第三章
离散傅里叶变换（DFT）及其快速算法

王柯俨

kywang@mail.xidian.edu.cn

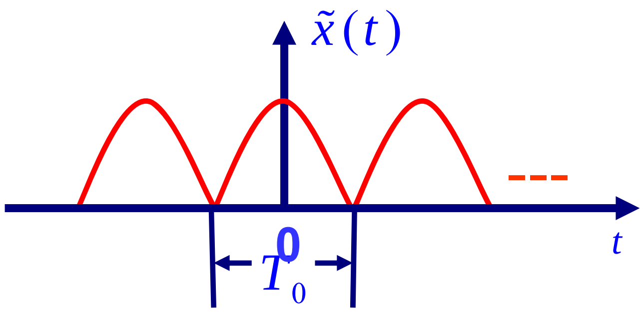
http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

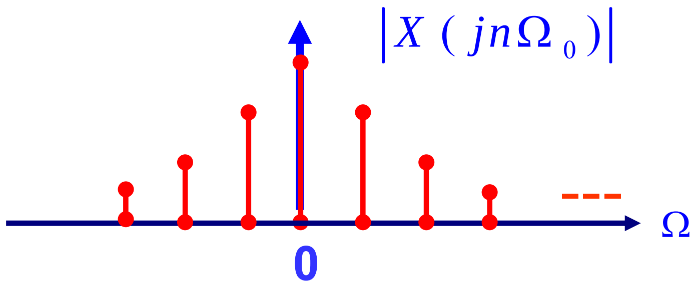
问题:

- 序列的傅里叶变换、Z变换是时域离散信号及系统分析与设计的重要数学工具;
- 但变换结果均为连续函数，无法用计算机进行处理;
- 离散傅里叶变换（DFT）对有限长时域离散信号的频谱进行等间隔采样，频域函数被离散化了，便于信号的计算机处理。
- DFT运算量较大，快速离散傅里叶变换算法（FFT）是解决方案

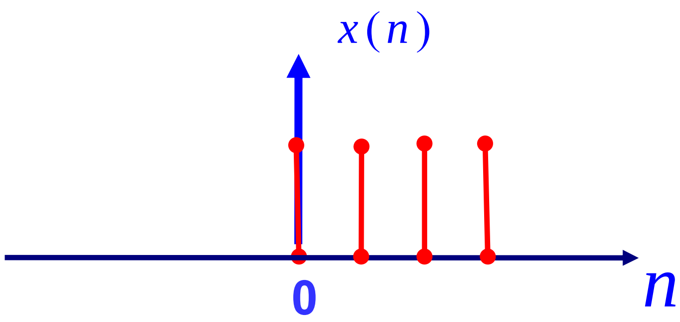
复习

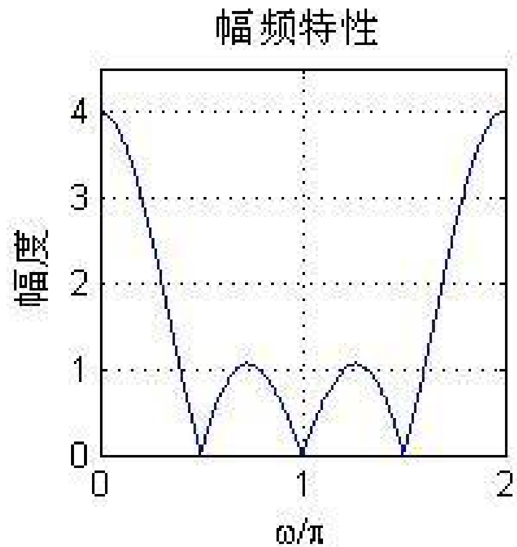
- 连续周期信号的傅立叶级数



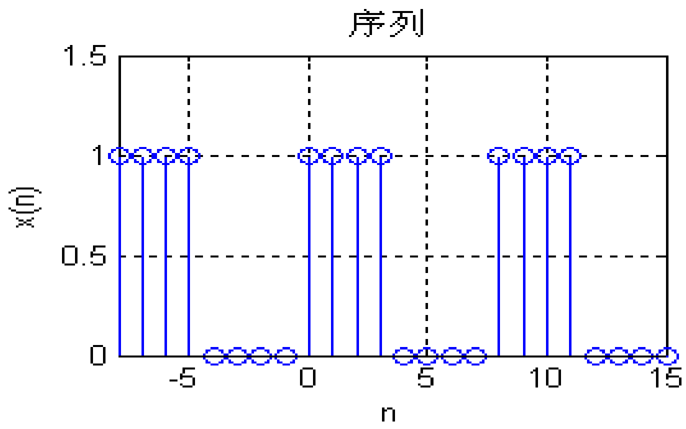


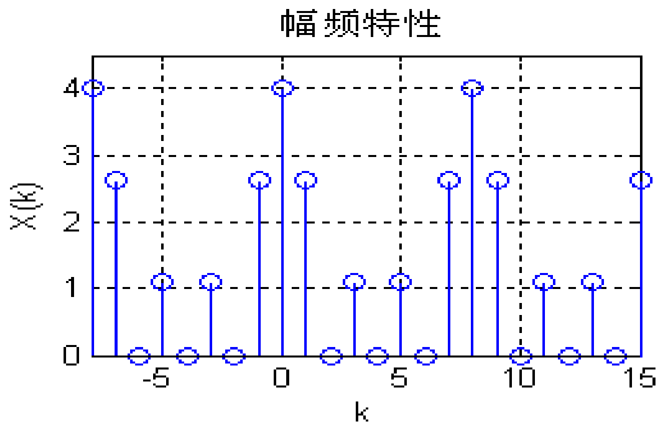
- 可和离散信号的傅立叶变换



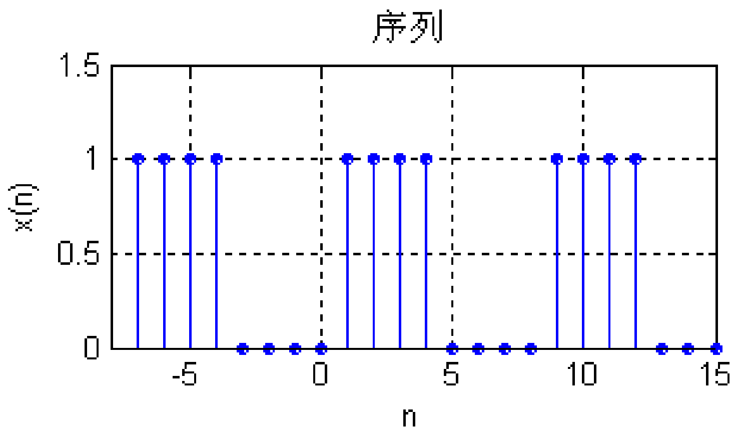


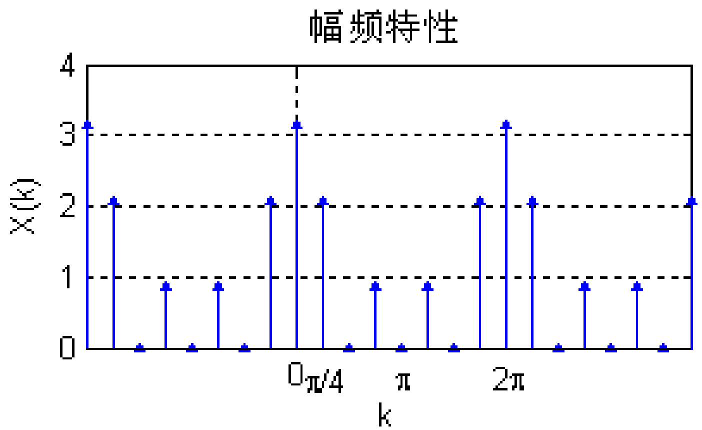
■ 周期序列的离散傅里叶级数系数





■ 周期序列的傅里叶变换(DTFT)





3.1离散傅里叶变换的定义

- ## 3.1.1 DFT的定义

设x(n)是一个长度为M的有限长序列，x(n)的N点离散傅立叶变换：

$$X(k)=DFT[x(n)]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\quad 0\le k\le N-1$$

- □ N称为DFT变换区间长度， $\mathrm{N}\ge\mathrm{M}$

- 令 $\mathrm{W_N}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$
- 傅立叶变换与逆变换对为：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\quad 0\le k\le N-1$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\quad 0\le n\le N-1$$

证明：

$$\mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{mk}\right]W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}$$

由于

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m-n = MN, M\text{为整数} \\ 0, & m-n \neq MN, M\text{为整数} \end{cases}$$

于是

$$\mathrm{IDFT}[X(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\delta(m-n) = x(n) \quad 0 \le n \le N-1$$

因此离散傅立叶逆变换是唯一的

例3.1.1　$x(n)=R_8(n)$　分别计算序列的8点、16点DFT

解:8点DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}R_8(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{7}e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

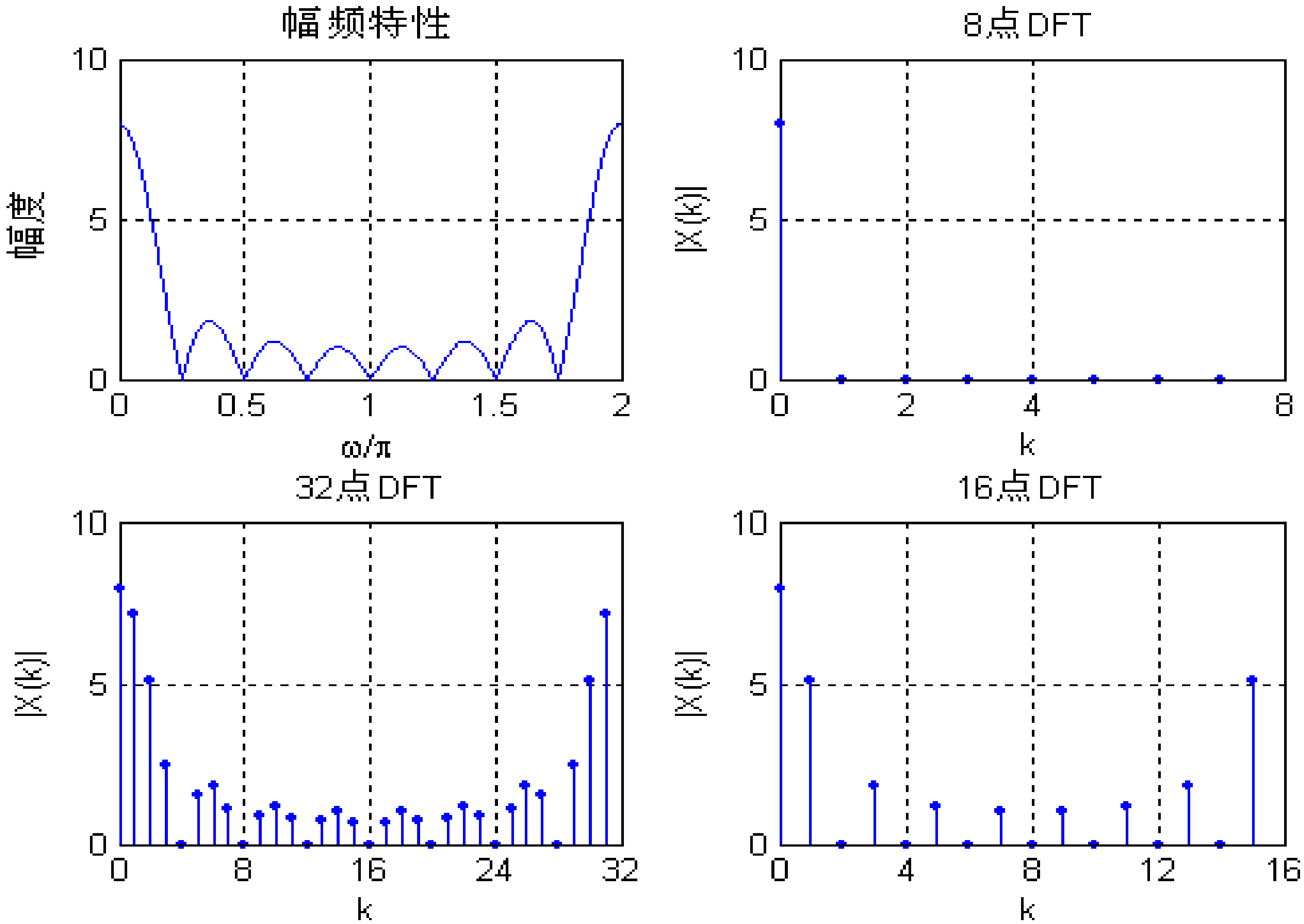
$$=\begin{cases}8 & k=0\\ 0 & k=1,2,3,\cdots,7\end{cases}$$

16点DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}R_8(n)W_{16}^{kn}=\sum_{n=0}^{7}R_8(n)W_{16}^{kn}=\frac{1-W_{16}^{k8}}{1-W_{16}^{k}}=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}k8}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}k}}$$

$$=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{8}k}}=\frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}}(e^{j\frac{\pi k}{2}}-e^{-j\frac{\pi k}{2}})}{e^{-j\frac{\pi}{16}k}(e^{j\frac{\pi}{16}k}-e^{-j\frac{\pi}{16}k})}=e^{-j\frac{7\pi}{16}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{16}k}$$

$k=0,1,2,\cdots,15$



- **N**不同，**DFT**变换结果不同，因此**N**是**DFT**的一个参数
- $|X(k)|$ 是 $|X(e^{j\omega})|$ 在频率区间 $[0,2\pi]$ 上的**N**点等间隔采样

3.1.2 DFT与FT、ZT、DFS之间的关系

1. DFT与FT、ZT之间的关系

- 有限长序列

$$x(n) \qquad n = 0,1,2,\cdots M-1 \qquad N \geq M$$

- DFT与FT、ZT

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) z^{-n}$$

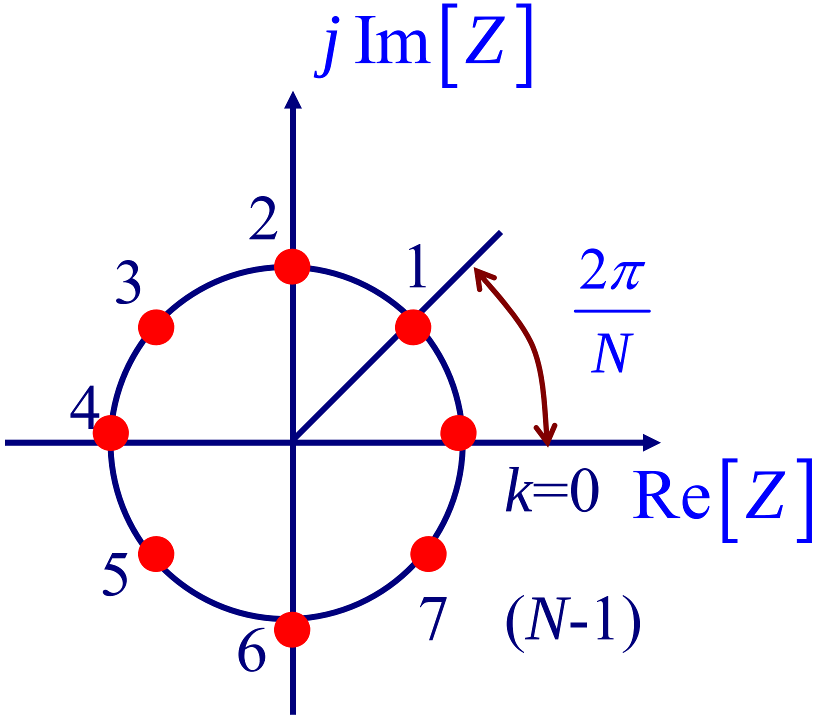
$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W^{kn} \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

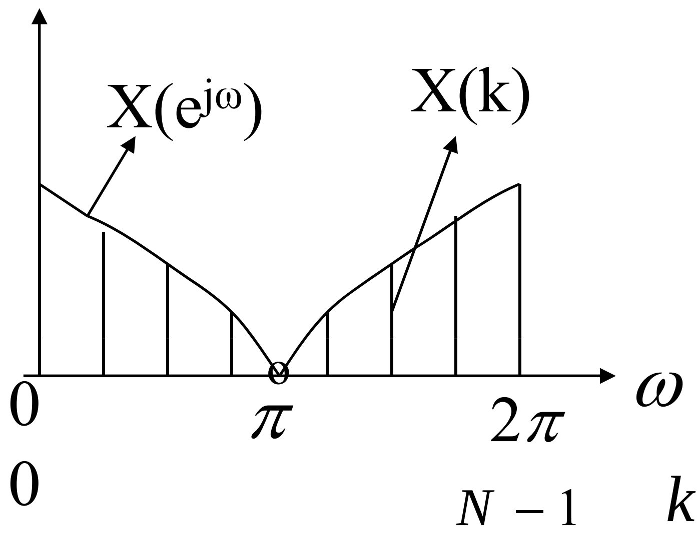
$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \qquad X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \qquad X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

