

BAB VIII

MODEL ANTRIAN

1.1 Definisi dan Pengenalan

Antrian adalah menunggu giliran untuk mendapatkan pelayanan dari suatu fasilitas, misalnya antri dalam membeli karcis, berobat ke dokter, pelayanan dari apotek, kasir bank, kasir restaurant hingga antrian dalam *parking stand* sebuah bandar udara. Dengan kata lain orang atau barang yang perlu dilayani terlalu banyak dibandingkan dengan kemampuan fasilitas yang ada. Akibatnya adalah akan terjadi keterlambatan, kekecewaan, atau akibat lain yang membawa kerugian, tetapi apabila terjadi hal yang sebaliknya, dimana kapasitas pelayanan jauh melebihi kebutuhan akan terjadi pula masalah yaitu pengangguran fasilitas pelayanan yang tentu saja akan membawa konsekuensi pemborosan (Subagyo, 2011). Pada teori antrian ini akan dibahas akibat yang timbul karena keadaan antrian tertentu serta pengaturan antrian agar diperoleh hasil optimal (Subagyo, 2011).

Berikut adalah contoh pengaplikasiannya:

Pelayanan terhadap nasabah Tabanas Bank ABC adalah sebagai berikut: Kapasitas pelayanan rata-rata 10 kali setiap jam, berarti pelayanan memerlukan waktu 6 menit, sedangkan kedatangan orang/ nasabah setiap jam rata-rata 6 orang. Waktu kedatangan bersifat random tertera pada tabel berikut:

Nasabah ke-	Jam Datang	Jam Pelayanan		Waktu Menganggur	Waktu Tunggu	Panjang Antrian
		Mulai	Selesai			
1	8.07	8.07	8.13	0	0	0
2	8.14	8.14	8.20	1 menit	0	0
3	8.25	8.25	8.31	5 menit	0	0
4	8.39	8.39	8.45	8 menit	0	0
5	8.43	8.45	8.51	0	2 menit	1
6	8.56	8.56	9.02	5 menit	0	0

Semisal:

- Nasabah pertama datang pada pukul 8.07, ia dilayani selama 6 menit dan selesai pukul 8.13. Di sini tidak ada pengangguran dari petugas dan nasabah tidak menunggu serta tidak ada antrian.

- Nasabah ke 2 datang pukul 8.14, jadi terjadi pengangguran petugas yang melayani selama 1 menit, nasabah dilayani selama 6 menit , selesai pukul 8.20, nasabah tidak menunggu giliran dan tidak ada antrian.
- Nasabah ke 3 datang pukul 8.25 sehingga terjadi pengangguran petugas selama 5 menit . Ia selesai dilayani pada pukul 8.31. Nasabah tidak perlu menunggu giliran dan tidak ada antrian.
- Nasabah ke 4 datang pukul 8.39. di sini petugas bank menganggur selama 8 menit. Nasabah selesai dilayani pukul 8.45. Nasabah ini tidak menunggu giliran, tetapi nasabah ke 5 datang pukul 8.43 sehingga ia harus menunggu selama 2 menit, karena petugas masih melayani nasabah ke 4
- Pelayanan nasabah ke 5 baru dimulai pukul 8.45 dan selesai pada 8.51, tidak terjadi pengangguran petugas dan ada 1 yang mengantri.

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa **masih terdapat pengangguran di pelayanan, oleh karenanya untuk mengurangi pengangguran dapat dikurangi petugas di bagian pelayanan sehingga kapasitas pelayanan dimisalkan menjadi 9 menit per nasabah.** Pengangguran jumlah karyawan ini akan **mengurangi biaya untuk mengeluarkan gaji, tetapi disisi lain waktu tunggu nasabah akan semakin panjang.** Berikut adalah hasilnya:

Nasabah ke-	Jam Datang	Jam Pelayanan		Waktu Menganggur	Waktu Tunggu	Panjang Antrian
		Mulai	Selesai			
1	8.07	8.07	8.16	0	0	0
2	8.14	8.16	8.25	0	2 menit	1
3	8.25	8.25	8.34	0	0	0
4	8.39	8.39	8.48	5 menit	0	0
5	8.43	8.48	8.57	0	5 menit	1
6	8.56	8.57	9.06	0	1 menit	1

Dari tabel di atas dapat diketahui bahwa semakin lama waktu pelayanan maka akan mengurangi waktu memnganggur petugas, tetapi disisi lain menambah panjang antrian. **Akibatnya adalah** berkurangnya biaya atau pengorbanan yang disebabkan oleh pengangguran fasilitas, namun menambah biaya yang disebabkan karena bertambahnya waktu tunggu. Dalam hal ini, tentu saja akan dicari solusi yang meminimumkan kedua biaya tersebut.

