第三部分

分析力学
（拉格朗日 - 哈密顿动力学）

第七章

分析力学基础

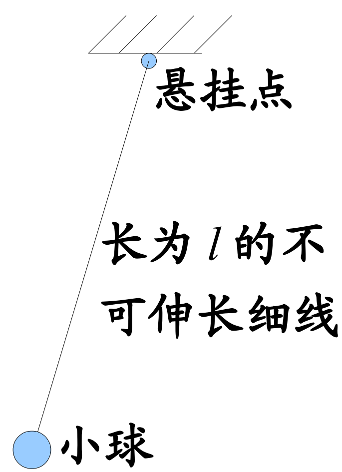
§7.1 虚位移

- 约束及其分类

【定义】约束：约束物体预先给定的对力学系统运动的限制

注：约束通常表现为质点的位置和速度满足一定的关系。可以用函数 $f(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)$ 满足的方程或不等式来表示．

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

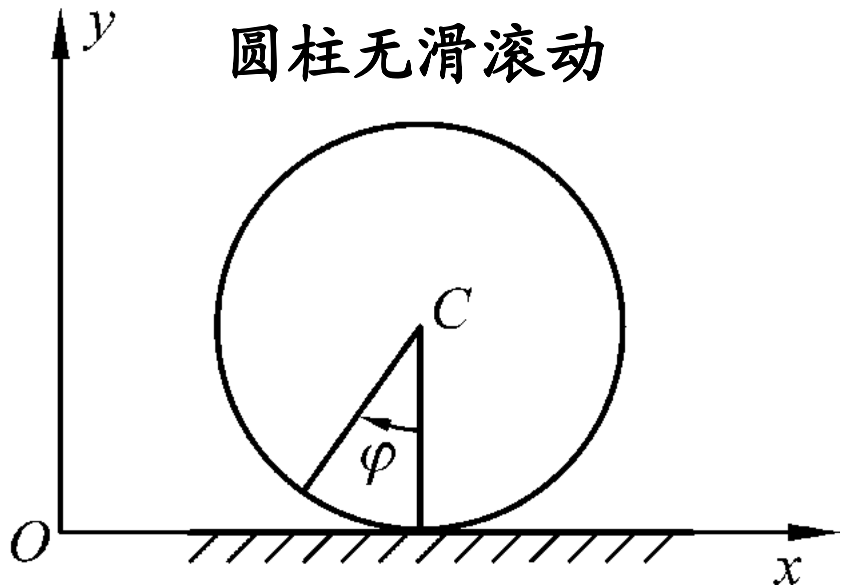


$$x^2+y^2+z^2-l^2\leq 0$$

分类一

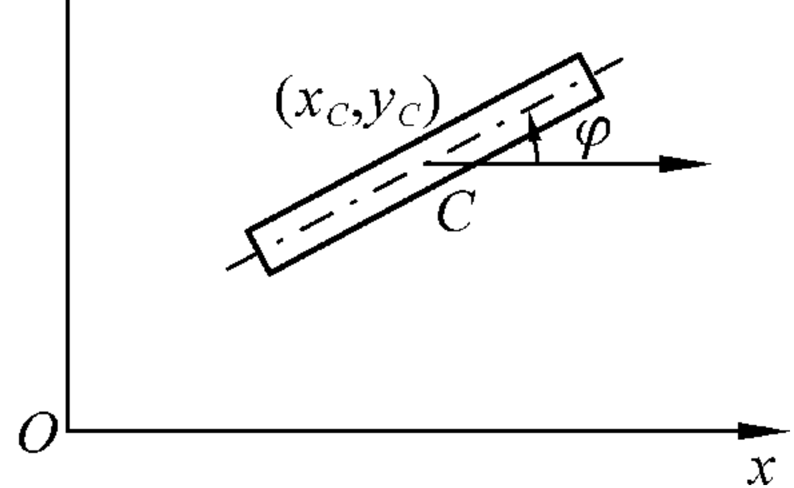
- 双面约束—方程表示
- 单面约束—不等式表示

圆柱无滑滚动



冰刀的运动:

质心速度只能沿冰刀方向



$$\begin{cases}\dot{y}_C=0\\ \dot{x}_C-R\dot{\varphi}=0\end{cases}\quad \text{积分得} \quad \begin{cases}y_C=R\\ x_C-R\varphi=const.\end{cases}$$

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C}=\tan\varphi(t)\ \text{不可积分}$$

分类二

- 完整约束—约束方程或其经过积分后仅含质点的坐标和时间

$$eg.\quad f(\boldsymbol{r},t)=0$$

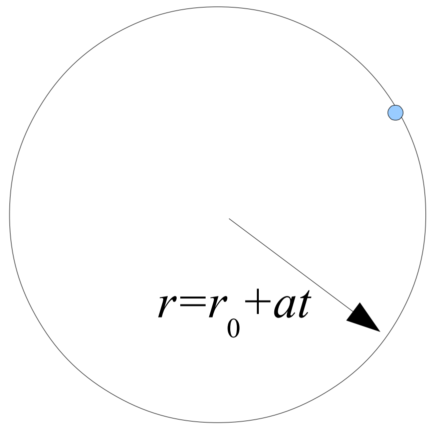
- 非完整约束—约束方程包含坐标对时间的导数或微分，

且不能积分转化为完整约束 $eg.,\quad f(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=0$

【定义】完整系统：不受非完整约束的质点系

注：本课程只涉及完整系统.

等速膨胀球面上的质点



$$x^2+y^2+z^2-(r_0+at)^2=0$$

分类三

- 定常约束—约束方程不显含时间　　$eg.,\ \ f(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})=0$
- 非定常约束—约束方程显含时间　　$eg.,\ \ f(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=0$

分类四：理想约束和非理想约束（见 7.4 节）

- 可能位置和可能位移

考虑包含 N 个质点的质点系，受 r 个独立的完整约束

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0,\ (\alpha=1,\cdots,r)$$

【定义】质点系可能位置：在某给定时刻 t^*，满足约束方程的质点位置 $\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}_n^*$. 即 $f_\alpha(\boldsymbol{r}_1^*,\cdots,\boldsymbol{r}_N^*;t^*)=0,\ (\alpha=1,\cdots,r)$.

注：通常 r 个方程不能确定 N 个未知数矢量，故质点系的可能位置有无穷多。例如球面上所有的点都是它上运动小球的可能位置.

在 $t^*+\Delta t$ 时刻 $(\Delta t\to 0)$，将质点系可能位置记为 $\boldsymbol{r}_n^*+\Delta\boldsymbol{r}_n,\ (n=1,\cdots N)$

【定义】质点系可能位移：$\{\Delta\boldsymbol{r}_n\}$满足

$$\sum_n \nabla_n f_\alpha\cdot\Delta\boldsymbol{r}_n+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t=0,\ (\alpha=1,\cdots,r).$$

注：同样，可能位移可能有无限多个

- 真实位移和虚位移

【定义】真实位移：由质点系动力学方程决定的质点系质点在约束下运动产生的位移.

【定理】在 $\Delta t\ (\to 0)$ 时间段内的真实位移是可能位移之一

证明：任何时刻质点的真实位置必然满足约束方程

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0,\ (\alpha=1,\cdots,r)$$

dt 时间的真实位移满足 $\sum_n \nabla_n f_\alpha \cdot \underbrace{d\boldsymbol{r}_n}_{\boxed{\text{动力学决定其唯一性}}}+\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt=0,\ (\alpha=1,\cdots,r)$

$\Delta t\ (\to 0)$ 时，$dt=\Delta t$ 因此真实位移也满足可能位移满足的方程

而满足该限制方程的可能位移通常有无穷多，所以真实位移只是可能位移中的一个.（证毕）

【定义】虚位移：$\{\delta \boldsymbol{r}_n\}$ 满足 $\sum_n \nabla_n f_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{r}_n = 0,\ (\alpha = 1, \cdots, r).$

【定理】对于定常约束，虚位移与可能位移等价

证明：对于定常约束，$\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$ 故可能位移满足

$$\sum_n \nabla_n f_\alpha \cdot \Delta \boldsymbol{r}_n = 0,\ (\alpha = 1, \cdots, r).$$

因此，可能位移和虚位移满足相同的线性齐次方程，可以找到相同的基础解系，故二者等价．（证毕）

注：虚位移可以看成是约束“冻结”情况下的可能位移．

$$\sum_n \nabla_n f_\alpha \cdot \delta \boldsymbol{r}_n + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \underbrace{\delta t}_{0} = 0,\ (\alpha = 1, \cdots, r).$$

因此，$\{\delta \boldsymbol{r}_n\}$ 通常也被称为等时变分，它不是考虑质点系的运动过程，而是比较同一时刻约束允许的质点系无限接近的可能位置