- 序列**x(n)**的**N**点**DFT**是 **x(n)**的**Z**变换在单位圆上的**N**点等间隔采样，频率采样间隔为**2π / N**；
- **X(k)**为**x(n)**的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的**N**点等间隔采样。这就是**DFT**的<u>物理意义</u>。



DFT与z变换



DFT与FT变换

3.1.2 DFT与DFS、ZT、FT之间的关系

2. DFT与DFS之间的关系

- 有限长序列 $x(n) \quad n = 0,1,2,\cdots M-1$
- 将x(n)以N为周期进行周期延拓，得到周期序列

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)$$

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n)$$

显然，当

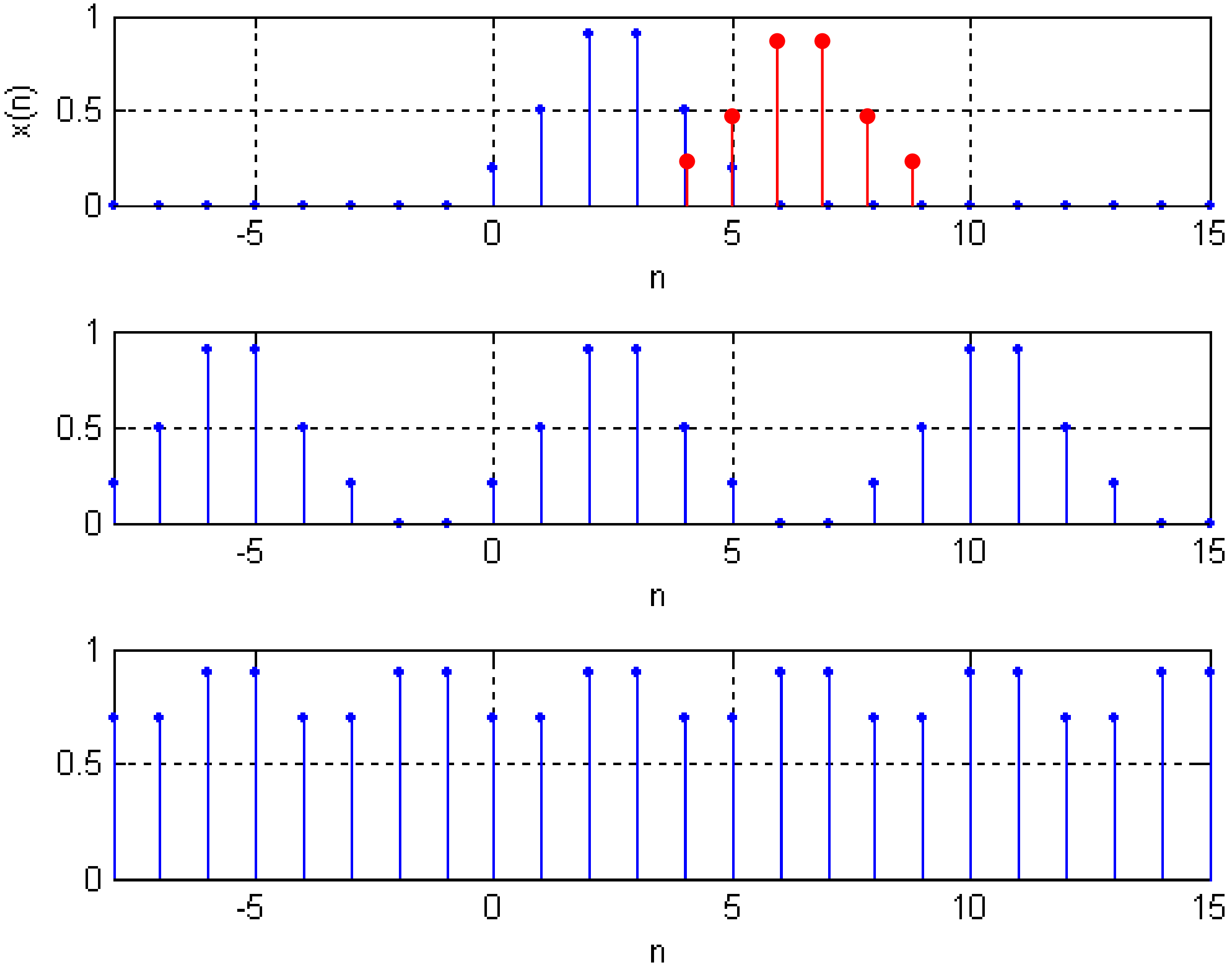
$$N \geq M, \quad x_N(n) = x(n)$$

$\tilde{x}_N(n)$ 是 $x(n)$ 的周期延拓序列

$x(n)$ 是 $\tilde{x}_N(n)$ 的主值区间序列

主值区间:设有限长序列$x(n), 0 \le n \le N-1$,
将其延拓为周期序列$\tilde{x}(n)$,周期长度为N,则:
$n = 0 \sim N-1$区间称为主值区间.

主值区间序列:在$n = 0 \sim N-1$主值区间内的
序列称为主值区间序列.



M=6

$\tilde{x}_8(n)$

N=8, N>M

$\tilde{x}_4(n)$

N=4, N<M

- 周期序列的**DFS**

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W_N^{kn} \qquad -\infty < k < \infty$$

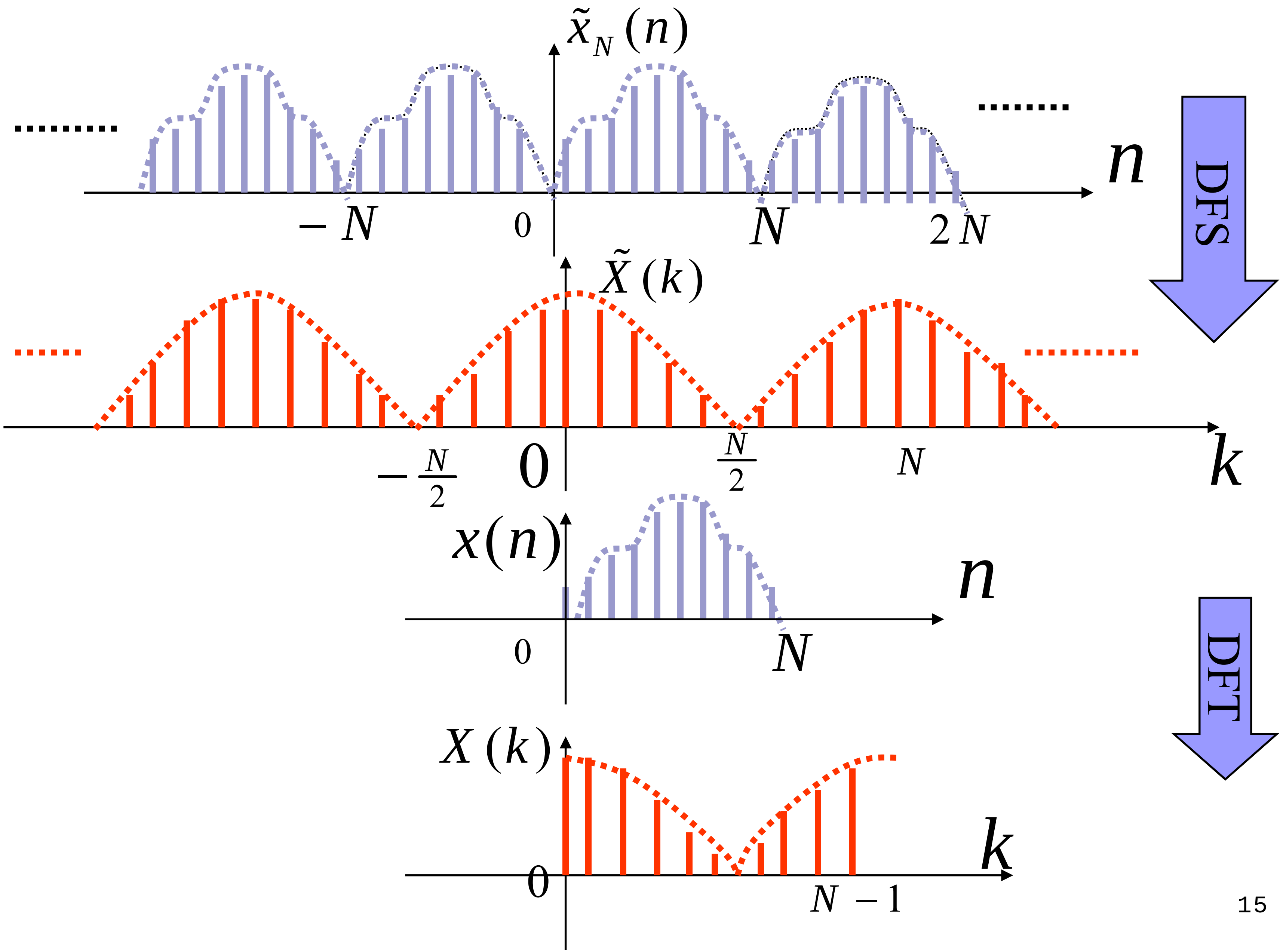
- 有限长序列的**DFT**

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

- $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值区间序列，成立条件 **N≥M**

$$\tilde{X}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k+mN), \quad X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$



$\tilde{x}_N(n)$
n
$-N$
0
N
$2N$
DFS
$\tilde{X}(k)$
k
$-\frac{N}{2}$
0
$\frac{N}{2}$
N
$x(n)$
n
0
N
DFT
$X(k)$
k
0
$N-1$

DFT与DFS之间的关系:

$$DFT: \quad x(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(k)$$

$$DFS: \quad \tilde{x}_N(n) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{X}(k)$$

$$\begin{cases} x(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) & \tilde{x}_N(n) = x((n))_N \\ X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) & \tilde{X}(k) = X((k))_N \end{cases}$$

$$N \geq M$$

- 有限长序列**x(n)**的**DFT**变换**X(k)**，就是**x(n)**的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的**DFS**系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列

DFS与FT之间的关系:

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}_N(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) W_N^{kn} \qquad -\infty < k < \infty$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[\tilde{x}_N(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

- 周期延拓序列的频谱特性由傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$ 确定，幅度相差一个常数因子 $\frac{2\pi}{N}$
- **DFT:** $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值区间序列，表示了周期序列的频谱特性

变量	周期	分辨率
ω	2π	$\dfrac{2\pi}{N}$
Ω、f	Ω_s、f_s	$\dfrac{f_s}{N}$
k	N	

例：$x(n)=R_8(n)$，求：（1）$X(z)$ (2)$X(e^{j\omega})$

(3)令 $x_N(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)\cdot R_N(n)$，求$X_N(k)=DFT[x_N(n)], N=16$

解：(1) $$X(z)=\frac{1-z^{-8}}{1-z^{-1}}, \qquad |z|>0$$

(2) $$X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega 8}}{1-e^{-j\omega}} \qquad =e^{-j\frac{7}{2}\omega}\frac{\sin\frac{8}{2}\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}$$

(3) $$X_N(k)=\ X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$=e^{-j\frac{7\pi}{16}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{16}k} \qquad k=0,1,2,\cdots,15$$

3.1.3 DFT的矩阵方程表示（1）

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{D_N x}$$

$$X = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

N点
DFT矩阵

$$D_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

3.1.3 DFT的矩阵方程表示（2）

$$\mathrm{X} = \mathrm{D}_{\mathrm{N}}\mathrm{x}$$

- **IDFT的矩阵表示**

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad 0 \le n \le N-1$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{D}_N^{-1}\mathrm{X}$$

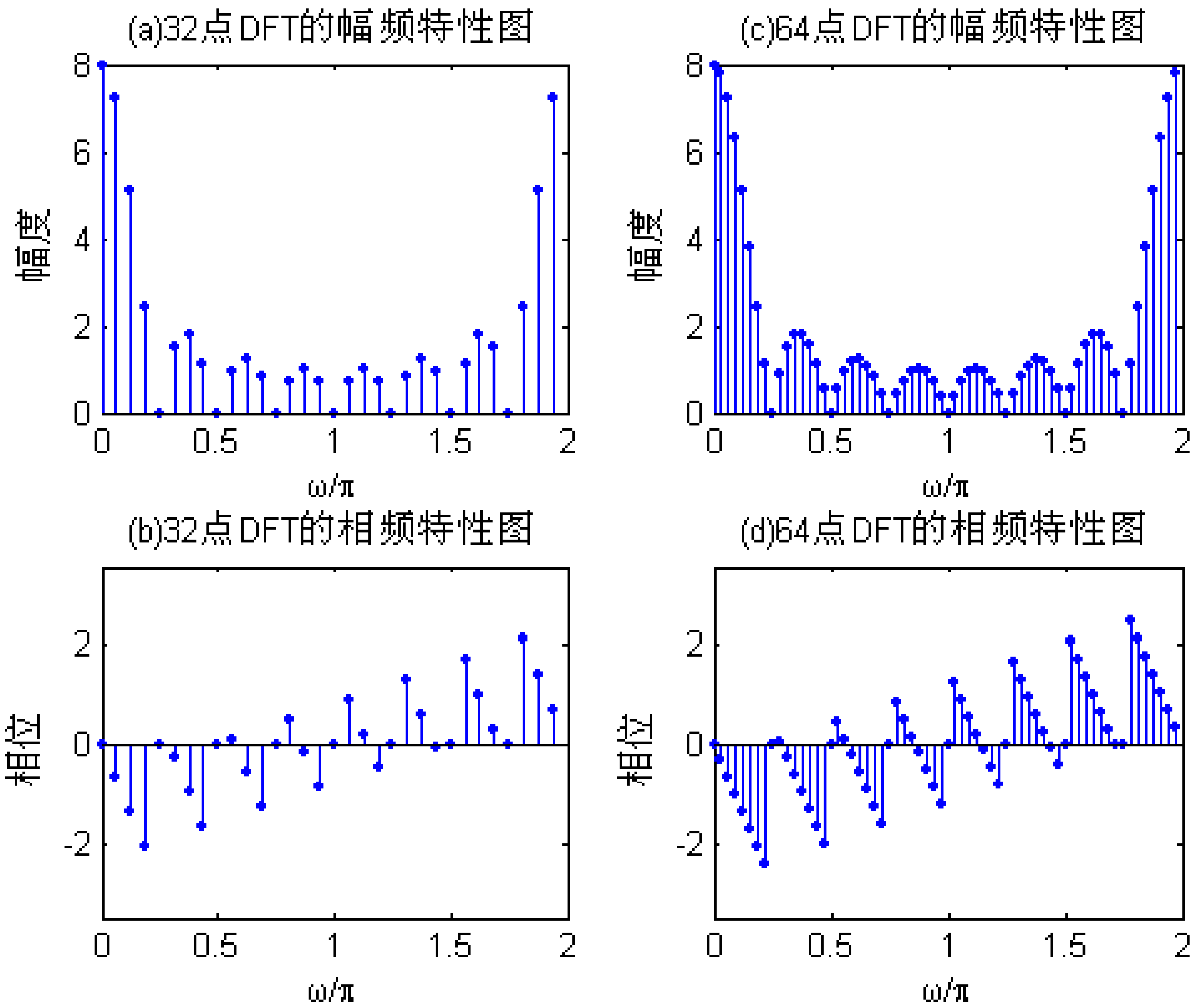
N点 IDFT矩阵

$$D_N^{-1} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)\times(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad D_N^{-1} = \frac{1}{N} D_N^{*}$$

3.1.4用MATLAB计算序列的DFT

- xn=[1 1 1 1 1 1 1 1]; %输入时域序列向量xn=R8(n)
- Xk32=fft(xn,32); %计算xn的32点DFT
- Xk64=fft(xn,64); %计算xn的64点DFT
- %以下为绘图部分
- k=0:31;wk=2*k/32; %产生32点DFT对应的采样点频率(关于π归一化值)
- subplot(2,2,1);stem(wk,abs(Xk32),'.'); %绘制32点DFT的幅频特性图
- title('(a)32点DFT的幅频特性图');xlabel('ω/\pi');ylabel('幅度')
- subplot(2,2,3);stem(wk,angle(Xk32),'.'); %绘制32点DFT的相频特性图
- title('(b)32点DFT的相频特性图');
- xlabel('ω/\pi');ylabel('相位');axis([0,2,-3.5,3.5])
- k=0:63;wk=2*k/64; %产生64点DFT对应的采样点频率(关于π归一化值)
- subplot(2,2,2);stem(wk,abs(Xk64),'.'); %绘制64点DFT的幅频特性图
- title('(c)64点DFT的幅频特性图');xlabel('ω/\pi');ylabel('幅度')
- subplot(2,2,4);stem(wk,angle(Xk64),'.'); %绘制64点DFT的相频特性图
- title('(d)64点DFT的相频特性图')
- xlabel('ω/\pi');ylabel('相位');axis([0,2,-3.5,3.5])



(a)32点DFT的幅频特性图
幅度
ω/π
(c)64点DFT的幅频特性图
幅度
ω/π
(b)32点DFT的相频特性图
相位
ω/π
(d)64点DFT的相频特性图
相位
ω/π

小结

- **DFT** 引入的目的
- **DFT** 的定义
- **DFT**与**DFS**、**ZT**、**FT**之间的关系
- **DFT**、**IDFT**的计算
- **DFT**的矩阵表示

