

**SPRAWOZDANIE**

**LABORATORIUM NR 8**

**TEMAT:**

**Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych**

**PROWADZĄCY:**

Dr inż. Barbara Głut

**AUTOR:**

Małgorzata Olszewska

1. **Zagadnienia wstępne, wprowadzenie**

**Równanie różniczkowe cząstkowe** – [równanie](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie), w którym występuje [niewiadoma](https://pl.wikipedia.org/wiki/Niewiadoma) [funkcja](https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja) dwóch lub więcej [zmiennych](https://pl.wikipedia.org/wiki/Zmienna_(matematyka)) oraz niektóre z jej [pochodnych cząstkowych](https://pl.wikipedia.org/wiki/Pochodna_cz%C4%85stkowa)

Typowe równanie różniczkowe cząstkowe możemy zapisać w następujący sposób. Niech k \geqslant 1 będzie liczbą całkowitą, a U\, otwartym podzbiorem \mathbb R^n. Równanie postaci:

F\left(D^ku(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x\right) = 0, gdzie x \in U

nazywa się **równaniem różniczkowym cząstkowym k-tego rzędu**.

Funkcja F\colon \mathbb R^{n^k} \times \mathbb R^{n^{k-1}} \times \ldots \times \mathbb R^n \times \mathbb R \times U \to \mathbb R jest dana, natomiast u\colon U \to \mathbb R jest niewiadomą.

D^k u(x) := \left\{D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\colon |\alpha| = k\right\},

gdzie \alpha\, jest n-wymiarowym [wielowskaźnikiem](https://pl.wikipedia.org/wiki/Notacja_wielowska%C5%BAnikowa" \o "Notacja wielowskaźnikowa).

**Liniowe równania różniczkowe cząstkowe:**

* [Równanie Laplace'a](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_r%C3%B3%C5%BCniczkowe_Laplace%E2%80%99a):

\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0

* Liniowe [równanie transportu](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_transportu):

u_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} = 0

* [Równanie przewodnictwa cieplnego](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_przewodnictwa_cieplnego) (lub dyfuzji):

u_t - \Delta u = 0\,

* [Równanie Schrödingera](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_Schr%C3%B6dingera):

i u_t + \Delta u = 0\,

* [Równanie falowe](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_falowe):

u_{tt} - \Delta u = 0\,

**Nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe:**

* Nieliniowe [równanie Poissona](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_r%C3%B3%C5%BCniczkowe_Poissona):

-\Delta u = f(u)\,

* Równanie [Hamiltona](https://pl.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton)-Jacobiego:

u_t + H(Du,x) = 0\,

* Skalarne równanie reakcji-dyfuzji:

u_t - \Delta u = f(u)\,

**Metoda różnic skończonych-** jest jedną z najczęściej stosowanych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. W metodzie różnic poszukuje się rozwiązania poprzez zastąpienie równań różniczkowych równaniami różnicowymi, rozwiązanie których daje przybliżone wartości poszukiwanej funkcji w punktach zwanych węzłami. Rozwiązanie przeprowadza się na siatce różnicowej, dzięki temu zagadnienie brzegowe lub brzegowo-początkowe sprowadza się do układu równań algebraicznych

**Metoda jawna :**

Schemat jawny jest najprostszym sposobem zapisu równania w postaci różnicowej:

,

z błędem obcięcia pierwszego rzędu . Schemat ten jest stabilny warunkowo, tzn. jeśli spełniony jest warunek:



gdzie:



### W metodzie tej nie można stosować aproksymacji pochodnej względem czasu za pomocą różnicy centralnej (metoda Richardsona), bowiem ten schemat jest bezwarunkowo niestabilny dla wszystkich .

**Metoda niejawna:**

W prostym sformułowaniu metody niejawnej prawa strona równania  zależeć będzie od wartości a priori nieznanych w kroku czasowym :

.

Schemat ten prowadzi do utworzenia układu równań algebraicznych względem nieznanych wartości funkcji w węzłach siatki na danym poziomie czasowym . Metoda ta jest bezwarunkowo stabilna z błędem obcięcia pierwszego rzędu . Macierz układu jest trójdiagonalną i stąd może być rozwiązywana za pomocą szybkich algorytmów, np. metodą rozkładu na macierz trójkątną górną i dolną lub metodą iteracyjną, np. Gaussa-Seidela . Zaletą tej metody jest możliwość stosowania stosunkowo dużych kroków czasowych, bez utraty zbieżności rozwiązania.

