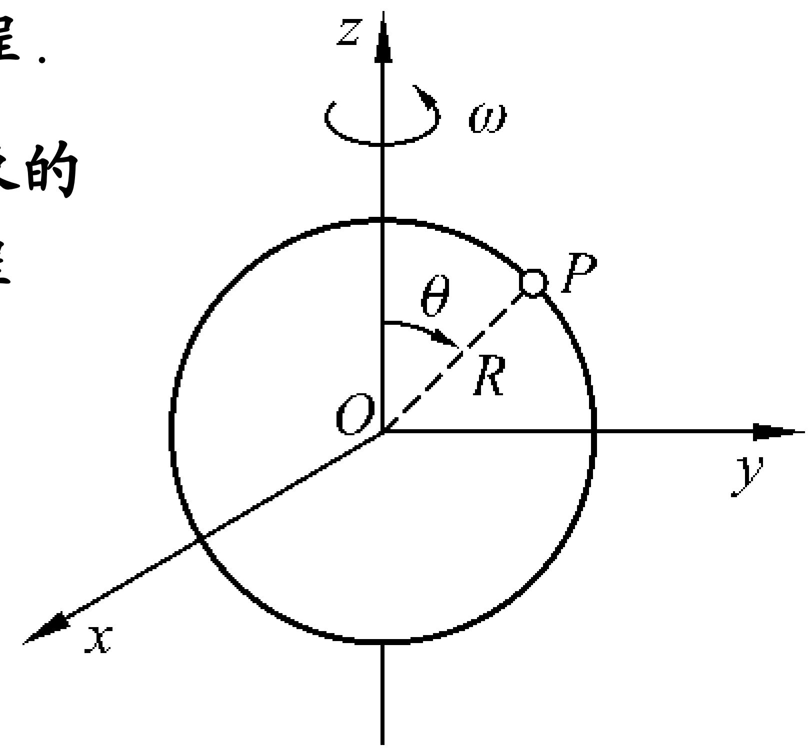


（想想为什么不取 + 号？）

杆落地瞬间，$\varphi=0\Rightarrow\dot{\varphi}=-\sqrt{3g/2a}.$

注：利用分析力学解题也会优先考虑守恒定律．另外，本题用分析力学并不比牛顿力学有优势，实际上牛顿力学可直接写出守恒定律

例题 5 质量为 m 的小环 P 被限制在一半径为 R 的光滑大圆环上，大圆环绕过环心的铅垂轴以角速度 ω 匀速转动．初始时小环在大环的最高点，且相对大环静止，然后无初速地滑下．试通过存在的第一积分建立小环相对大环的运动微分方程．



解：以小环为研究对象，它是受理想约束的完整系统．取球坐标，有 2 个约束方程

$$r=R,\ \varphi=\omega t+\varphi_0$$

因此自由度为 1. 可以取图示角度 θ

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

$$=\frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2+R^2\omega^2\sin^2\theta)=T_2+T_0$$

以 O 为势能零点，势能可表示为 $V=mgR\cos\theta$

由于 $L=T-V$ 不显含时间，所以广义能量守恒：

$$H=T_2-T_0+V=\frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2-\frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\theta+mgR\cos\theta=const.$$

利用初始条件 $t=0$ 时： $\theta=0,\ \dot{\theta}=0 \Rightarrow H=mgR$

$$\Rightarrow H=T_2-T_0+V=\frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2-\frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\theta+mgR\cos\theta=mgR$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2-\omega^2\sin^2\theta+(2g/R)(\cos\theta-1)=0$$ 此即小环的运动微分方程.

注： (1) 本题中小环受到的约束 $\varphi=\omega t+\varphi_0$ 是非定常约束

(2) 本题中广义能量不是相对地面惯性系的机械能 $(T\neq T_2)$，

而是相对于固连于大环的非惯性系中小环的总能量.