3.2 离散傅里叶变换（DFT）的主要性质

1. 线性性质

- 设$x_1(n)$，$x_2(n)$为有限长序列，长度分别为 N_1、N_2
- 它们的离散付里叶变换分别为

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)]_N$$

$$X_2(k) = DFT[x_2(n)]_N \qquad N \geq \max[N_1, N_2]$$

- 若

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

- 则

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)]_N = aX_1(k) + bX_2(k),$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots N-1$$

DFT的隐含周期性

- 由于 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ $\quad W_N^k = W_N^{(k+mN)}$

- 所以**X(k)**满足：

$$X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)$$

- 物理意义：**X(k)**为 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的**N**点等间隔采样。

- $X(e^{j\omega})$ 以**2π**为周期，**X(k)**以**N**为周期。

3. 循环移位性质

- 循环移位:
  - 有限长序列x(n),序列长度为M，对序列进行周期延拓，周期N≥M

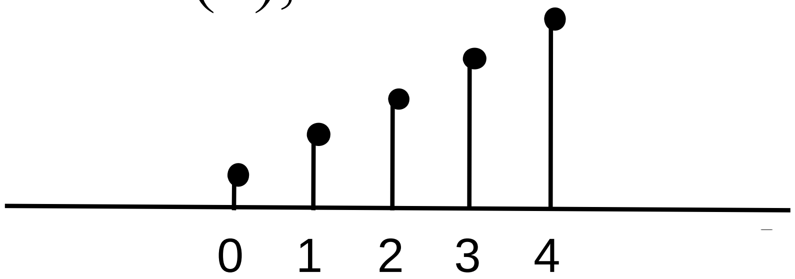
$$\tilde{x}_N(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)=x((n))_N$$

  - x(n)的循环移位序列： $\tilde{x}_N(n)$左移m个单位，取主值序列

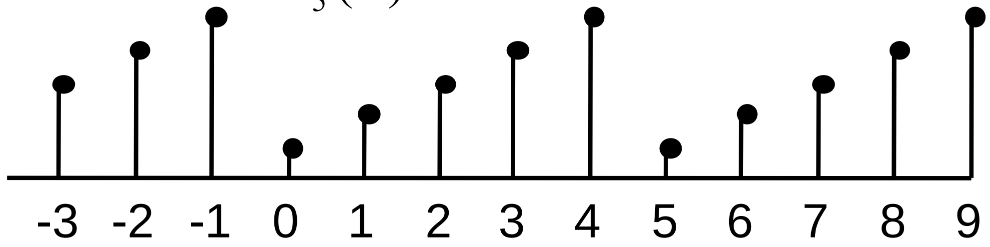
$$y(n)=\tilde{x}_N(n+m)R_N(n)=x((n+m))_N R_N(n)$$

- 循环移位序列的DFT与原序列x(n)的DFT有何关系？

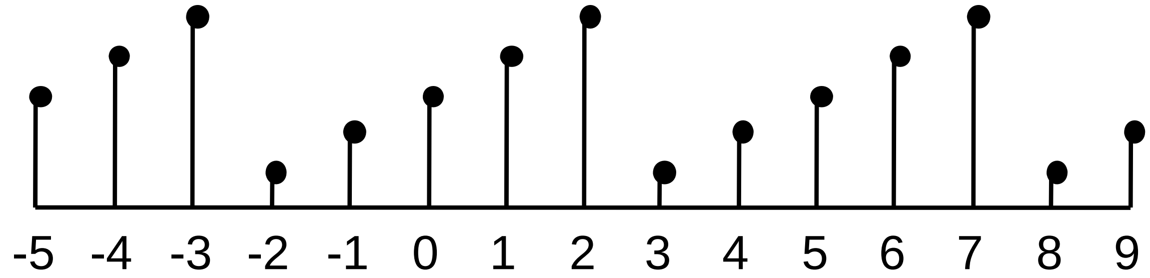
$x(n), M=5$

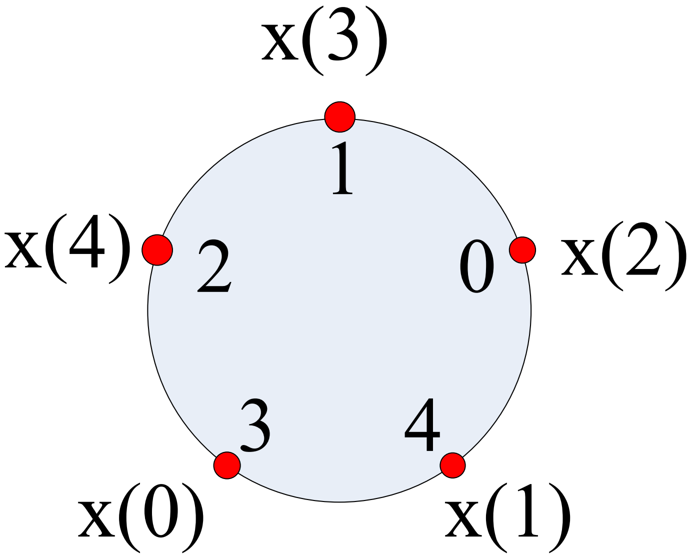


$\tilde{x}_5(n)$

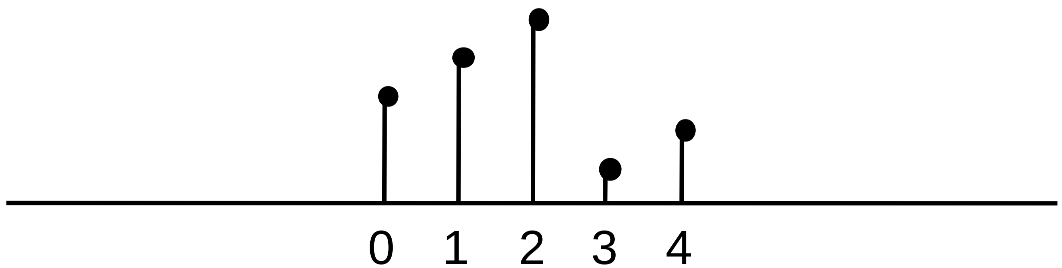


$\tilde{x}_5(n+2)$





$\tilde{x}_5(n+2)R_5(n)$



序列循环移位后的DFT

$$y(n)=\tilde{x}_N(n+m)R_N(n), \quad N \ge M \qquad X(k)=DFT[x(n)]_N$$

- 则 $$Y(k)=DFT[y(n)]_N=W_N^{-km}X(k)$$
- 证明:

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+m))_N R_N(n)W_N^{kn} \quad k=0,1,\cdots N-1$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+m))_N W_N^{kn}=\sum_{l=m}^{N-1+m}x((l))_N W_N^{k(l-m)}$$

$$=W_N^{-km}\sum_{l=m}^{N-1+m}x((l))_N W_N^{kl}=W_N^{-km}\sum_{l=0}^{N-1}x(l)_N W_N^{kl}$$

$$=W_N^{-km}X(k)$$

- 同样，对于频域有限长序列**X(k)**的循环移位，有如下反变换特性：

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n)$$

4．复共轭序列的DFT

- 设 $x^*(n)$ 为 $x(n)$ 的复共轭序列，长度为**N**

$$X(k) = DFT[x(n)]_N$$

- 则 $DFT[x^*(n)]_N = X^*(N-k), \quad k = 0,1,\cdots,N-1$

- 证明：

$$X^*(N-k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(N-k)n}\right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)W_N^{(k-N)n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)W_N^{kn} \quad = DFT[x^*(n)]_N$$

$$X(0) = X(N)$$

- 类似地：

$$DFT[x^*(N-n)]_N = X^*(k) \qquad x(0) = x(N)$$

5．DFT的共轭对称性

- **DFT变换涉及到的x(n)和X(k)均为有限长序列，定义区间为 0到N-1，所以这里的对称性是指关于N/2点的对称性。**
- 有限长共轭对称序列 $x_{ep}(n)$

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^{*}(N-n), \quad 0 \le n \le N-1$$

- 当**N**为偶数时，用**N/2-n**替代**n**

$$x_{ep}(\frac{N}{2}-n) = x_{ep}^{*}(\frac{N}{2}+n), \quad 0 \le n \le \frac{N}{2}-1$$

共轭反对称序列 $x_{op}(n)$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad 0 \le n \le N-1$$

- 当**N**为偶数时，用**N/2-n**替代**n**

$$x_{op}(\frac{N}{2} - n) = -x_{op}^*(\frac{N}{2} + n), \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1$$

- 对于任何有限长序列**x(n)**，均可表示为

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \le n \le N-1$$

- 用**N-n**替代**n**，取共轭

$$x^*(N-n) = x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) = x_{ep}(n) - x_{op}(n)$$

- 于是

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \qquad x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

DFT的共轭对称性

- **1. 将序列分成实部与虚部之和**

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

其中，

$$x_r(n) = \mathrm{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_i(n) = j\,\mathrm{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

- 则：

$$DFT[x_r(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) + x^*(n)]$$

$$= \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{ep}(k)$$

$$DFT[jx_i(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n) - x^*(n)]$$

$$= \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k)$$

- **2. 将序列分成共轭对称和共轭反对称之和**

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n),\qquad 0\le n\le N-1$$

其中，

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$$

- 则：

$$DFT[x_{ep}(n)]=\frac{1}{2}DFT[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(k)]=\mathrm{Re}[X(k)]$$

$$DFT[x_{op}(n)]=\frac{1}{2}DFT[x(n)-x^*(N-n)]$$

$$=\frac{1}{2}[X(k)-X^*(k)]=j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

DFT的共轭对称性小结：

实部 ⟺ 共轭对称分量

J虚部 ⟺ 共轭反对称分量

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$X_{ep}(k) = DFT[x_r(n)], \qquad X_{op}(k) = DFT[jx_i(n)]$$

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = X_R(k) + jX_I(k)$$

$$X_R(k) = \mathrm{Re}[X(k)] = DFT[x_{ep}(n)],$$

$$jX_I(k) = j\ \mathrm{Im}[X(k)] = DFT[x_{op}(n)]$$

实序列DFT的特点

- 设x(n)为长度为N的实序列，且X(k)=DFT[x(n)]，则

$$X(k) = X^*(N-k), \qquad 0 \le k \le N-1$$

- 写成极坐标形式 $X(k) = |X(k)| e^{j\theta(k)}$
- 则
  - $|X(k)|$ 关于**k=N/2**点偶对称
  - $\theta(k)$ 关于**k=N/2**点奇对称

$$|X(k)| = |X(N-k)|$$

$$\theta(k) = -\theta(N-k)$$

- 实数序列的**DFT**满足共轭对称性，利用这一特性，只要知道一半数目的 **X（k）**，就可得到另一半的 **X（k）**，这一特点在**DFT**运算中可以加以利用，以提高运算效率。
- 计算一个复序列的**N**点**DFT**，可求得两个不同实序列的**DFT**

例：$x_1(n), x_2(n)$ 是实序列，长度均为**N**

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

- **DFT**

$$X(k) = DFT[x(n)]_N = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right]$$

$$X_2(k) = DFT[x_2(n)] \ = -jDFT[jx_2(n)]$$

$$= -jX_{op}(k) = \frac{1}{2j}\left[X(k) - X^*(N-k)\right]$$

实序列2N点的DFT，拆分重组为N点复序列的DFT

例：$v(n)$ 是实序列，长度为2N

- 拆分 $x_1(n)=v(2n) \quad x_2(n)=v(2n+1) \quad 0\le n\le N-1$
- 重组 $x(n)=x_1(n)+jx_2(n) \quad 0\le n\le N-1$
- N点DFT

$$V(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}v(n)W_{2N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}v(2n)W_{2N}^{k2n}+\sum_{n=0}^{N-1}v(2n+1)W_{2N}^{k(2n+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_N^{kn}+W_{2N}^{k}\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_N^{kn} \quad =X_1(k)+W_{2N}^{k}X_2(k)$$

$$=X_1(k)_N+W_{2N}^{k}X_2(k)_N \quad 0\le k\le 2N-1$$

6. 循环卷积定理

1. 两个有限长序列的循环卷积

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为**N**和**M**
- $x(n)$ 与 $h(n)$ 的**L**点循环卷积定义为

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

$$L \geq \max[N, \quad M]$$

$\textcircled{L}$ **L**点循环卷积　　　$\circledast$ 循环卷积　　　$*$ 线性卷积

利用矩阵计算循环卷积

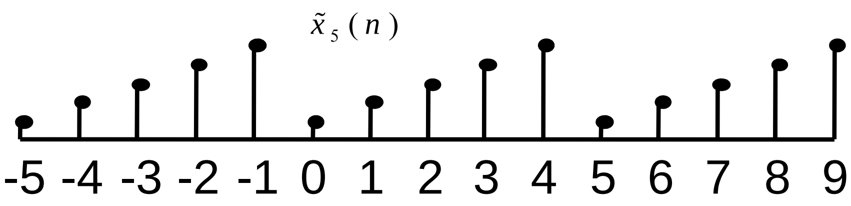
$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L\right] R_L(n)$$

$n = 0, m = 0,1,2,\cdots L-1$

$x((n-m))_L$ 形成 $x(n)$ 的循环倒相序列

$$\left\{x((0))_L, x((-1))_L, x((-2))_L, \cdots, x((-l+1))_L\right\}$$

$$= \left\{x(0), x(L-1), x(L-2), \cdots, x(1)\right\}$$



$n = 1, m = 0,1,2,\cdots L-1$

$x((n-m))_L$ 形成的序列为

$$\left\{x((1))_L, x((0))_L, x((-1))_L, \cdots, x((-L+2))_L\right\}$$

$$= \left\{x(1), x(0), x(L-1), \cdots, x(2)\right\}$$

当n、m从0变换到L-1时，得到 $x((n-m))_L$ 的矩阵

X(n)的L点循环卷积矩阵

$$
\begin{bmatrix}
x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\
x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\
x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0)
\end{bmatrix}
$$

- 第一行是 $\{x(0), x(1), x(2), \cdots, x(L-1)\}$ 的循环倒相序列，若**x(n)** 的长度**M<L**，则需在**x(n)**末尾补**L-M**个零；
- 前一行向右循环移位形成其它各行；
- 与主对角线平行的线上，各元的值相等。

循环卷积的矩阵计算公式

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L\right] R_L(n)$$

$$L \geq \max[N, \quad M]$$

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ \vdots \\ y_c(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

若**h(n)** 的长度**N<L**，则需在**h(n)**末尾补**L-N**个零

例3.2.1：计算序列 $h(n), x(n)$ 的4点和8点循环卷积

$$h(n)=\{h(0),h(1),h(2),h(3)\}=\{1,2,0,1\},$$

$$x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{2,2,1,1\},$$

解：

$$y_c(n)=h(n)\,\text{Ⓛ}\,x(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

- **4点循环卷积**

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

8点循环卷积

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \\ y_c(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $L \geq N + M - 1$ 循环卷积结果等于线性卷积
- 循环卷积计算复杂

DFT的时域循环卷积定理（1）

- 序列 $h(n), x(n)$的长度分别为**N**和**M**
- $y_c(n)$ 为 $x(n)$与$h(n)$ 的**L**点循环卷积，即

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) \quad L \geq \max[N, M]$$

- 且 $X(k) = DFT[x(n)]_L \quad H(k) = DFT[h(n)]_L$
- 则

$$Y_c(k) = DFT[y_c(n)]_L = H(k)X(k)$$

DFT的时域循环卷积定理（2）

- 证明：

$$Y_c(k) = DFT[y_c(n)]_L = \sum_{n=0}^{L-1} y_c(n) W_L^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{L\text{-}1} \left\{ [\sum_{m=0}^{L\text{-}1} h(m) x((n\text{-}m))_L] R_L(n) \right\} W_L^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{L\text{-}1} h(m) \sum_{n=0}^{L\text{-}1} x((n\text{-}m))_L W_L^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{L\text{-}1} h(m) W_L^{km} \sum_{n=0}^{L\text{-}1} x((n\text{-}m))_L W_L^{k(n-m)}$$

$$= \sum_{m=0}^{L\text{-}1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=-m}^{L\text{-}1-m} x((j))_L W_L^{kj}$$

DFT的时域循环卷积定理（3）

$$Y_c(k) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=-m}^{L-1-m} x((j))_L W_L^{kj}$$

