

**SPRAWOZDANIE**

**LABORATORIUM NR 3**

**TEMAT:**

**Równania i układy równań nieliniowych**

**PROWADZĄCY:**

Dr inż. Barbara Głut

**AUTOR:**

Małgorzata Olszewska

1. **Zagadnienia dotyczące wykonywanego ćwiczenia.**

W tym ćwiczeniu badano dwie spośród metod iteracyjnych: metodę stycznych Newtona oraz jej uproszczoną wersję – metodę siecznych, w której pochodna funkcji wyjściowej została zamieniona na postać ilorazu różnicowego (metoda jednopunktowa obliczania numerycznego pochodnej).

Przed rozpoczęciem implementacji algorytmu numerycznego wyszukującego zera zadanej funkcji, warto dokonać analitycznej interpretacji tejże funkcji. Przy pomocy metody iteracyjnej Newtona można rozwiązywać również układy równań nieliniowych, jednakże jest to z reguły zadanie niebanalne. Aby otrzymać rozwiązanie układu, należy uprzednio wyznaczyć macierzy pochodnych oraz odnaleźć wektor przesunięcia (tzw. „poprawkę”) przy pomocy metody eliminacji Gaussa lub poprzez odwrócenie macierzy pochodnych. Co więcej, wybór wektora początkowego silnie determinuje postać rozwiązania otrzymanego w wyniku działania algorytmu. Należy zatem uważnie dobierać wektory początkowe, aby uzyskać wszystkie interesujące nas zestawy rozwiązań (gdyż układ równań nieliniowych na ogół posiada więcej niż jedno rozwiązanie).

1. **Cel ćwiczenia.**

Celem ćwiczenia było zapoznanie się z metodami iteracyjnymi rozwiązywania równań nieliniowych oraz ich układów na przykładzie metody Newtona oraz metody siecznych. Badano również wpływ zmian parametrów opisujących obie metody na dokładność generowanych wyników oraz czas działania algorytmu.

1. **Przebieg ćwiczenia.**

W ramach zajęć laboratoryjnych należało wykonać trzy zadania. Pierwsze z nich polegało na sprawdzeniu, w jaki sposób zadane parametry początkowe wpływają na postać wyniku. Dla zadanej funkcji *f* wyznaczono rozwiązania równania: *f(x) = 0* w przedziale *[a,b]* wykorzystując metodę Newtona. Badano przy tym, jaki wpływ na dokładność wyników i liczbę iteracji mają: punkty startowe, zastosowany warunek stopu z odpowiednimi oraz tolerancja dokładności. Podobnie uczyniono również w przypadku metody siecznych, która jest uproszczoną wersją metody Newtona (stycznych).

Drugie ćwiczenie polegało na rozwiązaniu zadanego układu równań nieliniowych z wykorzystaniem metody Newtona. Przeprowadzono eksperymenty dla różnych kryteriów stopu oraz wektorów początkowych, a także poszukiwano takich wektorów, dla których algorytm nie jest zbieżny. Wyznaczono również postacie wektorów początkowych doprowadzające do poszczególnych rozwiązań.

1. **Opracowanie wyników.**

**3.1. Informacje wstępne.**

W każdym z eksperymentów w zadaniu pierwszym przyjęto, iż maksymalna liczba iteracji wynosić będzie 100. W zadaniu drugim wielkość ta wynosiła 10 000.

Wszystkie programy zostały wykonane w języku C++.

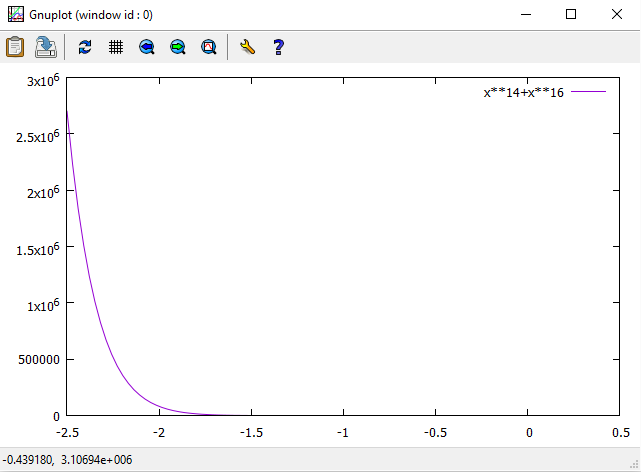
**3.2. Zadanie pierwsze.**

Badana funkcja zadana jest wzorem:



w przedziale *[a, b] = [-2.5, 0.5]*. Aby zapoznać się z przebiegiem tej funkcji wykorzystano program gnuplot, natomiast aby odnaleźć jej pierwiastki w zadanym przedziale, wykorzystano darmowy pakiet internetowy *Wolfram Alpha* (wolframalpha.com).

Przebieg badanej funkcji ilustruje poniższy rysunek.



Jak można zauważyć na wykresie, funkcja ma przebieg trudny do badania – w przedziale *[-1.75, 0.5]* jej wykres przebiega prawie równolegle do osi OX (z punktu widzenia skali całego przedziału), ponadto funkcja osiąga wartości bardzo bliskie zeru. Opisana sytuacja może powodować, iż zastosowane algorytmy będą obliczały błędne wyniki (gdyż kryterium stopu zostanie zrealizowane w punkcie odległym od faktycznego rozwiązania równania).

Przy pomocy pakietu *Wolfram Alpha* wyznaczono również pochodną funkcji, której wartość obliczana jest w metodzie Newtona. W algorytmie wykorzystano obliczanie analityczne pochodnej, aby zredukować do minimum nadmiarowe błędy (związane chociażby z przybliżeniem pochodnej przy pomocy metody *n*-punktowej).

