第六章

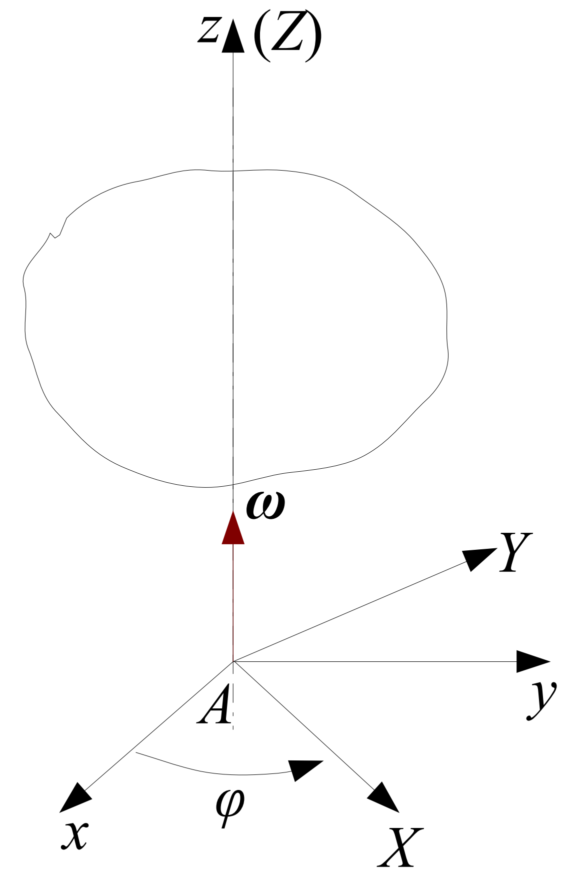
刚体动力学 I

— 定轴转动和平面平行运动

§6.1 定轴转动

- 运动微分方程

在轴上取基点 A，建立本征参考系 $Axyz$ 以及与刚体固连的坐标系 $AXYZ$. 使得 $z(Z)$ 恰好为转动轴 .



自由度： $DOF=1$, 用转角 φ 表示，只需要 1 个运动微分方程

刚体是特殊的质点系，满足对固定轴的角动量定理

$$\frac{dL_Z}{dt}=M_Z^{(e)} \quad or \quad \frac{dL_z}{dt}=M_z^{(e)}$$

经计算可得到

$$L_Z=\Big[\underbrace{\iiint (X^2+Y^2)\rho(X,Y,Z)dV}_{J_{ZZ}}\Big]\omega$$

【定理】定轴转动刚体的运动微分方程为 $J_{ZZ}\ddot{\varphi}=M_Z^{(e)}$

证明：只需要注意到 J_{ZZ} 不随时间改变，且 $\omega=\dot{\varphi}$ 即可．（证毕）

注：对于定轴转动，可以证明 J_{zz} 也是常数（ $=J_{ZZ}$ ），

故运动微分方程也可表示为 $J_{zz}\ddot{\varphi}=M_z^{(e)}$

附：关于 $J_{zz}=J_{ZZ}$ 的证明．

证明：坐标变换关系为 $Z=z,\ X=x\cos\varphi+y\sin\varphi,\ Y=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$

可以证明 $dXdYdZ=dxdydz,\ X^2+Y^2=x^2+y^2$

$$\rho(X,Y,Z)=\rho(x\cos\varphi+y\sin\varphi,-x\sin\varphi+y\cos\varphi,z)\equiv\tilde{\rho}(x,y,z)$$

$$J_{ZZ}=\iiint dXdYdZ(X^2+Y^2)\rho(X,Y,Z)=\iiint dxdydz(x^2+y^2)\tilde{\rho}(x,y,z)=J_{zz}$$

【推论】定轴转动的刚体满足动能定理 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J_{ZZ}\dot{\varphi}^2\right)=M_Z^{(e)}\dot{\varphi}$

证明：动能定理告诉我们 $dT=\bar{d}W^{(e)}+\bar{d}W^{(i)}$

刚体内力不做功，故 $\bar{d}W^{(i)}=0$

$$\left.\begin{array}{l} T=\displaystyle\iiint\frac{1}{2}\rho[v(\boldsymbol{r})]^2dV \\ \\ v=\dot{\varphi}\sqrt{X^2+Y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{1}{2}J_{ZZ}\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\bar{d}W^{(e)}}{dt}=\sum\boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_n}{dt}=\sum\boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_n)=\sum\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n^{(e)})$$

$$=\dot{\varphi}\sum\hat{Z}\cdot(\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n^{(e)})=\dot{\varphi}M_Z^{(e)}$$ （证毕）

注：对于定轴转动刚体，由于 $J_{zz}=J_{ZZ}$ 是常数，故动能定理

也可表示为 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2\right)=M_z^{(e)}\dot{\varphi}$

注：对于定轴转动刚体动能定理与角动量定理不独立

【推论】如果 M_z 是仅仅含 φ 的函数，则机械能守恒．

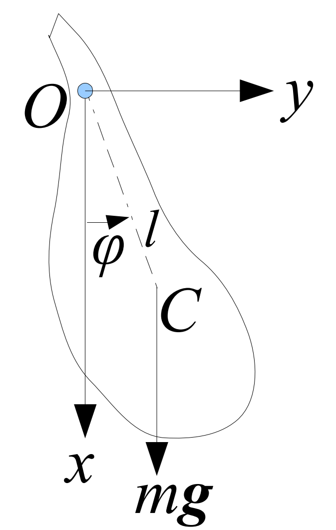
证明：
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2\right)=M_z\dot{\varphi}\Rightarrow d\left(\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2\right)=M_z\,d\varphi$$

$$if\quad M_z=M_z(\varphi),\quad then\quad \exists V(\varphi)=-\int M_z(\varphi)\,d\varphi$$

$$\Rightarrow d\left[\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2+V(\varphi)\right]=0\Rightarrow E=\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2+V(\varphi)=const.$$（证毕）

例题 1 物理摆．讨论重力场中绕光滑固定水平轴摆动的刚体运动行为

解：建立图示本征坐标系 $Oxyz$.



