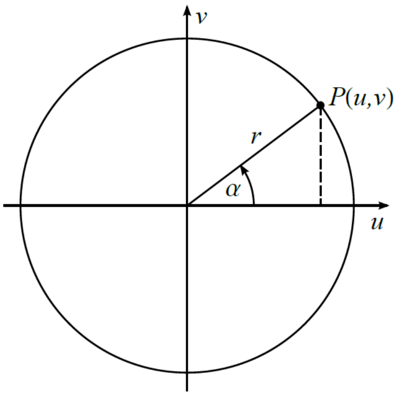
Konstanten

Elektrische Feldkonstante Permittivität von Vakuum	$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m	$[\varepsilon_0] = \frac{\text{F}}{\text{m}} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$
Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = 2.99792 \times 10^8 \text{m/s} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{E_0}{B_0}$	$[c_0] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Magnetische Feldkonstante Permeabilität von Vakuum	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m}$	$[\mu_0] = \frac{\text{H}}{\text{m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$
Masse des Elektrons (Ruhemasse, $v << c_0$)	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg	$[m_e] = \text{kg}$
Elementarladung (Ladung des Elektrons $q_e = -e$)	$e = 1.602 \times 10^{-19}\text{C}$	$[e] = \text{As} = \text{C}$

Geometrie



$\sin(\alpha) = \frac{v}{r}$ $\quad$ $\cos(\alpha) = \frac{u}{r}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$

$-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$

$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi)$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$

$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

$\cos(\alpha) = \cos(2\pi - \alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

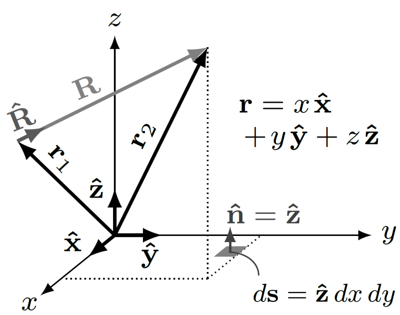
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

Kartesische Koordinaten

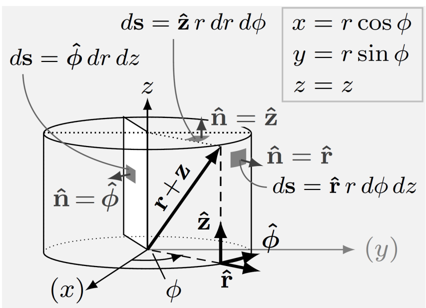


Volumenelement: $dv = dxdydz$

Kreis Umfang $U = 2\pi r$

Kreis Fläche $U = 2\pi r^2$

Zylindrische Koordinaten

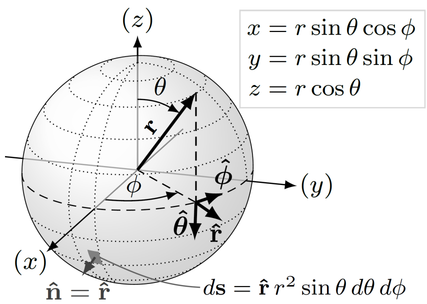


Volumenelement: $dv = rdrd\phi dz$

Oberfläche $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Volumen $V = \pi r^2 h$

Sphärische Koordinaten



Volumenelement: $dv = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$

Oberfläche $A = 4\pi r^2$

Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

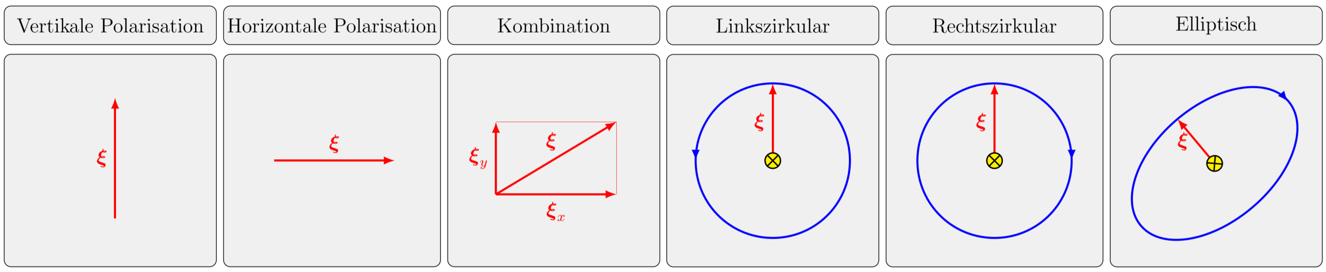
Vektorprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$	$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
Skalarprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \vec{a} \cdot \vec{b}$	$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$
Komplexe Polarform	$z = r \cdot e^{i\varphi} = r\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$	$z = a + bi$ $r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
Komplexe Winkel	$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arccos(\frac{a}{r}) & b \geq 0 \\ -\arccos(\frac{a}{r}) & b < 0 \end{cases}$	
Arithmetik **Winkel Addieren** **Winkel Subtrahieren**	$z_1 = r_1 cis(\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$ $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$ $z_1/z_2 = r_1/r_2 cis(\varphi_1 - \varphi_2)$	$z_2 = r_2 cis(\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