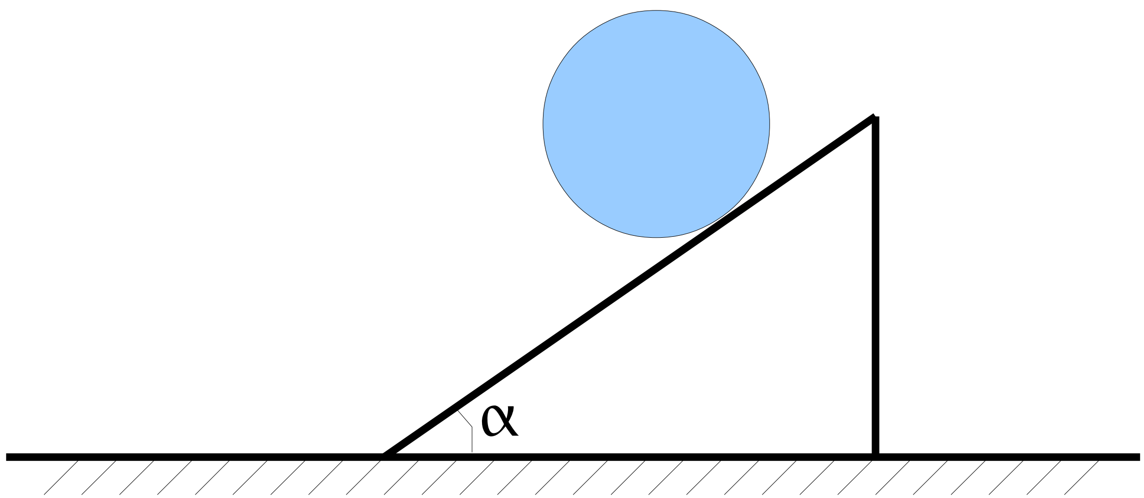
$$H=T_2-T_0+V=\underbrace{\frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2}_{\text{相对动能}}-\underbrace{\frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\theta}_{\text{惯性离心能}}+\underbrace{mgR\cos\theta}_{\text{重力势能}}$$

(想想为什么?)

