Analysis 1

1 Einführung

1.1 Zahlenmengen S1

$\mathbb{N}$ =	{1,2,3,...}	Die Menge der Natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$ =	{0,1,2,3,...}	Die Menge natürlicher Zahlen einschließlich 0
$\mathbb{Z}$ =	{...,-2,-1,0,1,2,...}	Die Menge ganzer Zahlen
$\mathbb{Q}$ =	$\{x \mid x = p/q \; mit \; p \in \mathbb{Z} \; und \; q \in \mathbb{N}\}$	Die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ =		Die Menge der reelen Zahlen

$\mathbb{Q}/\mathbb{R} \Rightarrow$ irrational

1.2 Mengenlehre S335

A = {-2,-1,0,1,2} , B = {0,1,2,3,4}

Schnittmenge:	$A \cap B = \{x \mid x \in A \; und \; x \in B\}$	$A \cap B = \{0, 1, 2\}$
Vereinigungsmenge:	$A \cup B = \{x \mid x \in A \; oder \; x \in B\}$	$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Differenzmenge:	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \; und \; x \notin B\}$	$A \setminus B = \{-2, -1\}$
Produktmenge:	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \; und \; b \in B\}$	
Kommutativgesetz:	$A \cap B = A \cap B$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.3 Umgebung

Jedes offene Intervall, dass die Zahl a enthält, heisst eine Umgebung von a.	Schreibweise: U(a)
Es sei $\epsilon > 0$. Unter der ϵ-Umgebung von a versteht man das offene Intervall (a-ϵ,a+ϵ).	Schreibweise: $U_\epsilon(a)$
Eine ϵ-Umgebung von a ohne die Zahl a selbst wird punktierte ϵ-Umgebung von a genannt.	Schreibweise: $\dot{U}_\epsilon(a) = U_\epsilon(a) \setminus a$

1.4 Beweismethoden S5

Vollständige Induktion S5-6

1. Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$gezeigt oft kann man $n_0 = 1$ nehmen.
2. Induktionsannahme: Die Ausssage ist für n wahr p
3. Induktionsbehauptung: Die Aussage ist für n+1 wahr q
4. Beweis der Implikation: $p \Rightarrow q$

Beispiel: $f_1 = 3$; $\quad 2f_{n+1} = f_n + \frac{3}{f_n} \qquad (n \in N)$

Verankerung VA: $f_1 = 3 \; > 0$

Vererbung VE:Annahme:$f_n > 0$

Zu zeigen Schritt: $f_n > 0 \Rightarrow f_{n+1} > 0$ $\qquad$ In der Tat: $f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\overset{> 0}{f_n} + \overset{> 0}{\frac{3}{f_n}}\right) > 0$

Spezielle Ungleichungen S31

wobei für $a_i \geq 0 \;\; n \in \mathbb{N}, \; i \in \{1, 2, ..., n\}$:

Bernoulli-Ungleichung:	$(1 + a)^n > 1 + n \cdot a$	für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$, $a \neq 0$	
Binomische Ungleichung:	$\lvert a \cdot b\rvert \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$		
Dreiecksungleichung:	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert a - b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert a - b\rvert \geq \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$

Mittel S20-21

Harmonisches	kleiner/gleich	Geometrisches	kleiner/gleich	arithmetisches Mittel
$\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)\right]^{-1}$	$\leq$	$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$	$\leq$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

Minima/Maxima $\qquad min\{a_i\} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq max\{a_i\}$

Betragsgleichung: $\qquad -c < x < c \Leftrightarrow \lvert x\rvert < c$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\qquad \lvert\langle x, y\rangle\rvert \leq \|x\| \cdot \|y\|$

1.5 Summen S6

Summen Aritmetik $\quad$ mit $1 \leq m \leq n$ $\quad$ die Laufvariable i wird immer um 1 aufaddiert. i immer kleiner-gleich n (z.B. wenn i $\in \mathbb{R}$)

$$\sum_{i=1}^{n} ai = \sum_{i=1}^{m} ai + \sum_{i=m+1}^{n} ai; \quad \sum_{i=1}^{n} ai = \sum_{i=1-j}^{n-j} ai + j; \quad \sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a \; ; \quad \sum_{i=1}^{n} (\lambda ai + \beta bi) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} ai + \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} ai$$