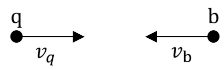
Allgemein

Arbeit, Energie	$\Delta W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = W_1 - W_2$	$[\Delta W] = [W] = \mathrm{J} = \mathrm{Ws}$, $[F] = \mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2$
Drehmoment	$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (T auf Drehachse)	$[T] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$, $[r] = \mathrm{m}$
Zentripedalkraft	$\mathbf{F} = \frac{mv^2}{r}(-\hat{\mathbf{r}}) = -m\omega^2\mathbf{r}$	$[m] = \mathrm{kg}$, $[r] = \mathrm{m}$, $[v] = m/s$, $[\omega] = \mathrm{rad}/s$
Lorenzkraft	$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_A = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$[E] = \mathrm{V/m}$, $[B] = \mathrm{A/m}$, $[v] = \mathrm{m/s}$, $[l] = \mathrm{m}$
Drehimpuls	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$[L] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$
Drallsatz	$M = \dot{L}$	

Wellen

Wellengleichung 1 und 3 Dimensional	$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$ $\qquad \frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2} - v^2\Delta\vec{\xi} = 0$	Allg. Lösung $\xi(x,t) = f(x \pm vt)$
Harmonische Lösung:	$\xi(x,t) = \xi_0\sin(k(x \pm vt)) = \xi_0\sin(kx \pm \omega t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t)}$	$-v$ rechtslaufend $+v$ linkslaufend
Wellenlänge & Wellenzahl	$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{k} = v \cdot T$ $k = \lvert\mathbf{k}\rvert = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$	$[\lambda] = \mathrm{m}$ $[k] = \mathrm{rad/m}$
Seilwelle Transversal (Zugspannung S)	$v^2 = \frac{S}{\rho}$, $S = \frac{F}{A}$, $\rho = \frac{m}{V}$	$[\mathrm{F}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}^2$ Dichte $[\rho] = \mathrm{kg/m}^3$
Festkörper Longitudalwelle (E Elastizitätmodul)	$v^2 = \frac{E}{\rho}$, $E = \sigma\frac{l}{\Delta l}$	$[\mathrm{E}] = \mathrm{N/m}^{-2}$ Normalspannung $[\sigma] = \frac{\mathrm{dF}_\perp}{da}\mathrm{N/m}^{-2}$
Ebene Welle harmonische Welle	$\vec{\xi}(x,y,z,t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$	(Die zu $\vec{k}$ senkrechte Ebene ist $\vec{k} \cdot \vec{r} = $ konst.)
Kugel Welle harmonische Welle	$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \frac{\overrightarrow{A_1}}{r}f_1(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt) + \frac{\overrightarrow{A_2}}{r}f_2(\vec{k}\cdot\vec{r} + wt)$	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$ Intensität I Leistung P über r^2



Gesetzt von Malus Polarisationsfilter	$I = I_0 \cdot \cos^2(\alpha)$	α Polarisationswinkel I_0 Intensität
Mittlere harmonische Energiedichte über Periode T	$\left\langle \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}(x,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$	Energie pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit
Mittlere Intensität harmonische Welle	$\langle I \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2v = \frac{1}{2}\rho\frac{\omega^3}{k}A^2 = \frac{1}{2}\rho\sqrt{\frac{F}{\rho\pi R^2}}\omega^2A^2 \propto \sqrt{\rho}A^2$	Energie pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit
Poynting-Theorem Poynting-Vektor:	$\mathbf{S} = \frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}a\ \mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\lvert\mathrm{d}\vec{a}\rvert}$, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$[S] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
Dopplereffekt	$f_B = \frac{c + v_b}{c - v_q}f_q$ $\quad c_{\mathrm{Luft}} = 340m/s$	
Schockwelle	$\vartheta = \arcsin\left(\frac{u}{v_Q}\right)$	ϑ Halber Öffnungswinkel Machscher Kegel