1. **Cel ćwiczenia**

Celem ćwiczenia było zapoznanie się metodą elementów skończonych dla zagadnień parabolicznych, z schematami: jawnym i niejawnym przybliżania pochodnych oraz rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych przy użyciu metody różnic skończonych dla zadanego zagadnienia początkowego oraz brzegowego. Badano postacie uzyskanych rozwiązań, tempo ich zbieżności do rozwiązania dokładnego oraz dokładność przybliżenia w zależności od liczby kroków na siatce OX oraz OT .

1. **Przebieg ćwiczenia**

W ramach zajęć laboratoryjnych wykonano badania dla równania różniczkowego z zagadnieniem początkowym i brzegowym z wykorzystaniem metody różnic skończonych oraz schematu jawnego przybliżania pochodnej po czasie. W drugiej części ćwiczenia badano właściwości rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego z zagadnieniem początkowym i brzegowym uzyskanego przy pomocy metody różnic skończonych i schematu niejawnego. W obu przypadkach przedmiotem eksperymentu była zarówno postać otrzymanego rozwiązania, jak i dokładność, z jaką przybliża ono rozwiązanie dokładne.

1. **Opracowanie wyników**
   1. **Informacje dotyczące parametrów komputera oraz języka w którym zostały wykonane programy**

Pomiary wykonywane były na komputerze przenośnym marki ASUS. Z wbudowanym systemem Windows 10 64-bit, z procesorem Intel Core i7-4500U 1.80 GHz TURBO 2.4 GHz, o pamięci 8 GB DDR3. Do pisania programów wykorzystano program DeV C++ natomiast do kompilacji użyto kompilatora TDM-GCC 4.9.2.

Programy zostały wykonane w języku C++.Do ilustracji wyników obliczeń użyto programu *gnuplot*.

* 1. **Opis eksperymentu**

W pierwszej części eksperymentu badano następujące zagadnienie:



w następującym przedziale:



dla warunków brzegowych:



oraz:



Powyższe zagadnienie zostało rozwiązane metodą różnic skończonych przy użyciu schematu jawnego (przybliżenie pierwszej pochodnej ilorazem różnicowym przednim).

Poniżej zaprezentowano zestawienie wartości współczynnika wyznaczającego stabilność rozwiązywanego układu dla metody jawnej:



gdzie: *K* – krok na osi temperatury (OT), *H* – krok na osi położenia (OX)

* 1. **Opracowanie wyników dla metody jawnej**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Liczba oczek siatki na osi OX** | **Liczba oczek siatki na osi OT** | ***Współczynnik(φ)*** |
| **50** | **800** | 0.438438 |
| **50** | **710** | 0.494093 |
| **50** | **700** | 0.501162 |
| **50** | **600** | 0.584828 |
| **50** | **500** | 0.702028 |
| **50** | **400** | 0.877975 |
| **50** | **300** | 1.17161 |
| **50** | **250** | 1.40688 |
| **50** | **200** | 1.76036 |
| **50** | **150** | 2.35109 |
| **50** | **100** | 3.53850 |
| **50** | **50** | 7.14922 |
| **50** | **10** | 38.9235 |

*Tabela 1. Wartości współczynnika stabilności przy zmniejszającej się liczbie oczek siatki na osi OT dla metody jawnej.*

Metoda ta dawała niepoprawne wyniki już dla 710 (i mniej) oczek siatki na osi OT – odpowiada to wartości *φ* w przybliżeniu równej ½, co pokrywa się z założeniami teoretycznymi mówiącymi, iż metoda jawna jest zbieżna dla *φ < ½*.

W przypadku metody jawnej bardzo łatwo zauważyć, iż nieodpowiedni dobór kroków na obu osiach wiąże się z poważnymi błędami numerycznymi. Dla 50 oczek siatki na osi OX oraz 200 oczek siatki na osi OT otrzymano, iż największe wartości funkcji na osi pionowej są rzędu 10150. Dla 500 oczek siatki na osi OT wartość ta była rzędu 10123, zaś dla 600 węzłów – 1070. Przy 700 oczkach siatki na osi OT wartość maksymalna była bliska 2, co jest wartością prawdziwą. Jak widać, odpowiednie skorygowanie siatki prowadzące do zmniejszenia wartości współczynnika *φ* pozwala na uzyskanie coraz lepszych wyników, zbliżonych do rozwiązania optymalnego.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Liczba oczek siatki na osi OX** | **Liczba oczek siatki na osi OT** | ***Współczynnik(φ)*** |
| **100** | **700** | 2.04577 |
| **90** | **700** | 1.65335 |
| **80** | **700** | 1.30269 |
| **70** | **700** | 0.993765 |
| **60** | **700** | 0.72659 |
| **50** | **700** | 0.501162 |
| **40** | **700** | 0.317479 |
| **30** | **700** | 0.175542 |
| **20** | **700** | 0.0753517 |
| **10** | **700** | 0.0169072 |