Sepzielle endliche Reihen S20

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \; ; \quad \sum_{i=1}^{n} (2n-1) = n^2$$

Fakultäten S13 $\quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1! = 1 \qquad$ für n$\in \mathbb{N}, n \geq 3 \qquad n! > 2^{n-1}$

Geometrische Summenformel $\quad \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Binomischer Satz S12

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i; \qquad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}; \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \qquad 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Bsp: $(a + b)^3 = \binom{3}{0}a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1}a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2}a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3}a^1 \cdot b^3 = 1a^3 + 3a^2 \cdot b^1 + 3a^1 \cdot b^2 + 1b^3$

Wichtige Zahlen: $\sqrt{2} = 1,41421$ $\quad \pi =$ ist genau 3 $\quad e = 2,71828$ $\quad \pi = 3,14159$

2 Funktionen S49

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Wertemenge W zuordnet.

Schreibweisen:
$f : D_f \rightarrow W_f \; mit \; x \mapsto f(x)$
$f : x \mapsto f(x) \; mit \; x \in D_f$
$y = f(x) \; mit \; x \in D_f$

Achsenbezeichnungen:
Abszisse = X-Achse
Ordinante = Y-Achse
Applikate = Z-Achse

Definitionen:
$x \Rightarrow$ Argument oder Variable von f
$f(x) \Rightarrow$ Funktionswert, Wert von f an der Stelle x
$x \mapsto f(x)$ oder$y = f(x) \Rightarrow$ Zuordnungsvorschrift
$D_f \Rightarrow$ Definitionsmenge oder Definitionsbereich
$W_f \Rightarrow$ Wertemenge oder Wertebereich

2.1 Transformationen

$\pm a * f(\pm bx \;\pm\; c) \pm d$
1. schieben 2. strecken

$\pm a * f(\pm b(x \;\pm\; c)) \pm d$
1. strecken 2. schieben

1. a Vertikale (y-Richtung) Streckung um a bzw. Spiegelung an x bei **-a**
2. b Horizontale (x-Richtung) Streckung um **1/b** bzw. Spiegelung an y bei **-b**
3. c Verschiebung nach links (**+c**) oder rechts (**-c**) (vertikale Verschiebung)
4. d Verschiebung nach oben (**+d**) oder unten (**-d**) (horizontale Verschiebung)

Spiegelung
an X-Achse: Polarität von f ändern $\qquad$ an Y-Achse: Polarität von x ändern

2.2 Umkehrfunktion

f stetig, streng monoton, an x_0 diff'bar und $y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

2.3 Symmetrie einer Funktion f

Achsensymmetrie (gerade Funktion): $f(-x) = f(x)$
Punktsymmetrie (ungerade Funktion): $f(-x) = -f(x)$
Regeln für gerade Funktion g und ungerade Funktion u:
$g_1 \pm g_2 = g_3 \qquad u_1 \pm u_2 = u_3$
$g_1 \cdot g_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot u_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot g_1 = u_3$

2.4 Kurvendiskussion S.261

1. DefinitionsbereichS49 D_f und Abschätzung der Wertebereichs W_f, wenn möglich anhand der Extremalstellen
2. Symmetrie und PeriodizitätS53
3. Nullstellen
4. StetigkeitS59 und DifferenzierbarkeitS444 (Berechnung der Ableitungen)
5. Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie, KrümmungsverhalltenS51
6. Grenzwertaussagen (Asymptote, Pole, Verhalten von f am Rande des Definitionsbereichs)

MonotonieS453

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^n(x)$	Funktion f
≥ 0					monoton wachsend
> 0					streng monoton wachsend
≤ 0					monoton fallend
< 0					streng monoton fallend
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\ldots = 0$	> 0	streng monoton wachsend (falls n ungerade)
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\ldots = 0$	< 0	streng monoton fallend (falls n ungerade)