【推论】对于定常约束，真实位移是虚位移之一．

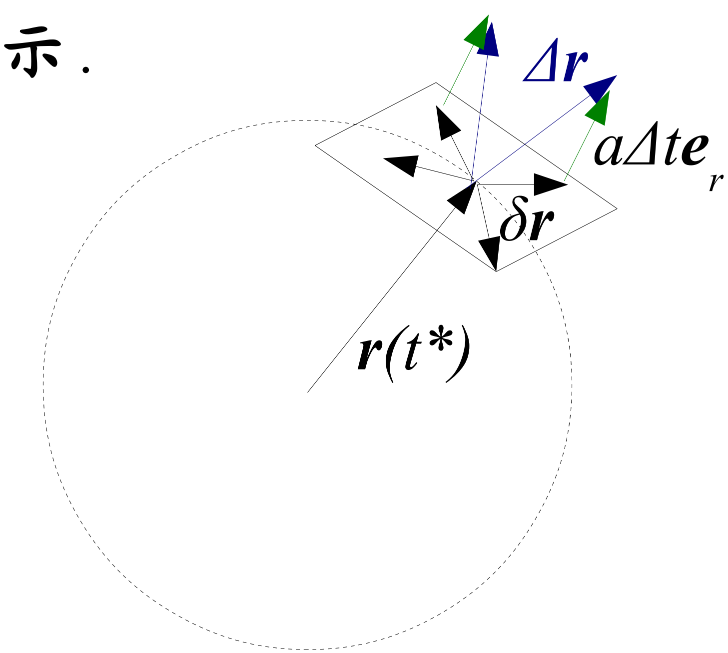
证明：由于真实位移是可能位移之一，而在定常约束下可能位移与虚位移等价，故真实位移是虚位移之一．（证毕）

例题 1 分析半径等速增加的球面上运动质点的可能位移与虚位移

解：约束可表示为 $f(x, y, z, t)=x^2+y^2+z^2-(r_0+at)^2=0$

虚位移满足 $\nabla f \cdot \delta \boldsymbol{r}=0 \Rightarrow \delta \boldsymbol{r} \perp \nabla f$ 故虚位移在约束曲面切平面内

即，在 t^* 时刻，位于 (x,y,z) 处质点的虚位移在过该点的半径为 (r_0+at^*) 的球面切平面内。如右图所示．



而 t^* 到 $t^*+\Delta t$ 时间内的可能位移还要叠加上半径增长的导致的位移 $a\Delta t\boldsymbol{e}_r$，即如右图所示。

真实位移是可能位移之一，由质点动力学方程和初始条件确定．

§7.2 广义坐标和广义速度

- 自由度

【定义】自由度(s)：质点系独立的虚位移数目

【定理】受 r 个独立约束的完整系统自由度为 $s=3N-r$.

证明：受 r 个独立完整约束 $f_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0,\ (\alpha=1,\cdots,r)$

虚位移满足 $\sum_n \nabla_n f_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0,\ (\alpha=1,\cdots,r).$

上式含 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1,\ldots,\delta x_N,\delta y_N,\delta z_N$ 共 $3N$ 个变量 .

由于要满足 r 个线性齐次方程，其中只有含 $3N$-r 个是独立的 .

故自由度为 $3N$-r. （证毕）

注：对于非完整系统，还有将 $3N$-r 减去独立的非完整约束的数目 .

- 广义坐标

【定义】广义坐标：用来确定质点系**可能位置**的**最少参数**

【定理】受 r 个独立的完整约束的质点系广义坐标数为 $3N\text{-}r$.

证明：受 r 个独立完整约束 $f_\alpha(\boldsymbol{r}_{1,}\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0,\ (\alpha=1,\cdots,r)$

故可以从 $3N$ 个笛卡尔坐标中选取 $3N\text{-}r$ 个来表示其他的 r 个.

这 $3N\text{-}r$ 个笛卡尔坐标可作为广义坐标. （证毕）

【推论】完整系统的广义坐标数等于其自由度 s.

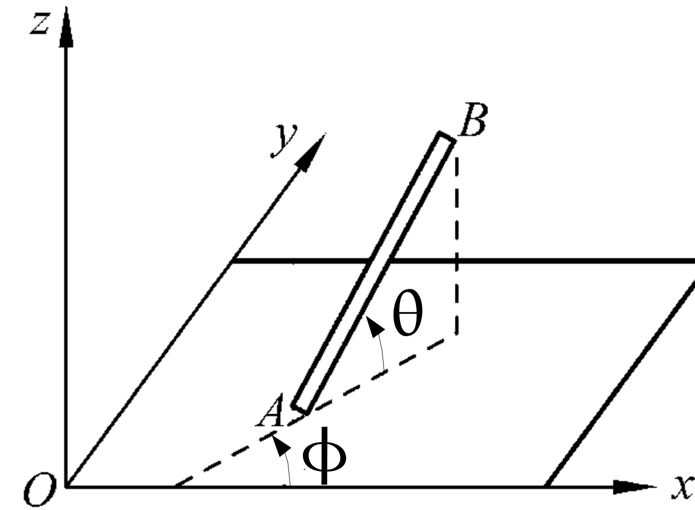
注：本课程只考虑完整系统，通常为了解决问题方便，不一定直接用笛卡尔坐标作为广义坐标，而是选取 s 个合适的独立参数，例如 $q_1, q_2, \ldots, q_s$，作为广义坐标，质点系的位置表示为

$$\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}_n(q_1,q_2,\cdots,q_s,t),\ (n=1,2,\cdots,N)$$

当知道广义坐标随时间变化规律 $q_\alpha=q_\alpha(t)$，则质点系运动完全确定

【定义】广义速度：广义坐标对时间的导数 $\dot{q}_\alpha$

例题 2 长为 l 的细杆 AB 的一端被约束在水平桌面上，确定其自由度，并选择广义坐标.



解：建立图示坐标系，可看成两质点 A,B 受约束

$$\begin{cases} z_A=0 \\ (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2=l^2 \end{cases}$$

因此质点系是完整系统。自由度 $s=3\times2-2=4.$

可以选 $x_A, y_A, x_B, y_B,$ 作为广义坐标. 或者选广义坐标为

$$q_1=x_A, q_2=y_A, q_3=\theta, q_4=\phi$$

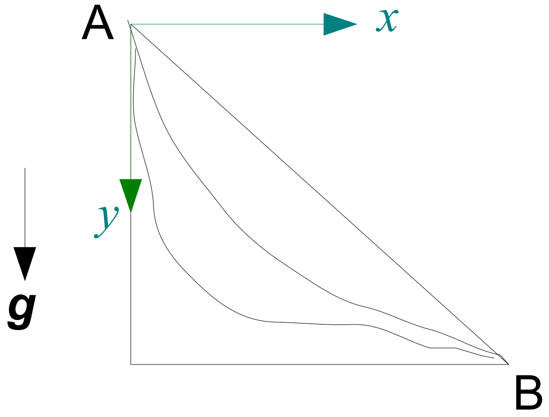
于是有：

$$\begin{cases} x_A=q_1, y_A=q_2, z_A=0 \\ x_B=q_1+l\cos q_3\cos q_4, y_B=q_2+l\cos q_3\sin q_4, z_B=l\sin q_3 \end{cases}$$

§7.3 变分法简介

- 变分法早期三个典型问题

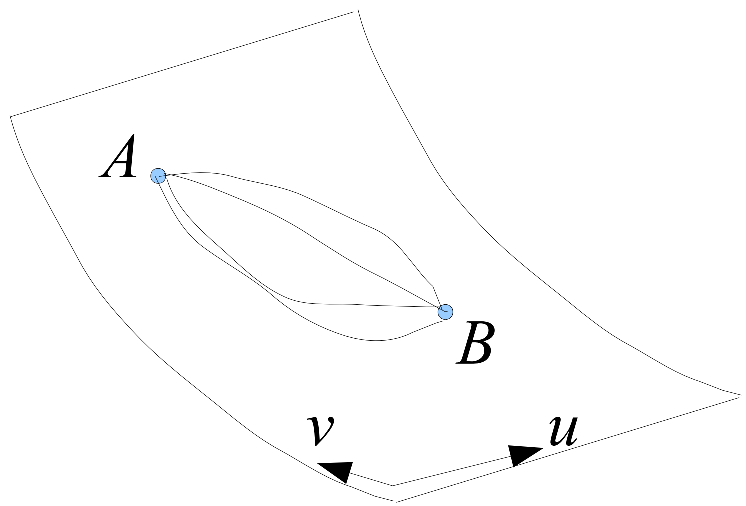
(1) **最速落径问题：求竖直平面内不在同一铅垂线上的两个固定点之间的多条曲线中，能使质点以最短时间从高位置点到低位置点自由滑下的曲线.**