Miejscem zerowym zadanej funkcji jest argument:

*x =0*

W ramach zadania pierwszego badano zależność wyniku i liczby iteracji algorytmu od parametrów metody iteracyjnej, dla metod: Newtona (stycznych) i siecznych.

Wyniki obserwacji zebrano poniżej. Wszystkie błędne wartości (o różnicy na moduł nie mniejszej niż 0.0001) zostały oznaczone innym kolorem komórki w tabeli, zaś przyczyny zajścia tego zjawiska wyjaśnione zostaną w sekcji „WNIOSKI”.

* Maksymalna liczba iteracji: 10000;
* błąd epsilonowy(kryterium błędu), dokładność: 1e-3;
* kryterium stopu: moduł z różnicy wartości poszukiwanego punktu w dwóch kolejnych iteracjach;
* punkty startowe i końcowe zmienne (najpierw koniec jest stały potem początek)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA NEWTONA (stycznych)** | | | | | |
| Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5** | 74 | -0.012078 | **0.5** | 50 | 0.012514 |
| **-2.4** | 73 | -0.0124215 | **0.4** | 47 | 0.0124304 |
| **-2.3** | 72 | -0.0127507 | **0.3** | 43 | 0.0124781 |
| **-2.2** | 72 | -0.0121287 | **0.2** | 37 | 0.0129285 |
| **-2.1** | 71 | -0.0123966 | **0.1** | 28 | 0.0125652 |
| **-2** | 70 | -0.0126395 | **0** | 1 | 1.00515e-015 |
| **-1.9** | 69 | -0.0128525 | **-0.1** | 28 | -0.0129205 |
| **-1.8** | 69 | -0.0120996 | **-0.2** | 37 | -0.0129285 |
| **-1.7** | 68 | -0.0122268 | **-0.3** | 43 | -0.0124781 |
| **-1.6** | 67 | -0.0123102 | **-0.4** | 47 | -0.0124304 |
| **-1.5** | 66 | -0.0123433 | **-0.5** | 50 | -0.012514 |
| **-1.4** | 65 | -0.012319 | **-0.6** | 53 | -0.0121029 |
| **-1.3** | 64 | -0.0122299 | **-0.7** | 55 | -0.0122618 |
| **-1.2** | 62 | -0.0129959 | **-0.8** | 57 | -0.0121732 |
| **-1.1** | 61 | -0.0127328 | **-0.9** | 58 | -0.0128137 |
| **-1** | 60 | -0.0123707 | **-1** | 60 | -0.0123707 |
| **-0.9** | 58 | -0.0128137 | **-1.1** | 61 | -0.0127328 |
| **-0.8** | 57 | -0.0121732 | **-1.2** | 62 | -0.0129959 |
| **-0.7** | 55 | -0.0122618 | **-1.3** | 64 | -0.0122299 |
| **-0.6** | 53 | -0.0121029 | **-1.4** | 65 | -0.012319 |
| **-0.5** | 50 | -0.012514 | **-1.5** | 66 | -0.0123433 |
| **-0.4** | 47 | -0.0124304 | **-1.6** | 67 | -0.0123102 |
| **-0.3** | 43 | -0.0124781 | **-1.7** | 68 | -0.0122268 |
| **-0.2** | 37 | -0.0129285 | **-1.8** | 69 | -0.0120996 |
| **-0.1** | 28 | -0.0125652 | **-1.9** | 69 | -0.0128525 |
| **0** | 1 | 1.00515e-015 | **-2** | 70 | -0.0126395 |
| **0.1** | 28 | 0.0125652 | **-2.1** | 71 | -0.0123966 |
| **0.2** | 37 | 0.0129285 | **-2.2** | 72 | -0.0121287 |
| **0.3** | 43 | 0.0124781 | **-2.3** | 72 | -0.0127507 |
| **0.4** | 47 | 0.0124304 | **-2.4** | 73 | -0.0128137 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA SIECZNYCH** | | | | | |
| Punkty startowe | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkty startowe | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0.5** | 1 | 0.5 |
| **-2.4, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5 0.4** | 1 | 0.4 |
| **-2.3, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5 0.3** | 1 | 0.3 |
| **-2.2, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0.2** | 1 | 0.2 |
| **-2.1, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0.1** | 1 | 0.1 |
| **-2, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0** | 1 | 2.77556e-017 |
| **-1.9, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.1** | 1 | -0.1 |
| **-1.8, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.2** | 1 | -0.2 |
| **-1.7, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.3** | 1 | -0.3 |
| **-1.6, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.4** | 1 | -0.4 |
| **-1.5, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.5** | 1 | -0.5 |
| **-1.4, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.6** | 1 | -0.6 |
| **-1.3, 0.5** | 1 | 0.500001 | **-2.5, -0.7** | 1 | -0.7 |
| **-1.2, 0.5** | 1 | 0.500004 | **-2.5, -0.8** | 1 | -0.08 |
| **-1.1, 0.5** | 1 | 0.500015 | **-2.5, -0.9** | 1 | -0.09 |
| **-1, 0.5** | 1 | 0.500057 | **-2.5, -1** | 1 | -0.999999 |
| **-0.9, 0.5** | 1 | 0.500258 | **-2.5, -1.1** | 1 | -1.1 |
| **-0.8, 0.5** | 65 | 0.018706 | **-2.5, -1.2** | 1 | -1.19998 |
| **-0.7, 0.5** | 65 | 0.0188123 | **-2.5, -1.3** | 1 | -1.29995 |
| **-0.6, 0.5** | 66 | 0.0184424 | **-2.5, -1.4** | 1 | -1.39987 |
| **-0.5, 0.5** | 2 | -0.5 | **-2.5, -1.5** | 1 | -1.49965 |
| **-0.4, 0.5** | 61 | -0.0187523 | **-2.5, -1.6** | 1 | -1.59914 |
| **-0.3, 0.5** | 1 | -0.300547 | **-2.5, -1.7** | 91 | -0.0182129 |
| **-0.2, 0.5** | 1 | -0.200002 | **-2.5, -1.8** | 92 | -0.0184231 |
| **-0.1, 0.5** | 1 | -0.1 | **-2.5, -1.9** | 93 | -0.0185625 |
| **0, 0.5** | 1 | 1.08247e-015 | **-2.5, -2** | 94 | -0.0186285 |
| **0.1, 0.5** | 1 | 0.1 | **-2.5, -2.1** | 95 | -0.0186168 |
| **0.2, 0.5** | 1 | 0.199999 | **-2.5, -2.2** | 96 | -0.0185214 |
| **0.3, 0.5** | 1 | 0.299863 | **-2.5, -2.3** | 97 | -0.0183368 |
| **0.4, 0.5** | 61 | 0.0181257 | **-2.5, -2.4** | 98 | -0.0180594 |