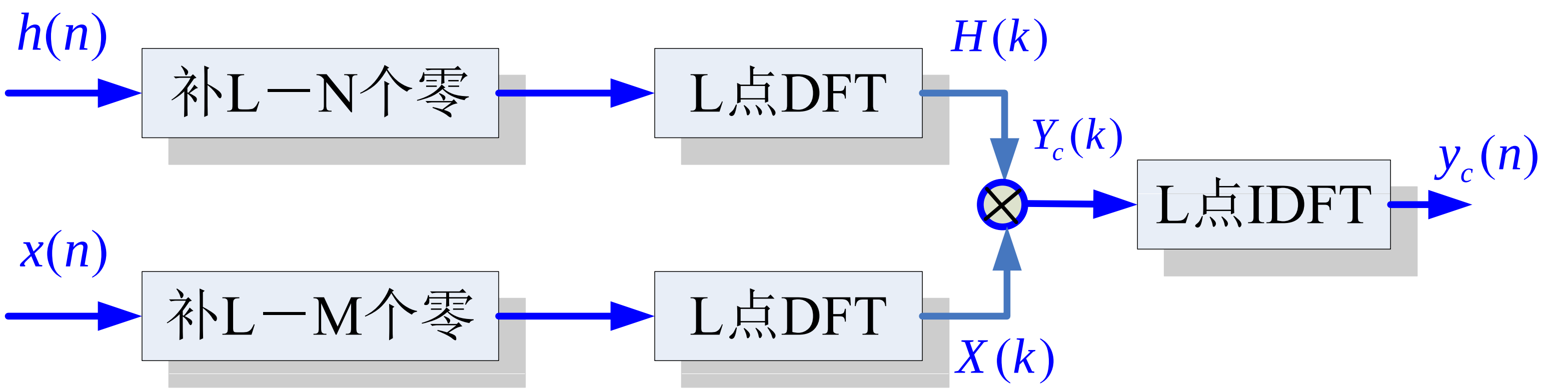
$x((j))_L W_L^{k(j)}$ 以L为周期，对其在任何一个周期上求和均相等

$$\therefore Y_c(k) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) W_L^{km} \sum_{j=0}^{L-1} x((j))_L W_L^{kj}$$

$$= H(k) X(k), \qquad 0 \le k \le L-1$$

DFT： 时域循环卷积 ⟶ 频域乘积

■ 序列循环卷积运算框图



DFT的频域循环卷积定理

- 序列 $h(n), x(n)$ 的长度分别为**N**和**M**

$$y_m(n)=h(n)x(n),\quad H(k)=DFT\left[h(n)\right]_L,\quad X(k)=DFT\left[x(n)\right]_L,$$

- 则 $$Y_m(k)=DFT[y_m(n)]_L=\frac{1}{L}H(k)\,Ⓛ\,X(k)$$

- 证明：$$Y_m(k)=DFT\left[y_m(n)\right]=\sum_{n=0}^{L-1}h(n)x(n)W_L^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{L-1}\left[\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)W_L^{-mn}\right]x(n)W_L^{kn}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)\sum_{n=0}^{L-1}W_L^{-mn}x(n)W_L^{kn}\quad=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_L^{(k-m)n}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{m=0}^{L-1}H(m)X((k-m))_L R_L(k)=\frac{1}{L}H(k)\,Ⓛ\,X(k)$$

7. 离散巴塞伐尔定理（1）

- 序列 $x(n)$ 的长度为**N**
- **DFT** $X(k) = DFT[x(n)]_N$
- 则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

7. 离散巴塞伐尔定理（2）

- 证明

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]x^*(n)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\right]^*$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)X^*(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

- 序列在时域计算的能量等于其在频域计算的能量

3.3 频域采样

■ 时域采样定理

采样频率大于等于奈奎斯特采样频率，可以由离散信号恢复原来的连续信号

■ 频域采样定理

频域抽样呢？　　抽样条件？　　内插公式？

- 任意序列**x(n)**，其**Z**变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 若**Z**变换**X(z)**的收敛域包含单位圆，即序列绝对可和，在单位圆上对**X(z)**等间隔采样得到

$$\tilde{X}_N(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- $\tilde{X}_N(k)$ 是以**N**为周期的周期序列

$$\tilde{x}_N(n)=IDFS\left[\tilde{X}_N(k)\right]=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}_N(n)\Rightarrow x(n)\quad ?$$

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS[\tilde{X}_N(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_N(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N\text{-}1}e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N\text{-}1}e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \begin{cases} 1, & m = n + iN, i\text{为整数} \\ 0, & m\text{为其它值} \end{cases}$$

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n+iN)$$

- 由 $\tilde{x}_N(n)$ 恢复出**x(n)**的条件：
  - □ **x(n)**序列长度有限
  - □ **N**大于**x(n)**序列长度

- 截取 $\tilde{x}_N(n)$ 和 $\tilde{X}_N(k)$ 的主值序列

$$X_N(k) = \tilde{X}_N(k)R_N(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{\pi}{N}k}}, \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = x(n)$$

则 $x_N(n)$ 和 $X_N(k)$ 构成一对**DFT**

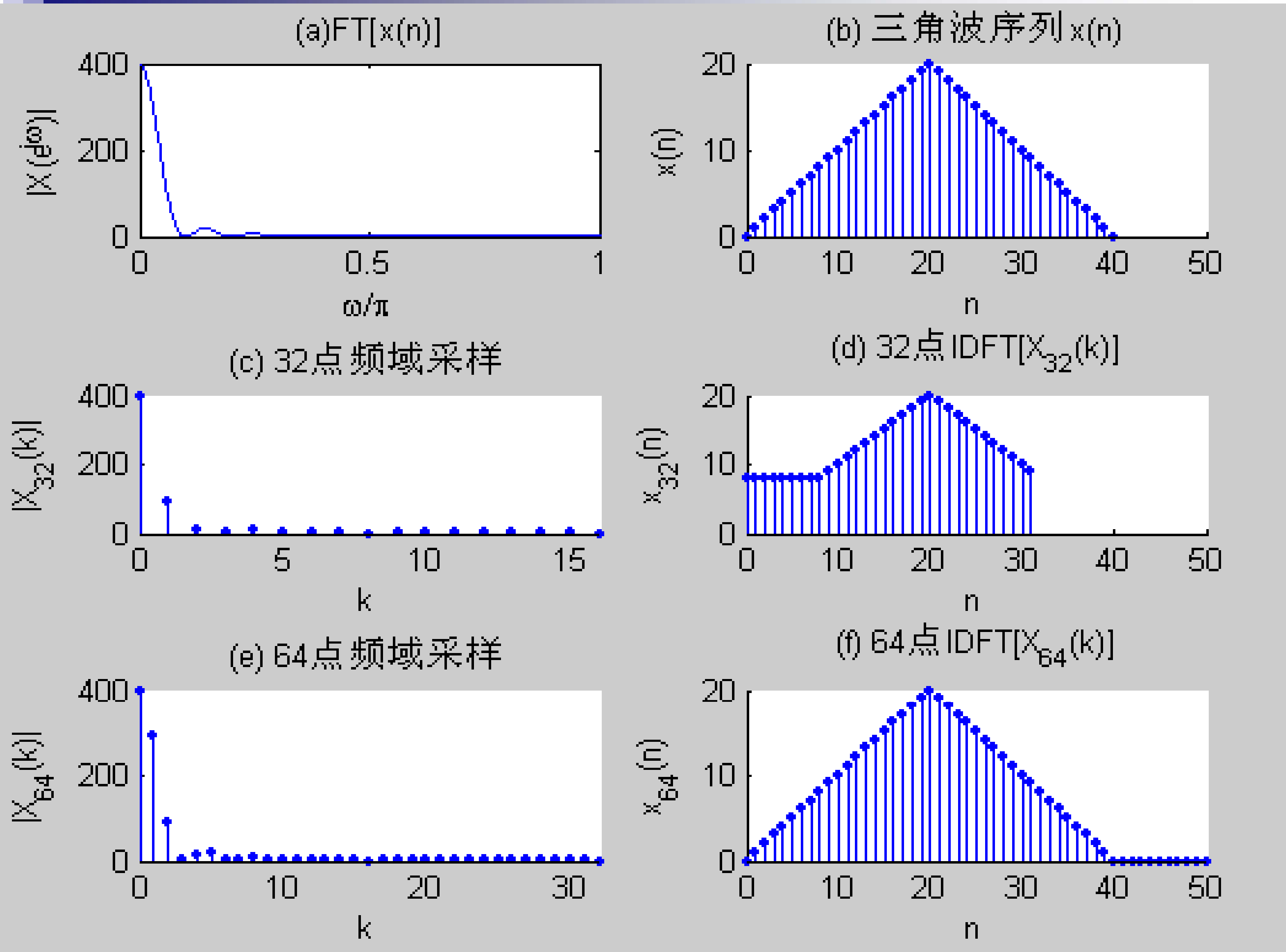
频域采样定理

- 原若序列**x(n)**长度为**M**，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$
- 对 $X(e^{j\omega})$在频率区间 $[0, 2\pi]$等间隔采样得到 $X_N(k)$
- 只有当频域采样点数 $N \geq M$
- 有

$$\tilde{x}_N(n)R_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)]R_N(n) = x(n)$$

或： $x(n) = IDFT\left[X_N(k)\right]_N$

- 即可由频域采样 $X_N(k)$ 不失真地恢复原信号，否则产生时域混叠现象。



(a)FT[x(n)]
|X(e^jω)|
ω/π
(b) 三角波序列 x(n)
x(n)
n
(c) 32点频域采样
|X32(k)|
k
(d) 32点 IDFT[X32(k)]
x32(n)
n
(e) 64点频域采样
|X64(k)|
k
(f) 64点 IDFT[X64(k)]
x64(n)
n

3.3 频域内插公式

- 用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式?
- 序列**x(n)**长度为**M**，其**Z**变换为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}$$

- 其中 $N \geq M$ ，满足频域采样定理
- 在**Z**平面的单位圆上，对**X(z)**进行采样，采样点数为**N**

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

问题：如何由 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ ？

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}\quad=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}z^{-n}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(W_N^{-k}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \qquad (W_N^{-Nk}=1)$$

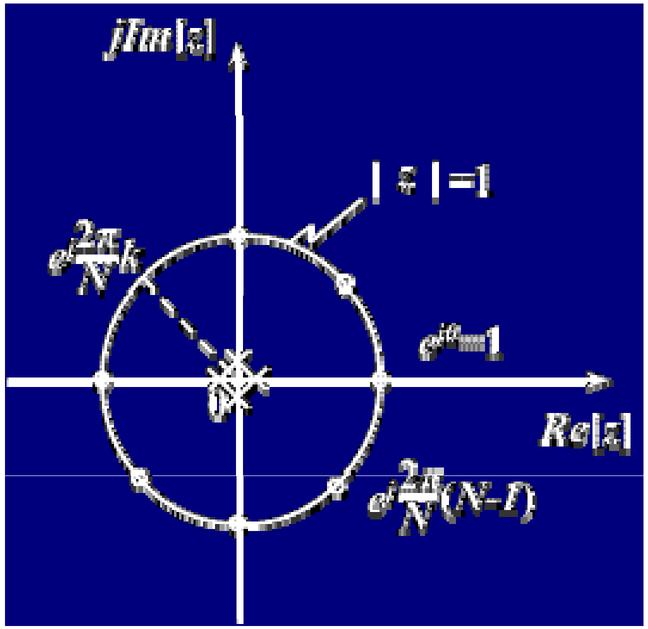
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(z)$$

Z域内插函数

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-W_N^{-k})}$$

零点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}r}$，$r=0,1,\ldots,N-1$

极点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$，$0 \quad (N-1)$阶



$$z = e^{j\omega}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi_k(\omega)$$

$$\varphi_k(\omega) = \frac{1}{N}\frac{e^{-j(\omega N-2k\pi)/2}(e^{j(\omega N-2k\pi)/2}-e^{-j(\omega N-2k\pi)/2})}{e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2}(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2}-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2})}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sin\left[N(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2\right]}{\sin\left[(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2\right]}e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)(N-1)}$$

令$\varphi(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\omega(N-1)/2}$ $\qquad \therefore\ \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$

- 用 $X(k)$ 表示 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式和内插函数

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

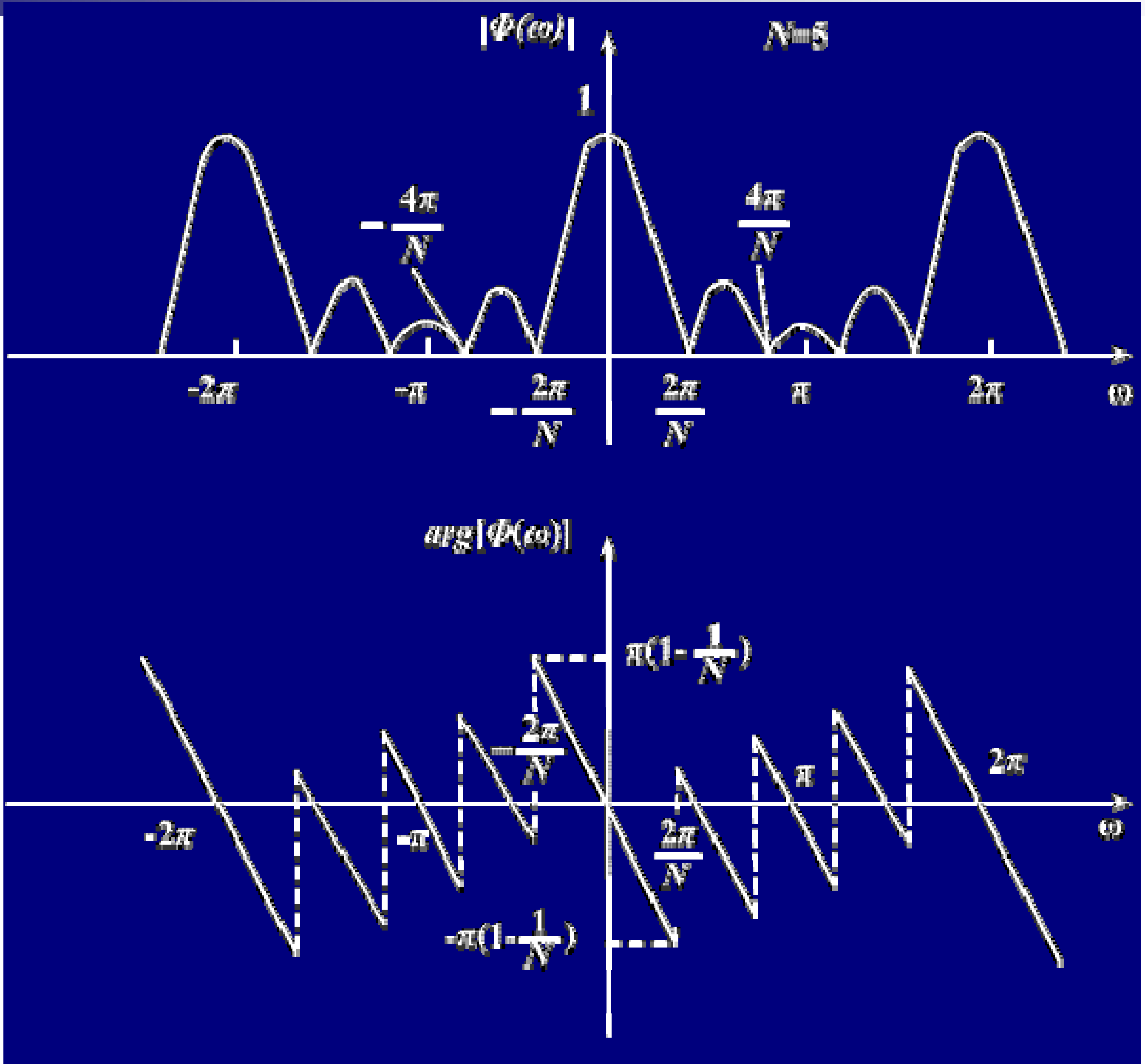
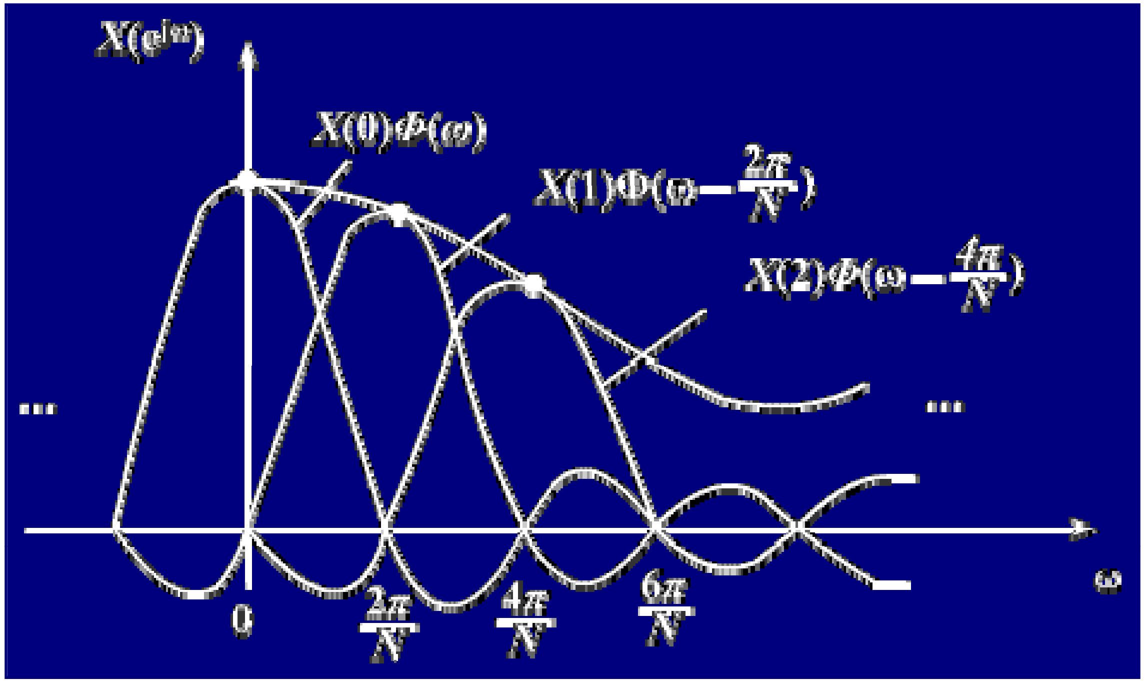


图3-13 插值函数 $\Phi(\omega)$的幅度特性与相位特性 (N=5)

内插公式：$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)=\begin{cases}1 & \omega=\frac{2\pi}{N}k=\omega_k\\ 0 & \omega=\frac{2\pi}{N}i=\omega_i \quad i\neq k\end{cases}$$

- 保证了各采样点上的值与原序列的频谱相同；
- 采样点之间，为采样值与对应点的内插公式相乘，并叠加而成。



小结

- 频域采样定理

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow X(k)$$

  - 条件，以保证恢复原序列 **x(n)**

- 频域的内插公式

$$X(k) \longrightarrow X(e^{j\omega})$$

3.4 DFT的快速算法——快速傅里叶变换（FFT）

3. 4. 1问题的提出

4点序列{2，3，3，2} DFT的计算复杂度

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\quad k=0,1,\cdots N-1$$

$$X(0)=2W_N^0+3W_N^0+3W_N^0+2W_N^0=10$$

$$X(1)=2W_N^0+3W_N^1+3W_N^2+2W_N^3=-1-j$$

$$X(2)=2W_N^0+3W_N^2+3W_N^4+2W_N^6=0$$

$$X(3)=2W_N^0+3W_N^3+3W_N^6+2W_N^9=-1+j$$

复数加法 ***N(N-1)***　　　复数乘法 ***N*** **2**

如何提高DFT的运算效率?