$$t_{AB}=\int_A^B \frac{ds}{v}=\int_A^B \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx$$

$$min\{t_{AB}\}\Rightarrow ?$$

(2) 短程线问题：求出已知曲面上两固定点之间长度最短的线．



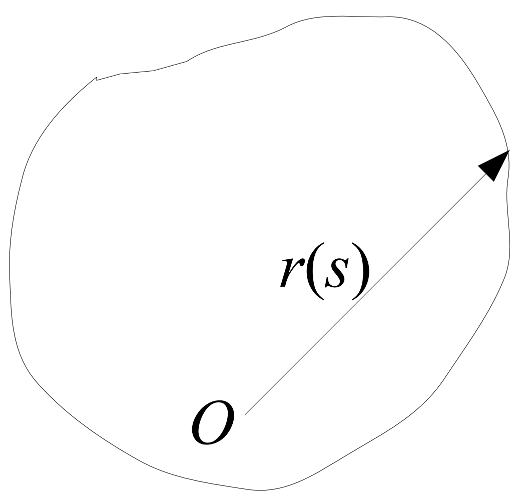
$$l=\int_A^B ds$$

设曲线表示为 $u=u(v)$，则长度可以化为如下形式

$$l=\int_A^B F[u(v),u'(v),v]dv$$

$$min\{l\}\Rightarrow ?$$

(3) 等周问题：求平面内长度一定的封闭曲线所围面积最大的曲线．



$$A=\frac{1}{2}\int_0^l \hat{z}\cdot\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)ds$$

极坐标系下：

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\varphi_l}[\rho(\varphi)]^2 d\varphi$$

$$min\{A\}\Rightarrow ?$$

- 泛函

一元函数是指映射$f:D\to R$，这里$D\subset R$. $\forall\ x\in D\Rightarrow f(x)\in R$

通常在同一区域D上，我们可以定义无穷多个到实数域R的映射，我们把这些映射构成的集合记为$\wp$，即

$$\wp=\{f \mid f:D\to R\}$$

记 $$\wp^{s}=\{(f_1,f_2,\cdots,f_s) \mid f_1:D\to R, f_2:D\to R,\cdots,f_s:D\to R\}$$

【定义】一元泛函是指映射 $J:\wp\to R$，通常表示为

$$J[f]=\int_D F[f(x),f'(x),x]dx$$

【定义】一元函数f的无穷小改变$\epsilon:D\to R$，满足

$\forall\ x\in D,\epsilon(x)$是无穷小量，且 $\epsilon(\partial D)=0$

- 变分计算法则

首先计算 $J[f+\epsilon]-J[f]$

$$=\int_D \{F[f(x)+\epsilon(x), f'(x)+\epsilon'(x), x]-F[f(x), f'(x), x]\} dx$$

$$=\boxed{\int_D \left\{\frac{\partial F}{\partial f}\epsilon(x)+\frac{\partial F}{\partial f'}\epsilon'(x)\right\} dx}$$

→【定义】一元泛函的变分 δJ

$$+\frac{1}{2}\boxed{\int_D \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial f^2}[\epsilon(x)]^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'}\epsilon(x)\epsilon'(x)+\frac{\partial^2 F}{\partial f'^2}[\epsilon'(x)]^2\right\} dx}$$

$$+\text{higher order terms}$$

【定义】一元泛函的二阶变分 $\delta^2 J$

【定理】函数 f 使得泛函 J 取极小值的充要条件是对任意无穷小改变 ϵ，均有 $\delta J=0$ 和 $\delta^2 J>0$；f 使得 J 取极大值的充要条件是对任意无穷小改变 ϵ，均有 $\delta J=0$ 和 $\delta^2 J<0$

证明：如果函数 f 使得泛函 J 取极小值，则对于 f 的任意无穷小改变 ϵ 均有：$J[f+\epsilon]>J[f] \Leftrightarrow J[f+\epsilon]-J[f]>0$

$$\Leftrightarrow \delta J+\frac{1}{2}\delta^2 J+\text{higher order terms}>0$$

由于 δJ 含有 ϵ 的一阶项，符号一般是不定的，所以上式总能成立的充要条件是 $\delta J=0$ 和 $\delta^2 J>0$. 同理可得到泛函取极大值的充要条件是 $\delta J=0$ 和 $\delta^2 J<0$.　（证毕）

注：还有一种不定型是 $\delta J=0$ 和 $\delta^2 J=0$. 另外，有时把 ϵ 记为 δf

【定义】如果函数 f 使得 $\delta J=0$，则称函数 f 使泛函 J 取驻值.

【定理】函数 f 使得泛函 $J[f]=\int_D F[f(x), f'(x), x]dx$ 取驻值的充要条件是函数 f 满足如下欧拉 - 拉格朗日方程：

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=0$$

证明：

$$\delta J=\int_D\left\{\frac{\partial F}{\partial f}\epsilon(x)+\frac{\partial F}{\partial f'}\epsilon'(x)\right\}dx$$

$$=\int_D\left\{\frac{\partial F}{\partial f}\epsilon(x)\right\}dx+\int_D\frac{\partial F}{\partial f'}\epsilon'(x)dx$$

$$=\int_D\left\{\frac{\partial F}{\partial f}\epsilon(x)\right\}dx+\underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial f'}\epsilon(x)\right|_{\partial D}}_{0}-\int_D\left\{\epsilon(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}dx$$

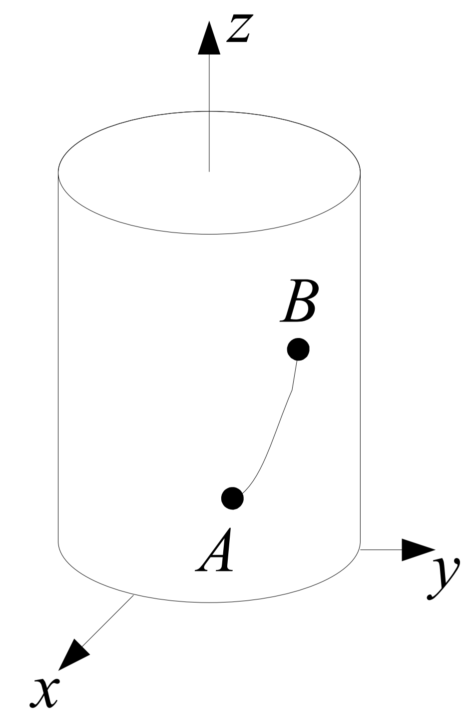
$$=\int_D\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\epsilon(x)\right\}dx$$

故， $\delta J=0\Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=0$ （证毕）

例题 3　试求半径为 R 的柱面上任意两固定点之间的短程线

解：柱面上的任一曲线上的点可以表示为

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ z)$$



曲线的弧长可表示为

$$ds=|d\,\boldsymbol{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{R^2+[z'(\theta)]^2}\,d\theta$$

那么连接 AB 两点间的曲线长度为

$$J=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sqrt{R^2+[z'(\theta)]^2}\,d\theta$$

$$F[z(\theta),z'(\theta),\theta]=\sqrt{R^2+[z'(\theta)]^2}$$

$$\delta J=0\Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial z'}=0\Rightarrow\cdots\ \Rightarrow z'(\theta)=const.$$

这是螺旋线！

【定义】s 元泛函是指映射 $J:\wp^{s}\to R$, 通常表示为

$$J[f_1,\cdots,f_s]=\int_D F[f_1(x),f_1'(x),\cdots,f_s(x),f_s'(x),x]dx$$

【定理】函数 $f_1,\ldots,f_s$ 使得上述多元泛函取驻值的充要条件是函数 $f_1,\ldots,f_s$ 满足如下欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial F}{\partial f_\alpha}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_\alpha'}=0,\ (\alpha=1,\cdots,s)$$

证明：利用一元泛函相同思想，可得

$$\delta J=\cdots=\sum_\alpha\int_D\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial f_\alpha}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_\alpha'}\right]\epsilon_\alpha(x)\right\}dx$$

注意这里是$\epsilon_1,\ldots,\epsilon_s$任意无穷小改变量，可以相互独立选取，

故有 $$\delta J=0\Leftrightarrow\frac{\partial F}{\partial f_\alpha}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_\alpha'}=0,\ (\alpha=1,\cdots,s)$$ 证毕