Wellen

$$-\frac{d}{dt}\int_V (w_e + w_m)\,dv = \int_V p dv + \int_{A=\partial V} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s} \qquad I := |\vec{S}| \text{ (Intsensität)}$$

Beispiel Poyting Vector Ohmischer-Widerstand

$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E}\times\mathbf{H}| = \frac{U\cdot I}{2\pi Rl}$ Integral Mantelfläche

$P = \oint_M \vec{S}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{U\cdot I}{2\pi Rl}\cdot 2\pi Rl = -U\cdot I$

elt. Feldstärke $|\vec{E}| = \frac{U}{l}$, mag. Feldstärke$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi R}$

Energietransport
kinetische Energiedichte

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho v^2\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}(x-vt)}\right)^2$$

Energie $\mathrm{d}T$ gilt nur für mechanische Wellen

elastische Energiedichte

$$\frac{\mathrm{d}E_{el}}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}S\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}$$

Bei Superposition Energien nicht addieren!

Gesamtenergiedichte

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} + \frac{\mathrm{d}E_{el}}{\mathrm{d}V} = \rho v^2\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}(x-vt)}\right)^2 = \rho v^2 f'^2$$

$\xi(x,t) = f(u)$ mit $u = x - vt$, $f'^2 = \frac{\partial f}{\partial u}$

Superposition
Harmonische Wellen

$$\xi = \underbrace{A\sin(kx-\omega t)}_{\xi_1(x,t)} + \underbrace{A\sin(k(x+\Delta x)-\omega t+\delta)}_{\xi_2(x,t)} = \underbrace{2A\cos\left(\frac{1}{2}(\delta+k\Delta x)\right)}_{\text{Amplitude}}\underbrace{\sin\left(kx-\omega t+\frac{1}{2}(\delta+k\Delta x)\right)}_{\text{harmonische Welle}}$$

Kontruktive/Destruktive Interferenz

$\frac{1}{2}(\delta+k\Delta x) = n\pi \qquad \frac{1}{2}(\delta+k\Delta x) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

Reflexion/Transmission
Auftreffend Welle: $\xi_A = Ae^{i(k_1x-\omega t)}$

Transversal: $k_2 = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{S_2}}$, $\alpha = \sqrt{\frac{S_2\rho_2}{S_1\rho_1}}$

Reflektierte Welle: $\xi_R = Re^{i(-k_1x-\omega t+\delta_R)}$

Longitudinal: $k_2 = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}$,$\alpha = \sqrt{\frac{E_2\rho_2}{E_1\rho_1}}$

Transmitierte Welle: $\xi_T = Te^{i(k_2x-\omega t+\delta_T)}$

gesucht: $R, T, \delta_R, \delta_T, k_2$

Phase: $\delta_R = 0 \qquad \delta_R = \pi \qquad \delta_T = 0$

Amplitude: $R = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}A \qquad R = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}A \qquad T = \frac{2A}{1+\alpha}$ $\qquad (R \geq 0)$

Spezialfall festes (Seil-)Ende ($\alpha\to\infty$)

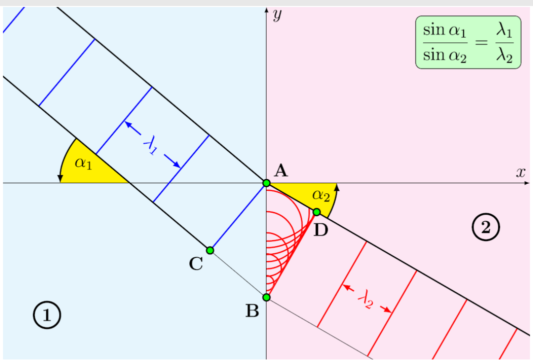
$\underbrace{\delta R = \pi}_{\pi \text{ Phasensprung}} \qquad \lim_{\alpha\to\infty} R = A \qquad \lim_{\alpha\to\infty} T = 0$

($\alpha = 0$ nur bei übergang zu Vakuum. mech. Welle kann nicht ins Vakuum, d.h $T = 0$ statt $T = 2A$)

loses (Seil-) Ende ($\alpha \to 0$)

$\underbrace{\delta R = 0}_{\text{kein Phasensprung}}$, $\lim_{\alpha\to\infty} R = A$, $\lim_{\alpha\to\infty} T = 0$

Snellius'sche Brechungsgesetz



$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Fermat'sches Prinzip

Nach dem Fermat'schen Prinzip läuft eine Welle bei Reflexion und Brechung, stets jenen Weg, für den die Laufzeit einer Phasenfläche Φ zwischen zwei Punkten minimal wird.