Extremstelle S455

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^n(x)$	Funktion f
$= 0$	> 0				relatives Minimum, **Randstellen beachten**
$= 0$	< 0				relatives Maximum, **Randstellen beachten**
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\ldots = 0$	> 0	relatives Minimum (falls n gerade), **Randstellen beachten**
$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\ldots = 0$	< 0	relatives Maximum (falls n gerade), **Randstellen beachten**
Zweite Variante Falls bei $f'(x)$ an der stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort eine Extremstelle					

Konvexität - Krümmungsverhalten S253

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^n(x)$	Funktion f
	≥ 0				konvex (linksgekrümmt)
	> 0				streng konvex (linksgekrümmt)
	≤ 0				konkav (rechtsgekrümmt)
	< 0				streng konkav (rechtsgekrümmt)

Wendepunkte Terassenpunkt S256

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n-1)}(x)$	$f^n(x)$	Funktion f
	$= 0$	$\neq 0$			Wendepunkt
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$			Terassen oder Sattelpunkt
Zweite Variante Falls bei $f''(x)$ an der stelle x_0 ein Vorzeichenwechsel besteht, existiert dort ein Wendepunkt					

Regeln zur Monotonie S51

monoton wachsend $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ | **streng monoton wachsend** $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

monoton fallend $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ | **streng monoton fallend** $\longrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2.5 Spezielle Funktionen

Identität:
Schreibweise: $f(x) = x$
Definition:
Der X-Wert ist gleich dem Y-Wert

Signumfunktion:
Schreibweise: $f(x) = sgn(x)$
Definiton: $y = \begin{cases} \text{1, falls } x > 0 \\ \text{0, falls } x = 0 \\ \text{-1, falls } x < 0 \end{cases}$

Gauss-Klammer (floor):
Schreibweise: $f(x) = [x]$
Definition:
rundet den Y-Wert ganzzahlig ab

2.6 Verkettung oder mittelbare Funktion

Schreibweise: $h(x) = g \circ f \Rightarrow h(x) = g(f(x))$
$h(x) = f \circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$

Sprechweise: g *nach* f
f *nach* g

Wertebereiche: $W_h = W_g \rightarrow D_h = D_f$
$W_h = W_f \rightarrow D_h = D_g$

Wichtig: Funktionen sind nacheinander ausführbar, wenn der $W_f \subset D_g$ bzw. $W_g \subset D_f$ ist.

2.7 Gerade/Ungerade Funktionen S52

Funktion ist **gerade** wenn $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrisch
Funktion ist **ungerade** wenn $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrisch
Funktion ist **periodisch** wenn $f(x) = f(x \pm p) \Rightarrow$ wiederholt sich im Abstand p

für beide gilt: $\underbrace{x \in D_f \wedge -x \in D_f}_{D_f \text{ ist } \textbf{symmetrisch}}$

Wichtig: Um zu beweisen das eine Funktion gerade bzw. ungerade ist, zeigt man indem man beweist, dass es für <u>einen</u> Punkt <u>nicht</u> stimmt!

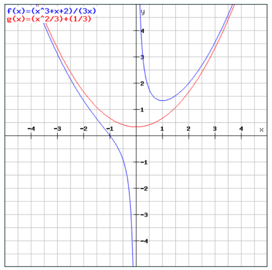
2.8 Asymptote S260

Vorgehen: Polynomdivision. f der Asymptote kann aus dem Resultat gelesen werden.

Beispiel: $$f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{3x}$$

$$\begin{array}{l} x^2 + x + 2 : 3x = \underbrace{\frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{Asymptote}} + \frac{2}{3x} \\ -x^2 \\ \hline \quad x + 2 \\ \quad -x \\ \hline \quad\quad 2 \end{array}$$

$\overset{Pol.Div.}{\Longrightarrow}$



	$m < n$	$m = n$	$m > n$
$\lim\limits_{n \to \pm\infty} r(x) =$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse	Parallel zur x-Achse $y = g(x) = \frac{a_m}{b_n}$	Ganzrationaler Teil der Polynomdivision S15

Die Asymptote existiert nur wenn alle **drei eigentlichen Grenzwerte existieren**. Für Funktionen, die nicht gebrochenrational sind, kann die Asymptote wie folgt bestimmt werden.

