6. Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов Римана. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов. *Признак Харди.

Опр Пусть $f \in R[a, \tilde{b}]$, $\forall \tilde{b}$, $a < \tilde{b} < b \le +\infty$.

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ будем понимать два случая:

1) $b < +\infty$, f - неограничена на $[a, b]$ (второго рода)

2) $b = +\infty$ (первого рода)

Опр Несобственным интегралом Римана называется

$\lim\limits_{\tilde{b} \to b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x)\,dx = \int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Если предел $\exists$ и конечен, то

($\tilde{b} \to +\infty$, если $b = +\infty$) несобственный интеграл наз-ся сходящимся,

иначе - расходящимся.

T1 (Критерий Коши сх-сти несобственных интегралов).

Пусть $f \in R[a, \tilde{b}]$ $\forall \tilde{b}$, $a < \tilde{b} < b$. Тогда $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сх-ся $\Leftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B,\ a < B < b)(\forall B_1, B_2,\ B < B_1 < B_2 < b) \to \left|\int_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

$= F(B_2) - F(B_1)$

Док-во $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

F определена на $[a, b)$; сх-ть $\int_a^b f(t)\,dt \Leftrightarrow \exists$ конечный

$\lim\limits_{\tilde{b} \to b-0} F(\tilde{b})$ $\quad |F(B_2) - F(B_1)| < \varepsilon$

ч.т.д.

T2 (Признак сравнения для несобственных интегралов

Если $g(x) \ge f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a, b)$, $f, g \in R[a, \tilde{b}]$ $\forall \tilde{b}$, $a < \tilde{b} < b$

то

1) $\int_a^{\to b} g(x)\,dx$ - сх-ся $\Rightarrow \int_a^{\to b} f(x)\,dx$ - сх-ся

2) $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ - расх-ся $\Rightarrow \int_a^{\to b} g(x)\,dx$ - расх-ся

Док-во $\int_a^b g(x)\,dx$ - сх-ся $\overset{T1}{\Rightarrow}$ $\int_a^x g(t)\,dt$ ограничен $(\le M)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $0 \le \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^x g(t)\,dt \le M$ $\forall x \in [a,b)$ $\overset{T1}{\Rightarrow}$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, $0 \le F(x) \le G(x)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ - сх-ся

ч.т.д.

Опр $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сх-ся абсолютно, если сх-ся $\int_a^{\to b} |f(x)|\,dx$,

$f \in R[a,\tilde b]$ $\forall \tilde b$, $a < \tilde b < b$. Если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сх-ся, но не абсолютно, то он сходится условно.

Лемма 1 Пусть $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$, $f \in R[a,\tilde b]$ $\forall \tilde b$, $a < \tilde b < b$.
Тогда $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена на $[a,b)$

Док-во $f(x) \ge 0 \Rightarrow F(x)$ неубывающая

ч.т.д.

Т3 Если $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, то он сходится

Док-во Абс. сх-ть $\overset{T1}{\Rightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B,\ a < B < b)\ (\forall B_1, B_2,\ B < B_1 < B_2 < b) \to$

$\to \left| \int_{B_1}^{B_2} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon$ $\quad \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx \right| \le \int_{B_1}^{B_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ - сходится

ч.т.д.

Т4 (Признак Дирихле). Если 1) $f \in R[a,\tilde b]$ $\forall \tilde b$, $a < \tilde b < b$ и
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена на $[a,b)$

2) g - монотонна на $[a,b)$ и бесконечно малая при $x \to b-0$,

то $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ - сх-ся

Док-во $\forall B_1 < B_2,\ a < B_1 < B_2 < b$. По формуле Бонне

$$\int_{B_1}^{B_2} f(x) g(x)\,dx = g(B_1)\int_{B_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(B_2)\int_{\xi}^{B_2} f(x)\,dx,\ B_1<\xi<B_2$$

$M: \forall x \in [a,b)\ \ |F(x)| \le M$

$$(\forall \varepsilon>0)\ (\exists B,\ a<B<b)\ (\forall x \in (B,b))\ |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

$$(\forall B_1, B_2,\ B<B_1<B_2<b)\ \left|\int_{B_1}^{B_2} f(x) g(x)\,dx\right| \le$$

$$\le |g(B_1)|\,|F(\xi)-F(B_1)| + |g(B_2)|\,|F(B_2)-F(\xi)| < \varepsilon$$

ч.т.д.

Следствие (Признак Абеля) Если 1) $\int_a^b f(x)\,dx$ сх-ся

2) g монотонна и ограничена на $[a,b)$, то

$\int_a^b f(x) g(x)\,dx$ сх-ся.

Док-во Сх-ть $\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ограничена

$g_1(x) := g(x) - L$, где $L = \lim\limits_{x\to b-0\ (+\infty)} g(x)$

Т.4 $\Rightarrow$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\, g_1(x)\,dx}_{\text{сходится}} = \int_a^b f(x)\, g(x)\,dx - L\int_a^b f(x)\,dx$$

ч.т.д.

Т5 (Признак Харди) Пусть f - периодическая с периодом w и интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a,b]$ функция, g - монотонная, бесконечно малая при $x \to +\infty$. Тогда

1) если $\int_a^{a+w} f(x)\,dx = 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ - сх-ся

2) если $\int_a^{a+w} f(x)\,dx \neq 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

сходятся или расходятся одновременно.