Wellen

Stehende Wellen
gegeenlaufende Harmonische Wellen

$$\xi(x,t) = \underbrace{A\sin(kx-\omega t)}_{\xi_1(x,t)} + \underbrace{A\sin(kx+\omega t+\delta)}_{\xi_2(x,t)} = \underbrace{2A\sin\left(kx+\frac{\delta}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right)}_{\text{harmonische Welle}}$$

Saite fest-fest (n-te Normalschwingung)

$$\xi_n(x,t) = A_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\tfrac{n\pi}{l}vt+\varphi_n\right)$$

Saite fest-offen

$$\xi_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}vt+\varphi_n\right)$$

Prinzip von Huygens

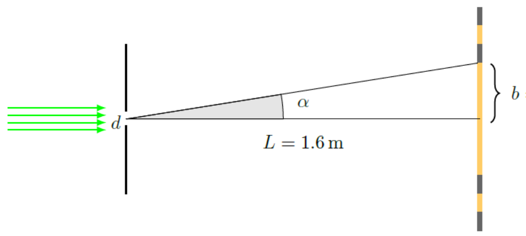
Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfläche (bzw. Wellenfront) wird als Zentrum einer neuen kugelförmigen Elementarwelle aufgefasst. Die Umhüllende dieser Elementarwellen ergibt dann die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

Einzelspalt

$$\langle I\rangle \propto A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi = kd\sin(\alpha)$$

$\Delta\varphi$ Phasendifferenz

Beispiel



$\langle I\rangle \sim A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}{\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)^2}$, mit
$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\alpha$ I verschwindet bei $\frac{1}{2}\Delta\varphi = n\pi, n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow d = n\frac{\lambda}{\sin\alpha} = n\frac{\lambda}{b/L}$

Maxwell-Gleichungen

Physikalisches gaußsches Gesetz

$$\operatorname{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \iff \oint_{\partial V}\vec{D}\cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho dV = Q(V) \qquad \text{Gauss}$$

Das $\vec{D}$-Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung (Ladungsdichte ρ) ist Quelle des elektrischen Feldes.

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist direkt proportional zu der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

Quellenfreiheit des B-Feldes

$$\operatorname{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \iff \oint_{\partial V}\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{Gauss}$$

Das $\vec{B}$-Feld ist quellenfrei. Es gibt keine magnetischen Monopole.

Der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche eines Volumens ist gleich der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \iff \oint_{\partial A}\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\iint_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{A} \qquad \text{Stokes}$$

Jede Änderung des $\vec{B}$-Feldes führt zu einem elektrischen Gegenfeld. Die Wirbel des elektrischen Feldes sind von der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte abhängig.

Die (elektrische) Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

Durchflutungsgesetz

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \iff \oint_{\partial A}\vec{H}\cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j}_l\cdot d\vec{A} + \iint_A \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{A} \qquad \text{Stokes}$$

Die Wirbel des Magnetfeldes hängen von der Leitungsstromdichte $\vec{j}_l$ und von der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$ ab. Die zeitliche Änderung von $\vec{D}$ wird auch als Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_v$ bezeichnet und ergibt als Summe mit der Leitungsstromdichte die totale Stromdichte $\vec{j}_{total} = \vec{j}_l + \vec{j}_v$

Die magnetische Zirkulation über der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der Summe aus dem Leitungsstrom und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Fläche.