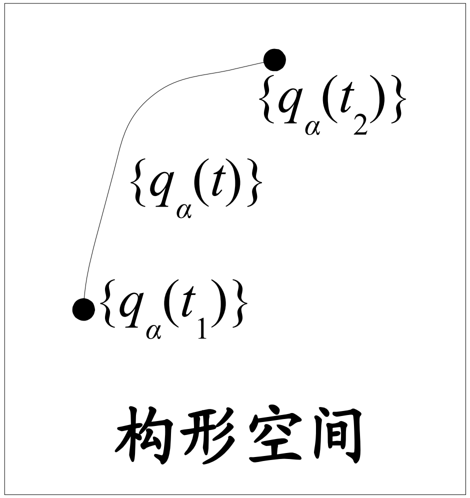
§7.4 从牛顿力学到哈密顿原理

- 构形空间与可能(真实)运动曲线

【定义】系统的构形：广义坐标对应的每一组值

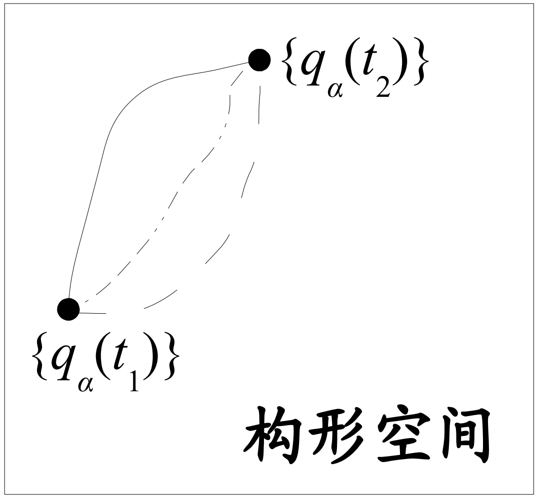
【定义】构形空间：所有构形的集合．（它是 s 维空间）

注：系统的每一个构形对应于构形空间中一个点．当时间从 t_1 变为 t_2，系统会从一个构形 $\{q_\alpha(t_1)\}$ 演化到另外一个构形 $\{q_\alpha(t_2)\}$，从构形空间来看，表现为从一个点演化到另外一个点，因此生成一条演化曲线．该曲线表示为 $\{q_\alpha=q_\alpha(t)\},(t_1\le t\le t_2)$.



【定义】真实运动曲线：系统经历真实运动的过程中，系统对应的构形在构形空间中的演化曲线．

【定义】可能运动曲线：在构形空间中，真实运动曲线附近的曲线。要求该曲线始末点分别与真实运动曲线始末点重合，且始末时刻也分别与真实运动的始末时刻相同．



注：显然，真实运动曲线是可能运动曲线之一．

核心问题：是否存在一个原理，使得我们能够从可能运动曲线中选出真实运动曲线？

- 历史路线

牛顿力学 => 虚功原理 => 达朗贝尔 - 拉格朗日原理 => 拉格朗日方程 => 哈密顿原理

- 虚功原理

【定义】虚功：作用于质点系上的力与虚位移的点积.

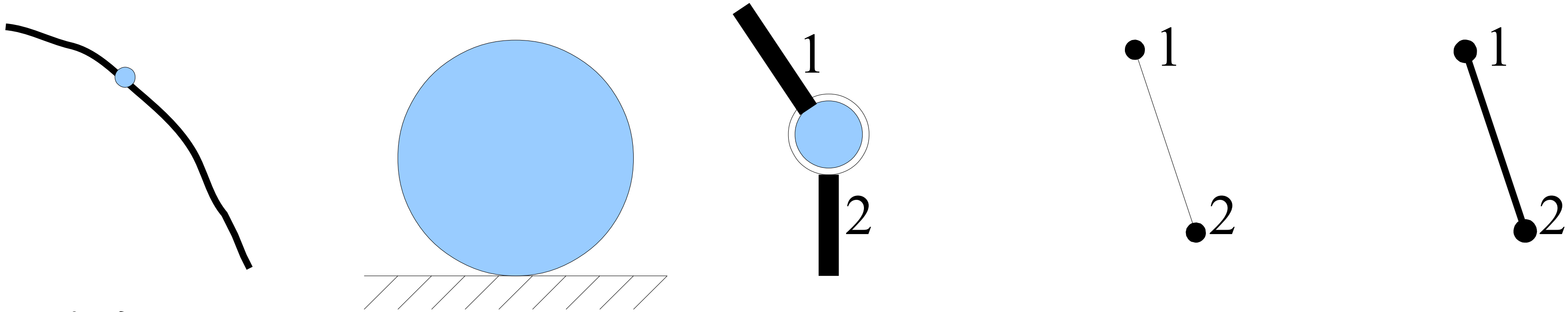
主动力虚功 $\delta W=\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\delta \boldsymbol{r}_n$　约束力虚功 $\delta W_R=\sum_n \boldsymbol{F}_n^R\cdot\delta \boldsymbol{r}_n$

注：虚功只是具有功的量纲，并不与任何真实的能量转化过程相关.

【定义】理想约束：如果所有约束力在任意虚位移上的虚功之和为零 ($\delta W_R=0$)，则这种约束称为理想约束.

注：这里理想约束的定义要用到牛顿力学中力的定义.

[*] 理想约束的几个典型例子



光滑曲面	无滑接触	光滑铰接	不可伸长轻绳	刚性杆
$\boldsymbol{F}^{R}\perp\delta\boldsymbol{r}$	$\delta\boldsymbol{r}=0$	$\boldsymbol{F}_{12}\perp\delta\boldsymbol{r}_{12}$	$\boldsymbol{F}_{12}\perp\delta\boldsymbol{r}_{12}$	(why?)

【定理】虚功原理：受理想约束的系统保持平衡的<u>必要条件</u>是系统全部主动力在任意虚位移中的虚功之和为零.

证明：根据牛顿力学，若系统保持平衡，则有

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{F}_n+\boldsymbol{F}_n^R=0\quad(n=1,\cdots,N)\ \Rightarrow\sum_n(\boldsymbol{F}_n+\boldsymbol{F}_n^R)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0\\ \text{理想约束}\Rightarrow\delta W_R=\sum_n\boldsymbol{F}_n^R\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\delta W=\sum_n\boldsymbol{F}_n\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0$$

（证毕）

【定理】如果上述理想约束还是定常的，则 $\delta W=0$ 还是静平衡的充分条件.

$$\left.\begin{aligned}&\text{证明：}\ \delta W=\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0\\ &\text{理想约束}\ \Rightarrow\delta W_R=\sum_n \boldsymbol{F}_n^R\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_n(\boldsymbol{F}_n+\boldsymbol{F}_n^R)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0$$

如果约束是定常的，则真实位移 $d\boldsymbol{r}_n$ 是虚位移之一，故有

$$\left.\begin{aligned}&\sum_n(\boldsymbol{F}_n+\boldsymbol{F}_n^R)\cdot d\boldsymbol{r}_n=0\\ &\text{质点系动能定理}\ dT=\sum_n(\boldsymbol{F}_n+\boldsymbol{F}_n^R)\cdot d\boldsymbol{r}_n\end{aligned}\right\}\Rightarrow dT=0\Rightarrow T=const.$$

那么若系统初始保持静止，则以后也会保持静止. 即处于静平衡.

注：上述定理一定针对静平衡. 否则有反例. 如小球在不可伸长的绳的约束下做匀速圆周运动.

【定义】（主动力对应的）广义力：$Q_\alpha=\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$

【推论】受理想约束的完整系统保持平衡的必要条件是 $Q_\alpha=0$

证明：受理想约束的系统保持平衡的必要条件是

$$\left.\begin{aligned}&\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\delta \boldsymbol{r}_n=0\\ \text{完整系统}\qquad &\delta \boldsymbol{r}_n=\sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_\alpha Q_\alpha\delta q_\alpha=0$$

由于自由度为 s 的完整系统 $\delta q_1,\ldots,\delta q_s$ 相互独立，故 $Q_\alpha=0$.（证毕）

【推论】若约束是定常的，则 $Q_\alpha=0$ 也是<u>静</u>平衡的<u>充分</u>条件

证明：上一证明表明对于理想约束完整系统

$$\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\delta \boldsymbol{r}_n=0\Leftrightarrow\sum_\alpha Q_\alpha\delta q_\alpha=0$$

故 $Q_\alpha=0$ 则 $\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\delta \boldsymbol{r}_n=0$. 这恰好是定常理想系统系统保持静平衡充分条件.（证毕）

【推论】若理想完整系统主动力势能为 V, 则平衡条件 $\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0$

证明：只需证明 $Q_\alpha=-\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha}$，略 .