思考题 质量为 m_1 三角形楔置于光滑水平面上，质量为 m_2 半径为 r 匀质圆柱可沿斜面无滑滚动。

(1) 试用牛顿力学的质点系动力学方法寻找系统的守恒量

(2) 试用分析力学的拉格朗日方法寻找系统的守恒量



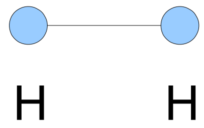
特别注意：柱体质心相对于楔的速度沿斜面方向！

无滑条件（接触点相对速度为零）

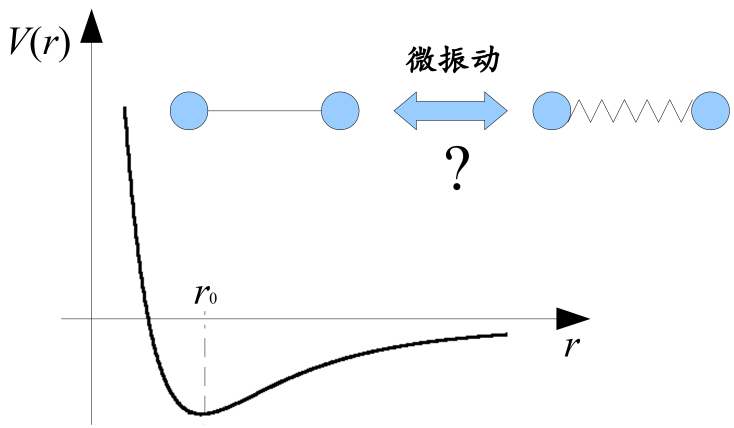
§8.3 多自由度系统的微振动

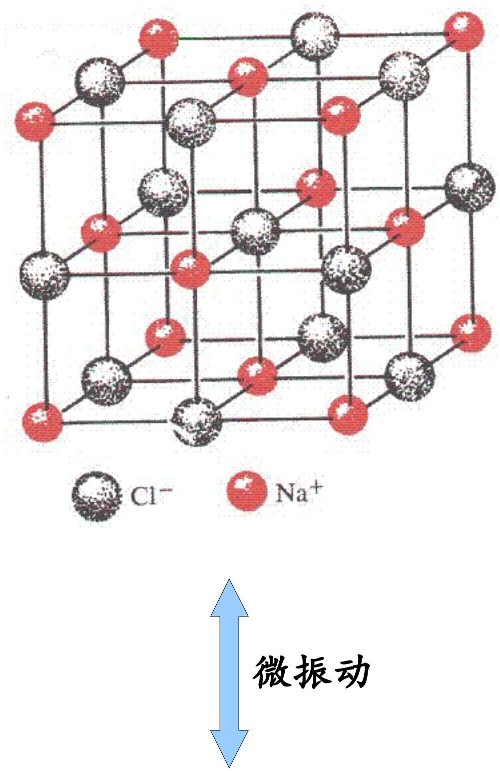
- 问题的背景

世界是由原子
和分子组成的



在真实世界中原子总是在
平衡位置附近作小幅振动

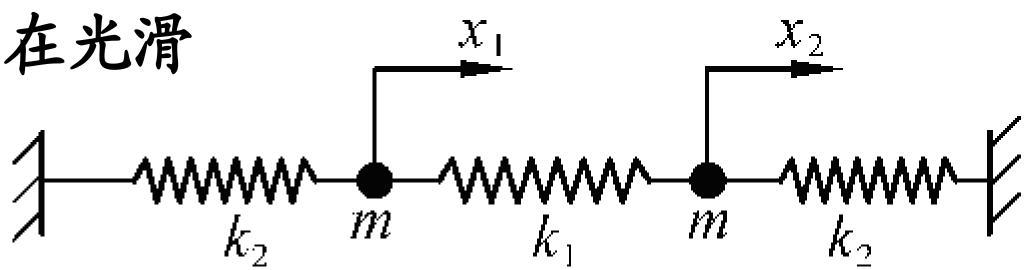




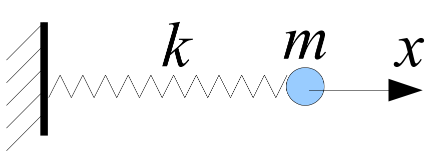
弹簧质点系统
（多自由度）

- 简化模型（透视多自由度振动特征）

考虑两质量为 m 的质点，被限制在光滑水平线上运动，3 个轻弹簧沿该水平线连接两质点，中间弹簧的劲度系数为 k_1，两侧弹簧的劲度系数为 k_2，它的外端被固定，两质点静止时各弹簧无伸长 .



回顾：



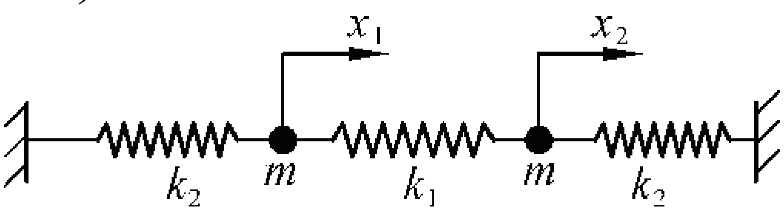
运动微分方程 $m\ddot{x}+kx=0$

固有频率方程 $\omega^2-m^{-1}k=0$

自然的问题：在多自由度振动中，上述方程是否有对应的形式？

- 简正频率（固有频率）和简正模式

如图所示，选取 x_1 和 x_2 作为广义坐标，分别表示两质点相对自身平衡位置的位移．(推导运动微分方程 ...)



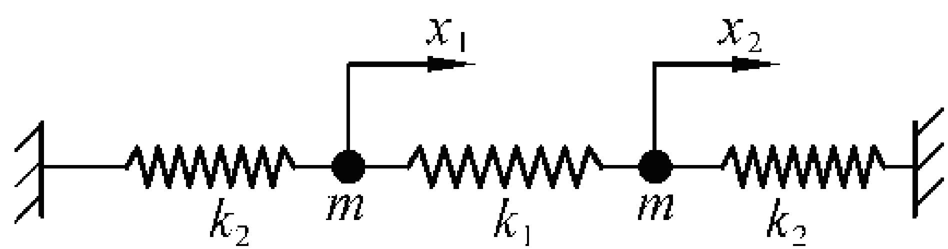
引入记号 $[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

系统质量矩阵（对称正定）　　系统刚度矩阵（对称正定）

【定理】系统的运动微分方程为 $[M]\ddot{\boldsymbol{\psi}}+[K]\boldsymbol{\psi}=0$

与单自由度比较：$m\ddot{x}+kx=0$

证明思路:



系统拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_2}{2}x_1^2-\frac{k_2}{2}x_2^2-\frac{k_1}{2}(x_2-x_1)^2$$

特点：这里动能是广义速度的二次型，势能是广义坐标的二次型.

代入拉格朗日方程可得

$$m\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_1x_2=0$$

$$m\ddot{x}_2-k_1x_1+(k_1+k_2)x_2=0$$

写成矩阵形式即可.（证毕）

(推导频率满足的方程 ......)