记转轴到质心连线 OC 与 x 轴夹角为 φ, $|OC|=l$.

首先可以证明均匀重力场对刚体产生的合力矩等价于作用在质心的总重力产生的力矩．

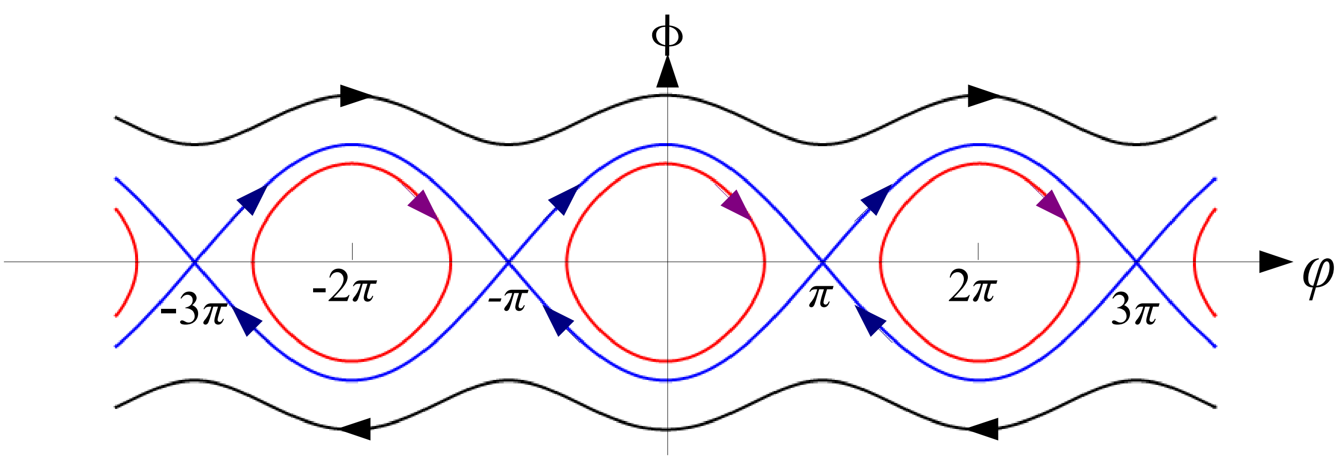
对轴的力矩 $M_z = -mgl\sin\varphi \Rightarrow V(\varphi) = -mgl\cos\varphi$

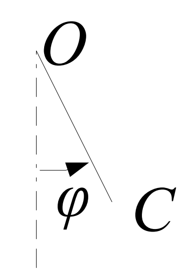
机械能守恒 $E = \frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = const.$

令 $\omega_0^2 = mgl/J_{zz}$，$\tau = \omega_0 t$，$\phi = \frac{d\varphi}{d\tau}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\phi^2 - \cos\varphi = h = const.$$

下面画出相图定性说明（可用椭圆函数定量求解，感兴趣可查参考书）





特点：(1) $\phi(\varphi+2\pi)=\phi(\varphi)$ (2) $h<-1$ 时无解；$h=-1$ 时稳定平衡点 $2n\pi$

(3) $-1<h<1$ 时对应为有限周期摆动（红线）

(4) $h=1$ 一种是不稳定点 $2n\pi+\pi$；

一种是摆向最高点，周期∞（蓝线）

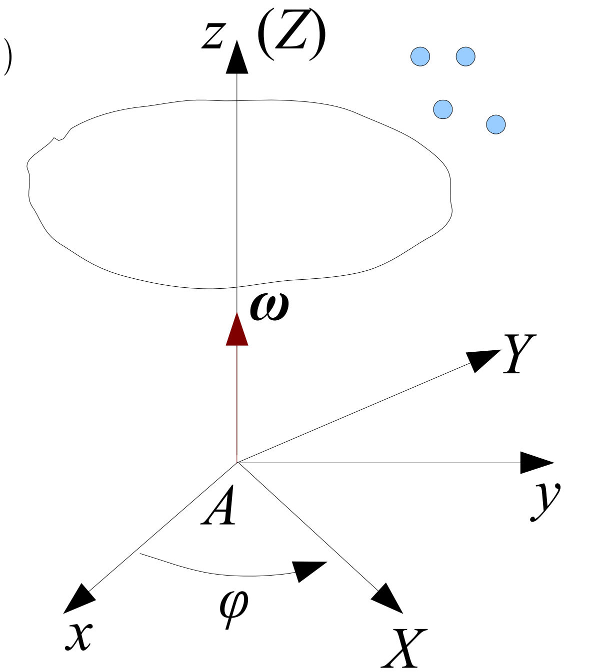
(5) $h>1$ 单向转动（黑粗线）

(6) 相曲线走向如箭头所示

（请结合右上图思考）

- 定轴转动刚体与其它质点组成的复合质点系

设其他质点对 z 轴角动量为 $L_z^{(a)}$，动能记为 $T^{(a)}$



【推论】复合质点系对 z 轴角动量定理为

$$\frac{d}{dt}[J_{zz}\dot{\varphi}+L_z^{(a)}]=\underbrace{M_z^{(e)}}_{\boxed{\text{作用在复合质点系上的外力合力矩}}}$$

证明：这是质点系对 z 轴角动量定理的自然推论.