虚功原理几点说明:

(1) 普适性 ; (2) 不区分内力和外力，而是区分主动力和约束力

(3) 约束力不在虚功原理中出现—突出优点 . (4) 虚位移任意性

(5) 若要求约束力，可用释放约束的方法求解

应用虚功原理处理问题主要步骤:

(1) 判断约束类型是否满足虚功原理适用条件

(2) 正确判断自由度，选择合适的广义坐标

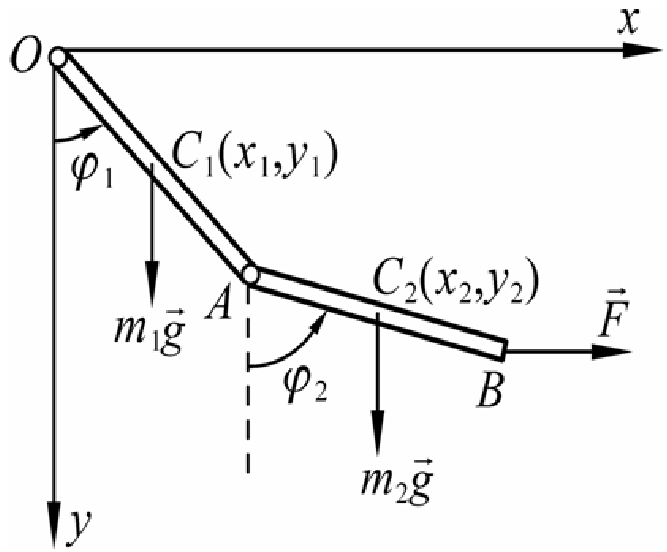
(3) 分析并图示系统受到的主动力

(4) 虚功原理—坐标变换方程—广义平衡方程;

有势系—求 V— 坐标变换方程— 广义平衡方程

(5) 求解广义平衡方程

例题4 竖直面内，匀质杆 $OA(m_1,l_1)$ 可绕固定光滑铰链 O 转动，A 端用光滑铰链与匀质杆 $AB(m_2,l_2)$ 相连．B 端受水平力 $\boldsymbol{F}$. 求静平衡时，两杆与铅垂线的夹角 φ_1 和 φ_2.



解 符合虚功原理适用条件(略)．

$s=2$，以 φ_1 和 φ_2 为广义坐标. 主动力 $m_1\vec{g}$，$m_2\vec{g}$，$\vec{F}$．直角系 Oxy 中，由虚功原理

$$m_1 g\delta y_1 + m_2 g\delta y_2 + F\delta x_3 = 0$$

坐标变换方程为

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{l_1}{2}\cos\varphi_1 \\ y_2 = l_1\cos\varphi_1 + \dfrac{l_2}{2}\cos\varphi_2 \\ x_3 = l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta y_1 = -\dfrac{l_1}{2}\sin\varphi_1\delta\varphi_1 \\ \delta y_2 = -l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - \dfrac{l_2}{2}\sin\varphi_2\delta\varphi_2 \\ \delta x_3 = l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2 \end{cases}$$

$$\delta W = (F\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}m_1 g\sin\varphi_1 - m_2 g\sin\varphi_1)l_1\delta\varphi_1$$

$$+(F\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}m_2 g\sin\varphi_2)l_2\delta\varphi_2 = 0$$

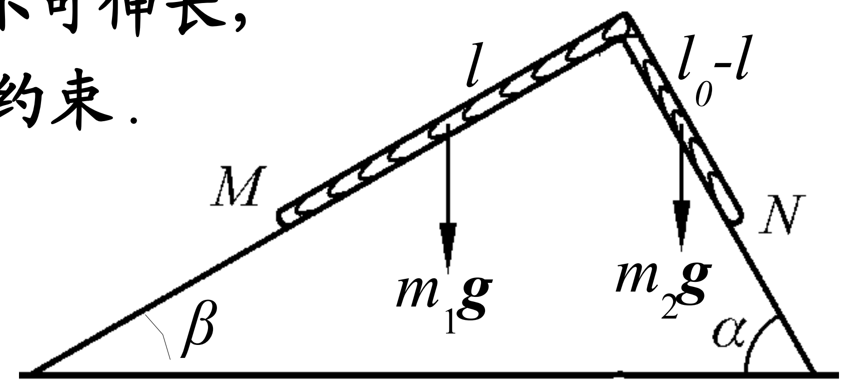
$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = F\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}m_1 g\sin\varphi_1 - m_2 g\sin\varphi = 0 \\ Q_2 = F\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}m_2 g\sin\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

静平衡时φ_1和φ_2满足

$$\begin{cases} \tan\varphi_1 = \dfrac{2F}{(2m_2 + m_1)g} \\ \tan\varphi_2 = \dfrac{2F}{m_2 g} \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_1 = \arctan\dfrac{2F}{(2m_2 + m_1)g} \\ \varphi_2 = \arctan\dfrac{2F}{m_2 g} \end{cases}$$

例题 5 图示固定三棱柱，一条匀质的绳索跨在棱的两边. 不计摩擦，试证明绳索平衡时，它的两端点必在同一水平面上.

证明：光滑表面支撑，约束理想；绳子不可伸长，对于绳子上的任意质点来说也是理想约束.



自由度为 1，广义坐标可取为左侧的长度 l

主动力是有势力（取最高点势能零点）

$$V=-(\rho l g)\frac{l}{2}\sin\beta-[\rho(l_0-l)g]\frac{l_0-l}{2}\sin\alpha$$

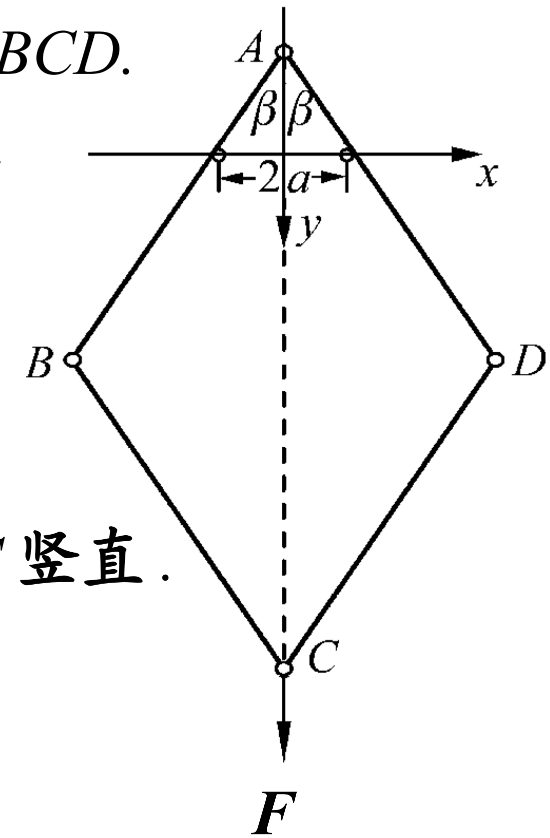
平衡方程 $\frac{\partial V}{\partial l}=0\Rightarrow l\sin\beta=(l_0-l)\sin\alpha$ 证毕.

注：请自己进一步分析，这里的平衡是不稳定的.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l^2}<0$$

例题 6 长为 l 的四根轻杆，用光滑铰链连成菱形 $ABCD$. AB 和 AD 支于相距 $2a$ 且在同一水平线上的两根光滑钉子上， C 点受竖直恒力 $\boldsymbol{F}$.

求平衡时 A 处半顶角 β.



解：满足理想约束条件.

由于体系结构及外力的对称性，可知平衡时 AC 竖直.

故体系自由度降为 1，可取 β 为广义坐标.

恒力是有势力（取水平线 x 为势能零点）

$$V=-F\,y_C$$

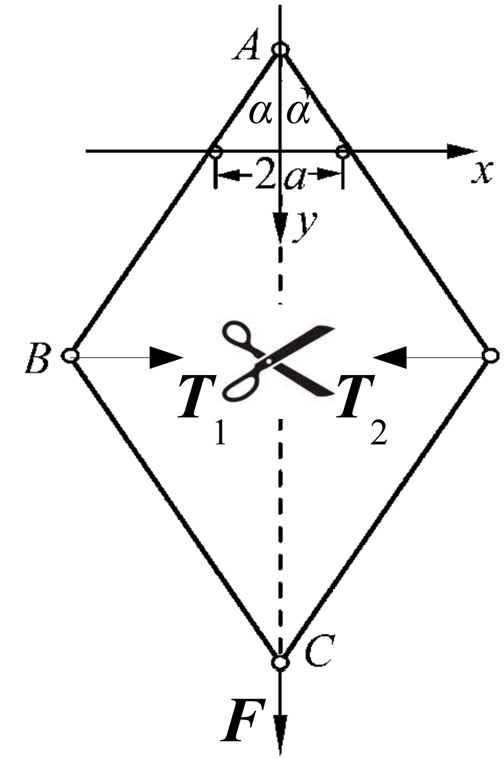
利用几何关系 $\begin{cases}(-y_A)\tan\beta=a\\(y_C-y_A)=2l\cos\beta\end{cases}$