【推论】系统的运动微分方程有 $\psi=A\cos(\omega t+\alpha)$ 形式的解，其中 ω 满足特征方程

$$det\left(\omega^2 I-[M]^{-1}[K]\right)=0 \quad \text{或} \quad det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

$$\omega^2-m^{-1}k=0 \qquad \text{(单自由度对应)}$$

证明思路:

$$[M]\ddot{\psi}+[K]\psi=0\Rightarrow\ddot{\psi}+[M]^{-1}[K]\psi=0$$

这个方程类似于谐振子方程，故可猜测有 $\psi=A\cos(\omega t+\alpha)$ 形式的解 .

将 $\psi=A\cos(\omega t+\alpha)$ 代入 $\ddot{\psi}+[M]^{-1}[K]\psi=0$ 可得

$$[M]^{-1}[K]A=\omega^2 A$$

可见 A 是矩阵 $[M]^{-1}[K]$ 对应于特征值 ω^2 的特征向量 .

故有 $det\left([M]^{-1}[K]-\omega^2 I\right)=0 \Rightarrow det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$ (证毕)

注：将矩阵 $[M]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$ 代入特征方程

$$det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0 \Rightarrow det\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2-\omega^2 m \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (k_1+k_2-m\omega^2)^2-k_1^2=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{k_2/m} \text{ 或 } \sqrt{(2k_1+k_2)/m}$$

【定义】简正频率：从特征方程解出来的频率

注：它只依赖于系统的质量矩阵和刚度矩阵，是系统固有的.

【定义】简正模式：简正频率对应的振动模式，即矩阵 $[M]^{-1}[K]$ 对应于简正频率平方的特征向量决定的振动模式.

例题 6 分析系统的简正模式.

解：将 $\omega_1=\sqrt{k_2/m}$ 代入 $[M]^{-1}[K]\boldsymbol{A}=\omega_1^2\boldsymbol{A}$ 或 $([K]-\omega_1^2[M])\boldsymbol{A}=0$

可以得到 $\boldsymbol{A}\propto\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\boldsymbol{\psi}_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)\propto\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$

此时二质点的步调完全一致，称为对称模式.

将 $\omega_2=\sqrt{(2k_1+k_2)/m}$ 代入 $([K]-\omega_2^2[M])\boldsymbol{A}=0$ 可得

$$\boldsymbol{A}\propto\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\boldsymbol{\psi}_2=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\propto\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

此时二质点的步调完全相反，称为反对称模式.

注：系统微分方程的通解是上面两种模式的线性叠加，可写为

$$\boldsymbol{\psi}=c_1\boldsymbol{\psi}_1+c_2\boldsymbol{\psi}_2=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

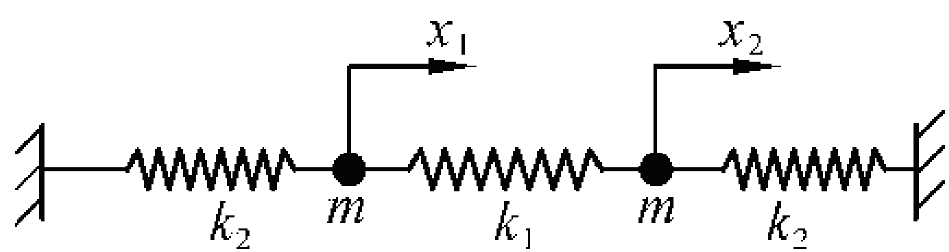
这里 4 个待定实常数 $c_1,c_2,\alpha_1,\alpha_2$ 由初始条件来确定.

- 简正坐标

【定义】简正坐标：一组特殊的广义坐标 $\{\xi_\alpha\}$，使得系统的运动微分方程表现为一系列简单的振动 $(\ddot{\xi}_\alpha+\omega_\alpha^2\xi_\alpha=0)$. 这意味着系统的拉格朗日函数可表示为如下形式

$$L=\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\dot{\xi}_\alpha^2-\omega_\alpha^2\xi_\alpha^2).$$ why?

例题 7 寻找图示系统简正坐标.