Elektrostatik

Elektrische Feldstärke	$\vec{E} = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad \vec{F} = q\vec{E}$	$[E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
für n Ladungen	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\lvert\vec{r}-\vec{r}_i\rvert^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$	
Ladungsverteilung	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r')}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}(\vec{r}-\vec{r}')\ \mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'\ \mathrm{d}z'$	(Ladungsdichte ρ)
Punktladung	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^2}$	
Kugeloberfläche	$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^2} & r > R \end{cases}$	**∞-Draht** $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$
∞-Zylinder	$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\lambda\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$	**∞-Ebene** $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Coulombsches Gesetz	$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
Earnshaw-Theorem	Kein System stationärer Ladung ist in einem stabilen Gleichgewicht unter der alleinigen Wirkung elektrischer Kräfte	
Elektrische Flussdichte	$D = \epsilon E = \epsilon_0\epsilon_r E \qquad (\epsilon_r = 1 + \chi_e)$	$[D] = \frac{C}{m^2}$
Elektrischer Fluss	$\Psi_D = \int_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad \Psi_E = \int_A \epsilon_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$	$[\Psi] = C(Coulomb) = As$
bei geschlossener Oberfläche	$\Psi_D = \oint_{\text{Hülle}} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_{umschlossen}$	$\Psi = CU = Q$
Elektrischer Fluss im Vakuum	$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\Psi}{\epsilon_0} = \int_{\partial V} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{a}$	
Gaussches Gesetz	$\Phi = \int_{\partial V} \epsilon_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{a} = \int_V \rho\ \mathrm{d}V = \sum_V q = Q$	$\Psi_D = \oint_{\text{Hülle}} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = Q_{frei}$
Energiedichte	$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$	
Potentielle Energie	$W = \int_V w\ \mathrm{d}V = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\ \mathrm{d}V$	
E-Feld konservativ	$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\phi$	
Potentialdifferenz	$U_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$	$[U] = V$
Potential mehrere Ladungen	$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r'})}{\lvert\vec{r}-\vec{r'}\rvert}\ \mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'\ \mathrm{d}z'$	
Potentielle Energie einer Ladungsverteilung (ρ)	$W = \frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3} \phi(\vec{r})\rho(\vec{r})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$	
Potentiale einfacher Ladungsverteilung	$U_{BA} = E\Delta z$	Plattenkondensator
	$U_{BA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	Punktladung
	$U_{BA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+R^2}}$	Ringladung
	$U_{BA} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$	Scheibe

Elektrische Leiter

(1) Das elektrische Potential ϕ besitzt im Innern und auf der Oberfläche denselben Wert (Oberflächen sind Äquipotentialflächen).
(2) Das E-Feld verschwindet im Innern und ist ausserhalb orthogonal auf die Oberfläche

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

(σ lokale Flächenladungsdichte,
$\vec{n}$ Normalenvektor)

(3) Je kleiner Krümmung der Oberfläche, umso grösser die Oberflächeladungsdichte σ.
(4) Die Gesamtladung ist durch Integration über die Oberfläche gegeben

$$q = \int_A \sigma \text{ d}a = \varepsilon_0 \int_A E \text{ d}a$$

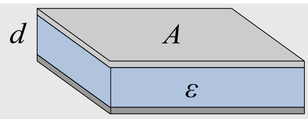
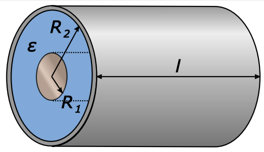
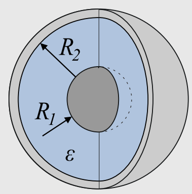
Magnetostatik

Magnetische Flussdichte Gesetzt von Biot-Savart Ladungsdichte	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{(\mathbf{J}dv)\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{(Id\mathbf{l})\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$	$[B] = \text{T} = \frac{\mathbf{Wb}}{\text{m}^2}$ $\quad \mathbf{B} = \nabla \times A$
Magnetische Feldstärke Magnetische Hilfsgrösse	$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ M ist Magnetisierung	$[H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$
Magn. Materialgleichung magn. Permeabilitätμ	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$	$(\mu_r = 1 + \chi_m)$
Magnet. Vektorpotential	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}dv}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\mathbf{l}}{R}$	$[A] = Wb/m$ (nicht Fläche A)
Magnetische Spannung und Umlaufsspannungμ	$V_m = \int_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}, \quad \mathring{V}_m = \oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$	$[V_m] = A$
Magnet. Dipolmoment (einer Stromschleife)	$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{n}}IA \quad (\hat{\mathbf{n}} \perp A) \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$	$[m] = \text{Am}^2$
Magnetisierung (im linearen Bereich)	$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} = \frac{d}{dv}\left[\sum_n \mathbf{m}_n\right]_{\text{in } dv} = N_m\mathbf{m}$	$[m] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$
Magnetischer Fluss und magn. Widerstand R_m	$\Phi = \int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \frac{V_m}{R_{m\vert}} = V_m\Lambda$	$[\Phi] = Wb = Tm^2$
Induktivität Selbst- & Gegeninduktivität	$L = \frac{\Phi_1}{I_1} = L_a + L_i, \quad M = \frac{\Phi_2}{I_1} = k\sqrt{L_1L_2}$	$[L] = [M] = H$ (nicht Magnet.M!)
Gespeicherte Energie einer Induktivität	$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}$	$[W_m] = J = Ws$
Energiedichte des magnetischen Felds	$w_m = \frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$	$[w_m] = \frac{J}{m^3}$
Magnetkraft Maxwellsche Zugkraftformel	$\mathbf{F} = \frac{dW_m}{dl}\hat{\mathbf{l}} = \frac{B^2A}{2\mu_0}\hat{\mathbf{n}} \quad (\hat{\mathbf{n}} \perp A)$	$[F] = N$
Ampèresche Gesetze Durchflutungssatz $\Theta = \mathring{V}_m$	$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\int_A \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s}, \quad \oint_{C=\partial A} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_A \mathbf{J_{frei}}\cdot d\mathbf{s} = \Theta$	
Gaussches Gesetz Flusskontinuität	$\oint_{\text{Hülle}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_n \Phi_n = 0$	