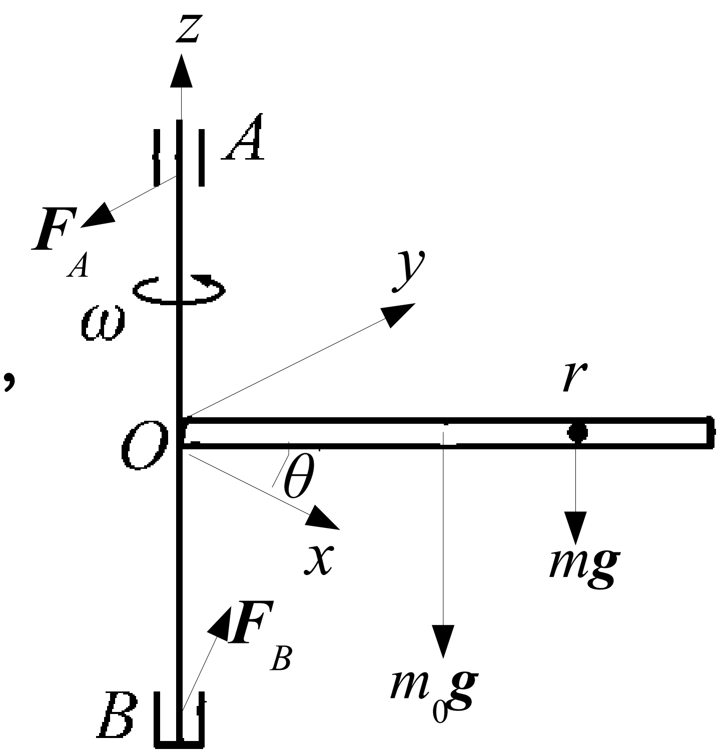
【推论】复合质点系动能定理为

注：复合质点系的动能定理与角动量定理独立

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^2+T^{(a)}\right]=\underbrace{w^{(e)}+w^{(i)}}_{\boxed{\text{作用在复合质点系的内外力功率总和}}}$$

证明：这是质点系动能定理的自然推论.

例题2 水平匀质细管长为 L，质量为 m_0，能绕过管一端并与其固连的竖直轴转动；轴质量可忽，轴承处光滑；管内放质量为 m 的小球；初始时，管的角速度为 ω_0，小球位于管的中点、相对管的速度为零；设小球与管壁间无摩擦；试求小球运动规律以及出口时速度.



解：取本征坐标系 $Oxyz$，并以极坐标 $\{r;\theta\}$ 表示小球的位置.

系统所受外力如图所示，杠的重力 $m_0\boldsymbol{g}$，小球重力 $m\boldsymbol{g}$，以及轴的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$.

这些力对 z 轴的力矩为零，利用复合质点系对 z 轴的角动量定理，有

$$\frac{d}{dt}[J_{zz}\dot{\theta}+L_z^{(a)}]=0\Rightarrow J_{zz}\dot{\theta}+L_z^{(a)}=const.$$

这些力对复合质点系也不做功，利用复合质点系动能定理，

有
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\theta}^2+T^{(a)}\right]=0\Rightarrow\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\theta}^2+T^{(a)}=const.$$

质点 m 角动量 $L_z^{(a)}=mr^2\dot{\theta}$　　质点 m 动能 $T^{(a)}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$

刚性杆惯量系数 $J_{zz}=\int\left(x^2+y^2\right)\rho\, dV=\int_0^L r^2\left(m_0/L\right)dr=\frac{1}{3}m_0L^2$

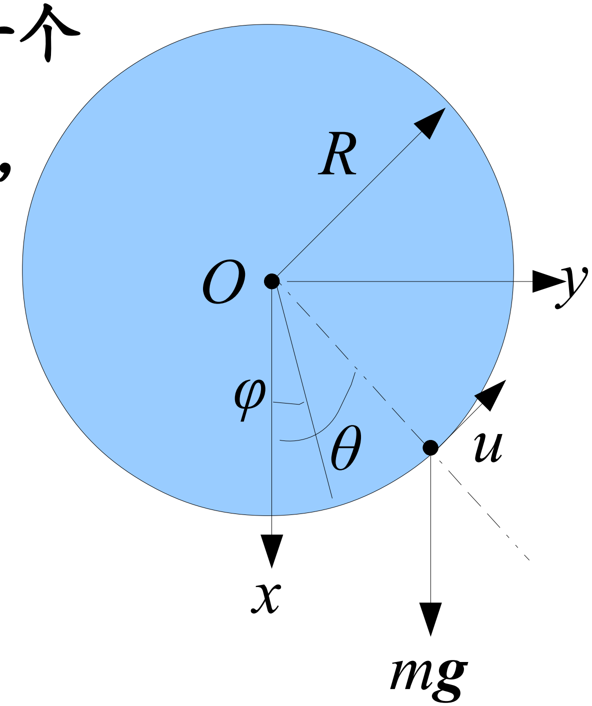
因此，根据初始状态可写出复合质点系的运动微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{3}m_0L^2\dot{\theta}+mr^2\dot{\theta}=\frac{1}{3}m_0L^2\omega_0+m\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega_0\\&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0L^2\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0L^2\right)\omega_0^2+\frac{1}{2}m\left[0+\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega_0^2\right]\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

出口时，$r=L$，故有

$$\dot{\theta}_L=\frac{4m_0+3m}{4(m_0+3m)}\omega_0,\quad v_L=\frac{\omega_0L}{4(m_0+3m)}\sqrt{28m_0^2+69m_0m+36m^2}$$

例题 3 一个质量为 m_0 半径为 R 的匀质圆盘，被一个光滑的钉子通过其圆心钉在竖直的光滑墙表面，圆盘能绕钉子在竖直面内自由转动，假定一质量 m 的蚂蚁以恒定的相对速率 u 沿圆盘边缘爬行，试求盘和蚂蚁相对于墙面的运动规律．假定 $t=0$ 时圆盘处于静止状态，蚂蚁在最下方．



解：建立图示本征坐标系 $Oxyz$，使得 z 轴冲外（未画出），x 轴冲下，y 轴水平．

设固连于圆盘的直线逆时针转过角 φ，蚂蚁位置与 x 轴夹角 θ.

$$\Rightarrow u = R(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta} - u / R$$

质点系所受外力只有 mg 不过轴心 O，可应用角动量定理

$$\frac{d}{dt}[J_{zz}\dot{\varphi} + L_z^{(a)}] = -mg R \sin\theta$$

其中蚂蚁对 O 轴的角动量 $L_z^{(a)} = mR^2\dot{\theta}$

圆盘的惯量系数 $J_{zz}=\int(x^2+y^2)\rho\,dV=\int_0^R r^2(m_0/\pi R^2)(2\pi r)\,dr=\frac{1}{2}m_0R^2$