1.2 Beberapa Model Teori Antrian

Tujuan dari model-model antrian adalah guna meminimumkan seluruh biaya baik itu biaya yang disebabkan oleh adanya pengangguran fasilitas (biaya perawatan, gaji pegawai yang menganggur) maupun biaya yang disebabkan karena (orang/ barang) menunggu pelayanan, sehingga berpotensi menimbulkan kerugian, semisal adalah berpindahnya pelanggan ke tempat lain dengan pelayanan waktu tunggu yang lebih singkat, biaya hiburan atau konsumsi selama konsumen menunggu dan sebagainya.

Dalam mencari solusi mengenai permasalahan antrian tersebut, maka dapat dilakukan dengan pemecahan analitis yang relatif lebih sederhana apabila dibanding dengan model simulasi, sehingga pada materi bab ini hanya akan dibahas mengenai pemecahan analitis (dengan model-model sederhana). Sebelumnya, berikut adalah pengertian-pengertian dasar dalam teori antrian yang dapat diketahui (subagyo, 2011):

a. *Chanel*

Merupakan jalur, dimana melalui jalur tersebut masukan/ objek bisa mendapatkan pelayanan. Terkadang terdapat antrian yang memiliki lebih dari satu jalur yang memberikan pelayanan yang sama. **Contohnya adalah** dalam suatu supermarket terdapat beberapa loket kasir, sehingga konsumen tinggal memilih loket kasir dengan antrian terpendek atau kosong.

b. *Fase Pelayanan*

Contohnya adalah Fase pembayaran adalah tahap pembayaran. Masalah antrian bisa memiliki satu fase pembayaran, berarti objek hanya masuk satu kali dalam satu kesempatan pelayanan dan dapat pula memiliki lebih dari satu pelayanan, yang berarti masukan/ objek yang masuk pelayanan melalui beberapa tahap, mulai tahap pelayanan pertama, dilanjutkan pada tahap pelayanan kedua, hingga pada tahap pelayanan terakhir. **Contohnya adalah** dalam registrasi penerimaan mahasiswa baru, seorang calon mahasiswa harus melalui beberapa tahap, semisal tahap pembayaran, pelayanan pengambilan formulir, tahap pemeriksaan serta penerimaan kembali formulir.

c. *Sistem Antrian*

Merupakan keseluruhan dari kegiatan atau pelayanan yang diberikan kepada masukan, sejak ia datang hingga selesai dilayani. **Contoh dari sistem antrian yang paling sederhana adalah** memiliki satu jalur dan satu fase pelayanan (*Single chanel, single phase*)

d. Masukan (*input*)

Merupakan objek yang datang atau masuk ke dalam sistem dan memerlukan pelayanan. Masukan ini dapat bermacam-macam, dapat berupa orang, barang, dan bahkan alat transportasi (uji kir, pesawat di parking stand dll).

Terdapat dua jenis masukan, yakni masukan yang jumlahnya relatif banyak yang sering dianggap sebagai masukan jumlahnya tak terhingga dan masukan yang jumlahnya relatif sedikit yang sering disebut sebagai masukan yang terbatas jumlahnya. Banyak atau sedikitnya masukan ini bersifat relatif, artinya berjumlah relatif apabila dibandingkan dengan kapasitas pelayanan yang tersedia.

e. Pola Kedatangan (*arrival pattern*)

Merupakan sifat dari kedatangan masukan/ objek yang memerlukan pelayanan, yakni ada yang bersifat konstan atau ajeg atau setiap jangka waktu tertentu pasti ada objek yang datang, **contohnya adalah** barang yang harus dilayani oleh mesin dalam suatu proses produksi, yang pasti akan datang pada setiap jangka waktu tertentu. Berikutnya adalah pola kedatangan yang bersifat acak (random) atau tidak teratur (poisson), misal adalah jarak panggilan telepon pada suatu kantor.