Stationäre Strömung

Stromdichte Bewegte Ladungsdichte	$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}$	$[J] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$
Elektrische Leitfähigkeit Konduktanz	$\sigma = \underbrace{n_e q_e}_{\rho} \mu_e$	$(+n_p q_p \mu_p)$ $[\sigma] = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$
Elektrischer Strom Elektrische Strömung	$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{dQ}{dt}\Big\vert_{\text{durch } A}$ $(Il = q\mathbf{v})$	$[I] = \mathbf{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$
Leitwert (Kehrwert: Widerstand)	$G = \frac{I}{U} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I}$	$[G] = \mathrm{S} = \frac{1}{\Omega}$
Leistung am Widerstand/Leitwert	$P = UI = \frac{U^2}{R} = GU^2 = I^2 R = \frac{I^2}{G}$	$[P] = \mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$
Leistungsdichte des Strömungsfelds	$p = \frac{dP}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2$	$[p] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}$
Gausssches Gesetz Kirchhoffscher Knotensatz	$\oint_{\text{Holle}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_n I_n = 0$	

Kondensator

Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	$[C] = F = \frac{C}{V}$
Plattenkondensator	$C = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \cdot \frac{A}{d} \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} A}$	
Zylinderkondensator	$C = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad E(r) = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}}$	
Plattenkondensator	$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$ $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}}$	

Bsp: $Q = \int_{kugel} \epsilon_0 E(r) dA = \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2$ mit $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ und $U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$

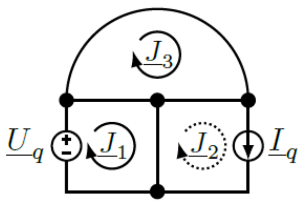
Gespeicherte Energie einer Kapazität	$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$	$[W_e] = J = Ws$
Energiedichte eines Elektrischen Feldes	$w_e = \frac{\delta W_e}{\delta v} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$	$[w_e] = \frac{J}{m^3} = \frac{Ws}{m^3}$
Serie / Parallelschaltung	$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$ resp. $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$	
DGL Kondensator	$\frac{\delta u_c}{\delta t} = \frac{i_c}{C}$	
Lade / Entladestrom Kondensator	$I_L(t) = \frac{U_0}{R} \exp^{-\frac{t}{RC}} = -I_E(t)$	$\tau = RC$ mit 5τ lade/entlade Zeit

Induktivität

Induktivität Selbst- & Gegeninduktivität	$L = \frac{\Phi_1}{I_1} = L_a + L_i, \quad M = \frac{\Phi_2}{I_1} = k\sqrt{L_1 L_2}$	$[L] = [M] = H$ (nicht Magnet.M!)
Spule	$L = \frac{AN^2}{l} = \mu_0 \frac{AN^2}{l}$	$[C] = F = \frac{C}{V}$
Gespeicherte Energie einer Induktivität	$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}$	$[W_L] = J = Ws$
Differentialgleichung Dynamik an Induktivitäten	$\frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L}$ bzw. $\frac{di_1}{dt} = \frac{u_2}{M}$	(Zeitkonstante: $\tau = L/R$)

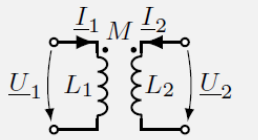
Systematische Netzwerkanalyse

Maschen-/Kreisstrommethode



$$\underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{u}}$$

Transformator U(I)

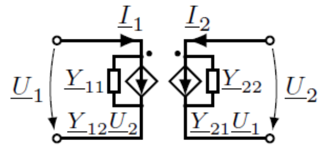


$$\begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix} = j\omega \underbrace{\begin{bmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{Z}}_T} \begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix}$$