* Maksymalna liczba iteracji: 500;
* błąd epsilonowy(kryterium błędu), dokładność: 1e-7;
* kryterium stopu: moduł z różnicy wartości poszukiwanego punktu w dwóch kolejnych iteracjach;
* punkty startowe i końcowe zmienne (najpierw koniec jest stały potem początek)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA NEWTONA (stycznych)** | | | | | |
| Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5** | 198 | -1.23338e-006 | **0.5** | 205 | 1.28462e-006 |
| **-2.4** | 197 | -1.26847e-006 | **0.4** | 171 | 1.26938e-006 |
| **-2.3** | 197 | -1.20907e-006 | **0.3** | 167 | 1.27425e-006 |
| **-2.2** | 196 | -1.23856e-006 | **0.2** | 162 | 1.22594e-006 |
| **-2.1** | 195 | -1.26592e-006 | **0.1** | 152 | 1.28314e-006 |
| **-2** | 194 | -1.29072e-006 | **0** | 1 | 2.5773e-017 |
| **-1.9** | 194 | -1.21873e-006 | **-0.1** | 152 | -1.28314e-006 |
| **-1.8** | 193 | -1.23559e-006 | **-0.2** | 162 | -1.22594e-006 |
| **-1.7** | 192 | -1.24859e-006 | **-0.3** | 167 | -1.27425e-006 |
| **-1.6** | 191 | -1.2571e-006 | **-0.4** | 171 | -1.26938e-006 |
| **-1.5** | 190 | -1.26048e-006 | **-0.5** | 174 | -1.27791e-006 |
| **-1.4** | 189 | -1.258e-006 | **-0.6** | 177 | -1.23593e-006 |
| **-1.3** | 188 | -1.2489e-006 | **-0.7** | 179 | -1.25215e-006 |
| **-1.2** | 187 | -1.23233e-006 | **-0.8** | 181 | -1.24311e-006 |
| **-1.1** | 186 | -1.20738e-006 | **-0.9** | 183 | -1.21506e-006 |
| **-1** | 184 | -1.26328e-006 | **-1** | 184 | -1.26328e-006 |
| **-0.9** | 183 | -1.21506e-006 | **-1.1** | 186 | -1.20738e-006 |
| **-0.8** | 181 | -1.24311e-006 | **-1.2** | 187 | -1.23233e-006 |
| **-0.7** | 179 | -1.25215e-006 | **-1.3** | 188 | -1.2489e-006 |
| **-0.6** | 177 | -1.23593e-006 | **-1.4** | 189 | -1.258e-006 |
| **-0.5** | 174 | -1.27791e-006 | **-1.5** | 190 | -1.26048e-006 |
| **-0.4** | 171 | -1.26938e-006 | **-1.6** | 191 | -1.2571e-006 |
| **-0.3** | 167 | -1.27425e-006 | **-1.7** | 192 | -1.24859e-006 |
| **-0.2** | 162 | -1.22594e-006 | **-1.8** | 193 | -1.23559e-006 |
| **-0.1** | 152 | -1.28314e-006 | **-1.9** | 194 | -1.21873e-006 |
| **0** | 1 | 1.00515e-015 | **-2** | 194 | -1.29072e-006 |
| **0.1** | 152 | 1.28314e-006 | **-2.1** | 195 | -1.26592e-006 |
| **0.2** | 162 | 1.22594e-006 | **-2.2** | 196 | -1.23856e-006 |
| **0.3** | 167 | 1.27425e-006 | **-2.3** | 197 | -1.20907e-006 |
| **0.4** | 171 | 1.26938e-006 | **-2.4** | 197 | -1.26847e-006 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA SIECZNYCH** | | | | | |
| Punkty startowe | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkty startowe | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0.5** | 1 | 0.5 |
| **-2.4, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5 0.4** | 1 | 0.4 |
| **-2.3, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5 0.3** | 1 | 0.3 |
| **-2.2, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0.2** | 1 | 0.2 |
| **-2.1, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0.1** | 1 | 0.1 |
| **-2, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, 0** | 1 | 2.77556e-017 |
| **-1.9, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.1** | 1 | -0.1 |
| **-1.8, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.2** | 1 | -0.2 |
| **-1.7, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.3** | 1 | -0.3 |
| **-1.6, 0.5** | 1 | 0.5 | **-2.5, -0.4** | 1 | -0.4 |
| **-1.5, 0.5** | 245 | 1.80254e-006 | **-2.5, -0.5** | 1 | -0.5 |
| **-1.4, 0.5** | 245 | 1.80254e-006 | **-2.5, -0.6** | 1 | -0.6 |
| **-1.3, 0.5** | 245 | 1.80254e-006 | **-2.5, -0.7** | 1 | -0.7 |
| **-1.2, 0.5** | 245 | 1.80254e-006 | **-2.5, -0.8** | 1 | -0.8 |
| **-1.1, 0.5** | 245 | 1.80256e-006 | **-2.5, -0.9** | 257 | -1.80274e-006 |
| **-1, 0.5** | 245 | 1.80262e-006 | **-2.5, -1** | 259 | -1.82139e-006 |
| **-0.9, 0.5** | 245 | 1.8029e-006 | **-2.5, -1.1** | 261 | -1.82179e-006 |
| **-0.8, 0.5** | 245 | 1.8029e-006 | **-2.5, -1.2** | 263 | -1.80695e-006 |
| **-0.7, 0.5** | 245 | 1.8029e-006 | **-2.5, -1.3** | 264 | -1.87334e-006 |
| **-0.6, 0.5** | 245 | -0.5 | **-2.5, -1.4** | 266 | -1.83366e-006 |
| **-0.5, 0.5** | 2 | -1.80894e-006 | **-2.5, -1.5** | 267 | -1.87934e-006 |
| **-0.4, 0.5** | 241 | -1.80894e-006 | **-2.5, -1.6** | 269 | -1.82103e-006 |
| **-0.3, 0.5** | 234 | -1.88387e-006 | **-2.5, -1.7** | 270 | -1.84951e-006 |
| **-0.2, 0.5** | 226 | -1.88587e-006 | **-2.5, -1.8** | 271 | -1.87085e-006 |
| **-0.1, 0.5** | 1 | -0.1 | **-2.5, -1.9** | 272 | -1.88501e-006 |
| **0, 0.5** | 1 | 1.08247e-015 | **-2.5, -2** | 273 | -1.89172e-006 |
| **0.1, 0.5** | 1 | 0.1 | **-2.5, -2.1** | 274 | -1.89053e-006 |
| **0.2, 0.5** | 226 | 1.88586e-006 | **-2.5, -2.2** | 275 | -1.88084e-006 |
| **0.3, 0.5** | 234 | 1.88201e-006 | **-2.5, -2.3** | 276 | -1.86209e-006 |
| **0.4, 0.5** | 240 | 1.84066e-006 | **-2.5, -2.4** | 277 | -1.83393e-006 |