于是可以得到 $$\left(\frac{1}{2}m_0+m\right)R\ddot{\theta}=-mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}m_0+m\right)R\ddot{\theta}\dot{\theta}=-mg\sin\theta\,\dot{\theta}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_0+m\right)R\,d(\dot{\theta}^2)=mg\,d(\cos\theta)$$

初始态： $$\theta(0)=0,\dot{\varphi}(0)=0\Rightarrow\dot{\theta}(0)=u/R$$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow\dot{\theta}=\sqrt{\frac{u^2}{R^2}-\frac{4g(1-\cos\theta)}{R(m_0/m+2)}}\quad\Rightarrow\dot{\varphi}=\dot{\theta}-\frac{u}{R}=\sqrt{\frac{u^2}{R^2}-\frac{4g(1-\cos\theta)}{R(m_0/m+2)}}-\frac{u}{R}$$

讨论：当 $\frac{u^2}{R^2}>\frac{8g}{R(m_0/m+2)}$ 时，蚂蚁可以爬过最高点．

当 $\frac{u^2}{R^2}<\frac{8g}{R(m_0/m+2)}$ 时，蚂蚁可以爬到 $\arccos\left[1-\frac{(m_0/m+2)u^2}{4gR}\right]$

思考题：请问以下做法是否可以？为什么？

应用动能定理

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J_{zz}\dot{\varphi}^{2}+T^{(a)}\right]=-mg\,R\sin\theta\,\dot{\theta}\\&T^{(a)}=\frac{1}{2}mR^{2}\dot{\theta}^{2},\quad J_{zz}=\frac{1}{2}m_{0}R^{2}\\&u=R(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\Rightarrow\dot{\varphi}=\dot{\theta}-u/R\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cdots\Rightarrow d\left[\frac{1}{4}m_{0}R^{2}\left(\dot{\theta}-\frac{u}{R}\right)^{2}+\frac{1}{2}mR^{2}\dot{\theta}^{2}\right]=mg\,R\,d(\cos\theta)$$

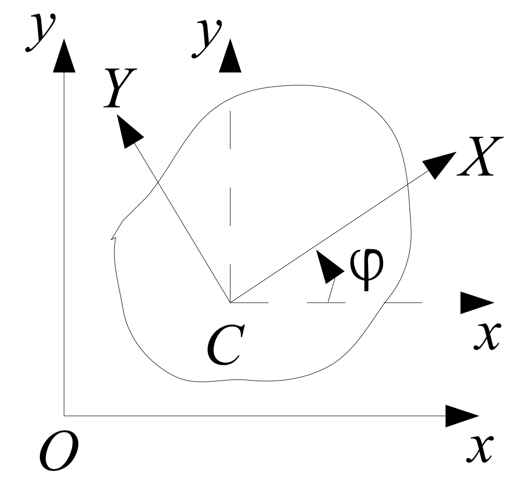
这完全不同于角动量定理得到的方程 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_{0}+m\right)R\,d(\dot{\theta}^{2})=mg\,d(\cos\theta)$

到底哪个结果是对的呢？

动能定理的结果有问题，因为蚂蚁虽小，实际上爬行时它将其自身内部的生化能量释放出来了，上面的动能定理表达式右边没有包含这一项。故动能定理结果不对。结合这一思考及角动量定理的结果可计算出这部分能量是多少，请自己补充.

§6.2 平面平行运动

- 基本动力学方程



根据刚体运动学，刚体平面平行运动可以用一个截面来代替，这里为了方便取过质心 C 的截面．

设 $Oxyz$ 是本征坐标系，$Cxyz$ 是质心系，$CXYZ$ 是刚体固连系，夹角 φ.

【定理】刚体平面运动满足 $\begin{cases} m_t \ddot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{F}^{(e)}, \quad \cap \quad z=0 \\ J_{ZZ}\ddot{\varphi} = M_Z \end{cases}$

证明：我们可以把截面放在 Oxy 面内，故 $z \equiv 0$.

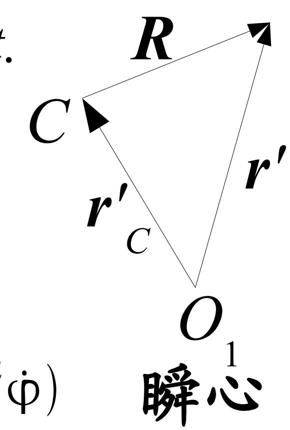
利用质心运动定理，即有 $m_t \ddot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{F}^{(e)}$

利用质心系角动量定理可证明 $J_{ZZ}\ddot{\varphi} = M_Z$（思路同定轴转动）

（证毕）

【推论】若质心与瞬心距离恒定，则对瞬心角动量定理成立．

证明思路：第一步证明 $J_{zz}^{(1)}=J_{ZZ}^{(C)}+m_t r'^{2}_C \Rightarrow r'_C=const. \Leftrightarrow J_{zz}^{(1)}=const.$



第二步用力矩定义及质心运动定理证明 $M_Z^{(C)}=M_z^{(1)}-m_t\hat{z}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\boldsymbol{a}_C)$

第三步

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}'_C\times\boldsymbol{v}_C)=\dot{\boldsymbol{r}}'_C\times\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{r}'_C\times\boldsymbol{a}_C\\&\boldsymbol{v}_C=0+\dot{\varphi}\,\hat{z}\times\boldsymbol{r}'_C\Rightarrow\hat{z}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\boldsymbol{v}_C)=r'^{2}_C\,\dot{\varphi}\\&if\ r'_c=const.\Rightarrow\dot{\boldsymbol{r}}'_C=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_C=\boldsymbol{v}_C\end{aligned}\right\}\Rightarrow\hat{z}\cdot(\boldsymbol{r}'_C\times\boldsymbol{a}_C)=\frac{d}{dt}(r'^{2}_C\dot{\varphi})$$

第四步 $J_{ZZ}^{C}\ddot{\varphi}=M_Z^{C}\Rightarrow J_{zz}^{(1)}\ddot{\varphi}=M_z^{(1)}$，即对瞬心角动量定理成立.(证毕)