f. Rata-rata Kedatangan

Merupakan rata-rata banyaknya masukan/ objek yang datang (memerlukan pelayanan) setiap jangka waktu tertentu. Misalnya bahwa setiap satu jam terdapat 6 objek yang datang. Rata-rata kedatangan biasanya **diberi simbol λ** , maka dalam hal ini $\lambda = 6$

g. Jangka Waktu antara Kedatangan

Merupakan jangka waktu mulai kedatangan suatu masukan/ objek dengan kedatangan masukan/objek berikutnya, yaitu selama $1/\lambda$, jadi dalam contoh di atas, maka jangka waktu antara kedatangan adalah $1/6$

h. Disiplin Antrian (*queue discipline*)

Merupakan aturan mengenai aturan pelayanan, yakni ketentuan mengenai siapa sebaiknya yang dilayani terlebih dahulu, apakah yang datang pertama dilayani terlebih dahulu (*first come first served*), ataukah yang datang belakang yang dilayani terlebih dahulu (*last come first served*), atau memberikan pelayanan secara random (*served it random order*), atau memberikan pelayanan dengan skala prioritas, semisal adalah pelayanan khusus untuk pasien rumah sakit yang dalam keadaan gawat. Disiplin antrian ini akan mempengaruhi analisis yang akan dilakukan.

i. Antrian

Merupakan kumpulan dari masukan/ objek yang menunggu pelayanan. Kapasitas antrian ini ada yang tidak terbatas berarti bisa menampung masukan/ objek yang menunggu, namun ada pula yang terbatas.

j. Panjang Antrian

Merupakan banyaknya masukan/ objek yang menunggu pelayanan karena fasilitas pelayanan masih melayani objek yang datang sebelumnya.

k. Tingkat Pelayanan

Merupakan kemampuan fasilitas pelayanan untuk melayani masukan/ objek selama satu periode tertentu. Tingkat pelayanan **diberi simbol μ** . Misalnya adalah dalam setiap jam, pelayanan mampu melayani sebanyak 8 orang, maka $1/\mu = 1/8$.

l. Traffic Intensity

Merupakan perbandingan antara rata-rata kedatangan dengan rata-rata kemampuan pelayanan terhadap masukan/ objek selama jangka waktu tertentu, **yakni sebesar λ/μ** . Distribusi ini sering disebut dengan **distribusi Erlang**.

m. Keluaran/ Output

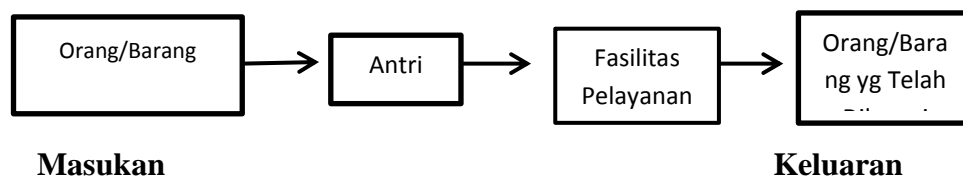
Merupakan masukan/ objek yang telah selesai dilayani, dan ia sudah bisa meninggalkan sistem.

n. Struktur Antrian

Terdapat berbagai cara pengklasifikasian struktur antrian, diantaranya dapat diklasifikasikan menurut banyaknya *channel*/ lajur atau diklasifikasikan berdasar banyaknya fase pelayanan yang ada. Pada dasarnya terdapat empat (4) macam struktur antrian sebagai berikut:

1) Single Chanel Single Phase

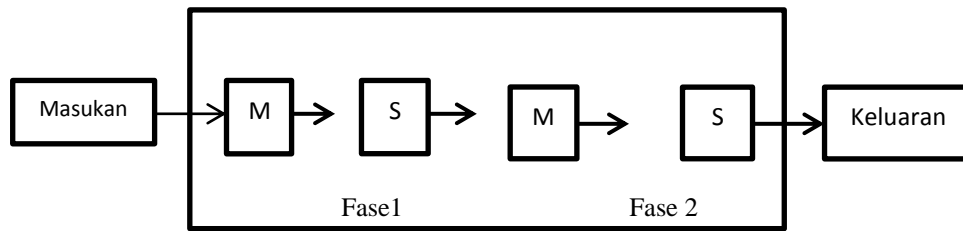
Dalam struktur antrian jenis ini, hanya memiliki satu jalur pelayanan dan dalam jalur itu hanya memiliki satu tahap pelayanan saja. Struktur ini adalah yang paling sederhana. Berikut adalah gambarnya:



2) Single Chanel Multiphase

Istilah *Multiphase* menunjukkan adanya dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan (dalam fase-fase). **Contohnya** adalah lini produksi

massal, pencucian mobil, pengecatan mobil dan sebagainya. Berikut adalah gambarnya:



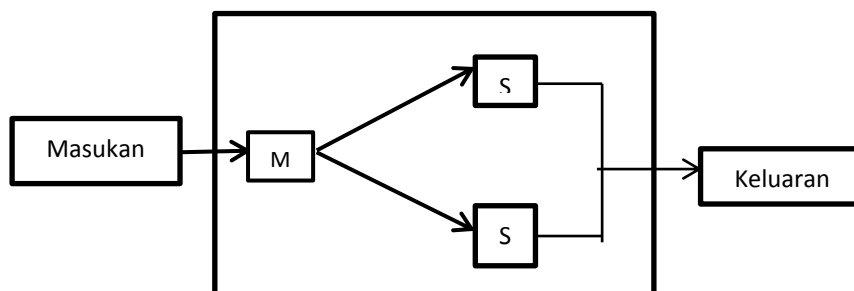
Keterangan:

M = Antrian

S = Fasilitas Pelayanan (Server)

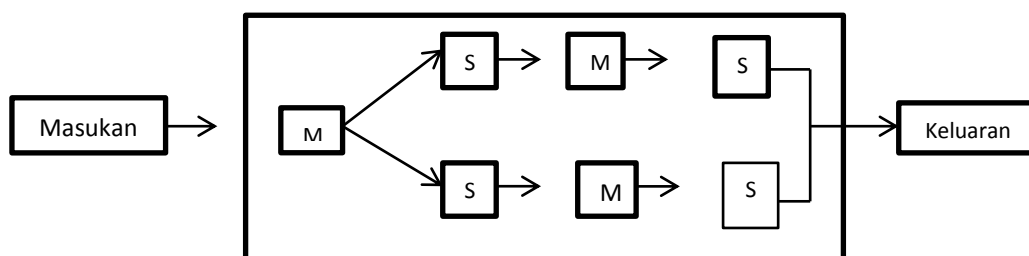
3) *Multi Chanel Single Phase*

Sistem ini terjadi kapan saja ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal. Contoh dari model ini adalah pelayanan potong rambut oleh beberapa tukang potong hingga pelayanan pesawat yang datang di parking stand. Berikut adalah gambarnya:



4) *Multichanel Multiphase*

Setiap sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani dalam satu waktu. Pada umumnya jaringan antrian ini terlalu kompleks untuk dianalisis dengan teori antrian, sehingga simulasi mungkin lebih sering digunakan untuk menganalisis sistem ini. Contoh dari sistem ini adalah her registrasi mahasiswa di universitas atau pelayanan pasien di sbuah rumah sakit. Berikut adalah gambarnya:



Dalam memecahkan masalah antrian, seperti yang telah dikemukakan sebelumnya, maka terdapat beberapa macam model sesuai dengan masalah yang dihadapi. Terdapat model yang sederhana, ada yang lebih sulit dan ada yang sangat kompleks. **Berikut adalah faktor yang menentukan model-model tersebut:**

1. Distribusi Kedatangan

Maksudnya adalah distribusi kedatangan masukan (orang maupun barang yang perlu pelayanan). Dapat bersifat pasti, maka sering **diberi label D (*deterministic*)**, apabila distribusinya mengikuti distribusi tidak pasti (*probabilistic*), **atau Possion atau Markov maka diberi simbol M** dan kalau **mengikuti distribusi Erlang, maka diberi simbol E**

2. Distribusi Pelayanan

Maksudnya adalah distribusi kemampuan pelayanan bisa bersifat pasti, atau mengikuti distribusi Possion atau Erlang

3. Banyaknya Jalur Pelayanan

Banyaknya jalur pelayanan dinyatakan dengan angka, sesuai dengan banyaknya jalur yang ada

4. Banyaknya Masukan

Banyaknya masukan masuknya jumlah objek (orang atau barang) yang akan memasuki sistem. **Kalau bersifat tak terhingga diberi simbol I dan kalau terbatas diberi simbol F**

5. Maksimum Panjang Antrian

Maksimum panjang antrian maksudnya kemampuan antrian menampung masukan/ objek yang menunggu pelayanan. Bisa bersifat tak terhingga atau terbatas.