* Maksymalna liczba iteracji:500;
* błąd epsilonowy(kryterium błędu), dokładność: 1e-3;
* kryterium stopu: moduł wartości funkcji w iterowanym punkcie
* punkty startowe i końcowe zmienne (najpierw koniec jest stały potem początek)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA NEWTONA (stycznych)** | | | | | |
| Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5** | 22 | -0.557595 | **0.5** | 0 | 0.5 |
| **-2.4** | 21 | -0.57287 | **0.4** | 0 | 0.4 |
| **-2.3** | 20 | -0.587468 | **0.3** | 0 | 0.3 |
| **-2.2** | 20 | -0.559851 | **0.2** | 0 | 0.2 |
| **-2.1** | 19 | -0.571763 | **0.1** | 0 | 0.1 |
| **-2** | 18 | -0.58254 | **0** | 0 | 2.77556e-017 |
| **-1.9** | 17 | -0.591976 | **-0.1** | 0 | -0.1 |
| **-1.8** | 17 | -0.55856 | **-0.2** | 0 | -0.2 |
| **-1.7** | 16 | -0.564219 | **-0.3** | 0 | -0.3 |
| **-1.6** | 15 | -0.567924 | **-0.4** | 0 | -0.3 |
| **-1.5** | 14 | -0.569394 | **-0.5** | 0 | -0.5 |
| **-1.4** | 13 | -0.568318 | **-0.6** | 1 | -0.558704 |
| **-1.3** | 12 | -0.564357 | **-0.7** | 3 | -0.565772 |
| **-1.2** | 11 | -0.557137 | **-0.8** | 5 | -0.561833 |
| **-1.1** | 9 | -0.586675 | **-0.9** | 6 | -0.590262 |
| **-1** | 1 | -0.570614 | **-1** | 8 | -0.570614 |
| **-0.9** | 6 | -0.590262 | **-1.1** | 9 | -0.586675 |
| **-0.8** | 5 | -0.561833 | **-1.2** | 11 | -0.557137 |
| **-0.7** | 3 | -0.565772 | **-1.3** | 12 | -0.564357 |
| **-0.6** | 1 | -0.558704 | **-1.4** | 13 | -0.568318 |
| **-0.5** | 0 | -0.5 | **-1.5** | 14 | -0.569394 |
| **-0.4** | 0 | -0.4 | **-1.6** | 15 | -0.567924 |
| **-0.3** | 0 | -0.3 | **-1.7** | 16 | -0.564219 |
| **-0.2** | 0 | -0.2 | **-1.8** | 17 | -0.55856 |
| **-0.1** | 0 | -0.1 | **-1.9** | 17 | -0.591976 |
| **0** | 0 | 1.08247e-015 | **-2** | 18 | -0.58254 |
| **0.1** | 0 | 0.1 | **-2.1** | 19 | -0.571763 |
| **0.2** | 0 | 0.2 | **-2.2** | 20 | -0.559851 |
| **0.3** | 0 | 0.3 | **-2.3** | 20 | -0.587468 |
| **0.4** | 0 | 0.4 | **-2.4** | 21 | -0.57287 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA SIECZNYCH** | | | | | |
| Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5** | 1 | 0.5 | **0.5** | 0 | 0.5 |
| **-2.4** | 1 | 0.5 | **0.4** | 0 | 0.4 |
| **-2.3** | 1 | 0.5 | **0.3** | 0 | 0.3 |
| **-2.2** | 1 | 0.5 | **0.2** | 0 | 0.2 |
| **-2.1** | 1 | 0.5 | **0.1** | 0 | 0.1 |
| **-2** | 1 | 0.5 | **0** | 0 | 2.77556e-017 |
| **-1.9** | 1 | 0.5 | **-0.1** | 0 | -0.1 |
| **-1.8** | 1 | 0.5 | **-0.2** | 0 | -0.2 |
| **-1.7** | 1 | 0.5 | **-0.3** | 0 | -0.3 |
| **-1.6** | 1 | 0.5 | **-0.4** | 0 | -0.4 |
| **-1.5** | 1 | 0.5 | **-0.5** | 0 | -0.5 |
| **-1.4** | 1 | 0.5 | **-0.6** | 2 | -0.558704 |
| **-1.3** | 1 | 0.500001 | **-0.7** | 4 | -0.59392 |
| **-1.2** | 1 | 0.500004 | **-0.8** | 7 | -0.587 |
| **-1.1** | 1 | 0.500015 | **-0.9** | 10 | -0.570973 |
| **-1** | 1 | 0.500057 | **-1** | 12 | -0.576661 |
| **-0.9** | 1 | 0.500258 | **-1.1** | 14 | -0.57678 |
| **-0.8** | 1 | 0.501377 | **-1.2** | 16 | -0.572258 |
| **-0.7** | 1 | 0.509129 | **-1.3** | 17 | -0.592469 |
| **-0.6** | 1 | 0.584817 | **-1.4** | 19 | -0.580396 |
| **-0.5** | 0 | -0.5 | **-1.5** | 20 | -0.594292 |
| **-0.4** | 0 | -0.4 | **-1.6** | 22 | -0.576549 |
| **-0.3** | 0 | -0.3 | **-1.7** | 23 | -0.585223 |
| **-0.2** | 0 | -0.2 | **-1.8** | 14 | -0.591714 |
| **-0.1** | 0 | -0.1 | **-1.9** | 25 | -0.596015 |
| **0** | 0 | 1.08247e-015 | **-2** | 27 | -0.569222 |
| **0.1** | 0 | 0.1 | **-2.1** | 28 | -0.568877 |
| **0.2** | 0 | 0.2 | **-2.2** | 28 | -0.594748 |
| **0.3** | 0 | 0.3 | **-2.3** | 29 | -0.589049 |
| **0.4** | 0 | 0.4 | **-2.4** | 30 | -0.580478 |