注：同定轴转动一样，质心系中动能定理（略）与角动量定理不独立．

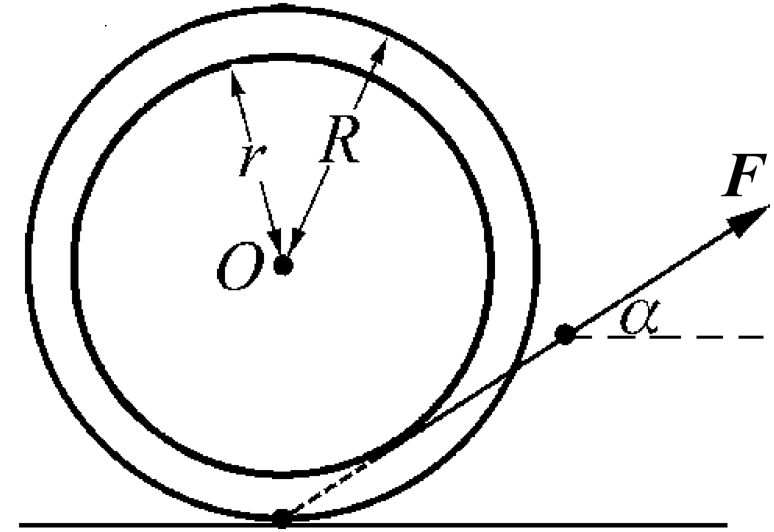
【本征系中动能定理】 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_t v_C^2+\frac{1}{2}J_{ZZ}\dot{\varphi}^2\right)=\sum_n \boldsymbol{F}_n^{(e)}\cdot\boldsymbol{v}_n$

证明：利用柯尼希定理，本征系中动能可以写成 $T=\frac{1}{2}m_t v_C^2+\frac{1}{2}J_{ZZ}\dot{\varphi}^2$

刚体内力不做功，故由质点系动能定理可得证．（证毕）

【推论】如果非保守外力不做功，机械能守恒．

思考题：右图所示线轴中间绕有线圈，有很短的一部分线头露在外面，力 $\boldsymbol{F}$ 作用在该线头上，假定线与线轴不会相对滑动，线圈只能在地面上静止或无滑滚动，试分析滚动方向与力 $\boldsymbol{F}$ 的关系．



提示：利用瞬心角动量定理．（略）

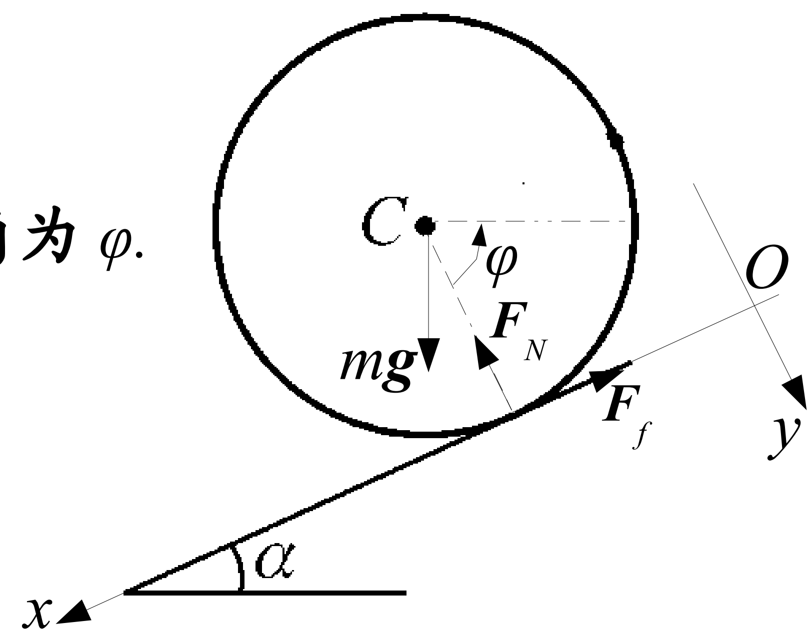
例题 4 半径 R 质量 m 的匀质圆柱体沿倾角为 α 的固定斜面无滑滚下，求圆柱质心加速度及圆柱所受的约束力，判断保持无滑滚动摩擦系数与倾角应满足的条件．

解：建立图示本征坐标系 Oxy，

设初始与 y 平行且过质心 C 的线转角为 φ.

以圆柱为研究对象，受重力 $m\boldsymbol{g}$，

支撑力 $\boldsymbol{F}_N$，摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$ 作用．



根据基本动力学方程，有

$$
\left.\begin{aligned}
&m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - F_f \\
&m\ddot{y}_C = 0 = mg\cos\alpha - F_N \\
&\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = F_f R
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}
&\ddot{x}_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha \\
&F_f = \frac{1}{3}mg\sin\alpha \\
&F_N = mg\cos\alpha
\end{aligned}\right.
$$

无滑条件：柱与斜面接触点速度为零，即

$$0 = \dot{x}_C\hat{x} + \dot{\varphi}\hat{z}\times(R\hat{y}) = (\dot{x}_C - R\dot{\varphi})\hat{x} \Rightarrow \dot{x}_C = R\dot{\varphi}$$

保持无滑滚动要求： $F_f < \mu F_N \Rightarrow 3\mu > \tan\alpha$

注：也可以用本征系中的机械能守恒和无滑条件来求质心速度，或者用对瞬心角动量定理求角加速度，再用其它方程求约束力.

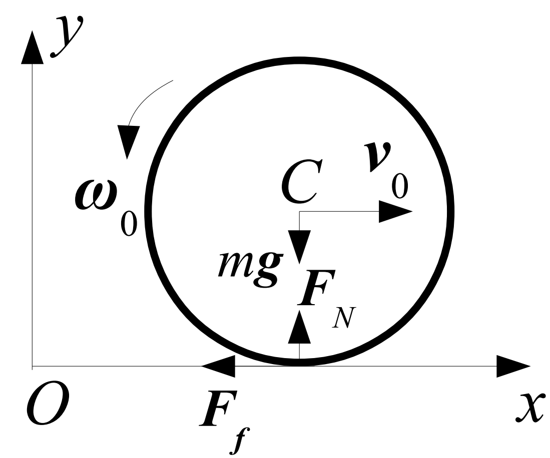
注：无滑滚动时 F_f 是静摩擦力，它的方向可以任意假定. 如果出现滑动，则用 $F_f=\mu F_N$ 代替无滑条件求解；此时滑动摩擦力 F_f 方向必须与真实方向相同，否则会出现错误.