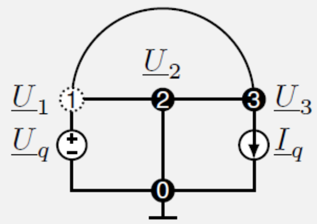
- Unbekannte: Maschen- bzw. Kreisströme $\underline{\mathbf{j}}$
  - Anzahl Unbekannte: $m - 1 - i$
- Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$:
  - $\underline{Z}_{xx} = \left[\sum_n \underline{Z}_n\right]_{\text{in } \underline{J}_x}$
  - $\underline{Z}_{xy} = \pm \left[\sum_n \underline{Z}_n\right]_{\text{in } \underline{J}_x \cap \underline{J}_y}$
  - Steuerparameter von gesteuerte Quellen
- (Spannungs-) Quellenvektor $\underline{\mathbf{u}}$:
  - $\underline{U}_x = \mp \left[\sum_n \underline{U}_{q,n}\right]_{\text{in } \underline{J}_x}$ (pos.: $\underline{U}_{q,n}$ entg. $\underline{J}_n$)

Knotenpotentialmethode

Ersatzschaltung I(U)



$$\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}_T^{-1} \begin{bmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{bmatrix}$$



$$\underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{i}}$$

- Unbek.: Knotenspannungen $\underline{\mathbf{u}}$ (bzw. Potentiale $\underline{\varphi}$)
  - Anzahl Unbekannte: $k - 1 - v$
- Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$:
  - $\underline{Y}_{xx} = \left[\sum_n \underline{Y}_n\right]_{\text{an } \underline{U}_x}$
  - $\underline{Y}_{xy} = -\left[\sum_n \underline{Y}_n\right]_{\text{an } \underline{U}_x \,\&\, \underline{U}_y}$
  - Steuerparameter von gesteuerte Quellen
- (Strom-) Quellenvektor $\underline{\mathbf{i}}$:
  - $\underline{I}_x = \pm \left[\sum_n \underline{I}_{q,n}\right]_{\text{an } \underline{U}_x}$ (positiv: in $\underline{U}_x$ *hinein*)

Schwingkreise

Kreisgüte Serie-SK: Q_S, Parallel-SK:Q_P	$Q = \frac{1}{B_{\text{rel}}} = \frac{\omega_m W}{P} \Rightarrow Q_S = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, Q_P = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$	
Resonanzfrequenz Eigenfrequenz $\omega_0 = \omega_{r\text{verlustlos}}$	$\omega_r : \operatorname{Im} Z(\omega_r) = 0$ bzw. $\operatorname{Im} Y(\omega_r) = 0$	
Extremalfrequenz Bandbreite$B = \omega_m \pm \omega_{3dB}$	$\omega_m = \arg \max\limits_{\omega} \lvert Z(\omega)\rvert$ bzw. $\omega_m = \arg\max_\omega \lvert Y(\omega)\rvert$	
Dämpfungsgrad Zeitkonstante τ	$\zeta = \frac{1}{2Q} = \frac{1}{\omega_0 \tau}$	$[\zeta] = 1$
Natürliche Frequenz Gedämpfte Eigenfrequenz	$\omega_n = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$	$[\omega_n] = \text{rad/s}$
Natürliche Schwingung Freies Ausschwingen	$a(t) = a_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \sin(\omega_n t + \phi)$	$a(t) = u(t)$ bzw. $i(t)$
Verstimmung normierte(r) Frequenz(gang)	$\nu = \frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega}$	$\Omega = \nu Q \qquad \frac{Z}{R} = 1 + j\Omega$

Spezielle Relativitätstheorie

Vierervektor x^μ
Kontravarianter Vierervektor

$$x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

$$x_\mu = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^\mu$$

Metrischer Tensor
x_μ Kovarianter Vierervektor

$$x_\mu = g_{\mu v} x^v$$

$$g_{\mu v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

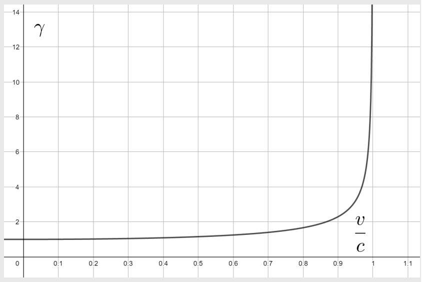
Gallileitransformation

$$x'^{\mu} = M_G^{\mu v} x_v$$

$$M_G^{\mu v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grundlagen Einstein RT

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c}$$



Zeitdilitation

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Längenkontraktion

$$l = \frac{l'}{\gamma}$$

Lorentz-Transformation

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) \\ x \\ y \\ \gamma(z - vt) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} z'\right) \\ x \\ y \\ \gamma(z' + vt') \end{bmatrix}$$