* Maksymalna liczba iteracji: 500;
* błąd epsilonowy(kryterium błędu), dokładność: 1e-7;
* kryterium stopu: moduł wartości funkcji w iterowanym punkcie
* punkty startowe i końcowe zmienne (najpierw koniec jest stały potem początek)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA NEWTONA (stycznych)** | | | | | |
| Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5** | 198 | -1.23338e-006 | **0.5** | 205 | 1.28462e-006 |
| **-2.4** | 197 | -1.26847e-006 | **0.4** | 171 | 1.26938e-006 |
| **-2.3** | 197 | -1.20907e-006 | **0.3** | 167 | 1.27425e-006 |
| **-2.2** | 196 | -1.23856e-006 | **0.2** | 162 | 1.22594e-006 |
| **-2.1** | 195 | -1.26592e-006 | **0.1** | 152 | 1.28314e-006 |
| **-2** | 1 | -1.29072e-006 | **0** | 1 | 2.5773e-017 |
| **-1.9** | 1 | -1.21873e-006 | **-0.1** | 152 | -1.28314e-006 |
| **-1.8** | 1 | -1.23559e-006 | **-0.2** | 162 | -1.22594e-006 |
| **-1.7** | 1 | -1.24859e-006 | **-0.3** | 167 | -1.27425e-006 |
| **-1.6** | 1 | -1.2571e-006 | **-0.4** | 171 | -1.26938e-006 |
| **-1.5** | 1 | -1.26048e-006 | **-0.5** | 174 | -1.27791e-006 |
| **-1.4** | 1 | -1.258e-006 | **-0.6** | 177 | -1.23593e-006 |
| **-1.3** | 1 | 0.500001 | **-0.7** | 179 | -1.25215e-006 |
| **-1.2** | 187 | -1.23233e-006 | **-0.8** | 181 | -1.24311e-006 |
| **-1.1** | 186 | -1.20738e-006 | **-0.9** | 183 | -1.21506e-006 |
| **-1** | 184 | -1.26328e-006 | **-1** | 184 | -1.26328e-006 |
| **-0.9** | 183 | -1.21506e-006 | **-1.1** | 186 | -1.20738e-006 |
| **-0.8** | 181 | -1.24311e-006 | **-1.2** | 187 | -1.23233e-006 |
| **-0.7** | 179 | -1.25215e-006 | **-1.3** | 188 | -1.2489e-006 |
| **-0.6** | 177 | -1.23593e-006 | **-1.4** | 189 | -1.258e-006 |
| **-0.5** | 174 | -1.27791e-006 | **-1.5** | 190 | -1.26048e-006 |
| **-0.4** | 171 | -1.26938e-006 | **-1.6** | 191 | -1.2571e-006 |
| **-0.3** | 167 | -1.27425e-006 | **-1.7** | 192 | -1.24859e-006 |
| **-0.2** | 162 | -1.22594e-006 | **-1.8** | 193 | -1.23559e-006 |
| **-0.1** | 152 | -1.28314e-006 | **-1.9** | 194 | -1.21873e-006 |
| **0** | 1 | 1.00515e-015 | **-2** | 194 | -1.29072e-006 |
| **0.1** | 152 | 1.28314e-006 | **-2.1** | 195 | -1.26592e-006 |
| **0.2** | 162 | 1.22594e-006 | **-2.2** | 196 | -1.23856e-006 |
| **0.3** | 167 | 1.27425e-006 | **-2.3** | 197 | -1.20907e-006 |
| **0.4** | 171 | 1.26938e-006 | **-2.4** | 197 | -1.26847e-006 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **METODA NEWTONA (stycznych)** | | | | | |
| Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek | Punkt startowy | Liczba kroków | Pierwiastek |
| **-2.5** | 198 | -1.23338e-006 | **0.5** | 205 | 1.28462e-006 |
| **-2.4** | 197 | -1.26847e-006 | **0.4** | 171 | 1.26938e-006 |
| **-2.3** | 197 | -1.20907e-006 | **0.3** | 167 | 1.27425e-006 |
| **-2.2** | 196 | -1.23856e-006 | **0.2** | 162 | 1.22594e-006 |
| **-2.1** | 195 | -1.26592e-006 | **0.1** | 152 | 1.28314e-006 |
| **-2** | 194 | -1.29072e-006 | **0** | 1 | 2.5773e-017 |
| **-1.9** | 194 | -1.21873e-006 | **-0.1** | 152 | -1.28314e-006 |
| **-1.8** | 193 | -1.23559e-006 | **-0.2** | 162 | -1.22594e-006 |
| **-1.7** | 192 | -1.24859e-006 | **-0.3** | 167 | -1.27425e-006 |
| **-1.6** | 191 | -1.2571e-006 | **-0.4** | 171 | -1.26938e-006 |
| **-1.5** | 190 | -1.26048e-006 | **-0.5** | 174 | -1.27791e-006 |
| **-1.4** | 189 | -1.258e-006 | **-0.6** | 177 | -1.23593e-006 |
| **-1.3** | 188 | -1.2489e-006 | **-0.7** | 179 | -1.25215e-006 |
| **-1.2** | 187 | -1.23233e-006 | **-0.8** | 181 | -1.24311e-006 |
| **-1.1** | 186 | -1.20738e-006 | **-0.9** | 183 | -1.21506e-006 |
| **-1** | 184 | -1.26328e-006 | **-1** | 184 | -1.26328e-006 |
| **-0.9** | 183 | -1.21506e-006 | **-1.1** | 186 | -1.20738e-006 |
| **-0.8** | 181 | -1.24311e-006 | **-1.2** | 187 | -1.23233e-006 |
| **-0.7** | 179 | -1.25215e-006 | **-1.3** | 188 | -1.2489e-006 |
| **-0.6** | 177 | -1.23593e-006 | **-1.4** | 189 | -1.258e-006 |
| **-0.5** | 174 | -1.27791e-006 | **-1.5** | 190 | -1.26048e-006 |
| **-0.4** | 171 | -1.26938e-006 | **-1.6** | 191 | -1.2571e-006 |
| **-0.3** | 167 | -1.27425e-006 | **-1.7** | 192 | -1.24859e-006 |
| **-0.2** | 162 | -1.22594e-006 | **-1.8** | 193 | -1.23559e-006 |
| **-0.1** | 152 | -1.28314e-006 | **-1.9** | 194 | -1.21873e-006 |
| **0** | 1 | 1.00515e-015 | **-2** | 194 | -1.29072e-006 |
| **0.1** | 152 | 1.28314e-006 | **-2.1** | 195 | -1.26592e-006 |
| **0.2** | 162 | 1.22594e-006 | **-2.2** | 196 | -1.23856e-006 |
| **0.3** | 167 | 1.27425e-006 | **-2.3** | 197 | -1.20907e-006 |
| **0.4** | 171 | 1.26938e-006 | **-2.4** | 197 | -1.26847e-006 |