解决问题的思路

1. 将长序列DFT分解为短序列的DFT

2. 利用旋转因子 W_N^m 的周期性、对称性。

旋转因子 W_N^m 的性质

1)周期性

$$W_N^{m+lN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = W_N^m$$

2) 对称性

$$\left(W_N^{N-m}\right)^* = W_N^m$$

$$W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m$$

$$W_N^m = W_{N/n}^{m/n}, \quad N/n\,, m/n \text{为整数}$$

3.4.2 基2FFT算法

$N=2^M$， M为自然数

将时域序列逐次分解为一组子序列，利用旋转因子的特性，由子序列的DFT来实现整个序列的DFT。

基2时间抽取(Decimation in time)DIT-FFT算法

$$x(n) \rightarrow \begin{cases} x(2r) \\ x(2r+1) \end{cases} \qquad r=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

基2频率抽取(Decimation in frequency)DIF-FFT算法

$$X(k) \rightarrow \begin{cases} X(2m) \\ X(2m+1) \end{cases} \qquad m=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

DIT-FFT算法

- 序列 $x(n)$ 的 N 点DFT为 $$X(k)=DFT\left[x(n)\right]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

- 奇偶分解

$$X(k)=\sum_{n\text{为偶数}}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n\text{为奇数}}x(n)W_N^{kn}=$$

$$=\sum_{l=0}^{N/2-1}x(2l)W_N^{k2l}+\sum_{l=0}^{N/2-1}x(2l+1)W_N^{k(2l+1)}$$

$$x_1(l)=x(2l),\ x_2(l)=x(2l+1),\ W_N^{2kl}=W_{N/2}^{kl}\qquad N\text{为2的整数倍}$$

$$X(k)=\sum_{l=0}^{N/2-1}x_1(l)W_{N/2}^{kl}+W_N^k\sum_{l=0}^{N/2-1}x_2(l)W_{N/2}^{kl}$$

$$X(k)=\sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl}+W_N^k\sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl}$$

- **分解为2个DFT**

$$X_1(k)=\sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l)W_{N/2}^{kl} \qquad X_2(k)=\sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l)W_{N/2}^{kl}$$

$$k=0,1,2,\cdots,N/2-1$$

- **均以N/2为周期**
- **利用** $W_N^{m+\frac{N}{2}}=-W_N^m$ **及DFT的隐含周期性，得**

$$X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k) \qquad k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k+\frac{N}{2})+W_N^{k+\frac{N}{2}}X_2(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)$$

$$\left.\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X\left(k+\frac{N}{2}\right) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{aligned}\right\} \quad k = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$X_1(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_1(l) W_{N/2}^{kl} \qquad X_2(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x_2(l) W_{N/2}^{kl}$$

- 运算量

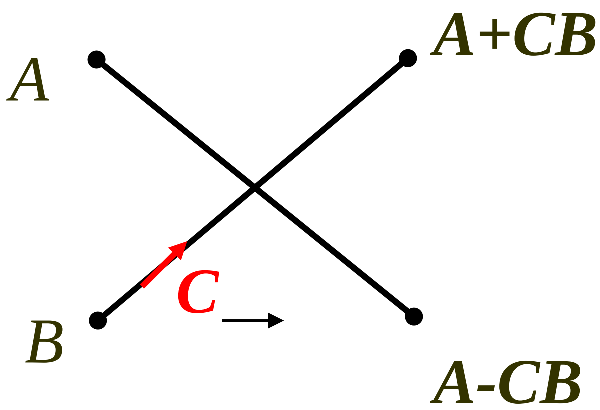
复数乘

$$\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \times 2 + \frac{N}{2} = \frac{N}{2}(N+1) \approx \frac{N^2}{2} \qquad N \gg 1$$

复数加

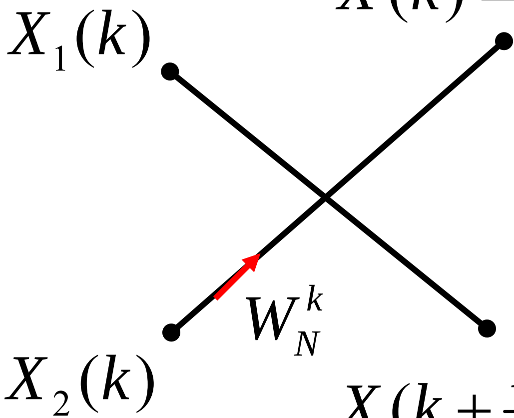
$$\frac{N}{2} \times \left(\frac{N}{2} - 1\right) \times 2 + \frac{N}{2} \times 2 = \frac{N^2}{2}$$

蝶形图及运算功能



1次乘法

2次加法

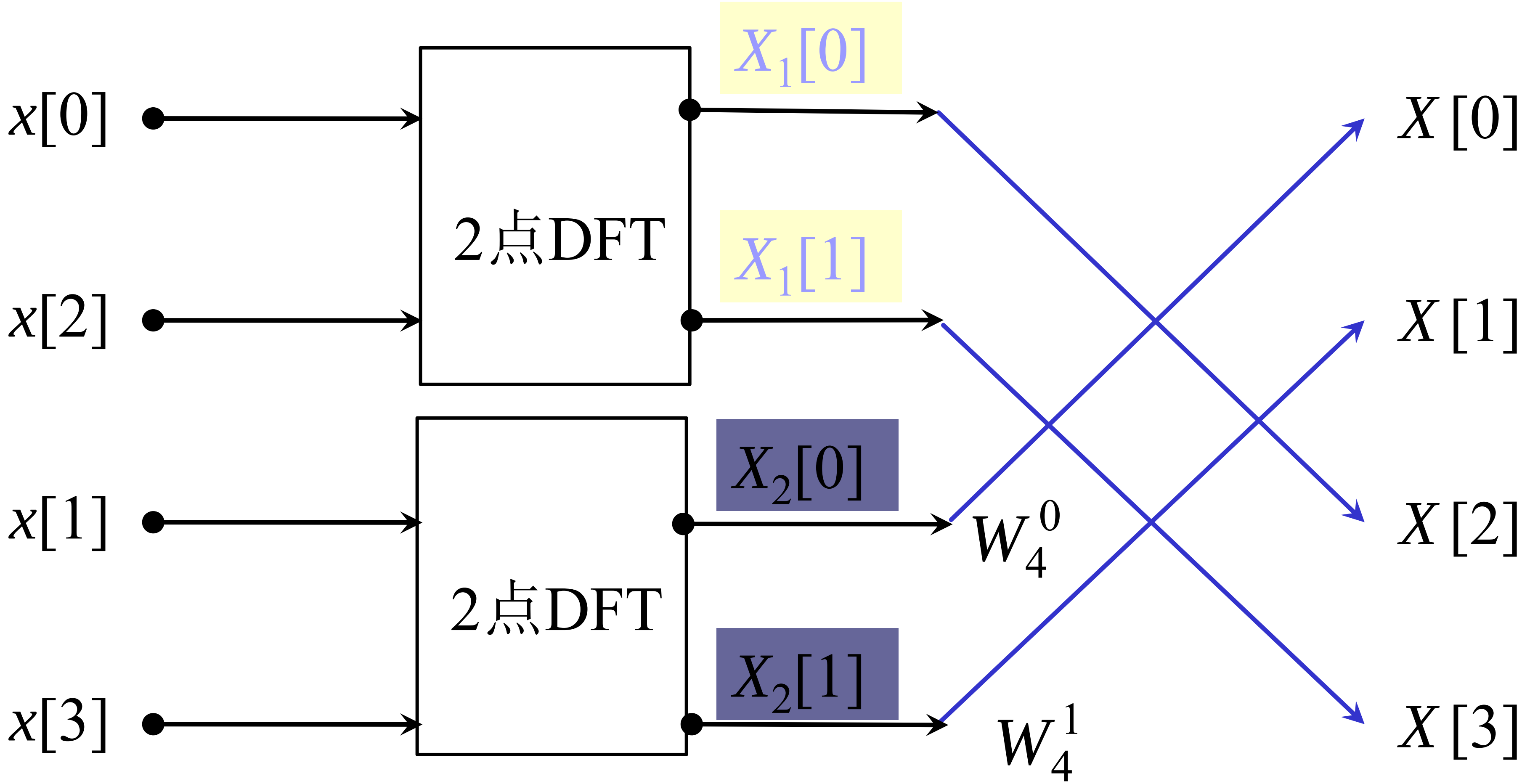


$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

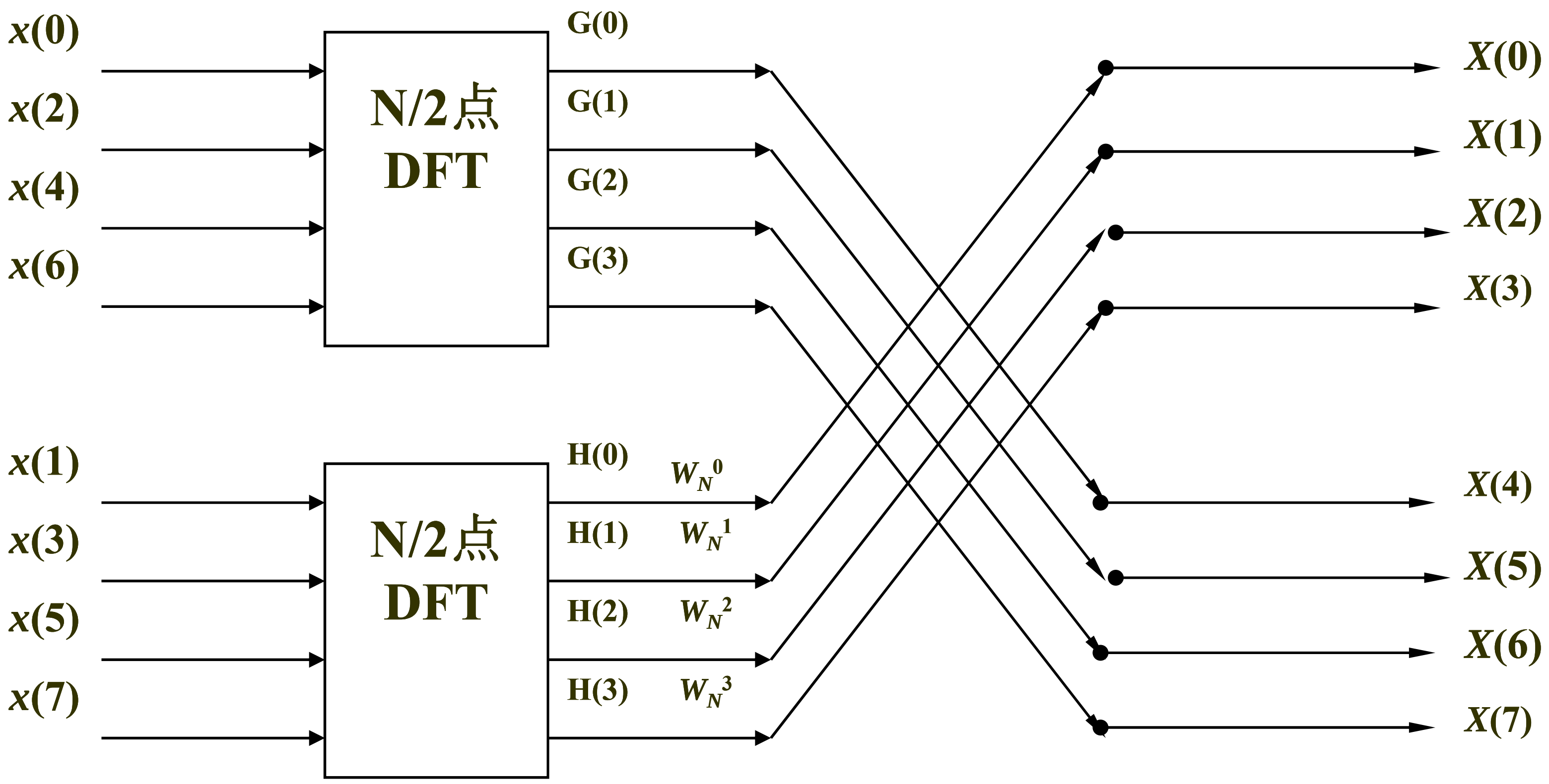
$$X(k+\frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$

$$X(k)=X_1(k)+W_4^k X_2(k),\quad k=0,1$$

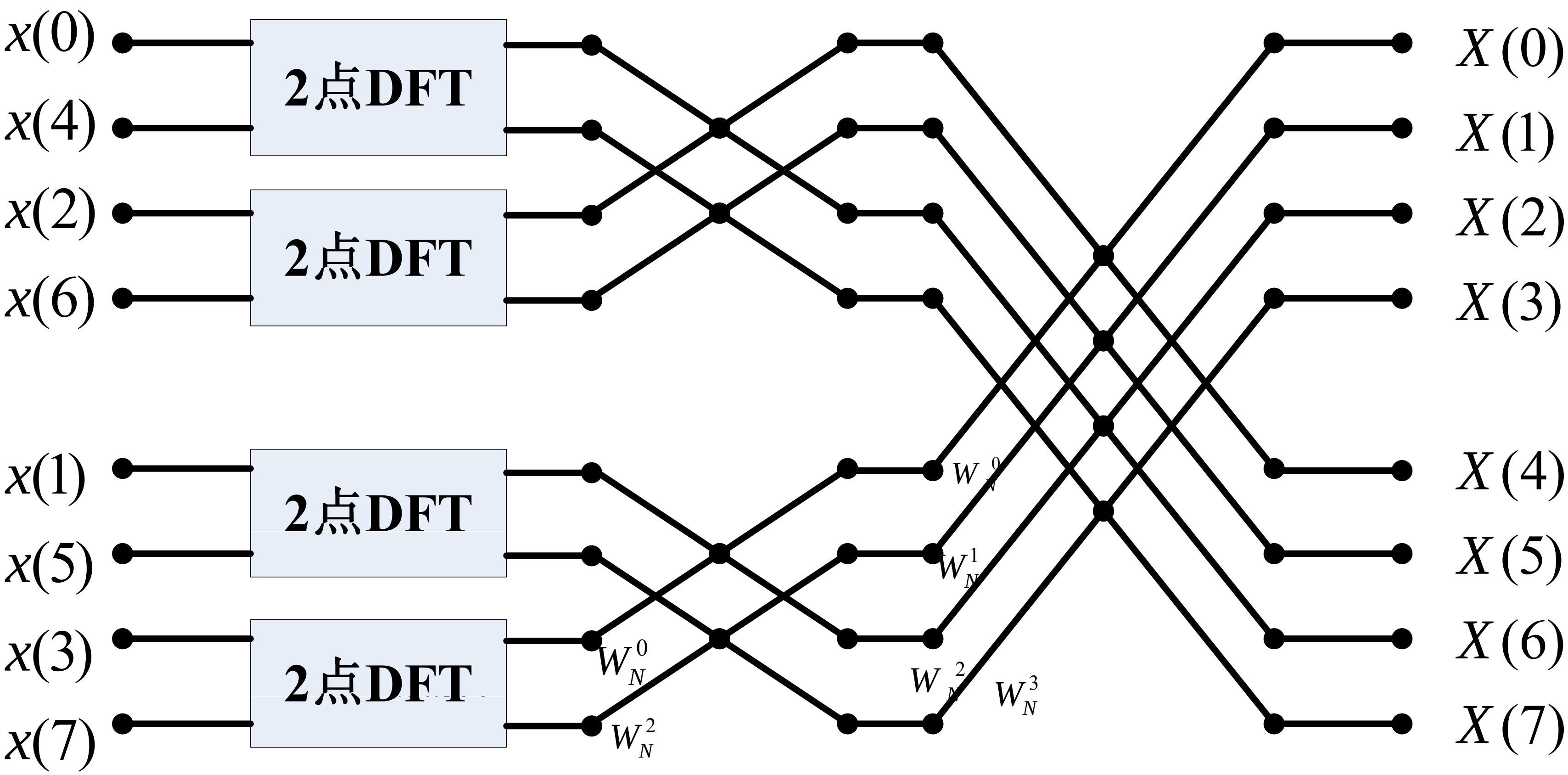
$$X(k+2)=X_1(k)-W_4^k X_2(k),\quad k=0,1$$



