
イデアルの塔が定める強制法

後藤 達哉
2025 年 8 月 20 日 作成

概要

本ノートでは, Jindřich Zapletal が考案し, 彼の本 [Zap04] に記述されているイデアルの塔の概念を紹介する. 可算順序数 α について α から α への連続単調増加関数全体の集合上の σ -イデアルが対応付けられているとする. これが α に関してある種の斉一性質を持っているとき, これをイデアルの塔という. イデアルの塔に対して自然に定まる強制概念があり, それは ω_1 から ω_1 へのジェネリックな連続単調増加関数であって, 塔の定義に応じた特定の条件を満たすものを付け足す. 特に一つの例では, ジェネリック関数の値域は, グラウンドモデルにある ω_1 の部分集合で順序型が ω なものとほとんど交わりを持たない. この例を生み出すイデアルの塔に付随する強制概念は, Laver 強制法といくらかの性質を共通して持つことを見る.

本ノートの予備知識は強制法と基数不変量の基本的なことである.

目次

1 用語など	1
2 イデアルの塔	1
3 ジェネリック関数の値域がグラウンドモデルにある ω_1 の部分集合で順序型が ω なものとほとんど交わりを持たないようなイデアルの塔	4
4 Laver イデアルの Covering Property Axiom	7
5 Laver 強制法との類似性	9
6 strong-CPA(Laver) と Borel 予想	10
7 疑問	10

1 用語など

集合 X 上のイデアル I に属する集合を I 小な集合, 属さない X の部分集合を I 正な集合という. どのイデアルか文脈から明らかな場合は, 単に小, 正という.

本稿で採用する強制法は西洋式, つまり小さい方が強い条件である.

グラウンドモデルにある Borel 集合 B の, Borel コードを取り, それをジェネリック拡大で解釈して得られる Borel 集合の名前を \dot{B} で表す.

2 イデアルの塔

本節では, イデアルの塔の一般論を論じる.

$\alpha < \omega_1$ に対して

$$\mathbb{F}_\alpha = \{f : f \text{ は } \alpha \text{ から } \alpha \text{ への連続単調増加関数} \}$$

と定める。ここで連続とは、順序数に順序位相を入れたときの連続性のことであるが、単調増加関数では、それは極限順序数においてそこまでの値の上限を取ることに等しい。 $\mathcal{P}(\alpha \times \alpha)$ には自然にカンツール空間と同相な位相が入り、その相対位相が \mathbb{F}_α に入る。以後、 \mathbb{F}_α の部分集合について、それが Borel 集合であると言うときはこの位相についてである。

定義 2.1. $\Omega \subseteq \omega_1$ を club 集合を含む集合とする。列 $\langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ は各 I_α が \mathbb{F}_α 上の σ -イデアルであるものとする。この列 $\langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ がイデアルの塔であるとは、次の条件を満たすことを言う。

- 任意の $\alpha, \beta \in \Omega$ で $\beta < \alpha$ なものと、 $C \subseteq \mathbb{F}_\alpha$ Borel な I_α -正集合について、もし、すべての $f \in \Omega$ について $f(\beta) = \beta$ ならば、 $C \restriction \beta$ は I_β -正である。ここに $C \restriction \beta := \{f \restriction \beta : f \in C\}$ 。
- 任意の $\alpha, \beta \in \Omega$ で $\beta < \alpha$ なものと、 $B \subseteq \mathbb{F}_\beta$ Borel な I_β -正集合について、 $\{f \in \mathbb{F}_\alpha : f \restriction \beta \in B\}$ は I_α -正。

次の概念は Zapletal のイデアル強制法のある方向での一般化である。

定義 2.2. $T = \langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ がイデアルの塔だとする。強制概念 P_T を次のように定める。 $B \in P_T$ であるのは、ある $\alpha \in \Omega$ が存在して、 B が Borel な I_α -正な \mathbb{F}_α の部分集合であるとき。