**WNIOSKI:**

**3.2.1. Dotyczące tabel 1 -4.**

Pierwszy eksperyment został przeprowadzony dla małej dokładności epsilonowej kryterium stopu równej 0.001. Pomimo tego, wszystkie wyniki otrzymane przy pomocy metody Newtona są zadowalające i mieszczą się w ustalonej granicy poprawności (różnica między wartością otrzymaną a wartością wzorową jest większa niż 0.01). Zauważmy, że dla początku =0 w metodzie Newtona i przedziału zaczynającego się zerem dla metody siecznych wynik jest bardzo zadowalający .Zarówno dla zmiennego początku, jak i końca zadanego przedziału, algorytm generuje wyniki, które są zbliżone do poprawnego wyniku ale nie można uznać za poprawne. Dla wartości dodatnich wartość miejsc zerowych zmienia się na wartości dodatnie jest to normalne gdyż dotychczas operowaliśmy wartościach początkowych ujemnych (wyniki rozłożone sa symetrycznie wzgl. osi OX).

Działanie metody siecznych nie jest tez tak idealne. Jest nawet mniej dokładne niż metody Newtona. Analizując otrzymane rezultaty wyodrębniono dwa typy wyników: wartości końcowe algorytmu znajdują się bardzo blisko krańców przedziałów, w których poszukiwano pierwiastka lub zadowalająco przybliżają wartość poszukiwanego zera.

Problem błędnych wyników generowanych przez metodę siecznych ma swoje źródło w kształcie wykresu funkcji na przedziale *[-2.5, 0.5]* oraz zastosowanej normie. Zastosowana norma (moduł różnicy wartości punktu *x* w kolejnych iteracjach) połączona z dopuszczalnością dużego błędu (rzędu 1e-3) powoduje zatem zakończenie działania algorytmu z dala od poprawnego rozwiązania.