8点DFT一次时域抽取分解运算流图

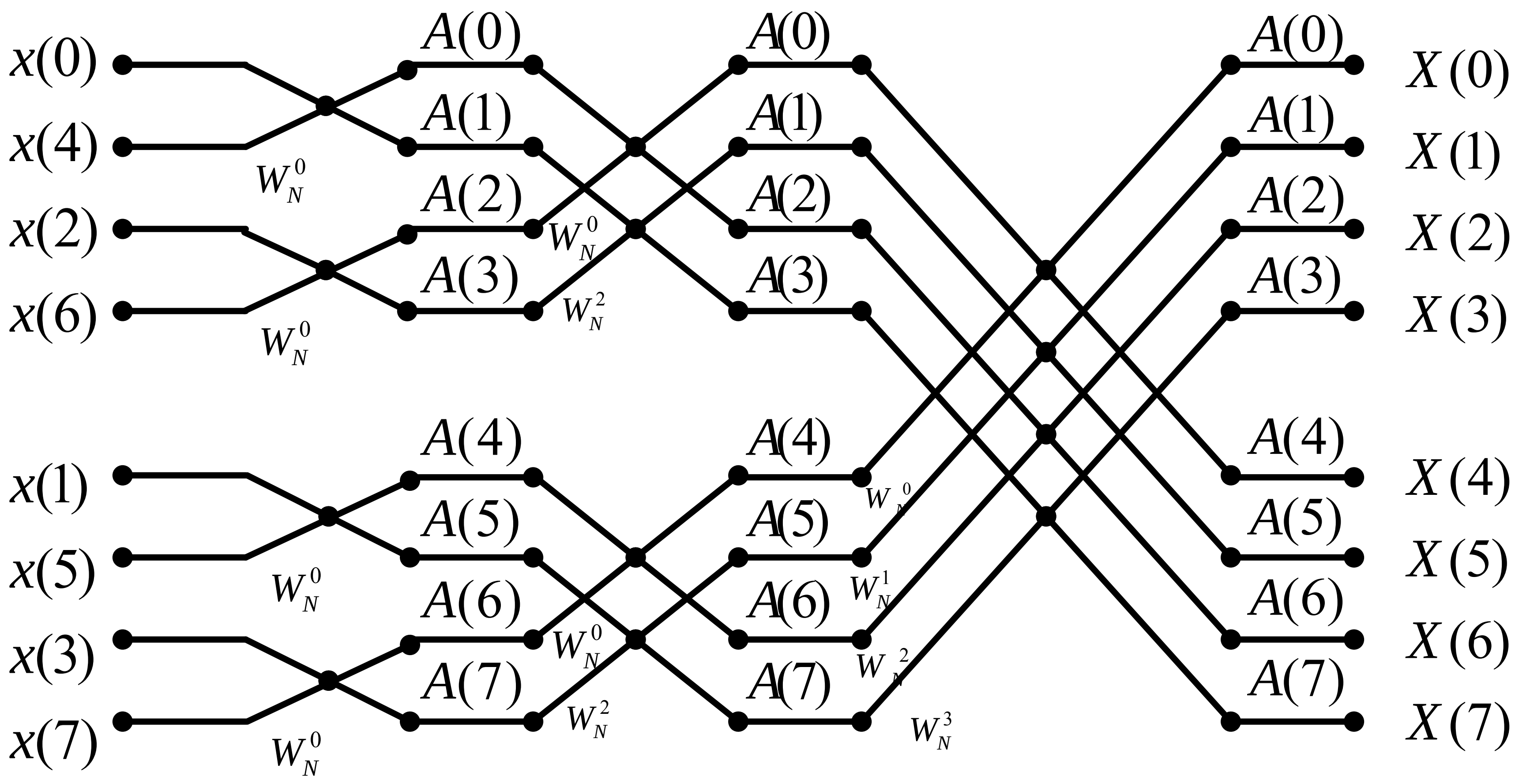


两个4点DFT组成8点DFT



由四个2点DFT组成8点DFT

8点DIT-FFT运算流图



经过M级时域奇偶抽取，可分解为N个1点DFT（即时域序列本身）和M级蝶形运算，每一级有N/2个蝶形。

2. DIT-FFT的运算效率

- N=2^M的序列，通过M级分解最后成为1点的DFT运算。构成M级运算过程。
- 每一级运算都由N/2个蝶形运算构成。每一级运算含N/2次复乘和N次复加。
- 总运算量：
  - 复乘 $$\frac{N}{2} \bullet M = \frac{N}{2} \log_2 N$$
  - 复加 $$N \bullet M = N \log_2 N$$

运算效率

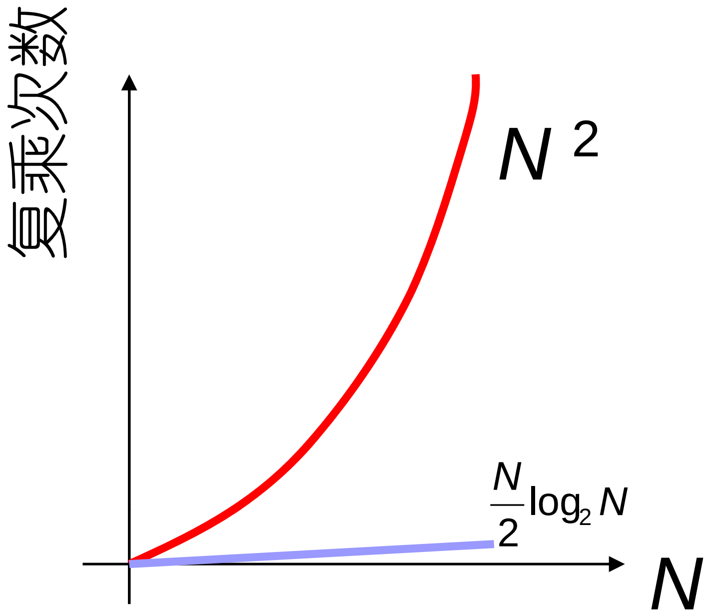
$$\frac{DFT\text{的乘法次数}}{DIT-FFT\text{的乘法次数}}=\frac{N^2}{C_M(2)}=\frac{N^2}{\frac{N}{2}\log_2 N}=\frac{2N}{M}$$

$$N=2^{10}=1024$$

- 运算效率为**204.8**

$$N=2^{11}=2048$$

- 运算效率为**372.37**



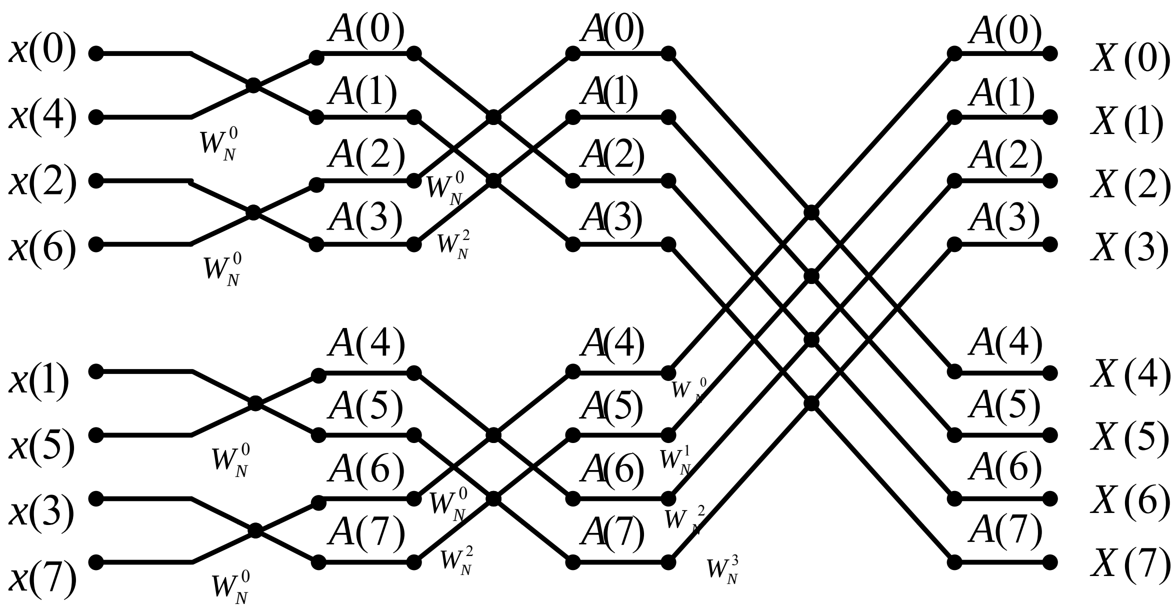
DIT-FFT的运算规律：

- 蝶形运算
- 原位计算
- 序列的倒序
- 旋转因子的变化规律

3. DIT-FFT运算规律及编程思想

1) 原位计算

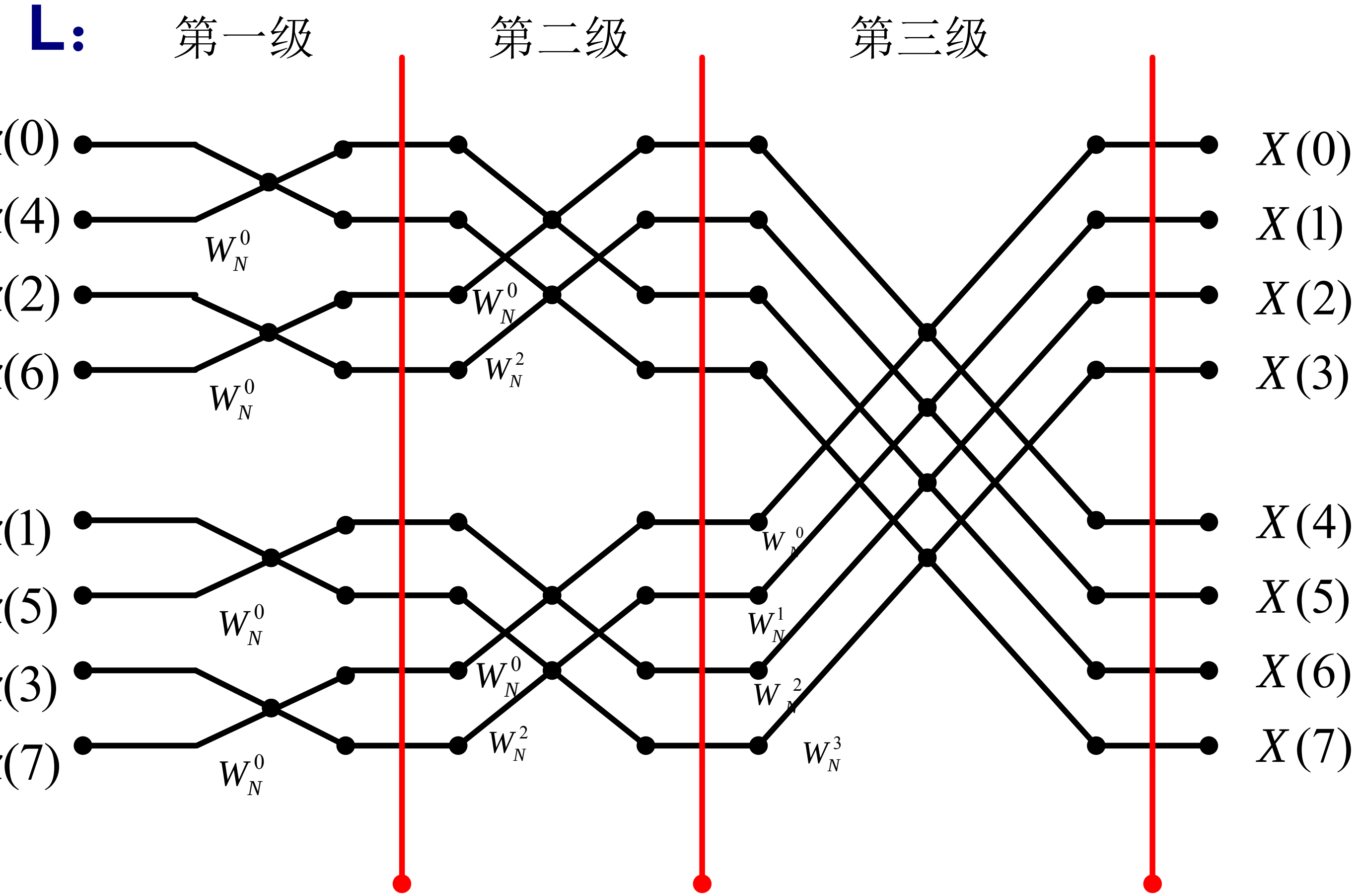
- 观察每个蝶形的两个输入和两个输出
- 蝶形的输出可存入原输入数据所占存储单元
- 利用同一组存储单元存储输入、输出数据的方法，称为原位（址）计算。
- 节约内存
- 节省寻址的时间



2）旋转因子的变化规律

- 旋转因子 W_N^p　　旋转因子指数 p

  W_N^p 与运算级数L的关系

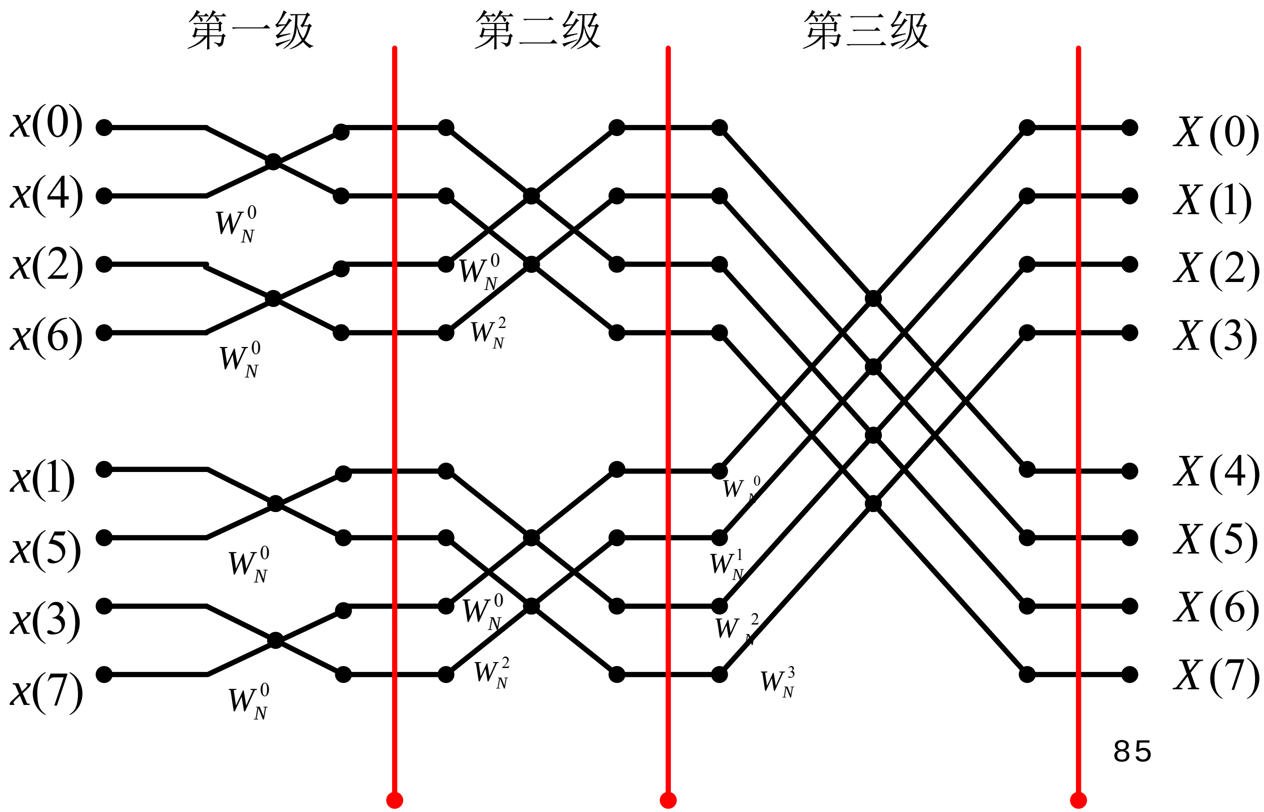


2）旋转因子的变化规律（2）

$$L=3\text{时}，\quad W_N^p = W_N^J = W_{2^L}^J, J=0,1,2,3$$

$$L=2\text{时}，\quad W_N^p = W_{N/2}^J = W_{2^L}^J = W_N^{2J}, J=0,1$$

$$L=1\text{时}，\quad W_N^p = W_{N/4}^J = W_{2^L}^J = W_N^{4J}, J=0$$



一般情况

$N=2^{M}$ ，第L级的旋转因子为

$$W_N^p = W_{2^L}^J, \quad J = 0,1,2,\cdots,2^{L-1}-1$$

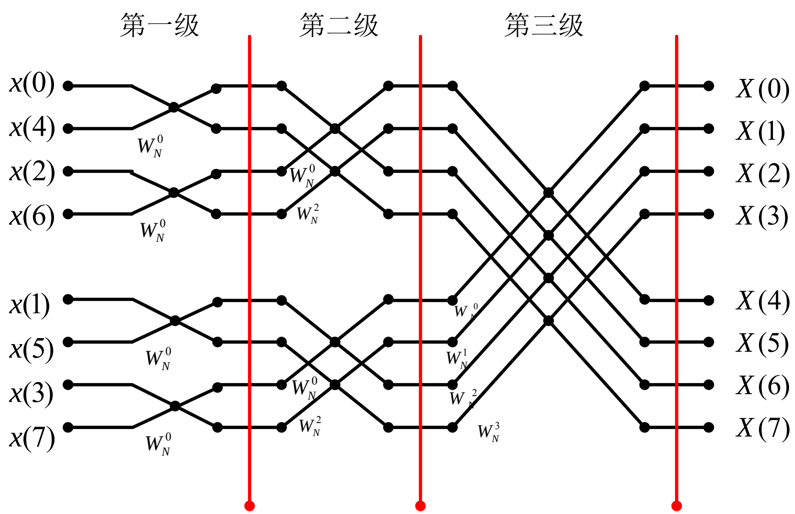
$$\because 2^L = 2^M \times 2^{L-M} = N \cdot 2^{L-M}$$