$B \in P_T$ のとき上記の $\alpha \in \Omega$ は一意に定まるので、それを $\alpha(B)$ と書く。

順序は次のように定める： $C \leq B$ であるのは、 $\alpha(B) \leq \alpha(C)$ かつ、すべての $f \in C$ について $f \restriction \alpha(B) \in B$ なとき。

定義 2.3. $T = \langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ がイデアルの塔だとする。 P_T 名前 \dot{F}_{gen} を次のように定める： $P_T \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \subseteq \check{\omega}_1 \times \check{\omega}_1$ かつ

$$P_T \Vdash (\beta, \gamma) \in \dot{F}_{\text{gen}} \leftrightarrow (\exists B \in \dot{G})[\beta, \gamma \in \alpha(B) \ \& \ (\forall f \in B)f(\beta) = \gamma].$$

命題 2.4. $T = \langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ がイデアルの塔だとすると $P_T \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} : \check{\omega}_1 \rightarrow \check{\omega}_1$ 。

証明。まず右一意性を示す。ジェネリックフィルター G を取り、 $V[G]$ で議論する。 $(\beta, \gamma_0), (\beta, \gamma_1) \in F_{\text{gen}}$ とする。すると $B_0, B_1 \in G$ があって、

- $\beta, \gamma_0 \in \alpha(B_0)$ かつ全ての $f \in B_0$ について $f(\beta) = \gamma_0$,
- $\beta, \gamma_1 \in \alpha(B_1)$ かつ全ての $f \in B_1$ について $f(\beta) = \gamma_1$ 。

$B_2 \leq B_0, B_1$ を取る ($B_0, B_1 \in G$ だから取れる)。 $f \in B_2$ を取り (B_2 は非空なことに注意)、その β での値を見れば、 $\gamma_0 = \gamma_1$ が分かる。

左全域性を示す。 V での議論に戻る。 $B \in P_T$, $\beta < \omega_1$ とする。塔の定義より $C \leq B$ が取れて、 $\beta \leq \alpha(C)$ となる。 $\alpha := \alpha(C)$ とおく。各 $\gamma < \alpha$ について $C_\gamma = \{f \in C : f(\beta) = \gamma\}$ とおくと、 $\bigcup_{\gamma < \alpha} C_\gamma = C$ かつ I_α が σ -イデアルなので、ある $\gamma < \alpha$ について $C_\gamma \in I_\alpha^+$ 。よって、 $C_\gamma \Vdash \dot{F}_{\text{gen}}(\beta) = \gamma$ かつ $C_\gamma \leq B$ なのでこれで証明できた。 \square

イデアルの塔から定まる強制概念において、ジェネリックフィルターはジェネリックな関数から復元される。

命題 2.5. $T = \langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ がイデアルの塔だとする。このとき

$$P_T \Vdash (\forall C \in \dot{P}_T)[C \in \dot{G} \leftrightarrow \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha(C) \in C].$$

証明。 \rightarrow について。 $B \in P_T$ について $B \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha(B) \in \dot{B}$ を示せば良い。そのために次の主張を B の Borel 複雑性に関する帰納法で示す。

主張 A: $\beta < \omega_1$, $B \subseteq \mathcal{P}(\beta \times \beta)$ Borel, $C \in P_T$ とし, $\beta \leq \alpha(C)$ かつ $C \restriction \beta \subseteq B$ ならば, $C \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \in \dot{B}$ である.

\therefore) B が閉集合のとき, $C \nVdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \in \dot{B}$ とすると, $D \leq C$ が取れて, $D \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \in \mathcal{P}(\beta \times \beta) \setminus \dot{B}$ である. \dot{B} の補集合は開集合だから, 有限集合 $s \subseteq \beta \times \beta$ が取れて,

$$D \Vdash \{x \subseteq \beta \times \beta : x \cap s = \dot{F}_{\text{gen}} \cap s\} \subseteq \mathcal{P}(\beta \times \beta) \setminus \dot{B}. \quad (1)$$