$$\Rightarrow V=F\left(a\cot\beta-2l\cos\beta\right)$$

平衡方程 $\dfrac{\partial V}{\partial\beta}=0\Rightarrow\sin^3\beta=\dfrac{a}{2l}$

注意：虚功原理中的参考系一定要选惯性系，坐标原点不能动

例题 7 基本结构同上例，但在 BD 间用轻质不可伸长的绳子连接，求顶角为 $\alpha(<\beta)$ 时绳的张力



解：此题要求约束力，需释放约束．取而代之为绳的张力，并把它做主动力考虑．

释放约束后体系满足理想约束条件．

张力大小相等 ,$T_1=T_2$

通过对称性分析，可知平衡时 AC 竖直．

故体系自由度降为 1，可取 α 为广义坐标．

虚功原理 $\delta W=F\delta y_C+T_1\delta x_B-T_2\delta x_D=0$

$$(-y_A)\tan\alpha=a$$

$$(y_C-y_A)=2l\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\delta y_C=(a\csc^2\alpha-2l\sin\alpha)\delta\alpha$$

$$x_D=-x_B=l\sin\alpha\Rightarrow\delta x_D=-\delta x_B=l\cos\alpha\delta\alpha$$

$$\Rightarrow T_1=F\left(\frac{a}{2l}\csc^3\alpha-1\right)\tan\alpha$$

另外：请自学用拉格朗日乘子法求约束力（ pp176-179 ）

- 达朗贝尔 - 拉格朗日原理

【定义】惯性力：$-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n$

【定理】达朗贝尔原理：在运动的每一瞬时，系统的每个质点所受主动力、约束力和惯性力在形式上处于平衡

$$-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n+\boldsymbol{F}_n+\boldsymbol{F}_n^R=0$$

证明：只需将牛顿第二定律的加速度项移到力的一侧即可.

注：这一原理看似显然，但揭示了重要思想：化动力学问题为静力学问题.

【定理】达朗贝尔 - 拉格朗日原理：在理想约束约束下，运动的每一瞬时系统所受主动力和惯性力在任意虚位移上的虚功之和等于零. $\sum_n(\boldsymbol{F}_n-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0$

注：可视为虚功原理在动力学中的推广，证明可参照虚功原理.

- 拉格朗日方程

对于理想约束的完整系统，选择广义坐标 $q_1,\ldots,q_s$，则质点系位矢

$$\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}_n(q_1,\cdots,q_s,t),\ (n=1,2,\cdots,N)$$

【引理】 $\dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial \dot{q}_\alpha}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$, $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=\dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial q_\alpha}$

证明：关键要注意到 $\dot{\boldsymbol{r}}_n=\sum_\beta \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial t}$ 是 $q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t$ 的函数

只是 q_α,t 的函数

因此第一式显然．只需证明第二式．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\beta+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial q_\alpha}=\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\beta+\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial t}\right)$$

二阶偏导与求导的顺序无关 → 第二式

【定理】受理想约束的完整系满足一般形式的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha,\quad (\alpha=1,2,\cdots,s)$$ 其中 T 为系统动能

证明:

$$\left.\begin{aligned}&\delta \boldsymbol{r}_n=\sum_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\\ &\sum_n(\boldsymbol{F}_n-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum_n\sum_\alpha\left(\boldsymbol{F}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0$$

$$Q_\alpha=\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$$ 而 $\delta q_1,\ldots,\delta q_s$ 独立

$$\Rightarrow\sum_n m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_n}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\overset{\text{引理}}{=}\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial \dot q_\alpha}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial q_\alpha}$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_n m_n\dot{\boldsymbol{r}}_n^2\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}=\sum_n m_n\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial \dot q_\alpha},\quad \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=\sum_n m_n\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_n}{\partial q_\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$$

注：这个方程不要求主动力有势.

【推论】受理想约束的完整有势系统满足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\ (\alpha=1,2,\cdots,s)$$ 其中 L 为系统动能 - 势能

证明：如果主动力存在势函数 V，则

$$\boldsymbol{F}_n=-\nabla_n V\ \Rightarrow Q_\alpha=\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=-\sum_n(\nabla_n V)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

令 $L=T-V$, 于是由一般形式的拉格朗日方程可得结果．（证毕）

注：如果主动力有些是有势力，势函数为 V，有些是非有势力，则我们同样可以令 $L=T-V$，然后将非有势力对应的广义力记为 $\tilde{Q}_\alpha$，则我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\tilde{Q}_\alpha,\ (\alpha=1,2,\cdots,s)$$

- 哈密顿原理

实际上，拉格朗日方程的推导过程已经蕴含了哈密顿原理.

【定理】在构形空间，受理想约束的完整系的真实运动使得

$$\int_{t_1}^{t_2}[\delta T+\sum_{\alpha}Q_{\alpha}\delta q_{\alpha}]dt=0$$

证明： $\sum_n(\boldsymbol{F}_n-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=0\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_n(\boldsymbol{F}_n-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n\right]dt=0$

$$\sum_n\boldsymbol{F}_n\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=\sum_{\alpha}Q_{\alpha}\delta q_{\alpha}$$

$$\delta T=\text{linear term}\left\{\sum_n\frac{m_n}{2}\left[\frac{d(\boldsymbol{r}_n+\delta\boldsymbol{r}_n)}{dt}\right]^2-\sum_n\frac{m_n}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}_n}{dt}\right)^2\right\}=\sum_n m_n\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\frac{d\delta\boldsymbol{r}_n}{dt}$$

$$\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=\sum_n m_n\int_{t_1}^{t_2}\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot d(\delta\boldsymbol{r}_n)=\underbrace{\sum_n m_n\dot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\delta\boldsymbol{r}_n\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_n m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n\cdot\delta\boldsymbol{r}_n dt$$

代入 $\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_n(\boldsymbol{F}_n-m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n)\cdot\delta\boldsymbol{r}_n\right]dt=0$ **即可.（证毕）**

【推论】在构形空间，受理想约束的完整有势系的真实运动使得 $\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=0$ ，其中 $L=T-V$

证明：只需注意到有势系统 $\sum_n \boldsymbol{F}_n\cdot\delta\boldsymbol{r}_n=-\delta V$ 即可．（证毕）

注：这一节基本上是按历史的顺序阐述怎么样从牛顿力学慢慢发展最后提升出哈密顿原理的．使得我们知道理论发展的历史继承性

下一节我们将从哈密顿原理出发建立分析动力学的公理化体系，该体系原则上可以不依赖于牛顿动力学，是独立于牛顿动力学的一种表述形式．

我们还将体会到从哈密顿原理建立起来的分析动力学体系与牛顿动力学体系是等价的．可从其中任一个导出另一个．但是，大家在后续课中可看到分析力学对近现代物理的发展起到了更大的作用．

§7.5 分析力学基本概念与公理

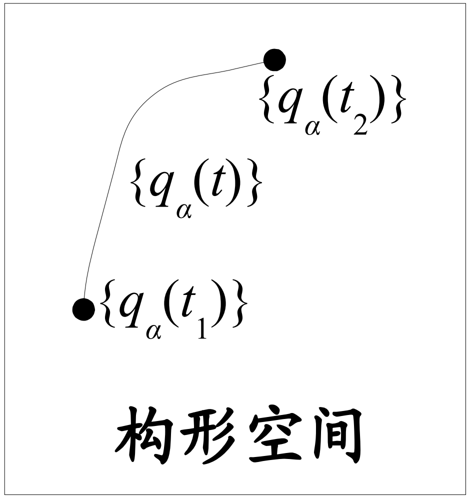
- 构形空间与理想约束

【定义】系统的构形：广义坐标对应的每一组值

【定义】构形空间：所有构形的集合．（它是 s 维空间）

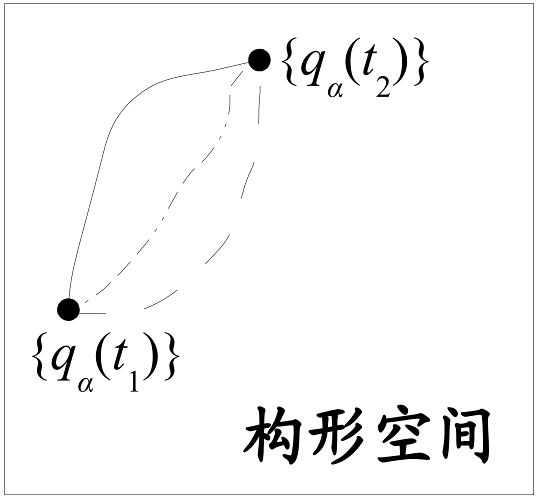
注：系统的每一个构形对应于构形空间中一个点．

当时间从 t_1 变为 t_2，系统会从一个构形 $\{q_\alpha(t_1)\}$ 演化到另外一个构形 $\{q_\alpha(t_2)\}$，从构形空间来看，表现为从一个点演化到另外一个点，因此生成一条演化曲线．该曲线表示为 $\{q_\alpha=q_\alpha(t)\}, (t_1\le t\le t_2)$.