$$\therefore W_N^p = W_{N\cdot 2^{L-\mathrm{M}}}^{\mathrm{J}} = W_N^{J\cdot 2^{M-L}}, \quad J = 0,1,2,\cdots,2^{L-1}-1$$

$$\therefore p = J \cdot 2^{M-L}$$

3)序列的倒序

- $X(0), X(1), X(2), \cdots X(7)$ 按顺序输出；
- $x(0), x(1), x(2), \cdots x(7)$ 则不按顺序排列；



顺	序	倒	序
十进制数 I	二进制数	二进制数	十进制数 J
0	1 0 0	0 0 0	0
1	0 0 1	1 0 0	4
2	0 1 0	0 1 0	2
3	0 1 1	1 1 0	6
4	1 0 0	0 0 1	1
5	1 0 1	1 0 1	5
6	1 1 0	0 1 1	3
7	1 1 1	1 1 1	7

- **I与J的关系？**

4)蝶形运算规律

- $x(0), x(1), x(2), \cdots x(N-1)$ 倒序；
- 如蝶形运算的两个输入数据相距B个点，应用原位计算，蝶形运算如下：

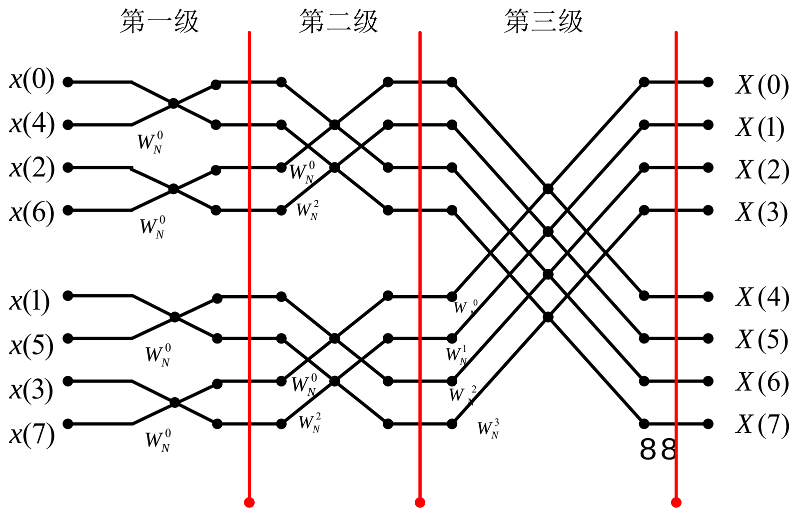
$$A_L(J) \Leftarrow A_{L-1}(J) + A_{L-1}(J+B)W_N^p$$

$$A_L(J+B) \Leftarrow A_{L-1}(J) - A_{L-1}(J+B)W_N^p$$

$$p = J \times 2^{M-L};\ J = 0,1,2,\cdots,2^{L-1};$$

$$L = 1,2,\cdots,M$$

5)程序框图



4．IDFT的高效算法（1）

- DFT $$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$
- IDFT $$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$
- 差别？
- 旋转因子 W_N^{kn}, W_N^{-kn} 和系数
  - 把DFT中的每一个系数 W_N^{kn} 改为 W_N^{-kn}
  - 再乘以常数 1/N

4. IDFT的高效算法（2）

- 用FFT子程序计算IDFT

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

$$x^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{nk}$$

$$x(n)=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{nk}\right]^*=\frac{1}{N}\left\{DFT[X^*(k)]\right\}^*$$

IFFT计算分三步：

① 将**X(k)**取共轭（虚部乘以**-1**）

② 对 $X^*(k)$ 直接作**FFT**

③ 对**FFT**的结果取共轭并乘以**1/N**，得**x(n)**。

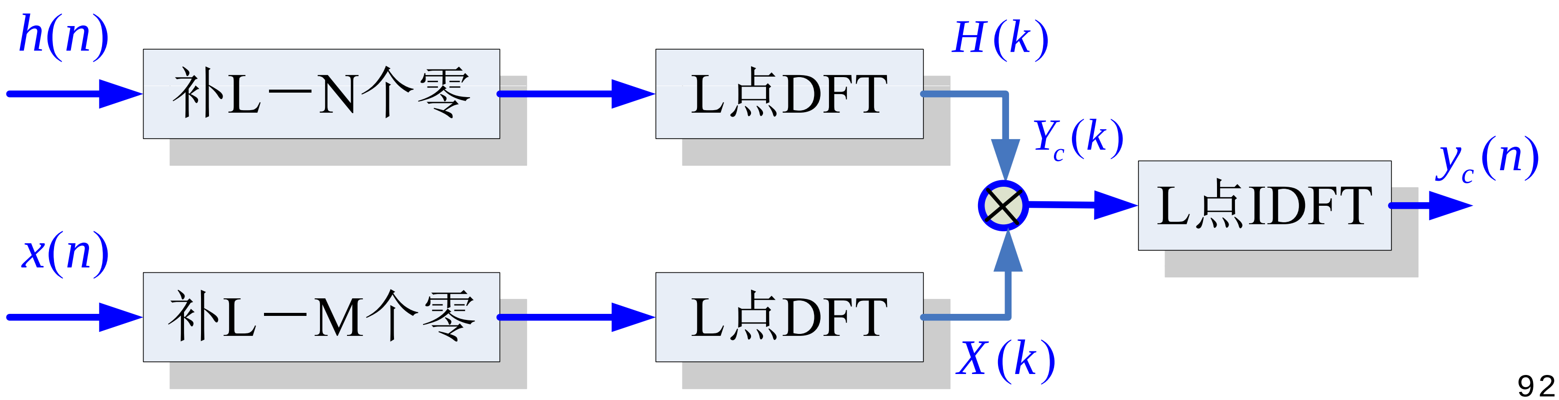
3.5 DFT（FFT）应用举例

※ 线性卷积

※ 频谱分析

3.5.1用DFT（FFT）计算两个有限长序列的线性卷积

- 求离散系统响应
- 直接计算时间较长
- 间接计算
  - DFT可计算循环卷积
  - FFT可加快运算速度
  - DFT能否计算线性卷积?
  - 如可以，条件?



循环卷积与线性卷积等价的条件

- 循环卷积

$$y_c(n) = h(n) \text{ Ⓛ } x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n)$$

$$L \geq \max[N, \quad M]$$

- 线性卷积

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m)$$

$$x((n-m))_L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-m+iL)$$

$$y_c(n) = h(n) \text{ (L) } x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-m+iL) R_L(n)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x(n-m+iL) \right] R_L(n)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(n+iL) R_L(n) \quad = y(n)$$

$y_c(n)$ 是 $y(n)$ 以**L**为周期的周期延拓序列的主值序列

$$L \geq N + M - 1$$

循环卷积计算线性卷积的运算量

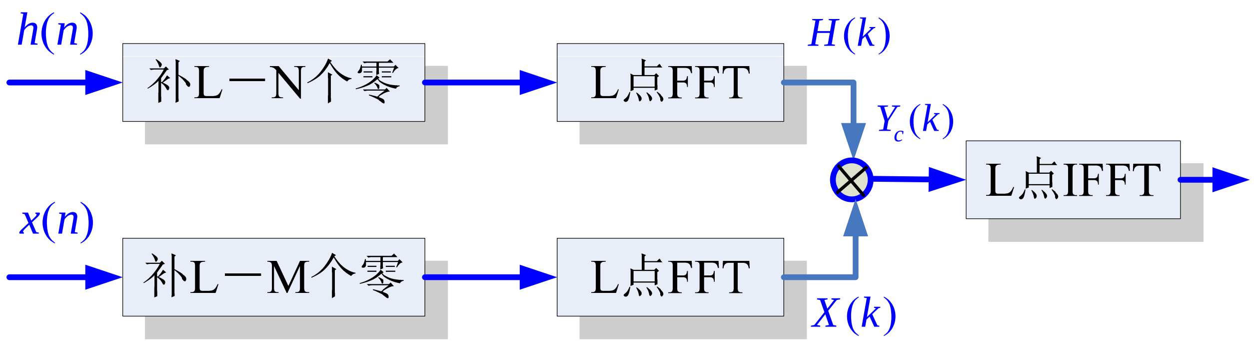
$$N = M \geq 32$$

- 小于直接计算线性卷积的运算量
- $H(k) = DFT[h(n)]$ 可预先计算并存储，乘法的运算次数可降低

$$0.5L\log_2 L \quad 次$$

- 快速卷积法

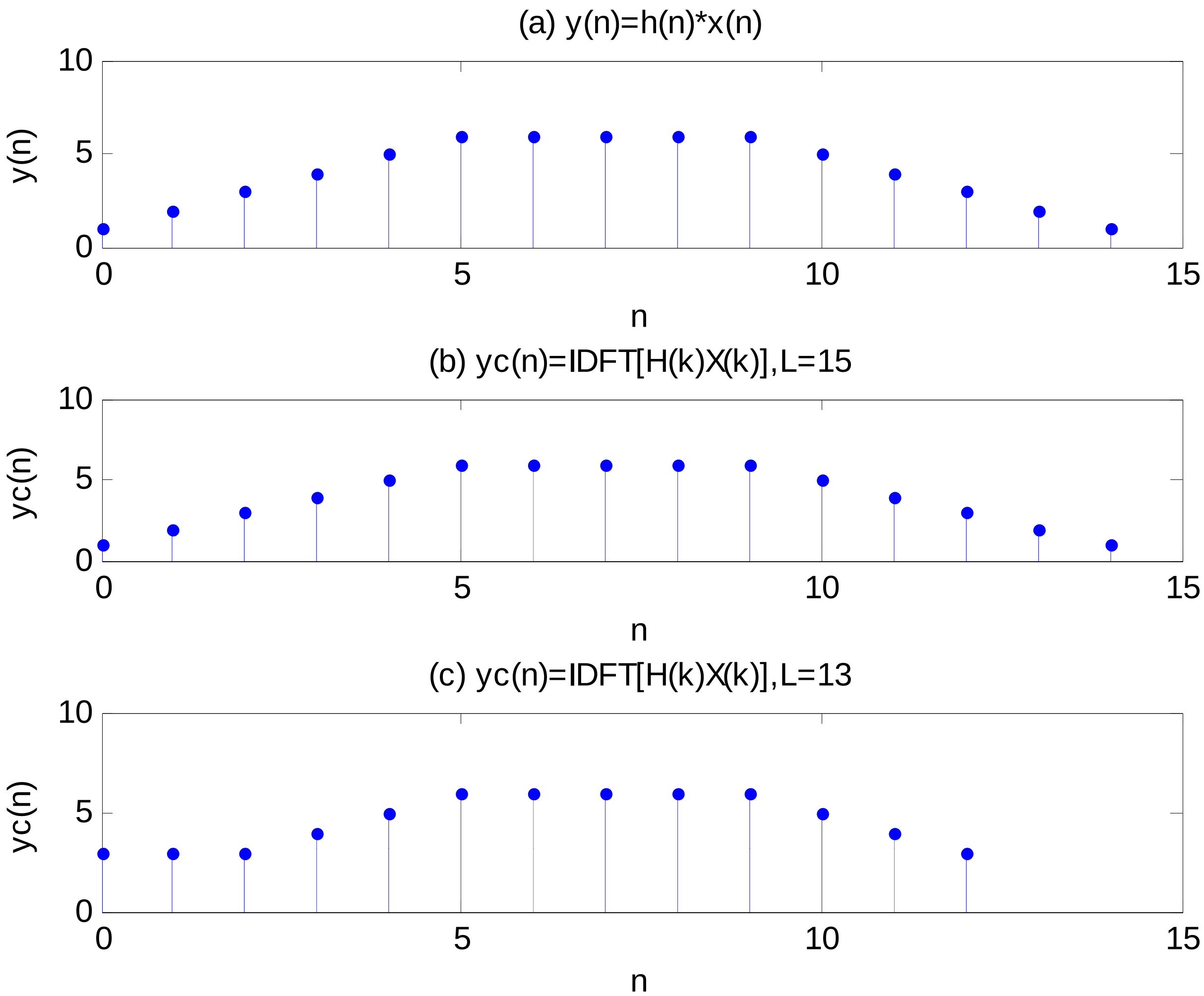
$$L \geq N + M - 1$$



例3.5.1 $x(n)=R_{10}(n), h(n)=R_6(n)$

求： $y(n)=x(n)*h(n)$

- 直接计算
  conv
- FFT
  L=15
- FFT
  L=13



3.5.2有限长序列和无限长序列的线性卷积

- 问题：
  - h(n) 为某滤波器的单位脉冲响应,长度有限；
  - 输入信号 x(n)很长；
  - h(n) 要补许多零再进行计算,计算量有很大的浪费；
- 解决方案
  - 重叠相加法
  - 重叠保留法

1. 重叠相加法

$$x(n)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i(n-iM)$$

- 分段：将 $x(n)$ 分段，每段长度为**M**

$$x_i(n)=x(n+iM)R_M(n)$$

- 各段与 $h(n)$ 卷积

$$y_i(n-iM)=h(n)*x_i(n-iM)$$

- 长度为**N+M-1**
- 求和

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{i=0}^{\infty} h(n)*x_i(n-iM)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i(n-iM)$$