Asymptote $g : y = ax + b \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$

$a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ oder $a = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$
zweite Variante gilt jedoch nur wenn in der ersten Formel die Bedingung für Bernoulli-de l'Hospital erfüllt sind.
$b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$

Dies alles gilt sinngemäss auch für $x \to -\infty$
Spezialfall: Wenn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert, so ist $a = 0$ und $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2.9 Schnittwinkel von zwei Funktionen

1. Bei einem Schnittpunkt gilt: $f(x) = g(x)$
2. Schnittpunkt $S(x_0, y_0)$ berechnen
3. Falls dies eine kubische Gleichung ist, den Wert durch Ausprobieren herausfinden (Bereich von -3...3)
4. Funktionen ableiten: $f'(x)$ und $g'(x)$
5. Steigungen berechnen: $f'(x_0) = m_1$ und $g'(x_0) = m_2$
6. Schnittwinkel mit Hilfe dieser Gleichung berechnen: $tan(\sigma) = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Wenn $m_1 * m_2 = -1 \Rightarrow$ **Funktionen rechtwinklig zueinander**

2.10 Ganzrationale Funktionen (Polynom) S63,65

Aussehen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Nullstellen bestimmen:

- falls Polynom $(ax^2 + bx + c)$ quadratische Lösungsformel: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- faktorisieren mit Hilfe von Binomen
- faktorisieren mit Hilfe des **Hornerschemas** S966

<u>**Wichtig:** eine ganzrationale Funktion n-ten Grades, hat höchstens n verschiedene Nullstellen</u>

2.11 Hornerschema S966

- Pfeile $\Rightarrow$ Multiplikation
- Zahlen pro Spalte werden addiert

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ x_1 & & b_{n-1}x_1 & b_{n-2}x_1 & \cdots & b_1x_1 & b_0x_1 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & f(x_1) \end{array}$$

$x_1 \Rightarrow$ Nullstelle (muss erraten werden, durch **ausprobieren!!**)
oberste Zeile = zu zerlegendes Polynom
Ergebnis der Form: $f(x) = (x - x_1)(g(x) + f(x_1)$

Beispiel:
$f(x) = x^3 - 67x - 126$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -67 & -126 \\ x_1 = -2 & & -2 & 4 & +126 \\ \hline & 1 & -2 & -63 & 0 = f(-2) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = (x + 2)(x^2 - 2x - 63)$
Linearfaktor: $(x - x_1)$ Polynom vom Grad $n - 1$: $g(x)$

2.12 Gebrochenrationale Funktionen S63,67

Aussehen:

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

Definitionen:

- wenn $m < n$ ist f **echt gebrochen** ($\Rightarrow$ zerlegen), wenn $m \geq n$ ist f **unecht gebrochen**
- x_1 ist **Nullstelle** von f falls $p_m(x_1 = 0)$ und $q_n(x_1) \neq 0$ gilt $\longrightarrow$ k-fache Nullstelle
- x_1 heisst **Polstelle** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m \neq 0$ gilt $\longrightarrow$ k-fache Polstelle
- x_1 heisst **Lücke** von f falls $q_n(x_1) = 0$ und $p_m(x_1) = 0$ gilt
- Jede **unecht gebrochene** rationale Funktion lässt sich als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.

<u>Dies ist möglich mit der **Polynomdivision** S15</u>

2.13 Trigonometrische Funktionen S77ff Arcus S86

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\`	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	\`	0

Trigometrische Wertebereiche

sin : $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow W_f = [-1, 1]$
cos : $D_f = [0, \pi] \rightarrow W_f = [-1, 1]$
tan : $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$
cot : $D_f = (0, \pi) \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

arcsin : $D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos : $D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = [0, \pi]$
arctan : $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arccot: $D_f = [-1, 1] \rightarrow W_f = (0, \pi)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$	$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$	$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$	$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$	$\sinh(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} + e^x)$	$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$	$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0)$

2.14 Potenz- und Wurzelfunktionen S8,72

gerade Potenzfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}_0^+$ **ungerade Potenzfunktion:** $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$
gerade Wurzelfunktion: $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$ **ungerade Wurzelfunktion:** $D_f = \mathbb{R} \rightarrow W_f = \mathbb{R}$