解：我们已经知道得到 $[M]^{-1}[K]$ 对应特征值 ω_1^2 和 ω_2^2 的特征向量分别为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. 经过归一化后得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

根据线性代数知，存在矩阵 $[U]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ 使得

$$[U]^{-1}[M]^{-1}[K][U]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}\ \Rightarrow [U]^{-1}[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}[U]^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow [U]^{-1}[M]^{-1}[K]\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}[U]^{-1}\boldsymbol{\psi}\\ &\text{系统运动微分方程}\ \ddot{\boldsymbol{\psi}}+[M]^{-1}[K]\boldsymbol{\psi}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow [U]^{-1}\ddot{\boldsymbol{\psi}}+\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}[U]^{-1}\boldsymbol{\psi}=0$$

只需令 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=[U]^{-1}\boldsymbol{\psi}$ **即可得到** $\ddot{\xi}_\alpha+\omega_\alpha^2\xi_\alpha=0$，$(\alpha=1,2)$.

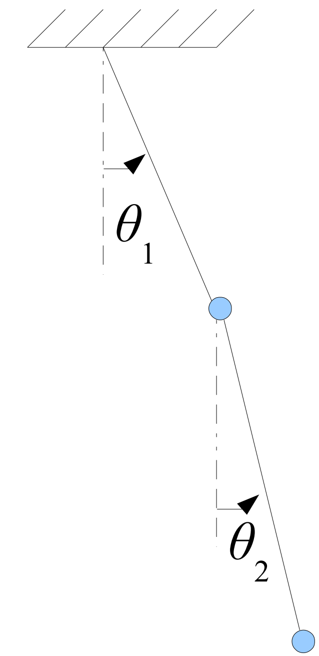
$$\xi_1=(x_1+x_2)/\sqrt{2},\quad \xi_2=(x_1-x_2)/\sqrt{2}\qquad \text{此即简正坐标}$$

$$\Rightarrow x_1=(\xi_1+\xi_2)/\sqrt{2},\quad x_2=(\xi_1-\xi_2)/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L=\frac{m}{2}\dot{x}_1^2+\frac{m}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_2}{2}x_1^2-\frac{k_2}{2}x_2^2-\frac{k_1}{2}(x_2-x_1)^2=\cdots$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{\xi}_1^2-\omega_1^2\xi_1^2)+\frac{m}{2}(\dot{\xi}_2^2-\omega_2^2\xi_2^2)$$

例题 8 分析双摆简正频率和简正坐标. 设线长均为 l 且不可伸长, 小球半径可以忽略，质量均为 m. 假定摆角很小.



解：理想约束的完整系统，自由度为 2, 可选摆角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标。当摆角很小时，两个球的速度分别可以写为

$$v_1 = l\dot{\theta}_1, \qquad v_2 \approx v_1 + l\dot{\theta}_2 = l(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

动能 $$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

以最高悬挂点为势能零点，则势能

$$V = -mgl\cos\theta_1 - mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \approx mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2/2 - 3)$$

将 $L=T-V$ 代入拉格朗日方程有 ...

$$\left.\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2(g/l)\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + (g/l)\theta_2 = 0 \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow [M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ [K] = \frac{g}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

代入特征方程 $det\big([K] - \omega^2 [M]\big) = 0$ 求得 ... $\quad \omega = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\sqrt{g/l}$

将 $\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{g/l}$ 代入 $([K]-\omega_1^2[M])A=0$ 可得

$$A\propto\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\psi}_1=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=A\cos(\omega_1 t+\alpha_1)\propto\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)$$ 对称模式

将 $\omega_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{g/l}$ 代入 $([K]-\omega_2^2[M])A=0$ 可得

$$A\propto\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\psi}_2=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=A\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\propto\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$ 反对称模式

$$[U]=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=[U]^{-1}\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}$$ 简正坐标

- 总结(多自由度振动)

系统的运动微分方程: $[M]\ddot{\boldsymbol{\psi}}+[K]\boldsymbol{\psi}=0$

简正频率 ω 满足特征方程:

$$det\left(\omega^2 I-[M]^{-1}[K]\right)=0 \quad \text{或} \quad det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

简正模式:简正频率对应的振动模式

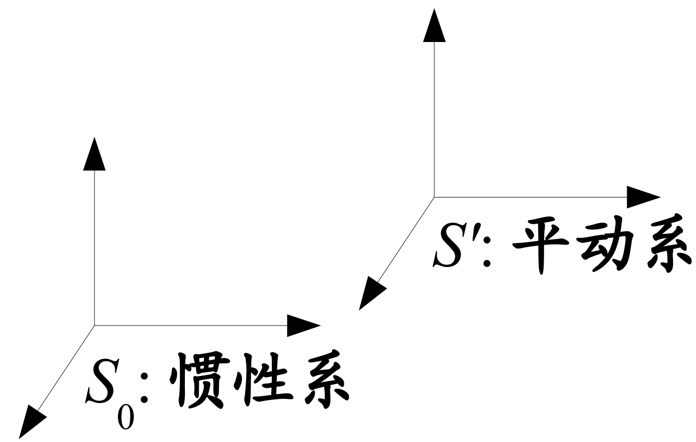
$$[M]^{-1}[K]\boldsymbol{A}=\omega^2\boldsymbol{A}$$

