14. Образ куба меньшей размерности. Диффеоморфный образ измеримого по Лебегу множества.

T1 (образ куба меньшей размерности)

Пусть $\bar{f}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема на области $\Omega \supset K_I \subset \mathbb{R}^n$ $n < m$ (K_I – стандартный куб). Тогда

$\mu_J(\bar{f}(K_I)) = 0$

Док-во $M := \max\limits_{\bar{x} \in K_I} |\bar{f}'(\bar{x})|$. По лемме $\forall \bar{x}, \bar{y} \in K_I$

$|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \le M\sqrt{m}\,|\bar{x} - \bar{y}|$

Разобьём K_I на N^n равных кубов со стороной $\delta = \frac{1}{N}$

$K_I = \bigcup\limits_{i=1}^{N} K_{\delta,i}$, $|K_I| = \sum\limits_{i=1}^{N} |K_{\delta,i}|$

$\max\limits_{\bar{x}, \bar{y} \in K_{\delta,i}} |\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \le M\sqrt{mn}\,\delta \Rightarrow \bar{f}(K_{\delta,i}) \subset$ куб со стороной $2M\sqrt{mn}\,\delta \Rightarrow$

$\mu_J^*(\bar{f}(K_{\delta,i})) \le (2M\sqrt{mn}\,\delta)^m \Rightarrow \mu_J^*(\bar{f}(K_I)) \le$

$\le N^n (2M\sqrt{mn}\,\delta)^m = (2M\sqrt{mn})^m \cdot N^{n-m} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

T2 (Диффеоморфный образ измеримого мн-ва). Пусть $\bar{f}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм на области $\mathbb{R}^n \supset \Omega \supset \mathrm{cl}\,E$, где E – измеримое по Лебегу мн-во. Тогда $\bar{f}(E)$ измеримо по Лебегу

Док-во Рассмотрим брус $P \subset \Omega$. $P = \mathrm{int}\,P \sqcup \partial P$

$\bar{f}$ – диффеоморфизм $\Rightarrow \bar{f}^{-1}$ – непрерывно $\underbrace{\bar{f}(\mathrm{int}\,P)}_{\text{открытое}} \xrightarrow{\bar{f}^{-1}} \mathrm{int}\,P$

$\Rightarrow$ измеримое по Лебегу

по Т1 $\mu(\bar f(\gamma P)) = 0 \Rightarrow \mu(\bar f(P))$ - измеримо по Лебегу

Пусть $\mu(E) = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \sqcup P_k \supset E)\ \sum |P_k| < \varepsilon$ $\Rightarrow$

из Т1 $\mu(\bar f(K)) \le M|K| \Rightarrow \mu(\bar f(P)) \le M|P|$

M — зависит только от отображения

$P = \bigcup_j K_j$ $\Rightarrow$ $\mu(\bar f(\bigsqcup_k P_k)) \le M \sum_k |P_k| < M\varepsilon \Rightarrow$

$$\mu(\bar f(E)) = 0$$

Следствие из структуры измеримых мн-в. (это-то где-то было)

$$E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \sqcup P_0$$

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \Rightarrow \bar f(F_1) \subset \bar f(F_2) \subset \ldots$$

$$\underbrace{\bar f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)}_{\text{измеримо}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bar f(F_k)}_{\text{измеримо по Лебегу}}$$

4.7.00.

Опр. Диффеоморфизмом $\bar f : D \to \mathbb{R}^n$, где D - область в $\mathbb{R}^n$ называется непрерывно дифф-мое взаимно однозначное отображение такое, что $\bar f'(\bar x)$ - невырожденная матрица $\forall \bar x \in D$

$$|\bar f'(\bar x)| := \max_{1 \le j \le n} |\operatorname{grad} f_j(\bar x)|$$

N1 Теорема Лагранжа для отображений.

Если $\bar f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифф-мо на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \supset \operatorname{cl} D$, D- выпукло (т.е. вместе с любыми двумя точками содержит отрезок их соединяющий), то

$$|\bar f(\bar x) - \bar f(\bar y)| \le \max_{\bar x \in \mathrm{cl}\, D} |\bar f'(\bar x)| \sqrt{m}\, |\bar x - \bar y| \quad \forall \bar x, \bar y \in D.$$

Док-во $\bar x, \bar y \in D \Rightarrow$ отрезок с концами $\bar x, \bar y \subset D$

$$|f_j(\bar x) - f_j(\bar y)| = |d f_j(\bar \xi)| = |(\operatorname{grad} f_j(\bar \xi), \bar x - \bar y)| \le$$

ф. Тейлора с ост. членом Лагранжа

КБШ

$$\le |\operatorname{grad} f_j(\bar \xi)|\, |\bar x - \bar y| \le \max_{\bar x \in \mathrm{cl}\, D} |\operatorname{grad} f_j(\bar x)|\, |\bar x - \bar y| \quad j = 1, \ldots, m$$

$$|\bar f(\bar x) - \bar f(\bar y)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (f_j(\bar x) - f_j(\bar y))^2} \le$$

$$\le \max_{\bar x \in \mathrm{cl}\, D} |f'(\bar x)| \cdot |\bar x - \bar y| \cdot \sqrt{m}$$

ч.т.д.