Penulisan simbol ini adalah sebagai berikut:

- Distribusi Kedatangan (a)
- Distribusi Pelayanan (b)
- Banyaknya Pelayanan (c)
- Jumlah Masukan (d)
- Maksimum Panjang (e)

Pada kegiatan belajar ini yang akan dibahas adalah model-model yang memiliki satu fase (*single phase*) sebagai berikut:

1. M/M/I/I (kedatangan dan pelayanan distribusi Possion, hanya ada satu fasilitas pelayanan, jumlah masukan tak terhingga dan panjang tak terbatas)
2. M/M/S/I (seperti model a tetapi ada beberapa fasilitas pelayanan)

- 1. Model 1: M/M/I/I**, dalam menghitung nilai-nilai yang berhubungan dengan masalah antrian model ini, dapat digunakan rumus-rumus sebagai berikut (Subagyo, 2011):

Rata-rata jumlah objek yang ada dalam antrian:

$$\bar{n}_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Rata-rata jumlah objek yang ada dalam sistem (dalam antrian maupun pelayanan):

$$\bar{n}_t = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Rata-rata waktu setiap objek/ masukan dalam antrian:

$$\bar{t}_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Rata-rata waktu setiap masukan/ objek berada dalam sistem (termasuk dalam antrian):

$$\bar{t}_t = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Probabilitas ada n individu berada dalam sistem:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Rata-rata banyaknya objek dalam fasilitas pelayanan:

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

Jumlah biaya yang ditanggung = biaya pelayanan + biaya menunggu:

$$E(C_t) = SC_s + n_q C_w$$

Dimana:

S = Jumlah jalur pelayanan yang ada

C_s = Biaya pelayanan pusat/ jalur pelayanan setiap jam

C_w = Biaya yang timbul karena masukan menunggu dalam antrian tiap jam tiap masukan

Berikut adalah contoh pengaplikasiannya:

Suatu toko variasi mobil memiliki data bahwa selama satu jam rata-rata terdapat 3 orang pembeli yang datang. Kapasitas pelayanan yang ada rata-rata mampu melayani 8 pelanggan/ pembeli. Hitunglah:

- Rata-rata jumlah pelanggan yang mengantri sebelum dilayani
- Rata-rata jumlah pelanggan yang ada dalam toko itu baik yang menunggu pelayanan maupun yang sedang dilayani
- Rata-rata lama pelanggan antri sebelum dilayani
- Rata-rata lama pelanggan berada di toko itu , baik untuk antri maupun yang sedang dilayani
- Probabilitas ada pelanggan yang ada di toko itu baik yang antri maupun sedang dilayani
- Rata-rata banyaknya pelanggan yang sedang dilayani
- Apabila biaya pelayanan per jam adalah Rp. 500,- dan biaya karena pelanggan menunggu setiap jam adalah Rp.100, maka hitunglah jumlah seluruhnya setiap jam

Penyelesaian:

Diketahui:

$$\lambda = 3; \mu = 8$$

a. $n_q = 3^2/8(8-3) = 0,225$ orang

b. $n_t = 3/(8-3) = 0,6$

c. $t_q = 3/8(8-3) = 0,075$

d. $t_t = 1/(8-3) = 0,2$ jam

e. $P_n = (1-3/8) (3/8)^n$ dihitung untuk $n=0,1,2,3$ dan seterusnya, hasilnya adalah:

$n:$	0	1	2	3	4	5	6	7	>8
$P_n:$	0,625	0,234	0,088	0,033	0,012	0,005	0,002	0,001	0

f. $n_s = 3/8 = 0,375$

g. $E(Ct) = 500 + 0,225 (100) = 522,5$

2. Model 2: M/M/S/I/I

Model ini mirip dengan model 1, hanya saja terdapat lebih dari satu fasilitas pelayanan (*multichanel*). Sesuai dengan permasalahan yang telah diutarakan sebelumnya, rumus-rumus untuk permasalahan ini adalah sebagai berikut:

Rata-rata jumlah objek yang ada dalam antrian

$$n_q = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$$

Rata-rata jumlah objek yang ada dalam sistem (dalam antrian maupun dalam pelayanan):

$$\bar{n}_t = \bar{n}_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Rata-rata waktu setiap masukan/ objek dalam antrian:

$$\bar{t}_q = \frac{P_o}{\mu S(S!) [1 - (\lambda/S\mu)]^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s$$

Rata-rata waktu setiap masukan/ objek berada dalam sistem (termasuk dalam antrian):

$$\bar{t}_t = \bar{t}_q + \frac{1}{\mu}$$

Rata-rata banyaknya objek dalam fasilitas pelayanan:

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda}{S\mu}$$

Jumlah biaya yang ditanggung = biaya pelayanan ditambah biaya menunggu:

$$E(C_t) = S C_s + n_t C_w$$

Probabilitas tidak ada masukan/ objek dalam sistem:

$$P_o = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s / S! (1 - \frac{\lambda}{S\mu})}$$

Probabilitas masukan harus menunggu dalam antrian:

$$P_w = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{P_o}{S! \left[1 - \left(\frac{\lambda}{S\mu}\right)\right]}$$

Berikut adalah contoh pengaplikasiannya:

Sebuah supermarket memiliki 3 *counter*. Setiap pembeli harus melalui salah satu diantara ketiga counter untuk dihitung harga barang yang dibelinya dan untuk membayar. Lama setiap pelanggan dilayani dalam counter itu rata-rata 2 menit. Kedatangan pelanggan yang membayar berdistribusi Poisson, yaitu rata-rata ada 50 orang setiap jam. Hitunglah:

- Probabilitas tidak ada pelanggan yang datang untuk membayar
- Rata-rata jumlah pelanggan yang antri sebelum dilayani
- Rata-rata jumlah pelanggan yang ada dalam supermarket, baik yang menunggu untuk dilayani maupun yang sedang dilayani
- Rata-rata setiap pelanggan antri sebelum dilayani
- Rata-rata lama pelanggan berada di supermarket baik untuk antri maupun untuk dilayani

- f. Rata-rata banyaknya pelanggan yang sedang dilayani
- g. Apabila biaya pelayanan setiap jam Rp. 300,- dan biaya karena pelanggan menunggu per orang per jam adalah Rp. 200,- maka berapakah seluruh biaya yang harus dikeluarkan dalam sistem itu?
- h. Probabilitas seorang pelanggan harus menunggu dalam antrian

Penyelesaian:

Diketahui:

$$\lambda = 50; \mu = 30; S = 3$$

$$a. P_0 = \frac{1}{\frac{(50/30)^0}{0!} + \frac{(50/30)^1}{1!} + \frac{(50/30)^2}{2!} + \frac{(50/30)^3}{3!(1 - \frac{50}{3 \cdot 30})}} = 0,2086$$

$$b. n_q = \frac{50(30)(\frac{50}{30})^3}{2!(3 \cdot 30 - 50)^2} \times 0,2086 = 0,4527$$

$$c. \bar{n}_t = 0,4527 + \frac{50}{30} = 2,12 \text{ orang}$$

$$d. t_4 = \frac{0,2086}{30 \cdot 3 \cdot 3! \left[1 - \frac{50}{3 \cdot 30}\right]^2} \left(\frac{50}{30}\right)^3 = 0,009$$

$$e. \bar{t}_t = 0,009 + \frac{1}{30} = 0,00029$$

$$f. \bar{n}_s = \frac{50}{3(30)} = 0,5556 = 0,56$$

$$g. E(C_t) = 3(Rp.300,-) + 2,12 (Rp.200,-) = Rp.1324,-$$

$$h. P_w = \left(\frac{50}{30}\right)^3 \frac{0,2086}{3! \left[1 - \left(\frac{50}{3(30)}\right)\right]} = 0,36$$