Jak łatwo zauważyć w *drugiej tabeli.*, dla metody siecznych przy rosnącym początku przedziału, pierwsze dziewięć pomiarów kończy się po jednej iteracji algorytmu. Obliczony pierwiastek jest zatem wartością poszukiwanego punktu *x* po pierwszej iteracji. Istotnie, różnica pomiędzy początkiem przedziału (punktem startowym) a wyznaczoną wartością jest w każdym z tych przypadków mniejsza od 0.1.

Analizując wykres funkcji można odnaleźć również wytłumaczenie poprawnej zbieżności algorytmu w pozostałych przedziałach. Dla *x <-2.5*  funkcja przybiera ostrzejszy kształt (gwałtowny wzrost wartości), dzięki czemu metoda siecznych generuje większe różnice wartości punktu *x* między kolejnymi iteracjami. W wyniku tego następuje szybka – i przede wszystkim poprawna – zbieżność do rozwiązania.

Warto zauważyć, iż dla metody siecznych w tym przypadku bardziej opłacalne jest zmniejszanie wartości końca przedziału, niż zwiększanie wartości jego początku. Generowane są wówczas znacznie mniejsze błędy.

Prostą i intuicyjną metodą usprawnienia działania błędnej metody siecznych jest „zwężenie” paska epsilonowego, tak aby nie zawierał on nowo wygenerowanych punktów dopóty, dopóki ich wartości nie będą dostatecznie blisko poszukiwanego zera. W praktyce oznacza to zmniejszenie tolerancji wartości kryterium stopu. Istotnie, dla wartości *ε = 1e-7* problem zbyt wczesnego zatrzymania algorytmu praktycznie znika. Gdy wybierzemy mniej dokładne epsilon to będziemy mieć generowane wyniki niezgodne z naszymi oczekiwaniami – mniejsze błędy.

Analizując drugą z przedstawionych w tej sekcji tabel warto zwrócić uwagę na liczbę iteracji prowadzących do rozwiązania, szczególnie przy zastosowaniu metody Newtona. Należy odnotować, iż liczba iteracji zmniejsza się tym bardziej, im bliżej poszukiwanego zera znajduje się punkt początkowy.

**3.2.2. Dotyczące tabel 5-8.**

Podobnie jak poprzednio, w tej części zadania pierwszego wykonano dwa eksperymenty polegające na rozwiązaniu zadanego równania nieliniowego metodą Newtona oraz metodą siecznych (ze zmiennym początkiem oraz końcem przedziału). Jako warunek stopu tym razem zastosowano moduł wartości funkcji w iterowanym punkcie, który nie powinien przekroczyć zadanej dokładności równej – jak poprzednio – *1e-3* oraz *1e-7*.

Analizując *piątą i szóstą tabele* można zauważyć, iż wszystkie otrzymane wyniki są błędne – zarówno dla metody Newtona, jak i dla metody siecznych. Przyczyną tego zjawiska nie jest błąd w implementacji algorytmu. Źródłem niepoprawnych wyników jest – podobnie jak opisywano poprzednio – kształt zadanej funkcji połączony z zastosowanym kryterium stopu oraz niewymagającą wartością normy.

Przy pomocy pakietu *Wolfram Alpha* wyznaczono również, jakie argumenty mieszczą się w „pasku epsilonowym” dla: *y = 0, ε = 1e-3:*

*-0.01 ≤ x ≤ 0.01.*

Istotnie, wartości w tym przedziale argumentów *x* są na moduł większe od 0.01. Zatem dla dowolnego argumentu *x* należącego do tego przedziału, algorytm zakończy swe działanie ze względu na kryterium stopu: |*f(x)| < 0.001*.

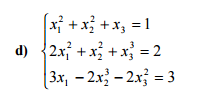
Analizując *piąta tabele.* należy zauważyć, iż wszystkie wartości obliczonych zer należą do zadanego wyżej przedziału. Oznacza to, że zarówno metoda Newtona, jak i metoda siecznych kończą działanie przedwcześnie ze względu na niepoprawnie zastosowane kryterium stopu. Błąd wartości funkcji równy *1e-3* jest zbyt mało restrykcyjny dla tak zadanej funkcji, której przebieg jest bardzo bliski osi OX i niemal do niej równoległy na przedziale *[-2.5, 0.5]*. Tak duża tolerancja kryterium stopu wprowadza więc nieakceptowalne błędy rozwiązania.

Podobnie jak w poprzednim eksperymencie, prostym sposobem rozwiązania przedstawionego problemu jest „zwężenie” przedziału dopuszczalnych rozwiązań, czyli zmniejszenie wartości tolerancji *ε*. Istotnie, dla *ε = 1e-7* większość wyników nie spełnia określonych założenia dotyczące wyniku.

Wartości *tabeli siódmej* warto porównać również z danymi zamieszczonymi w *tabeli trzeciej, wartości tabeli ósmej z wartościami tabeli czwartej.* Dla tego samego zestawu danych oraz restrykcyjnego kryterium epsilonowego (*ε = 1e-7*) zastosowano dwa różne kryteria stopu. Jak łatwo zauważyć, pierwsze z nich (moduł różnicy wartości iterowanego punktu w dwóch kolejnych iteracjach) pozwala na uzyskanie dokładniejszych oraz bliższych poprawnemu rozwiązaniu wartości końcowych. Przy tym, ilość iteracji algorytmów przy obu kryteriach stopu różni się bardzo nieznacznie**. Zatem, dla funkcji zadanej jak w ćwiczeniu, bardziej opłacalne jest stosowanie pierwszego kryterium stopu- modułu z różnicy pomiędzy dwiema kolejnymi iteracjami.**

**3.3. Zadanie drugie.**

Omawiane polecenie polegało na rozwiązaniu zadanego układu równań nieliniowych wykorzystując metodę Newtona.