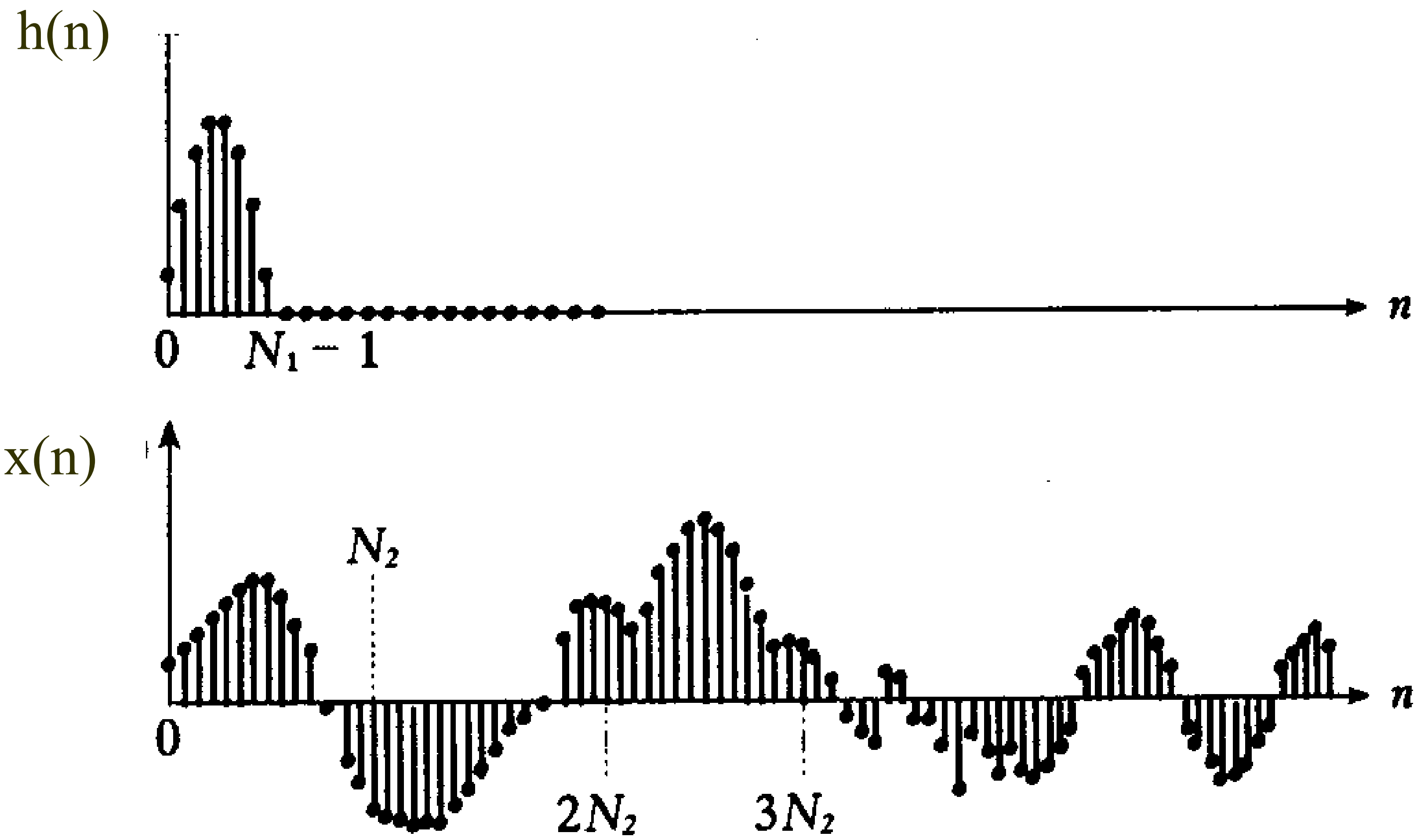
- $y_0(n), y_1(n), y_2(n), \cdots$ 的定义区间 $0 \le n \le N+M-2$
- $y_0(n-0M)$ 的定义区间为 $0 \le n \le N+M-2$
- $y_1(n-M)$ 的定义区间为 $M \le n \le 2M+N-2$
- $y_2(n-2M)$ 的定义区间为 $2M \le n \le N+3M-2$
- $y_i(n-iM)$ 的定义区间为 $iM \le n \le N+(i+1)M-2$
- 重叠区间

  $y_{i-1}(n-(i-1)M)$ 与 $y_i(n-iM)$

  重叠区间 $iM \le n \le N+iM-2$

  对应点相加

(1) 重叠相加法——由分段卷积的各段相加构成总的卷积输出



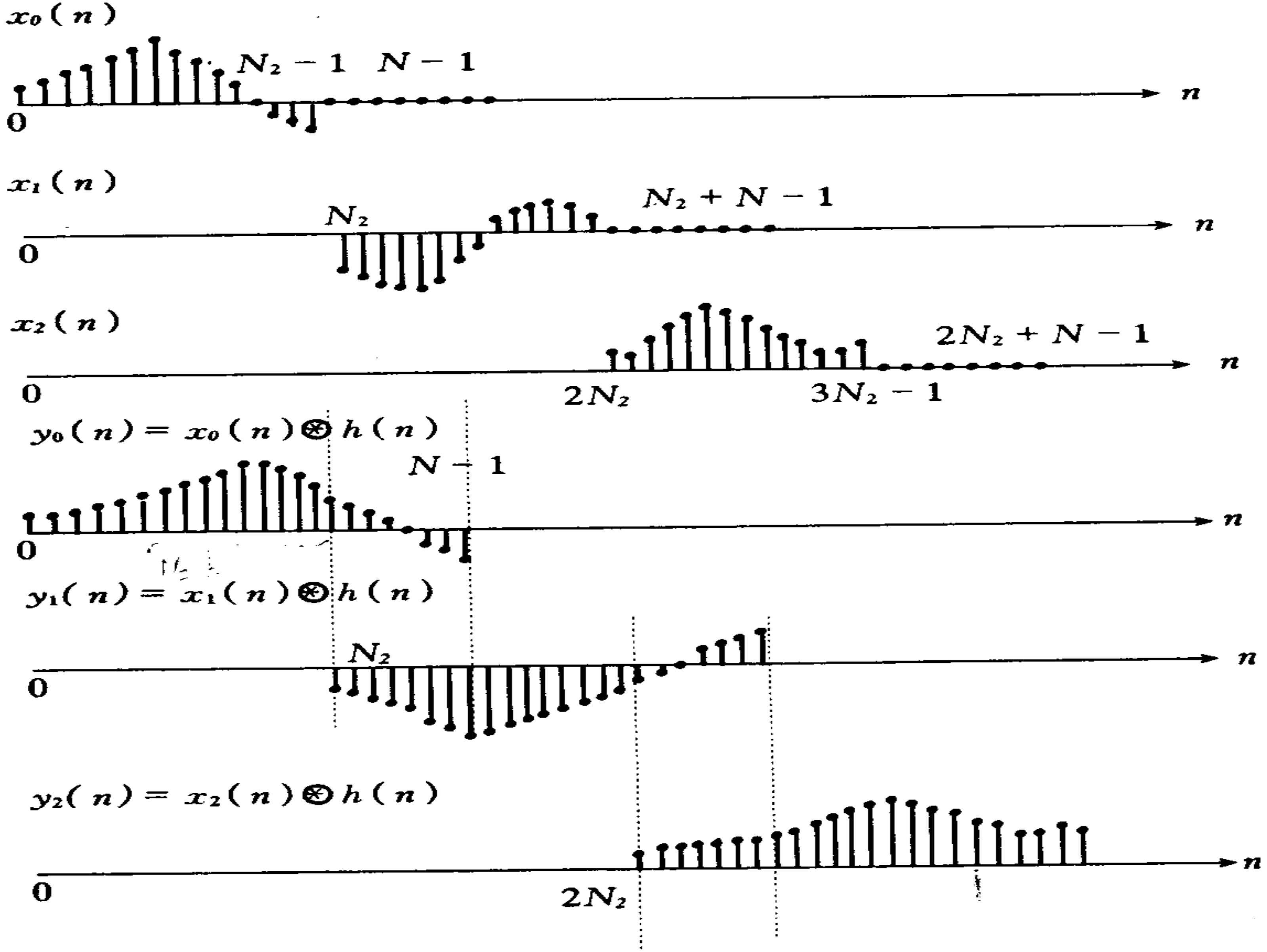

$x_0(n)$
N_2-1
$N-1$
n
0
$x_1(n)$
N_2
N_2+N-1
n
0
$x_2(n)$
$2N_2+N-1$
n
0
$2N_2$
$3N_2-1$
$y_0(n)=x_0(n)\circledast h(n)$
$N-1$
n
0
$y_1(n)=x_1(n)\circledast h(n)$
N_2
n
0
$y_2(n)=x_2(n)\circledast h(n)$
n
0
$2N_2$

图 2.19 重叠相加法

基于FFT的重叠相加法的计算步骤

1. 计算并保存 $H(k)=DFT[h(n)]_L$， $L=N+M-1, i=0$

2. 读入 $x_i(n)$，计算 L点FFT： $X_i(k)=DFT[x_i(n)]_L$

3. $Y_i(k)=H(k)X_i(k)$.

4. 计算L点IFFT： $y_i(n)=IDFT[Y_i(k)]_L, n=0,1,2,\cdots,L-1$

5. 重叠相加

$$y(iM+n)=\begin{cases} y_{i-1}(M+n)+y_i(n), 0\le n\le N-2 \\ y_i(n), \qquad N-1\le n\le N+M-1 \end{cases}$$

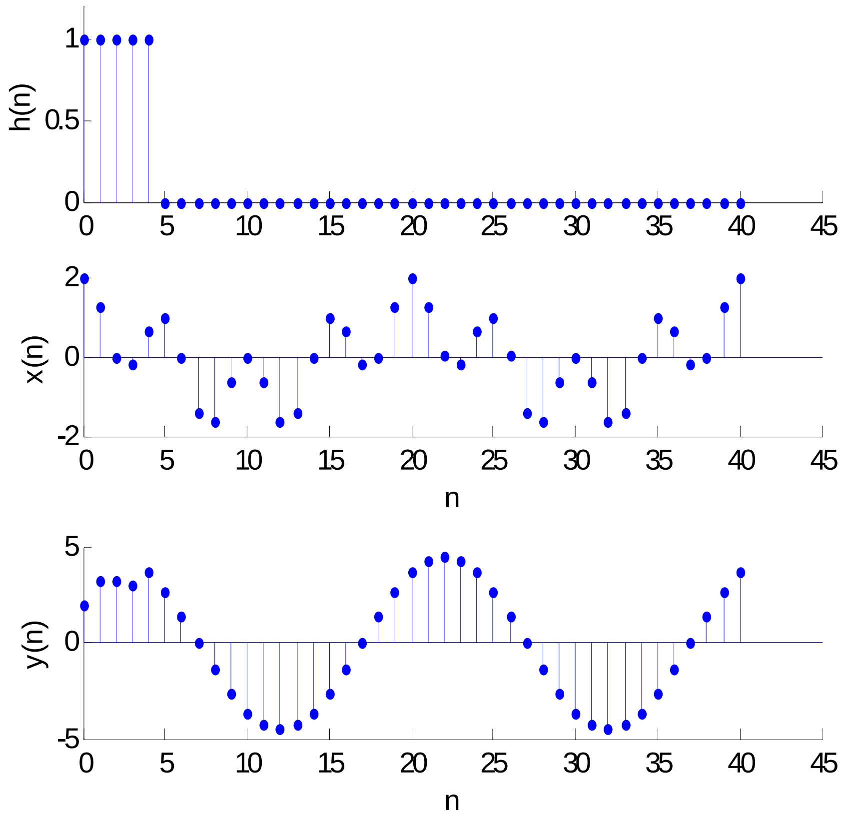
6. **i=i+1，返回2**

实现实时计算！

例3.5.2 设 $h(n)=R_5(n)$, $x(n)=[\cos(\pi n/10)+\cos(2\pi n/5)]u(n)$

用重叠相加法实现 $y(n)=h(n)*x(n)$

```
L=41;N=5;M=10;
hn=ones(1,N);hn1=[hn zeros(1,L-N)];
%产生h(n)，补零是为了绘图好看
n=0:L-1;
xn=cos(pi*n/10)+cos(2*pi*n/5);
%产生x(n)的L个样值
yn=fftfilt(hn,xn,M);
%调用fftfilt计算卷积
%==========================
%以下为绘图部分
```



3.5.3 用DFT对序列进行频谱分析（1）

- 序列 $x(n)$ 的长度为**M**，序列N $(N \geq M)$ 点**DFT**的物理意义：
  - 序列的频谱函数 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的**N**点等间隔采样
- **FFT**是**DFT**的快速算法。
- 问题：如何确定**N**？

3.5.3 用DFT对序列进行频谱分析（2）

1. 根据频率分辨率的要求确定N。

   - 例：要求频率分辨率为D弧度

$$\frac{2\pi}{N} \le D \qquad\qquad \therefore N_{\min} = \left\lceil \frac{2\pi}{D} \right\rceil$$

   - 满足基2FFT对点数N的要求，$N = 2^M$ ，M为正整数。

2. 计算DFT，注意自变量k所对应的数字频率为：

$$\omega_k = 2\pi k / N$$

3. N可依据先验知识和实验进行确定

例3.5.3 $x(n)=0.5^n R_{10}(n)$ **求频谱，分辨率为0.02π rad.**

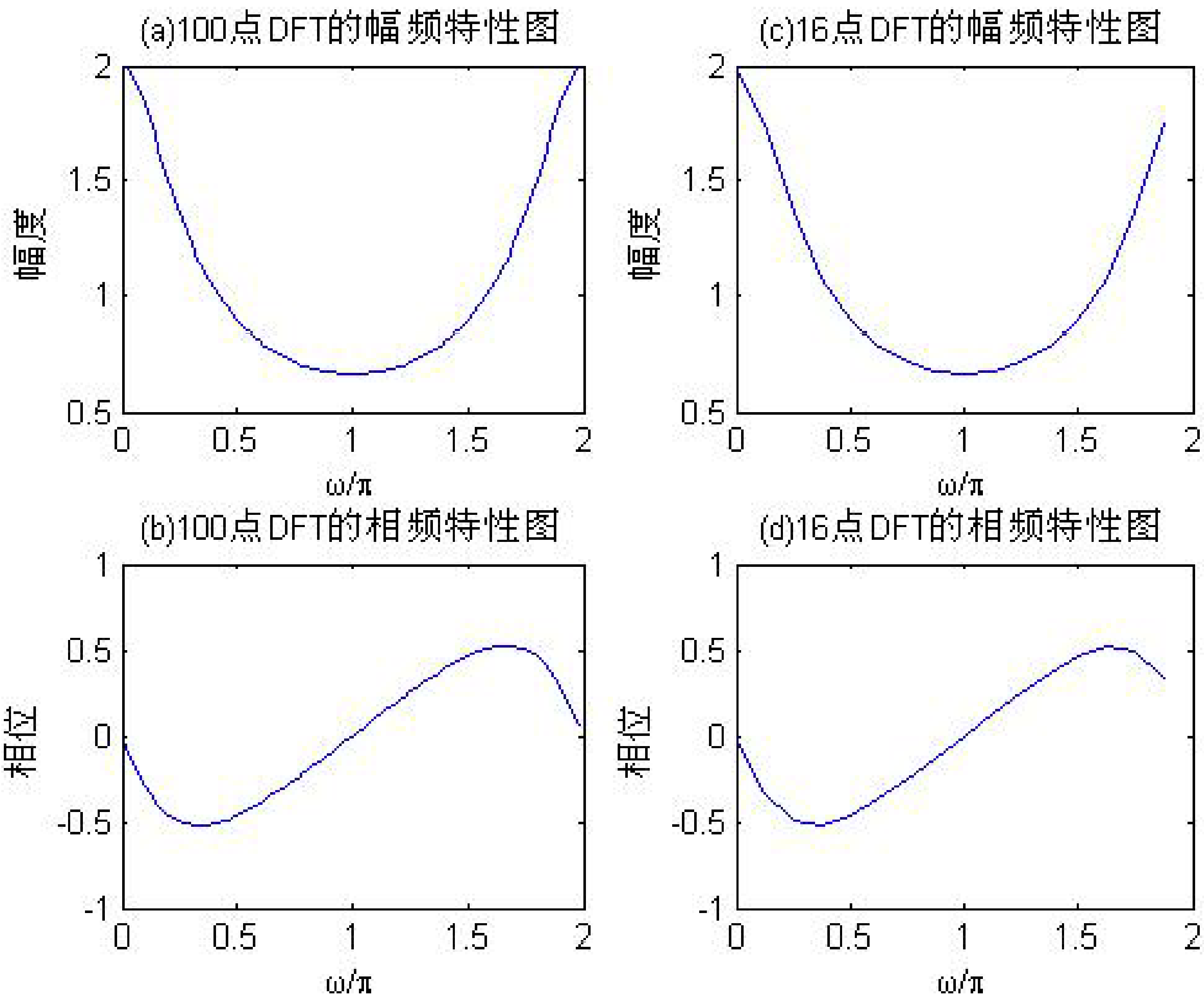
解:

（1）确定N $\therefore N_{\min}=\left\lceil \dfrac{2\pi}{D} \right\rceil=\dfrac{2\pi}{0.02\pi}=100$

（2）计算N点DFT

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{k=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn},\ k=0,1,\cdots,N-1$$

$$=\sum_{k=0}^{9} 0.5^n W_{100}^{kn}=\frac{1-0.5^{10}W_{100}^{10k}}{1-0.5W_{100}^{k}},\ k=0,1,\cdots,N-1$$


(a)100点DFT的幅频特性图
幅度
ω/π
(c)16点DFT的幅频特性图
幅度
ω/π
(b)100点DFT的相频特性图
相位
ω/π
(d)16点DFT的相频特性图
相位
ω/π

小结（1）

- **DFT提出的目的**
  - 序列的傅里叶变换、Z变换是时域离散信号及系统分析与设计的重要数学工具；
  - 但变换结果均为连续函数，无法用计算机进行处理；
  - 离散傅里叶变换（DFT）对有限长时域离散信号的频谱进行等间隔采样，频域函数被离散化了，便于信号的计算机处理。
- **DFT与ZT、FT、DFS之间的关系**

小结：（2）

- 频域采样定理，频域内插公式
- DFT的性质
- 循环卷积与线性卷积之间的关系
- FFT的引入
  - DFT运算量较大，快速离散傅里叶变换算法FFT是解决方案
- DFT 的应用