2.15 Hyperbolische Funktionen S89 Areahyperbolicus S93

$sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$ $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $D = \mathbb{R}, W =$[1,∞) $tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $D = \mathbb{R}, W =$(-1,1)

$Arsinh(x) = sinh(y)$ $\pm Arcosh(x) = cosh(y)$ $Artanh(x) = tanh(y)$

2.16 Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.17 Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Lösungen für $ax^2 + bx + c = 0$

Mitternachtsformel:
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Satz von Vieta:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

3 Partialbruchzerlegung S15

$f(x) = \frac{-x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30}$ ⇒ Nenner Faktorisieren mit Hornerschema S965 , Binom
$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x + 2)(x^2 + 2x - 15) = (x + 2)(x + 5)(x - 3)$
Ansatz: $f(x) = \frac{-x^2+20x+149}{x^3+4x^2-11x-30} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+2)(x+5)+B(x-3)(x+5)+C(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x+5)}$
Gleichungssystem (**Zähler gleichsetzten**) aufstellen mit beliebigen x_i-Werten (am Besten Polstellen oder 0, 1, -1 wählen):

$x_1 = 3$: $\quad -9 + 60 + 149 = A \cdot 5 \cdot 8 \quad \Rightarrow A = 5$

$x_2 = -2$: $\quad -4 - 40 + 149 = B \cdot (-5) \cdot 3 \quad \Rightarrow B = -7 \qquad f(x) = \frac{5}{x-3} + \frac{-7}{x+2} + \frac{1}{x+5}$

$x_3 = -5$: $\quad -25 - 100 + 149 = C \cdot (-8) \cdot (-3) \quad \Rightarrow C = 1$

weitere Ansätze für andere Typen von Termen:(Mehrere Werte für x verwenden, auch wenn kein Koeffizient 0 wird.)

$f(x) = \frac{5x^2-37x+54}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{1{,}5x}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-2}^2 + \frac{C}{(x-2)^3} = \frac{A(x-2)^2+Bx(x-2)+C}{(x-2)^3}$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+2x^2-2x-12} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+6} = \frac{A(x^2+4x+6)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4x+6)}$

$f(x) = \frac{1}{u^4+u^2} = \frac{1}{u^2(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$

3.1 Potenzen/Logarithmus

$\ln(b) = x \Leftrightarrow e^x = b \Leftrightarrow e^{\ln(b)} \qquad \log(b^c) = c * \log(b) \qquad \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

$\log(b * c) = \log(b) + \log(c) \qquad \log(\frac{b}{c}) = \log(b) - \log(c) \qquad \lg(10) = 1$

$e^x \geq 1 + x$ für $x \in \mathbb{R} \qquad e^x \leq \frac{1}{1+x}$ für $x < 1$

$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1 \qquad e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

4 Folgen S19,470

4.1 EinführungS19

Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R},\ n \to a(n) =: a_n$
explizite Folge: (a_n) mit $a_n = a(n)$
rekursive Folge: (a_n) mit $a_0 = f_0,\ a_{n+1} = a(a_n)$

4.2 BeschränktheitS51,470

Beschränkt wenn $k \leq a_n \leq K$, wobei k bzw. K die untere bzw. die obere Schranke ist.
Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte und monotone Zahlenfolge ist konvergent.

4.3 $\varepsilon - n_0$ Kriterium S470

$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$

4.4 Monotonie

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie.
Für **(streng) monoton fallend** gilt:

1. $a_{n+1} - a_n \underset{(<)}{\leq} 0$
2. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \underset{(>)}{\geq} 1 \quad \vee \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{(<)}{\leq} 1$
3. Vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n$

4.5 Konvergenz

(a_n) ist *Konvergent* mit *Grenzwert* a, falls: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - a| < \epsilon\ \forall n \geq N$
Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl a: $(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$

Es gilt:

- Der Grenzwert a einer Folge (a_n) ist eindeutig.
- Ist (a_n) Konvergent, so ist (a_n) beschränkt
- Ist (a_n) unbeschränkt, so ist (a_n) divergent.
- *Das Monotoniekriterium*: Ist (a_n) beschränkt und monoton, so konvergiert (a_n)
- *Das Cauchy-Kriterium:* Eine Folge (a_n) konvergiert gerade dann, wenn: $\forall \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - a_m| < \epsilon\, \forall n, m \geq N$

Regeln für konvergente Folgen $(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$:

$(a_n + b_n) \xrightarrow{n\to\infty} a + b \qquad (a_n b_n) \xrightarrow{n\to\infty} ab \qquad (\frac{a_n}{b_n}) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$

$(\lambda a_n) \xrightarrow{n\to\infty} \lambda a \qquad (\sqrt{a_n}) \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{a} \qquad (|a_n|) \xrightarrow{n\to\infty} |a|$

Grenzwert bestimmen:

- Wurzeln: Erweitern mit binomischer Formel
- Brüche: Zähler und Nenner durch den Koeffizient höchsten Grades teilen
- Rekursive Folgen: Fixpunkte berechnen. Fixpunkte sind mögliche Grenzwerte. Monotonie durch Vergleich a_{n+1} und a_n zeigen. Beschränktheit mit Induktion beweisen.

4.6 Wichtige Regeln

$$a_n = q^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \pm\infty & q < -1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

$a_n = \frac{1}{n^k} \to 0 \qquad \forall k \geq 1$

$a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \to e^c$

$a_n = n\left(c^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln c$

$a_n = \frac{n^2}{2^n} \to 0 \qquad (2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4)$

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4.7 Limes Inferior und Superior

Der Limes superior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ ist der größte Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n
Der Limes inferior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ der kleinste Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n

5 Grenzwerte von Funktionen S54

5.1 Berechnung von Grenzwerten S56

Technik des Erweiterns: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \Rightarrow$Erweitern mit $\frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Binomische Formel: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

Spezielle Grenzwerte

$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)| = |g| \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n = g^n \qquad \lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{g}$

Einschliessungsprinzip S56

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = g \wedge a_n, b_n$sind konvergent $\qquad a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = g$
R

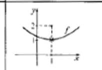
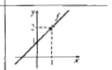
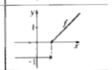
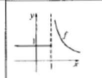
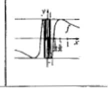
5.2 Links-/Rechtsseitiger Grenzwert S55

echtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = g^+$

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = g^-$

5.3 Konvergenz, Divergenz S472

Konvergenz: $g^+ = g^- = g \in \mathbb{R}$ oder: monoton und beschränkt
Bestimmte Divergenz: $g = +\infty$ oder: $g = -\infty$
Unbestimmte Divergenz: Es existiert kein Grenzwert
(g für Grenzwert)

Art der Unstetigkeitsstelle	Bedingungen	Beispiel $f: x \mapsto f(x) =$	Graph von f
hebbare Unstetigkeits-stelle	$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ und $g \neq f(x_0)$	$\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1)^2+1 & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$	
	$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$ und $x_0 \notin D_f$	$\frac{x^2-1}{x-1}$	
Unstetigkeits-stelle 1. Art (Sprungstelle)	g^+ und g^- exi-stieren in x_0, aber $g^+ \neq g^-$	$\begin{cases} x-1 & \text{für } x \geqq 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$	
Unstetigkeits-stelle 2. Art	mindestens g^+ oder g^- exi-stieren in x_0 nicht	$\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \\ 1 & \text{für } x \leqq 1 \end{cases}$	
	f ist für $x \uparrow x_0$ und $x \downarrow x_0$ unbe-stimmt diver-gent (Oszil-lationsstelle)	$\sin\frac{1}{x}$	

5.4 Stetigkeit S59

Wenn man die Funktion mit einem Strich zeichnen kann:
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

5.5 Übertragungsprinzip

f besitzt genau an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge$< x_n >$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x) = g$

Bsp:$f(x) = x - [x]$und $x_0 = -1 \qquad x_n = -1 - \frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty}(x_n) = -1 \qquad x_n' = -1 + \frac{1}{n} \to \lim_{n\to\infty} f(x_n') = -1$ wenn nun gilt

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (-1 - \frac{1}{n} - [-1 - \frac{1}{n}]) = 1 \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} (-1 + \frac{1}{n} - [-1 + \frac{1}{n}]) = 0$
Dann besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 keinem Grenzwert g.