例题 5 把乒乓球放在水平台上，用手向下搓球的后部，把球向前压出，球开始向前运动，到一定程度球可能会滚回来，试分析这种现象．

解：假定乒乓球压出后迅速恢复变形，此后运动中几乎不变形，作刚体处理．如图所示，假定压出后瞬时乒乓球球心获得速度 $\boldsymbol{v}_0$，而乒乓球获得逆时针角速度为 ω_0．为了讨论方便假定这两个矢量正交．

建立本征坐标系 $Oxyz$，使得 x 平行于地面且沿 $\boldsymbol{v}_0$ 方向，y 竖直朝上，z 冲外．

图示状态不满足无滑条件，故球开始阶段有滑动，受重力、支撑力、滑动摩擦力作用．



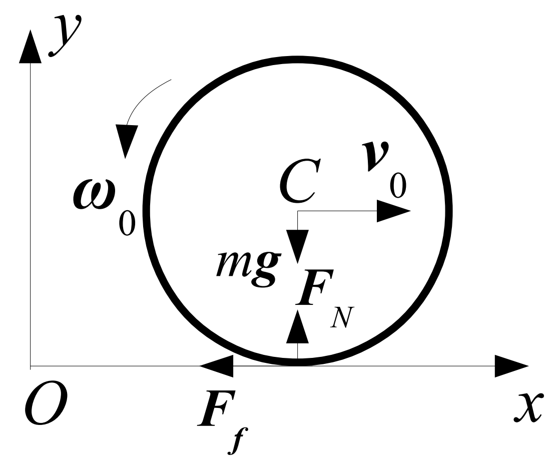
记球平行于 y 的某一半径逆时针转角为 φ，球壳对过质心的轴的转动惯量为（请自己求）$2mR^2/3$．于是动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{x}_C=-F_f,\ m\ddot{y}_C=0=F_N-mg,\ \ddot{z}_C=0 \\ & \frac{2}{3}mR^2\ddot{\varphi}=-F_fR,\quad F_f=\mu F_N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} & \dot{x}_C=v_0-\mu g t,\ y_C=R,\ z_C=0 \\ & \dot{\varphi}=\omega_0-\frac{3\mu g}{2R}t, \end{aligned}\right.$$

设 t_1 时刻达到无滑状态：球与地面接触点速度为零，即

$$0=\dot{x}_C\hat{x}+\dot{\varphi}\,\hat{z}\times(-R\,\hat{y})=(\dot{x}_C+R\dot{\varphi})\,\hat{x}\Rightarrow\dot{x}_C=-R\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow v_0-\mu g\,t_1=-R\left(\omega_0-\frac{3\mu g}{2R}t_1\right)\Rightarrow t_1=\frac{2(v_0+\omega_0 R)}{5\mu g}$$



此时刻质心速度以及球滚动角速度分别为

$$\dot{x}_{C1}=\frac{3v_0-2\omega_0 R}{5},\quad \dot{\varphi}_1=-\frac{3v_0-2\omega_0 R}{5R}$$

于是，当 $3v_0>2\omega_0 R$ 时，$\dot{x}_{C1}>0$，$\dot{\varphi}_1<0\Rightarrow$ 向前滚动.

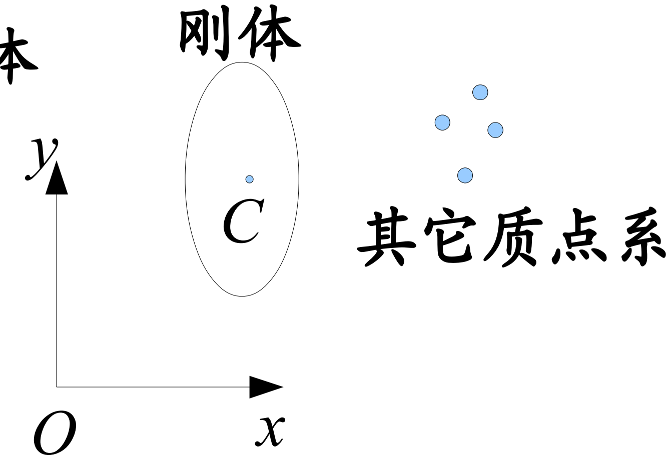
当 $3v_0=2\omega_0 R$ 时，$\dot{x}_{C1}=0$，$\dot{\varphi}_1=0\Rightarrow$ 停止滚动.

当 $3v_0<2\omega_0 R$ 时，$\dot{x}_{C1}<0$，$\dot{\varphi}_1>0\Rightarrow$ 往回滚动.

假定 $t>t_1$，乒乓球做无滑滚动，则需要用无滑条件 $\dot{x}_C=-R\dot{\varphi}$ 取代 $F_f=\mu F_N$ 再解基本动力学方程，可得到 $F_f=0<\mu F_N=\mu mg$. 可见确为无滑滚动，且是匀速滚动 $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_1=-(3v_0-2\omega_0 R)/5R$.（请自己补充）

- 平面运动刚体与其它质点（系）组成的复合质点系

如图 $Oxyz$ 是本征参考系， C 是平面运动刚体的质心，假定其它质点系也做平面运动 .