【定义】真实运动曲线：系统经历真实运动的过程中，系统对应的构形在构形空间中的演化曲线.

【定义】可能运动曲线：在构形空间中，真实运动曲线附近的曲线。要求该曲线始末点分别与真实运动曲线始末点重合，且始末时刻也分别与真实运动的始末时刻相同.



注：显然，真实运动曲线是可能运动曲线之一.

【定义】理想约束：一旦根据约束方程确定了构形空间，约束不再对构形空间的可能运动产生任何影响。这样的约束称为理想约束.（注意：这里没用到力的定义）

核心问题：是否存在一个原理，使得我们能够从可能运动曲线中选出真实运动曲线？

- 公理一：哈密顿原理(最小作用量原理)

【**哈密顿原理**】受理想约束的完整系统存在拉格朗日函数

$$L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)\equiv L(q_1,\cdots,q_s,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s,t),$$

若系统在 t_1 和 t_2 （接近于 t_1 ）时刻的构形固定，那么在 t_1 至 t_2 时间段内，过两固定点的一切可能运动曲线中，真实运动曲线使得作用量泛函 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)dt$ 取极小值，即 $\delta S=0$, 且 $\delta^2 S>0.$

【推论】真实运动曲线满足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,\ (\alpha=1,2,\cdots,s)$$

证明：利用 7.3 节多元泛函取驻值的充要条件即可得证.

（请自己证明）. 此方程也称为系统的动力学方程.

注：哈密顿原理特点—

(1) 统一、简洁、完美，具有坐标变换的不变性

(2) 可推广至无限自由度以及物理学其他领域

(3) 可用于创建新的理论.根据假设构造出拉格朗日函数，用哈密顿原理导出动力学方程，由实践检验其正确性

(4) 是公理，无需推证.正确性由演绎出的推论在实践中的检验而得到证实.

(5) 不依赖牛顿定律，不受牛顿定律适用条件的限制.很强的普适性

(6) 任何理论有一定的适用范围，这里的哈密顿原理的表述方式也并非对于任意力学系统成立，实际上对力学系统内外部的相互作用有一定的限制，要求相互作用可表示为一标量函数，一般来说，物理学通常关心的正是这种体系.

下面考察拉格朗日函数(特征函数)的特点

【推论】若力学系统 A 和 B 分别是封闭体系，它们之间相距足够远以至于互不影响，若把 A 和 B 看成一个大系统，则拉格朗日函数满足

$$L_{A+B}=L_A+L_B$$

证明：A,B 各自的动力学方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L_A}{\partial q_\alpha}=0,\ (\alpha=1,2,\cdots,s_A);\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L_B}{\partial \dot{q}_\beta}-\frac{\partial L_B}{\partial q_\beta}=0,\ (\beta=1,2,\cdots,s_B)$$

由于 A,B 互不影响，所以构成的大系统的动力学方程应该还是上面两个方程。只要取大系统的的拉格朗日函数 $L_{A+B}=L_A+L_B$，即可得到相同的动力学方程.(证毕)

【推论】对于同一力学系统，将拉格朗日函数乘以任意常数仍得到相同的动力学方程.

证明：这是显然的，观察拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$ 即可.

注：这似乎导致一种不确定性，即各个孤立力学系统的拉格朗日函数可以乘以不同的任意常数.

之前关于拉格朗日函数的可加性的推论消除了这一不确定性，只容许所有力学系统乘以同一个任意常数.

这实际上反映了选择物理量单位的任意性.（ SI 制，高斯制 ... ）

【推论】对于同一力学系统，$\tilde{L}=L+\frac{d}{dt}f(q_\alpha,t)$ 与 L 给出相同的动力学方程.

证明：$\tilde{S}=\int_{t_1}^{t_2}\tilde{L}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt+\int_{t_1}^{t_2}(df/dt)\,dt=S+f[q_\alpha(t_2),t_2]-f[q_\alpha(t_1),t_1]$

由于端点的时刻和构形是固定不变的，故

$$\delta\tilde{S}=\delta S+0\Rightarrow \text{ 动力学方程相同}$$

- 公理二：惯性参考系 研究经典力学系统的运动，需附加公理

【惯性公理】存在惯性参考系，空间相对它是均匀的各向同性的，时间相对它是均匀的.

【推论】惯性系中的自由孤立质点运动速度不变

证明：空间间和时间的均匀性意味着惯性系中不存在特殊的点和时刻，反映为自由孤立质点的拉格朗日函数不会依赖于质点位矢且不能显含时间；故 L 只能是速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数.

空间各向同性表明对于自由孤立质点来说不存在特别的方向，反映为 L 不能依赖于速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向，于是唯一可能是 $L=L(v^2)$

代入拉格朗日方程得 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \equiv \frac{\partial L}{\partial v_x}\hat{x}+\frac{\partial L}{\partial v_y}\hat{y}+\frac{\partial L}{\partial v_z}\hat{z}=const.$

显然 $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的函数，它取常量的条件是 $\boldsymbol{v}=const.$ （证毕）

注：标量对矢量偏导 = 标量对矢量分量偏导后乘以基矢再求和

- 公理三：伽利略相对性原理

设惯性系 S' 相对于 S 以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，则同一质点在两个参考系中的位矢满足 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t'$

另外，根据第一章绝对时间公设 $t=t'$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t' \\ t=t'\end{array}\right\}\text{称为伽利略变换}$$

【伽利略相对性原理】不同惯性参考系中的力学规律是相同的。即，系统的动力学方程在伽利略变换下具有不变性．采用相同的广义坐标，得到相同的动力学方程

例如，对于自由孤立质点

$$L=L(v^2)\longleftrightarrow L'=L(\boldsymbol{v}'^2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=0\longleftrightarrow \frac{d}{dt'}\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{v}'}=0$$

S 系 $\qquad\qquad$ S' 系

注：做伽利略变换时，拉格朗日函数形式不变，只需将函数中含 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$ 的地方简单地替换成 $\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}'$. 以下无特别声明均在惯性系中讨论问题

- 拉格朗日函数的构造

【定理】自由孤立质点的拉格朗日函数可表示为 $L=\frac{m}{2}v^2$,

其中 m **是常量**.

证明：设惯性系 S' **相对于** S **以无限小恒定速度** $\boldsymbol{u}$ **运动**.

$$L=L(v^2)\leftarrow\rightarrow L'=L(v'^2)=L[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2]$$

$$=L(\boldsymbol{v}^2-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^2)=L(v^2)+\frac{\partial L}{\partial(v^2)}(-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})$$

现在，如果选择相同的广义坐标 r, **要得到相同的运动方程，根据前面的推论，需要第二项是坐标和时间（不含速度）的函数的全导数。由于** $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$ **，本身就是 ... 的全导数，所以只有** $\partial L/\partial(v^2)$ **与速度** $\boldsymbol{v}$ **无关时才能保证第二项是 ... 的全导数. 即**

$$\frac{\partial L}{\partial(v^2)}=const.\equiv\frac{m}{2}\quad\Rightarrow L=\frac{m}{2}v^2$$ **（证毕）**

【定义】质点质量：自由质点拉格朗日函数中的物理常量 m

【推论】质点质量 $m>0$

证明：只有 $m>0$ 时，才能保证作用量有极小值．（证毕）

【推论】无相互作用的自由质点系的拉格朗日函数为

$$L=\sum_n \frac{m_n}{2}v_n^2,$$

其中 m_n 和 v_n 分别为第 n 个质点的质量和速度．

证明：根据无相互作用时拉格朗日函数可加性即可得证．

注：可以将拉格朗日乘以常数而不改变运动方程，这相当于改变质量的度量，不同质点的质量之间的比例关系才是具有实际物理意义的量，不会因乘以常数而发生改变．

【定义】封闭质点系：其质点间有相互作用，但不受任何外部物体的作用 .

如果用一个函数 V 来表示质点间的相互作用，可以在自由质点系拉格朗日函数的基础上增加表示相互作用的项，从而得到封闭质点系的拉格朗日函数 .

【公理四】封闭质点系的拉格朗日函数为

$$L = \underbrace{\sum_n \frac{m_n}{2} v_n^2}_{\text{封闭质点系的动能}} - \underbrace{V}_{\text{封闭质点系的内势能}} .$$

注：此公理隐含了质点质量与相互作用无关

【定理】函数 V 不显含时间，且只依赖于各个质点间的距离

证明：时间的均匀性 => 封闭体系不受外部物体影响，所以在不同的时刻观察到的运动规律不应该有不同，或者说与时间坐标原点选取无关 => L 不显含时间，即 V 不显含时间 .