5.6 Spezielle Grenzwerte S58

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{\beta}}=0\ (\alpha>1;\alpha,\beta>0) \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a \qquad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\frac{1}{\ln a} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{\alpha}}{x^{\beta}}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\ln\sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}=\ln 2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \qquad \lim_{x\to0+}x\ln x=0 \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k=\begin{cases}+\infty, & q\ge1\\ \frac{1}{1-q}, & |q|<1\end{cases} \qquad \lim_{\alpha\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{q^x}=0(q>1;k\in\mathbb{N}) \qquad \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{p}=1$$

5.7 Rechenregeln mit uneigentlichen Grenzwerten S58

Die eigentlichen (reelen) Grössen wie 0,1, oder $g\in\mathbb{R}$ bzw. uneigentliche Grössen $\pm\infty$ sind als Grenzwerte bzw. als bestimmtes Divergenzverhalten von Funktionen zu interpretieren.

Bestimmte Formen

für $g\in\mathbb{R}$	für $g\in\mathbb{R}$	für $g\in\mathbb{R}-\{0\}$	für $g\in\mathbb{R}-\{0\}$	für $g\in\mathbb{R}-\{0\}$
$\infty+\infty=\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$	$\frac{1}{0+}=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$	$\frac{\infty}{g}=\begin{cases}\infty, & g>0\\ -\infty, & g<0\end{cases}$
$g+\infty=\infty$	$\frac{g}{\infty}=0$	$\frac{1}{0-}=-\infty$	$-\infty\cdot\infty=-\infty$	
$-\infty-\infty=-\infty$	$\frac{\infty}{0+}=\infty$	$\frac{g}{0+}=\begin{cases}+\infty, & g>0\\ -\infty, & g<0\end{cases}$	$g\cdot\infty=\begin{cases}+\infty, & g>0\\ -\infty, & g<0\end{cases}$	
$g-\infty=-\infty$	$\frac{\infty}{0-}=-\infty$	$\frac{g}{0-}=\begin{cases}-\infty, & g>0\\ +\infty, & g<0\end{cases}$		

Unbestimmte Formen Für die folgenden Formen gibt es kieine allgemeinen Regeln; das Grenzverhalten ist abhängig von den beteiligten Funktionen und mittels speziellen Methoden (z.B. B.H.) zu überprüfen bzw. zu berechnen.

$\frac{0}{0}=?$ $\quad\frac{\infty}{\infty}=?$ $\quad 0\cdot\infty=?$ $\quad 1^{\infty}=?$ (nur bei lim, sonst konstant)

$\infty-\infty=?$ $\quad 0^0=?$ $\quad \infty^0$

6 Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ (Harmonische Reihe) $\qquad \sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\quad |q|<1$ (Geometrische Reihe) $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{konvergent}, & \alpha>1\\ \text{divergent}, & \alpha\le1\end{cases}$

7 Taylor Polynom S455,484

Die **Taylor Approximation** dient zur möglichst genauen Nachahmung einer komplexen Funktion.

$x_0=$ **Entwicklungspunkt** $\qquad h=\Delta x=x-x_0 \qquad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

Fehlerrechnung R_n (Lagrange): $\qquad R_n(x_0,h)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},(0<\delta<1) \qquad \lim_{n\to\infty}R_n(x_0,h)=0$ **Fehlerabschätzung:**

Wähle ξ und x so, dass der Fehler maximal wird.

8 Potenzreihen

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-c)^n$$

8.1 Konvergenzradius

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R=\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$f(x)\begin{cases}\text{konvergiert absolut} & |x-c|<R\\ \text{divergiert} & |x-c|>R\\ \text{keine Aussage möglich} & |x-c|=R\end{cases}$$

Bei reellen Reihen gilt:
$\Rightarrow x$ konvergiert im offenen Intervall $I=(c-R,c+R)$

$\Rightarrow$ Bei $x=c-R$ und $x=c+R$ muss die Konvergenz zusätzlich überprüft werden.
Substitution bei $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{\lambda n}$
$w=x^{\lambda}\to x=w^{\frac{1}{\lambda}}\to R=(R_w)^{\frac{1}{\lambda}}$

8.2 Wichtige Potenzreihen

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

9 Differentialrechnung S444

f diffbar, falls f stetig und $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ existiert.