对于这种问题，通常把二者看成一个复合的质点系，在 $Oxyz$ 中考虑问题，应用第五章的动量定理（守恒定律）、角动量定理（守恒定律）、和动能定理（机械能守恒定律）解决问题 . 需要注意几点:

(1) 刚体在本征系中动量: $\boldsymbol{p}_{rb}=m_{rb}\boldsymbol{v}_C$

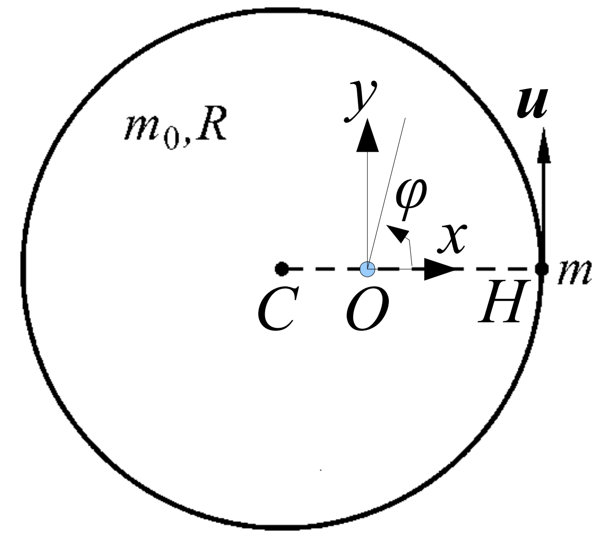
(2) 刚体相对 Oz 轴的角动量: $L_{rb}=\hat{z}\cdot(\boldsymbol{r}_C\times m_{rb}\boldsymbol{v}_C)+J_{ZZ}\dot{\varphi}$

(3) 刚体在本征系中动能: $T=\frac{1}{2}m_{rb}v_C^2+\frac{1}{2}J_{ZZ}\dot{\varphi}^2$

(4) 刚体内力不做功 .

例题 6 质量 m_0 半径 R 的匀质圆盘静止放在光滑水平面上，可在水平面上自由运动．质量为 m 的人，初始静止地站在圆盘边缘上，如图所示，求当人以相对圆盘的速度 u 沿盘边走动后圆盘的运动．

解：将圆盘与人当作复合质点系来考虑，在水平面内不受外力，根据质心运动定理及初始条件，知道圆盘和人的质心始终静止．



记圆盘中心为 C，质点系质心为 O，将人简化为质点，位置记为 H，可知三点共线，且

$$\overline{CO}=\frac{mR}{m_0+m},\quad \overline{OH}=\frac{m_0 R}{m_0+m}$$

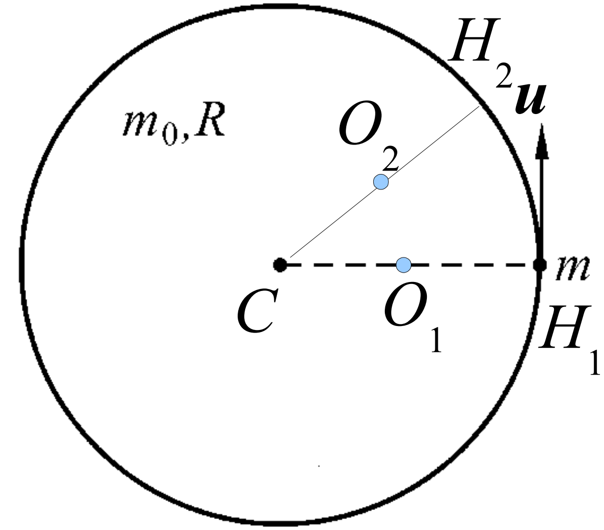
建立本征参考系 $Oxyz$，设圆盘角速度为 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\,\hat{z}$，则

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{OC}=-\frac{mR\dot{\varphi}}{m_0+m}\,\hat{y},\quad \boldsymbol{v}_H=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{OH}+\boldsymbol{u}=\left(\frac{m_0 R\dot{\varphi}}{m_0+m}+u\right)\hat{y}$$

利用对 Oz 轴角动量守恒可得 $\ldots\dot{\varphi}=-\dfrac{2mu}{(m_0+3m)R}$，$\boldsymbol{v}_C=-\dfrac{2m^2 Ru}{(m_0+m)(m_0+3m)R}\,\hat{y}$

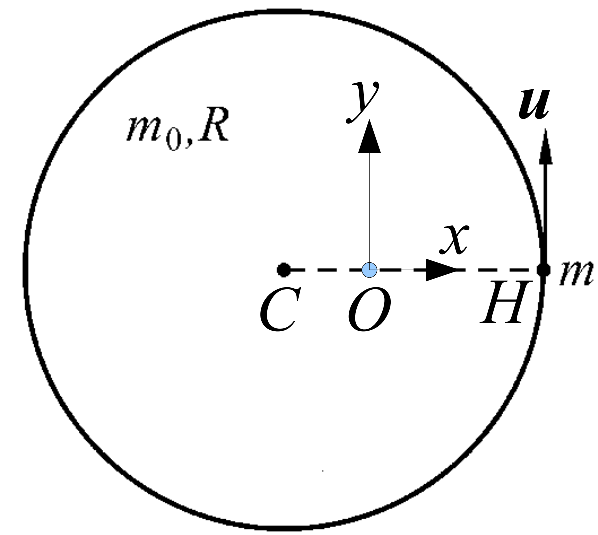
上面的结果对吗？ 不对，错在 $m_0\boldsymbol{v}_C+m\boldsymbol{v}_H\neq 0$

或者说 O 并不是固连在圆盘上的点，以圆盘为参考系即可看出这一点. 上一页 $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_H$ 的表达式错误



正确解法：建立本征参考系 $Oxyz$，建立与圆盘固连的参考系 $CXYZ$（未画出），设圆盘角速度为 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\hat{z}$，它也是 $CXYZ$ 转动角速度，则

$$\boldsymbol{v}_H=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{CH}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_C+(R\dot{\varphi}+u)\hat{y}$$



本征系中动量守恒：

$$m_0\boldsymbol{v}_C+m\boldsymbol{v}_H=0\Rightarrow\boldsymbol{v}_C=-\frac{m(R\dot{\varphi}+u)}{m_0+m}\hat{y}$$

本征系中对固定轴 Oz 角动量守恒：

$$\hat{z}\cdot(\boldsymbol{OC}\times m_0\boldsymbol{v}_C)+\frac{1}{2}m_0R^2\dot{\varphi}+\hat{z}\cdot(\boldsymbol{OH}\times m\boldsymbol{v}_H)=0$$