条件 D を強めることで, D は $\dot{F}_{\text{gen}} \cap s$ の値を決定しているとしてよい. 決定された値を t とする. \dot{F}_{gen} の定義より $D \Vdash (\exists E \in \dot{G})(\text{dom}(s), \text{ran}(s) \subseteq \alpha(E) \ \& \ (\forall f \in E) f \cap s = t)$. この式の $(\exists E \in \dot{G})$ の内側は E について下に閉じている性質なので, $E \leq D$ が取れて, $\text{dom}(s), \text{ran}(s) \subseteq \alpha(E)$ かつ $(\forall f \in E) f \cap s = t$ となる. E の元 f を一つ取る. $E \leq D \leq C$ かつ $C \restriction \beta \subseteq B$ なので, $E \restriction \beta \subseteq B$. よって, 式 (1) より $D \Vdash f \cap s \neq t$. 他方で, $f \cap s = t$ なので矛盾した.

$B = \bigcap_n B_n$ のとき. 帰納法の仮定より各 n について $C \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \in \dot{B}_n$ なので, $C \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \in \dot{B}$ となる.

$B = \bigcup_n B_n$ のとき. $D \leq C$ を勝手な条件とし, $\alpha = \alpha(D)$ とおく. $D_n = \{f \in D : f \restriction \beta \in B_n\}$ とおくと, I_α の σ 加法性から, ある n について D_n が正となる. 帰納法の仮定により, $D_n \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \in \dot{B}_n \subseteq \dot{B}$.

これで主張 A が示された. なお, 開集合は基本開集合の可算和であり, 基本開集合は閉集合なので, 開集合の場合を示す必要はない. //

主張 A に $C := B$ と $\beta := \alpha(B)$ を代入すれば, 命題の \rightarrow が従う.

命題の \leftarrow を示す前に次の主張を示そう.

主張 B: $\beta < \omega_1$ とし, $B \subseteq \mathbb{F}_\beta$ を I_β 小とする. このとき $P_T \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \notin \dot{B}$.

\therefore) $C \in P_T$ とする. 強めて, $\beta < \alpha(C)(=:\alpha)$ と仮定して良い. $C_0 = \{f \in C : \beta \text{ が関数 } f \text{ で閉じていない}\}$ とおく.

C_0 が正のとき. ある γ, δ で $\gamma < \beta \leq \delta < \alpha$ なものがあって, $C'_0 = \{f \in C : f(\gamma) = \delta\}$ が正となる. $B \subseteq \mathbb{F}_\beta$ なので $B \cap C'_0 = \emptyset$. よって, $C'_0 \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \notin \dot{B}$.

C_0 が小のとき. このとき $C_1 = \{f \in C : \beta \text{ が関数 } f \text{ で閉じている}\}$ が正. 他方で $D = \{f \in \mathbb{F}_\alpha : f \restriction \beta \in B\}$ は小. よって $C_1 \setminus D$ が条件で, 主張 A より $C_1 \setminus D \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \beta \notin \dot{B}$ となる. //

準備が整ったので, 命題の \leftarrow を示す. $D \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha(C) \in \dot{C}$ とする. 条件を強めて $\alpha(C) \leq \alpha(D)$ としてよい. $E = \{f \in D : f \restriction \alpha(C) \in C\}$ とおく. すると $D \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha(D) \in \dot{E}$ なので, 主張 B の対偶により E は正である. $E \leq C$ なので $E \Vdash C \in \dot{G}$. $E \leq D$ なので証明が終わった. \square

上記命題より, \dot{F}_{gen} は ω_1 からそれ自身への連続単調増加関数なことが強制されること分かる. しかし, ω_1 が壊れていないことは確認していないし, イデアルの塔という状況だからそれは導けない. そこで重要になってくるのが強制概念が P_T が proper かどうかである. proper 強制法のよく知られている事実: 「強制概念が proper なら, ω_1 を壊さない」を思い出そう.