简正坐标: $\boldsymbol{\xi}=[U]^{-1}\boldsymbol{\psi}$ $\qquad \ddot{\xi}_\alpha+\omega_\alpha^2\xi_\alpha=0$

§8.4 非惯性系中的运动

哈密顿原理以及拉格朗日方程本身不受参考系的限制．选择不同的参考系在某种意义上来看相当于选取了不同的广义坐标来描述一个力学系统而以．

因此，力学系统的拉格朗日函数在不同参考系中都是同一个．最多相差一个坐标和时间函数的全导数．由于采用了不同的广义坐标，所以表现形式可能很不同．



S' 系以已知速度 $\boldsymbol{u}(t)$ 相对 S_0 系做平动．

记：$\boldsymbol{w}=\dfrac{d\,\boldsymbol{u}}{dt}$

- 平动参考系 S'

考虑质点的运动，在惯性系 S_0 中的拉格朗日函数可写为

$$L_0=\frac{m\boldsymbol{v}_0^2}{2}-V(\boldsymbol{r}_0,t)\Rightarrow m\frac{d\,\boldsymbol{v}_0}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_0}$$

质点在惯性系 S_0 和平动参考系 S'（相对 S_0 以 $\boldsymbol{u}$ 运动）之间满足关系

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t,\quad \boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{u}$ 事先给定，非匀速

$$L_0=\frac{m\boldsymbol{v}_0^2}{2}-V(\boldsymbol{r}_0,t)=\frac{mv'^2}{2}+\underbrace{m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{u}}+\underbrace{\frac{mu^2}{2}}_{\text{仅含时间，可写成含时间函数的全导数，故可略.}}-V(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t,t)$$

$$m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{u}=m\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\cdot\boldsymbol{u}$$

$$=\underbrace{\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}')}_{\text{含时间和坐标的函数的全导数，可略.}}-m\underbrace{\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}}_{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{r}'$$

故可以将拉格朗日函数用广义坐标 $\boldsymbol{r}'$ 和广义速度 $\boldsymbol{v}'$ 表示为

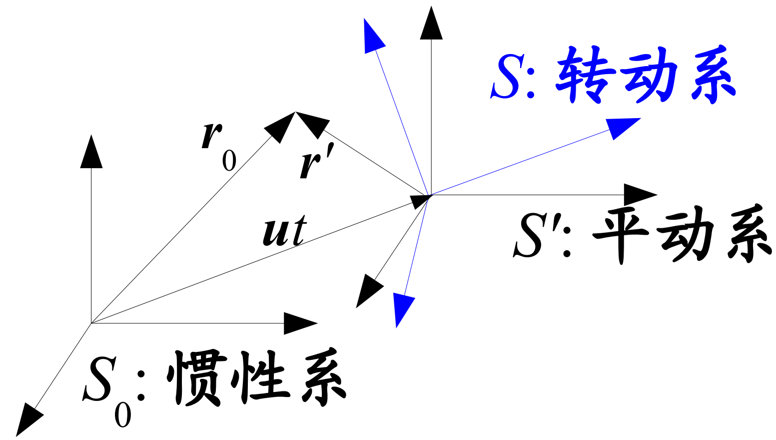
$$L'=\frac{mv'^2}{2}\underbrace{-m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}'}_{\text{相当于惯性力势能}}-V(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t,t)$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{v}'}-\frac{\partial L'}{\partial\boldsymbol{r}'}=0\Rightarrow m\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{r}'}-m\boldsymbol{w}$$

- 任意非惯性系

S' 系以已知速度 $\boldsymbol{u}(t)$ 相对惯性系 S_0 平动．而 S 与 S' 原点重合，且以角速度 ω 相对 S' 系转动．记 $\boldsymbol{w}=d\boldsymbol{u}/dt$.