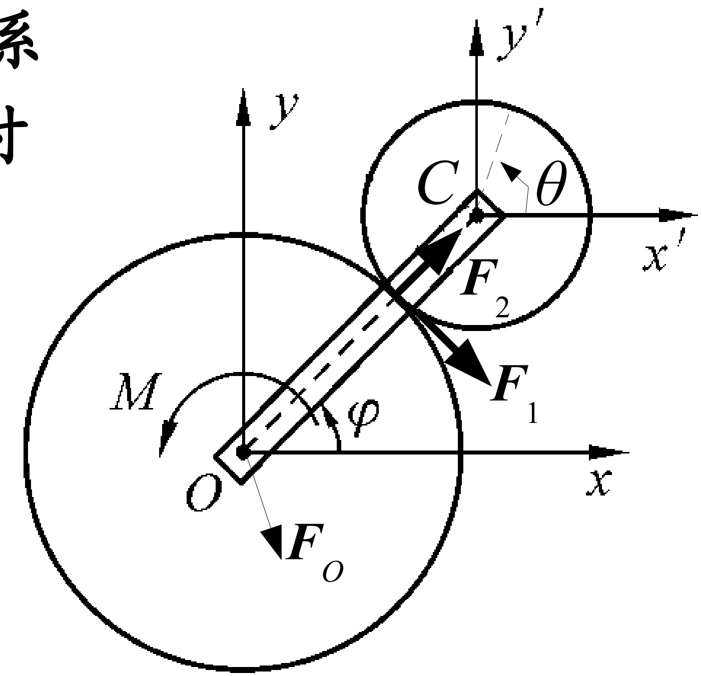
$$\Rightarrow\dot{\varphi}=-\frac{2mu}{(m_0+3m)R},\quad \boldsymbol{v}_C=-\frac{mu}{m_0+3m}\hat{y}$$

盘心向人走动的反方向运动，同时圆盘也顺时针转动

例题 7 放在水平面内的行星齿轮机构，曲柄受随时间改变的力矩 M 作用，绕过 O 点竖直固定轴转动，并带动小齿轮在固定大齿轮上无滑滚动．设曲柄长为 l，质量为 m_1, 可视为匀质光滑细杆；小齿轮半径 r, 质量为 m_2，可视为匀质圆盘；轴承 O,C 处光滑．

求：(1) 曲柄的角加速度；(2) 两齿轮间的切向相互作用力．

解：建立图示本征系 $Oxyz$ 以及小齿轮的质心系 $Cx'y'z'$，设杆相对 Ox 转角为 φ, 小齿轮相对 Cx' 转角为 θ.



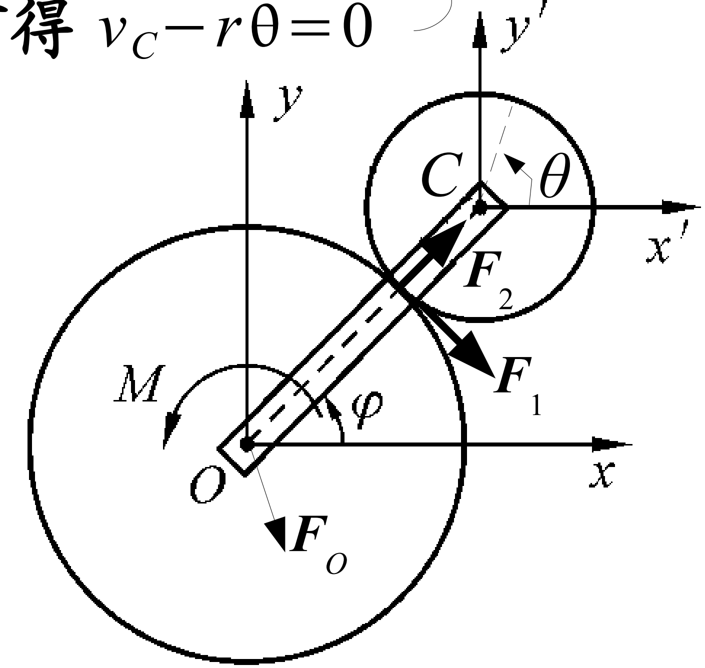
以杆和小齿轮作为质点系处理，它们受 O 点约束力 $\boldsymbol{F}_O$，力矩 M，以及大齿轮对小齿轮的切向作用力 $\boldsymbol{F}_1$ 和法向作用力 $\boldsymbol{F}_2$.

由于无滑条件，大小齿轮接触点速度为零，所以大齿轮对小齿轮的两个作用力不做功．

应用质点系动能定理 $\dot{T}=M\dot{\varphi}$

其中 $T=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}m_1 l^2\right)\dot{\varphi}^2+\dfrac{1}{2}m_2 v_C^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}m_2 r^2\right)\dot{\theta}^2,\qquad v_C=l\dot{\varphi}$

根据无滑条件：大小齿轮接触点速度为 0 可得 $v_C-r\dot{\theta}=0$



$$\ddot{\varphi}=\frac{6M}{(2m_1+9m_2)l^2}\quad\Rightarrow\ddot{\theta}=\frac{6M}{(2m_1+9m_2)lr}$$

然后应用小齿轮对 Cz' 轴的角动量定理，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\theta}\right)=F_1 r\Rightarrow F_1=\frac{3m_2 M}{(2m_1+9m_2)l}$$

注：也可以不用质点系动能定理，而直接用对 Oz 轴的角动量定理

$$\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi}+m_2 l^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}m_2 r^2\ddot{\theta}=M-F_1(l-r)$$

将其与无滑条件，小齿轮对 Cz' 轴的角动量定理连立也能求解.

- 关于解题技巧的注记（刚体平面运动是重点）

☼ 受力分析是基础

☼ 选取系统、定理、参考点 (轴) 是关键 .

原则是：尽量减少在方程中出现的未知量个数

(1) 动量、角动量定理—内力不出现;

(2) 角动量定理—力矩为零的外力不出现;

(3) 动能定理—不做功的外力及内力不出现 .

☼ 参考系的选择以惯性系和质心系为主，注意惯性系与质心系的角动量、动能转换关系 .

☼ 优先选用守恒定律解决问题 .