命題 2.6. $T = \langle I_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ をイデアルの塔とする. 強制概念 P_T が proper であることは次の条件と同値: 十分大きな構造のどんな可算初等部分構造 M とどんな条件 $B \in P_T \cap M$ についても, 集合

$$C = \{f \in \mathbb{F}_{M \cap \omega_1} : f \restriction \alpha(B) \in B \text{ かつ } f \text{ は } M\text{-ジェネリック}\}$$

は $I_{M \cap \omega_1}$ -正となる.

証明. 暗黙の条件 $P_T \in M$ より $\Omega \in M$ なので, $M \cap \omega_1 \in \Omega$ に注意しておく.

十分性. 十分大きな構造の可算初等部分構造 M と条件 $B \in P_T \cap M$ を取る. $\alpha := M \cap \omega_1$ とおく. 命題の主張に現れる条件 C は Borel 集合なことに注意する. 実際,

$$f \in C \iff f \restriction \alpha(B) \in B \ \& \ (\forall D \in M \text{ open dense subset of } P_T)(\exists E \in D \cap M)(f \restriction \alpha(E) \in E)$$

であり, 量化 $(\forall D \in M)$ や $(\exists E \in D \cap M)$ は可算な範囲でしか動いていないので良い.

C が I_α 正だとすると $C \leq B$ かつ $C \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha \in \dot{C}$ なので, C の定義より, $C \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha \text{ is } M\text{-generic}$. よって, C は (M, P_T) ジェネリックな条件である.

必要性. (M, P_T) ジェネリック条件 $D \leq B$ があったとする. すると

$$D \Vdash \dot{G} \cap M \text{ は } M \text{ ジェネリックフィルター}$$

なので, $D \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha \text{ は } M \text{ ジェネリック関数}$ である. したがって, $D \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \restriction \alpha \in \dot{C}$ なので, 命題 2.5 の主張 B より, C は正である. \square

3 ジェネリック関数の値域がグラウンドモデルにある ω_1 の部分集合で順序型が ω なものとほとんど交わりを持たないようなイデアルの塔

この節ではイデアルの塔の一例を見る. この塔は, ジェネリック関数の値域がグラウンドモデルにある ω_1 の部分集合で順序型が ω なものとほとんど交わりを持たないという性質を持つように作られている.

$\alpha < \omega_1$ に対して,

$$J_\alpha = \{B \subseteq \mathbb{F}_\alpha : (\exists \mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\alpha))[\mathcal{X} \text{ は可算集合でその各メンバーは順序型 } \omega \text{ を持ち} \\ \text{全ての } f \in B \text{ についてある } X \in \mathcal{X} \text{ があり } \text{ran}(f) \cap X \text{ は無限集合}]\}$$

とおく. J_α は明らかに σ -イデアルだが, α によっては J_α は真のイデアルとは限らない. そこで次を示す必要がある.

命題 3.1. $\Omega := \{\alpha < \omega_1 : J_\alpha \neq \mathcal{P}(\mathbb{F}_\alpha)\}$ は ω_1 の club 集合を含む.

証明. $\langle \alpha_i : i \in \omega^2 \rangle$ を α に収束する分解不可能順序数の増大列とする. そのような列が存在する α は club many にあるので, このような α について $J_\alpha \neq \mathcal{P}(\mathbb{F}_\alpha)$ を示せばよい. $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ を可算集合でどのメンバーも順序型 ω を持つものとする.

枚挙 $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_k, \dots\}$ を取る. ω^2 に収束する増大列 $\langle i(n) : n \in \omega \rangle$ が取れて, 任意の k で

$$X_k \subseteq^* \bigcup_{n \in \omega} (\alpha_{i(n)+1}, \alpha_{i(n+1)})$$

となる. 実際, $i(n)$ まで定まったとき, $i(n+1) > i(n) + \omega$ かつ任意の $j < k$ について $X_j \cap [\alpha_{i(n+1)}, \alpha_{i(n+1)+1}] = \emptyset$ となるようにとればよい. これはとれる. なぜなら,

$$(\forall i > i(n) + \omega)(\exists j < k) X_j \cap [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \neq \emptyset$$

だとして. すると, ある $j < k$ があって, $X_j \cap [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \neq \emptyset$ となる $i > i(n) + \omega$ の集合の順序型が ω^2 になる. これは X_j の順序型が ω なことに反する.