质点在 S 和 S' 中的位矢是重合的，故 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$

质点相对 S 的速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{d'\boldsymbol{r}}{dt}$ => 质点相对 S' 的速度 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}$

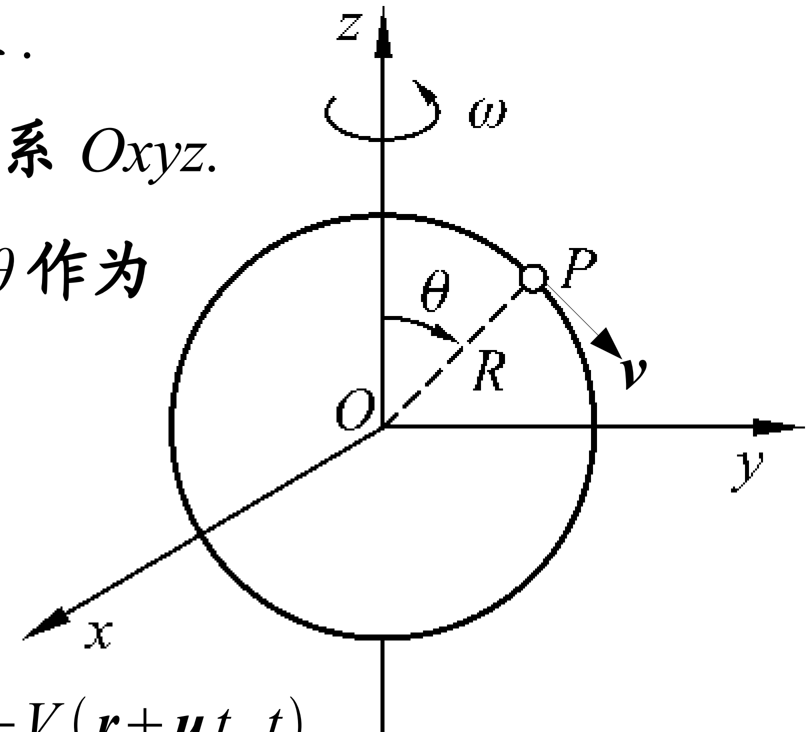
$$\Rightarrow L'=\frac{m v'^2}{2}-m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}'-V(\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t,t)$$

$$=\frac{m v^2}{2}+m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}+\frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2-m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}-V(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}t,t)\equiv L(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$$

代入拉格朗日方程 $\dfrac{d'}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}-\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0$ 可得

$$m\frac{d'\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\underbrace{-m\boldsymbol{w}-m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r})-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})}_{\text{牵连惯性力}}\underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})}_{\text{科氏力}}$$

例题 5' 质量为 m 的小环 P 被限制在一半径为 R 的光滑大圆环上，大圆环绕过环心的铅垂轴以角速度 ω 匀速转动．初始时小环在大环的最高点，且相对大环静止，然后无初速地滑下．试通过存在的第一积分建立小环相对大环的运动微分方程．



解：以大环作为参考系，并建立固连坐标系 $Oxyz$.

理想约束的完整系统，自由度为 1, 选 θ 作为广义坐标．

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}=R\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{y}-\sin\theta\,\hat{x}) \\ &\boldsymbol{\omega}=\omega\hat{z},\quad \boldsymbol{r}=R(\sin\theta\,\hat{y}+\cos\theta\,\hat{z}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$L=\frac{mv^2}{2}+m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}+\frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2-m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}-V(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}t,t)$$

$$=\frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2+2\omega\sin^2\theta\,\dot{\theta}+\omega^2\sin^2\theta)-mgR\cos\theta$$

L 不含时间，广义能量守恒 $H=\frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2-\omega^2\sin^2\theta)+mgR\cos\theta=const.$

考虑初始条件 $\Rightarrow\dot{\theta}^2-\omega^2\sin^2\theta+(2g/R)(\cos\theta-1)=0$

- 拉格朗日方法的特点和意义

拉格朗日方程是完整系最普遍的动力学方程.

（1）不过问约束力，方程个数减到最低限度.

（2）高度的概括性和统一性:

惯性系和非惯性系;

任何广义坐标;

质点、质点系、刚体，无限自由度的连续介质系统……

其他物理领域(如电磁场).

（3）程序统一.

（4）较少采用几何、矢量的方法，较多采用能量和数学分析的方法—利于推广到物理学的其他领域—只要找到拉格朗日函数，可用同一形式的拉格朗日方程求出系统的运动方程

因此，理论和实用性上，都显示出很大的优越性.