空间的均匀性 => 把封闭体系在空间中平移一下，不会观察到不同的运动规律 => L 中含坐标的项只与相对位置 $(\boldsymbol{r}_{ij})$ 有关

空间各向同性 => 将封闭体系转动一个角度，不会观察到不同的运动规律 => L 中与坐标相关的部分不能出现与方向相关的量，故可知 L 只能与质点间距离 $r_{ij}=|\boldsymbol{r}_{ij}|$ 有关 => $V=V(r_{12},r_{13},\ldots)$.（证毕）

注：有时仍旧记 $V=V(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$

【推论】函数 V 不依赖于惯性系的选取

证明：在惯性 S' 系中，它变为 $V'=V(|\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_j'|)$.

由于 $|\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_j'|=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|$ => $V'=V$. （证毕）

【定理】封闭质点系的运动规律满足时间反演不变性

证明：拉格朗日函数 L 决定了质点系的运动规律，而势能不显含时间，动能在时间反演变换 (t 变为 $-t$) 下保持不变．（证毕）

【定理】封闭质点系的运动微分方程为 $m_n \dfrac{d\boldsymbol{v}_n}{dt} = -\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_n}$．

证明：根据拉格朗日方程，以各质点的位置作为广义坐标，有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_n} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_n} \\ &L = \sum_n \frac{m_n}{2} v_n^2 - V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_n \frac{d\boldsymbol{v}_n}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_n}$$

（证毕）

【定义】作用在第 n 个质点上的内力：矢量 $\boldsymbol{F}_n = -\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_n}$．

【定理】两质点间的相互作用力之和 =0.

证明：考虑两质点，1 受到 2 的作用力和 2 受到 1 的作用力分别为

$\boldsymbol{F}_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_1}$，$\boldsymbol{F}_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_2}$．　$V=V(r_{12})=V(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|) \Rightarrow \boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$.（证毕）

考虑非封闭质点系 A 与运动完全已知的质点系 B 作用.

【定理】非封闭质点系 A 的运动由如下拉格朗日函数决定

$$L=T_A-V(\boldsymbol{r}_{A\alpha},\boldsymbol{r}_{B\beta}(t))$$

证明：假定 $A+B$ 是封闭的，则它的拉格朗日函数为

$$L_{A+B}=T_A(v_{A\alpha}^2)+T_B(v_{B\beta}^2)-V(\boldsymbol{r}_{A\alpha},\boldsymbol{r}_{B\beta})$$

由于 B 的运动完全已知，即

$$v_{B\beta}=v_{B\beta}(t),\quad \boldsymbol{r}_{B\beta}=\boldsymbol{r}_{B\beta}(t)$$

故 T_B 可以最终表示成时间的函数，自然是某个仅含时间函数的全导数. 故对体系动力学方程不产生影响. 那么体系 $A+B$ 的运动可由 $L=T_A-V(\boldsymbol{r}_{A\alpha},\boldsymbol{r}_{B\beta}(t))$ 来决定.

由于 B 的运动规律已知，所以 L 也就决定了 A 的运动. （证毕）

注：可见外场中运动的质点系仍有 $L=T-V$，只不过 V 可能显含时间

【推论】外场 $V(\boldsymbol{r},t)$ 中的质点的运动微分方程为 $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$.

证明：根据上一定理，$L=\frac{mv^2}{2}-V(\boldsymbol{r},t)$, 代入拉格朗日方程即可 .

【定义】外力 $\boldsymbol{F}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$.

注：与质点系内力不同，外力除了是坐标的函数外，还可能显含时间

【定义】稳定外场：不显含时间的外场

【定义】均匀外场：其对应的外力与坐标无关的外场 .

显然：均匀外场可表示为 $V=-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$

注：(1) 到目前为止，我们已经从分析力学的公理导出了牛顿三定律以及力是矢量的概念 .

(2) 但是这些力都是由势能函数给出 . 因此简称为有势力，通常物理学关心的纯粹的力学系统原则上都是有势的 .

(3) 非有势外力来源于我们对 B 的运动只能近似地已知

例题 8 定性分析非有势外力的来源

分析：考虑非封闭质点系 A 与质点系 B 相互作用，且我们近似已知 B 的运动规律，记为 $\bar{\boldsymbol{v}}_B$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}_B$. 而将不确定的那部分（假定为小量）记为 $\tilde{\boldsymbol{v}}_B$ 和 $\tilde{\boldsymbol{r}}_B$. 则封闭系统 $A+B$ 满足，

$$L_{A+B}=T_A+T_B\left[(\bar{\boldsymbol{v}}_B+\tilde{\boldsymbol{v}}_B)^2\right]-V(\boldsymbol{r}_A,\bar{\boldsymbol{r}}_B+\tilde{\boldsymbol{r}}_B)$$

$$\approx T_A+T_B(\bar{v}_B^2)+\frac{\partial T_B}{\partial(\bar{v}_B^2)}(2\bar{\boldsymbol{v}}_B\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_B)-V(\boldsymbol{r}_A,\bar{\boldsymbol{r}}_B)-\frac{\partial V}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}_B}\tilde{\boldsymbol{r}}_B$$

$$\approx \underbrace{T_A-V(\boldsymbol{r}_A,\bar{\boldsymbol{r}}_B)}_{L(\boldsymbol{r}_A,\boldsymbol{v}_A,t)}+\underbrace{T_B(\bar{v}_B^2)}_{\text{仅含时（可略）}}+\underbrace{\frac{\partial T_B}{\partial(\bar{v}_B^2)}(2\bar{\boldsymbol{v}}_B\cdot\tilde{\boldsymbol{v}}_B)-\frac{\partial V(\boldsymbol{r}_A,\bar{\boldsymbol{r}}_B)}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}_B}\tilde{\boldsymbol{r}}_B}_{U(\boldsymbol{r}_A,\tilde{\boldsymbol{r}}_B,\tilde{\boldsymbol{v}}_B,t)}$$

$A+B$ 系统的真实运动满足 $\delta\int_{t_1}^{t_2}L_{A+B}\,dt=0\Rightarrow\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt+\delta\int_{t_1}^{t_2}U\,dt=0$

$\delta\int_{t_1}^{t_2}U\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}_A}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A+\frac{\partial U}{\partial\tilde{\boldsymbol{r}}_B}\cdot\delta\tilde{\boldsymbol{r}}_B+\frac{\partial U}{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}_B}\cdot\delta\tilde{\boldsymbol{v}}_B\right]dt$，强制把积分号内记 $\tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A$，

往往 $\tilde{\boldsymbol{F}}^{(e)}$ 不能写成某函数对 $\boldsymbol{r}_A$ 的偏导数，此时质点系 A 的动力学方程

$$m_{An}\frac{d\boldsymbol{v}_{An}}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_{An}}+\tilde{\boldsymbol{F}}_n^{(e)}$$

如果$\tilde{\boldsymbol{F}}_n^{(e)}$不能写成某函数对 $\boldsymbol{r}_{An}$ 的偏导数，表现为质点系 A 受非有势外力作用．非有势外力一般根据实验经验给出．

通过上面的分析，我们得到了一个副产品，即

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_n\tilde{\boldsymbol{F}}_n^{(e)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_n dt=0$$（此处略写了下标 A）

如果质点系 A 是受理想约束的完整系统，自由度为 s，可选择广义坐标 $q_1,\ldots,q_s$. 此时 $\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}_n(q_1,\cdots,q_s,t)$. $\delta\boldsymbol{r}_n$ 可由广义坐标的无限小改变 $\delta q_1,\ldots,\delta q_s$ 求得，即

$$\delta\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{r}_n(q_1+\delta q_1,\cdots,q_s+\delta q_s,t)-\boldsymbol{r}_n(q_1,\cdots,q_s,t)=\sum_\alpha\frac{\partial\boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

【定义】广义非有势力：$\tilde{Q}_\alpha=\sum_n\tilde{\boldsymbol{F}}_n^{(e)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_n}{\partial q_\alpha}$

【定理】广义哈密顿原理：受理想约束的完整系，如果存在非有势外力作用，则真实运动曲线使得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha}\tilde{Q}_{\alpha}\delta q_{\alpha}dt=0$$

其中 L 是系统的动能减去有势力的势能，$\tilde{Q}_{\alpha}$为广义非有势力

注意：这里 L 总能写成广义坐标，广义速度以及时间的函数.

【推论】受理想约束的完整系，如果存在非有势外力作用，则满足一般形式的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}=\tilde{Q}_{\alpha},\quad(\alpha=1,2,\cdots,s)$$

证明：
$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=\cdots=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right]\delta q_{\alpha}dt$$

再应用广义哈密顿原理即得证.