($\mathcal{K} \xrightarrow{v_z} \mathcal{K}'$: für $\vec{v} = v\vec{e_z}$ eine Bewegung des Systems $\mathcal{K}'$ in z-Richtung)

$$x'^\mu = \Lambda_\mu^\nu x^\nu$$

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

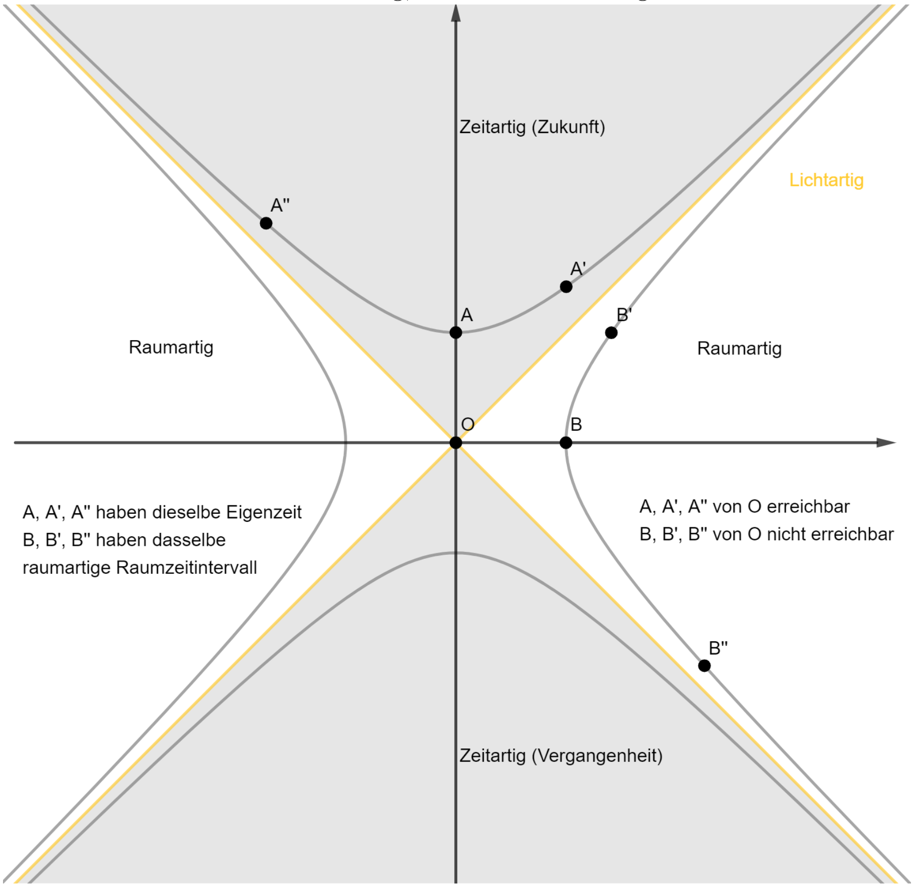
Metrischer Tensor

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Spezielle Relativitätstheorie

Raumzeit-Intervall $\Delta s^2 > 0$ Zeitartig, $\Delta s^2 < 0$ Raumartig



$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta\vec{r}^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu$$

Geschwindigkeitsaddition $u' = \dfrac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$ und $u = \dfrac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}$ u' Geschwindigkeit in $\mathcal{K}'$, wobei $\mathcal{K} \xrightarrow{v} \mathcal{K}'$

Ruheenergie $E_0 = mc^2$

Vierergeschwindigkeit/-impuls $u^\mu = \begin{bmatrix} c\gamma \\ c\gamma\vec{\beta} \end{bmatrix}$ $p^\mu = \begin{bmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix}$

$E = m\gamma c^2$ und $\vec{p} = m\vec{v}\gamma$

Betragsquadrat des Viererimpulses $p^2 = p^\mu p_\mu = \dfrac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$

Kraft $m\gamma\vec{a} = \vec{F} - \dfrac{1}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v}$

Allgemeiner Dopplereffekt des Lichts $\cos(\vartheta) = \dfrac{\cos\vartheta' + \beta}{1+\beta\cos\vartheta'}$ $\dfrac{f}{f'} = \dfrac{1}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)}$

($\mathcal{K}'$ bewegt sich mit v in pos z-Richtung rel. zu $\mathcal{K}$ mit ϑ' Aussendungswinkel zur z-Achse)

Longitudinaler Dopplereffekt des Lichts $\left.\dfrac{f}{f'}\right|_{\vartheta=0} = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \geq 1$

Transversaler Dopplereffekt des Lichts $\left.\dfrac{f}{f'}\right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-\beta^2} < 1$