*Tabela 2. Wartości współczynnika stabilności przy zmniejszającej się liczbie oczek siatki na osi OX dla metody jawnej .*

Analizując tabelę 2 widzimy, że wraz z wzrostem liczby oczek na siatce OX przy stałej ilości oczek na siatce OT wartość współczynnika rośnie. Pierwszą wartością dla której *φ* <0.5 osiągana zostaje dla 50 oczek na siatce OX oraz 710 na siatce OT. Podobnie jak w poprzednio(dla stałej liczby oczek na siatce OX) zaobserwowano, iż wzrost różnicy pomiędzy ilością oczek siatki na obu osiach skutkuje monotonicznym spadkiem wartości współczynnika *φ*, a zatem również zwiększeniem stabilności układu jawnego.

**Badając wartości powyższego współczynnika obserwowano wykresy generowane przy pomocy algorytmu w wersji jawnej.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Zmiana ilości oczek na siatce OX przy stałej liczbie oczek na siatce OT** | **Zmiana ilości oczek na siatce OT przy stałej liczbie oczek na siatce OX** |
| *Rysunek 1. Rozwiązanie graficzne dla 10 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 5. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 150 na osi OT.* |
| *Rysunek 2. Rozwiązanie graficzne dla 25 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 6. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 350 na osi OT.* |
| *Rysunek 3. Rozwiązanie graficzne dla 40 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 7. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 600 na osi OT.* |
| *Rysunek 4. Rozwiązanie graficzne dla 60 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 8. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* |

* 1. **Opracowanie wyników dla metody niejawnej**

W tym eksperymencie badano rozwiązanie tego samego równania z tymi samymi warunkami początkowymi i brzegowymi metodą różnic skończonych przy użyciu schematu niejawnego.

Konieczne było utworzenie dodatkowej macierzy oraz kolumny wyrazów wolnych, rozwiązanie układu równań metodą Thomasa.

Najpierw sprawdzono czy zbieżność tej metody jest zależna od wartości współczynnika *φ,* w tym celu podobnie jak w pierwszym eksperymencie obliczono wartości współczynnika *dla* stałej lub zmiennej liczby oczek na siatce OX oraz OT.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Liczba oczek siatki na osi OX** | **Liczba oczek siatki na osi OT** | **Współczynnik(φ)** |
| **50** | **800** | 0.438438 |
| **50** | **710** | 0.494093 |
| **50** | **700** | 0.501162 |
| **50** | **600** | 0.584828 |
| **50** | **500** | 0.702028 |
| **50** | **400** | 0.877975 |
| **50** | **300** | 1.17161 |
| **50** | **250** | 1.40688 |
| **50** | **200** | 1.76036 |
| **50** | **150** | 2.35109 |
| **50** | **100** | 3.53850 |
| **50** | **50** | 7.14922 |
| **50** | **10** | 38.9235 |

*Tabela 3. Wartości współczynnika stabilności przy zmniejszającej się liczbie oczek siatki na osi OT dla metody niejawnej.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Liczba oczek siatki na osi OX** | **Liczba oczek siatki na osi OT** | **Współczynnik(φ)** |
| **100** | **700** | 2.04577 |
| **90** | **700** | 1.65335 |
| **80** | **700** | 1.30269 |
| **70** | **700** | 0.993765 |
| **60** | **700** | 0.72659 |
| **50** | **700** | 0.501162 |
| **40** | **700** | 0.317479 |
| **30** | **700** | 0.175542 |
| **20** | **700** | 0.0753517 |
| **10** | **700** | 0.0169072 |

*Tabela 4. Wartości współczynnika stabilności przy zmniejszającej się liczbie oczek siatki na osi OX dla metody niejawnej .*