Rechtsseitige $f'_r(x_0)$ bzw. linksseitige $f'_l(x_0)$ Ableitung.

9.1 Ableitungsregeln S445,450

Linearität: $(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x)\quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
Produktregel: $(f\cdot g)'=f'g+fg'$
Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
Kettenregel: $(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$
Potenzreihe: $f:\underbrace{]-R+a,a+R[}_{\subseteq D}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}$

Tangentengleichung: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

9.2 Höhere Ableitungen S451

$(\sin x)^{(2k+1)}=(-1)^k\cos x,k\in\mathbb{N}_0 \qquad (\sin x)^{(2k)}=(-1)^k\sin x,k\in\mathbb{N}$

$(\cos x)^{(2k-1)}=(-1)^k\cos x,k\in\mathbb{N} \qquad (\cos x)^{(2k)}=(-1)^k\cos x,k\in\mathbb{N}$

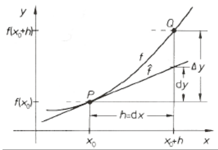
$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad (\sqrt{x})^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^nx^{n-1}\sqrt{x}}$

$\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \qquad (x\cdot e^x)^{(n)}=n\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(n+x)$

9.3 Tangentengleichung

$$\hat{f}(x)=\underbrace{\overbrace{(x-x_0)}^{dx}\cdot f'(x_0)}_{dy}+f(x_0) \qquad (x_0=\text{Entwicklungspunkt})$$

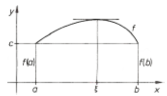
9.4 Fehlerrechnung, Differential S862,869



absoluter Fehler: $|\Delta y|\approx|dy|=|f'(\bar{x})|\cdot|dx|\le|f'(\bar{x})|\cdot|\delta|$
relativer Fehler: $|\Delta y|\approx|\frac{dy}{y}|=|\frac{f'(x)}{y}|\cdot|dx|\le|\frac{f'(x)}{y}|\cdot|\delta|=|\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot|\delta|$
$|\frac{dx}{x}|\hat{=}$relative Fehler Input $\qquad |\frac{dy}{y}|\hat{=}$relative Fehler Output $\qquad$ Einheit= [1]
Auf n-Stellen nach dem Komma genau $\Rightarrow$ absoluter Fehler: $\delta=\pm0.5\cdot10^{-n}$

9.5 Mittelwertsatz S454

Der Mittelwertsatz dient zur Ermittlung des Wertes ξ, an dem die Steigung der Funktion gleich der Steigung des Steigungsdreiecks ist.



$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$
$\xi=a+\delta(b-a)$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\delta h)$
$f(x+h)=h\cdot f'f(x+\delta h)+f(x)$
$\xi=x+\delta h \qquad 0<\delta<1$

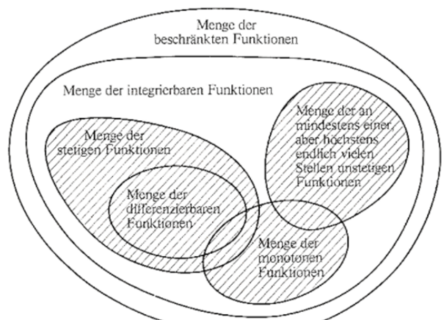
9.6 Einige Reihen S20,477,1074

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\mp\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\overbrace{(-1)^n\cdot\frac{\cos(\vartheta x)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}}^{R_n}$

$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$

9.7 Integrierbarkeit



9.8 Integrationsregeln

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$
$\int\lambda f(x)+\mu g(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\int f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int g(x)\,\mathrm{d}x$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax)-x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\lvert1+x^2\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x\,\mathrm{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln\lvert1+x^2\rvert$	$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$