Przy pomocy pakietu *Wolfram Alpha* wyznaczono cztery rozwiązania rzeczywiste zadanego układu:

*(x, y, z) = (1, 0, 0)*

Omówienie algorytmu rozwiązywania zadania.

Dany jest układ równań *F(X)*, gdzie:

*F(X) = {fi (x1, …, xN): i = 1, …, N},*

*X = (x1, …, xN).*

Poszukiwanym rozwiązaniem tego układu jest wektor *X*, taki że: *F(X) = 0*. Zgodnie z założeniami metody iteracyjnej, poszukujemy takiego wektora przesunięcia *H = (h1, …, hN)* (tzw. „poprawki”), że wektor *X+H* przybliża zero lepiej, niż wektor *X*. Korzystając ze wzoru Taylora otrzymujemy:

*F(X + H) ≈ F(X) + F'(X)H = 0,*

gdzie: *F'* jest macierzą pochodnych (Jakobianem) funkcji *fi, i = 1, …, N*.

Wektor poprawki obliczany jest metodą eliminacji Gaussa, wykorzystując wzór:

*F'(X(k))H(k) = -F(X(k)),*

gdzie: *k* jest numerem iteracji algorytmu. Wartości macierzy *F'* oraz wektora *F* są oczywiście znane przy zadanej wartości wektora X(k).

Ostatecznie, wartość wektora w kolejnej iteracji wyznaczana jest jako:

*X(k+1) = X(k) + H(k).*

W ramach zadania drugiego wykonano program rozwiązujący zadany układ równań metodą Newtona. Badano, dla jakich wektorów początkowych algorytm doprowadza do danego rozwiązania, a dla jakich jest niezbieżny. Wyznaczono również liczbę kroków prowadzących do zakończenia algorytmu oraz posługiwano się różnymi kryteriami stopu. Wyniki zebrano poniżej.

* dokładność: 1e-7;
* w obu przypadkach zastosowano normę maksimum dla wektora w kryterium stopu

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **WEKTOR POCZĄTKOWY** | **Norma różnicy wartości iterowanego wektora X w dwóch kolejnych iteracjach** | | | **Norma wektora rozwiązań układu dla iterowanego wektora X** | | |
| **ROZWIĄZANIE** | **Rozwiązanie rzeczywiste** | LICZBA KROKÓW | **ROZWIĄZANIE** | **Rozwiązanie rzeczywiste** | LICZBA KROKÓW |
| 1000, 1000, 1000 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 130 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 129 |
| 1000, 100, 1000 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 98 | 1,-1, -1 | NIEZBIEŻNY | 98 |
| 1000, 1, 1000 | 1, -1, -1 | NIEZBIEZNY | 10 000 | 1,-1, -1 | NIEZBIEŻNY | 157 |
| 1000, -1, 1000 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 55 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 54 |
| 1000, -100, 1000 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 188 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 187 |
| 1000, -1000, 1000 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 388 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 380 |
| 1, 0, 1 | 1, 7.6955e-008, -1.9465e-020 | 1, 0, 0 | 29 | 1, 0.00031494, -1.6577e-010 | 1, 0, 0 | 17 |
| 1, 0, -1 | 1, -1, -1, | NIEZBIEZNY | 7 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 6 |
| -1, 0, 1 | 1, -1, -1 | NIEZBIEZNY | 36 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 35 |
| -1, 0, -1 | 1, -1, -1 | NIEZBIEZNY | 151 | 1,-1, -1 | NIEZBIEZNY | 1050 |
| 0, 0, 0 | 1, -1, -1 | NIEZBIEZNY | 85 | 1,-1, -1 | 1,-1, -1 | 84 |
| 1, 0, 0 | 1, 0, 0 | 1, 0, 0 | 1 | 1, 0, 0 | 1, 0, 0 | 1 |
| -1, 0, 0 | 1, 0, 0 | 1, 0, 0 | 1 | 1, -1, -1 | NIEZBIEZNY | 46 |
| 0, 0, 1 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 1, -1, -1, | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 145 |
| 0, 0, -1 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 150 | 1, -1, -1 | NIEZBIEŻNY | 150 |

**WNIOSKI:**

Pierwsze osiem pomiarów posłużyło wyznaczeniu kryterium zbieżności rozwiązania danego układu. Okazuje się dla dużych wartości w wektorze początkowym metoda jest niezbieżna. Tylko dla niektórych kombinacji wektorów początkowych złożonych z 0 i 1 metoda ta jest zbieżna

Ostatnie pomiary wykonano dla wartości specjalnych zmiennych *x* oraz *y*, to jest takich, w których co najmniej jedna z nich ma wartość 0. Okazało się, że dla *x = 0* metoda Newtona jest niezbieżna. Dla x=-1 lub x=1 i y=z=0 lub dla x=z=1 i y=0 metoda jest zbieżna do rozwiązania 1, 0, 0.

Zastosowana norma wektora w warunku stopu nie ma wpływu na zbieżność algorytmu oraz zbieżność do określonego rozwiązania. Zmienia ona wyłącznie liczbę iteracji potrzebną do osiągnięcia rozwiązania zgodnego z zadaną dokładnością. Na ogół metoda Newtona z zaimplementowaną drugą wersją warunku stopu (norma wektora rozwiązań układu dla iterowanego wektora ***X***) wykonuje nieznacznie mniej operacji niż wersja z pierwszą wersją warunku stopu. Jednakże otrzymywane w ten sposób rozwiązania nie są aż tak dokładne, jak dla normy różnicy wartości iterowanego wektora **X** w dwóch kolejnych iteracjach.