**Wykresy generowane przy pomocy algorytmu w wersji niejawnej dla wybranych przypadków:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Zmiana ilości oczek na siatce OX przy stałej liczbie oczek na siatce OT** | **Zmiana ilości oczek na siatce OT przy stałej liczbie oczek na siatce OX** |
| *Rysunek 1. Rozwiązanie graficzne dla 10 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 5. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 150 na osi OT.* |
| *Rysunek 2. Rozwiązanie graficzne dla 25 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 6. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 350 na osi OT.* |
| *Rysunek 3. Rozwiązanie graficzne dla 40 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 7. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 600 na osi OT.* |
| *Rysunek 4. Rozwiązanie graficzne dla 60 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* | *Rysunek 8. Rozwiązanie graficzne dla 50 przedziałów na osi OX oraz 710 na osi OT.* |

Analizując wykresy wraz z tabelami 3 oraz 4 stwierdzono, iż metoda niejawna jest zbieżna bezwarunkowo (niezależnie od wartości współczynnika *φ*). Ponadto wartości współczynników dla odpowiadającej liczby oczek na siatce OX oraz siatce OT dla obu metod są takie same.

**4.5 Obliczanie maksimum modułów różnicy wartości otrzymanych w węzłach siatki dyskretyzacji dla metod: jawnej oraz niejawnej**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Liczba oczek siatki na osi OX** | **Liczba oczek siatki na osi OT** | **Maksymalny moduł różnicy wartości** |
| **50** | **700** | 6.28134e+06 |
| **45** | **700** | 0.0375773 |
| **40** | **700** | 0.0375344 |
| **35** | **700** | 0.0374007 |
| **30** | **700** | 0.0370900 |
| **25** | **700** | 0.0369836 |
| **20** | **700** | 0.0348262 |
| **15** | **700** | 0.0354893 |
| **10** | **700** | 0.0314982 |

*Tabela 5. Obliczone* maksima modułów różnicy wartości otrzymanych w węzłach siatki dyskretyzacji dla metod: jawnej oraz niejawnej *przy stałej liczbie oczek na siatce OT.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Liczba oczek siatki na osi OX** | **Liczba oczek siatki na osi OT** | **Maksymalny moduł różnicy wartości** |
| **50** | **200** | 1.24137e+14 |
| **50** | **250** | 0.0525652 |
| **50** | **300** | 0.0437967 |
| **50** | **350** | 0.0375344 |
| **50** | **400** | 0.0328415 |
| **50** | **500** | 0.0291930 |
| **50** | **600** | 0.0262733 |
| **50** | **700** | 0.0238841 |
| **50** | **800** | 0.0218929 |

*Tabela 6. Obliczone* maksima modułów różnicy wartości otrzymanych w węzłach siatki dyskretyzacji dla metod: jawnej oraz niejawnej *przy stałej liczbie oczek na siatce OX.*

Na podstawie powyższych informacji stwierdzamy, że obie metody (jawna i niejawna) dają zbliżone rezultaty, o ile oczywiście metoda jawna jest zbieżna (we wszystkich przypadkach oprócz pierwszego wiersza w obu tabelach). Błędy pojawiają się na poziomie drugiego miejsca po przecinku, co w przypadku obserwowanych wartości (z przedziału *[-2; 2]*) jest zauważalnym błędem, które jednak nie dyskwalifikuje jednoznacznie żadnego z rozwiązań.

Warto zwrócić uwagę, iż różnica w wynikach jest tym mniejsza, im bardziej stabilne jest rozwiązanie metody jawnej (im mniejszy jest współczynnik *φ*).

1. **WNIOSKI OGÓLNE**

Na podstawie obu powyższych eksperymentów można stwierdzić, iż stosowanie metody niejawnej na ogół jest bardziej opłacalne ze względu na bezwarunkową stabilność. Rozwiązanie to jednak jest bardziej wymagające pamięciowo (konieczność utworzenia dodatkowej macierzy oraz kolumny wyrazów wolnych) oraz konceptualnie (rozwiązanie układu równań metodą Thomasa; w przypadku metody jawnej – prosty algorytm dynamiczny). W przypadku metody jawnej należy w taki sposób dobrać kroki na obu osiach układu współrzędnych odpowiadających zmiennym równania, aby wartość współczynnika stabilności *φ* nie przekraczała ½. Należy jednak pamiętać, iż zbyt mała liczba punktów dyskretyzacji układu wprowadza również zaburzenia wyniku, a przez to również kształtu funkcji. Zbyt duża liczba kroków na obu osiach prowadzi również do uzyskania ogromnej liczby punktów dyskretyzacji, których przetworzenie może sprawić problemy prostemu komputerowi (laptop, komputer stacjonarny).