あとは, 値域が $\bigcup_{n \in \omega} (\alpha_{i(n)+1}, \alpha_{i(n+1)})$ と一切交わらない連続単調増加関数 $f: \alpha \rightarrow \alpha$ を作れば良い. これはできる. 実際, $f_n: \alpha_{i(n)} \rightarrow \alpha_{i(n)}$ ($n \in \omega$) を延長しながら作っていく. $f_{n+1} \restriction \alpha_{i(n)} = f_n$, $f_{n+1}(\alpha_{i(n)}) = \alpha_{i(n)}$ かつ $f_{n+1}(\alpha_{i(n)} + 1 + \beta) = \alpha_{i(n+1)} + 1 + \beta$ (for $\beta < \alpha_{i(n+1)}$) とおけばよい. \square

なお, Zapletal の本 [Zap04] では順序数の指数関数で閉じた α について $J_\alpha \neq \mathcal{P}(\mathbb{F}_\alpha)$ なのが証明抜きで指摘されている.

命題 3.2. $S := \{J_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ はイデアルの塔である.

証明. 塔の要件を満たすことは簡単に示せる. □

以後, この節では Ω や J_α , S と書いたら, 上で定義した意味のものである.

補題 3.3. $B \in P_T$ を条件とし, $\alpha(B) = \alpha$ とする. また, 区間 $I \subseteq [\alpha, \omega_1)$ は ω_1 内で有界とする. このとき条件 $C \leq B$ があり, $I \subseteq \alpha(C)$ かつ, 任意の $f \in C$ について $\text{ran}(f) \cap I = \emptyset$.

証明. 命題 3.1 の議論と同じことをすればよい. □

次の定理の証明について, Zapletal の本 [Zap04] に載っているものよりかなり簡略化できたので, それを述べる.

定理 3.4. 強制概念 P_S は proper である.

証明. 次のような Adam と Eve の間の長さ ω のゲームを考える. Adam は最初のラウンドで $B_0 \in P_S$ と稠密開集合 $O_0 \subseteq P_S$ をプレイする. 次のラウンド以降では, 稠密開集合 O_n を順番にプレイする.

Eve は B_0 より小さい条件の減少列 $B_1 \geq B_2 \geq \dots$ をプレイしていく. 加えて, Eve が条件 B_n をプレイしたとき, 次のラウンドで Adam は $\alpha(B_n)$ より大きな可算順序数の有界な区間 I_n もプレイする.

プレイは次のようになる:

Adam	B_0, O_0	I_1, O_1	I_2, O_2	I_3, O_3	\dots
Eve	B_1	B_2	B_3	\dots	

$\alpha_n = \alpha(B_n)$, $\alpha = \sup_n \alpha_n$ とおくと, Eve の勝利条件は次の通り.

- (1) 任意の n についてある m があって, $B_m \in O_n$.
- (2) ある $f: \alpha \rightarrow \alpha$ があって
 - (2-1) 任意の n で $f \restriction \alpha_n \in B_n$.
 - (2-2) 任意の n で $\text{ran}(f) \cap I_n = \emptyset$.

このゲームには Eve の必勝戦略 σ があることを示す. 以下で記述する戦略を取れば良い. Adam の第 n ラウンドのプレイ I_n, O_n までが終了したとする. 直前の Eve 自身のプレイ B_n も参照する. このとき補題 3.3 を使い, 任意の元の値域が I_{n-1} と交わらない $B'_n \leq B_n$ を取り, そのあと O_n の稠密性を使って O_n に属する条件 $B_{n+1} \leq B'_n$ を取る. この B_{n+1} をプレイする. これで Eve の必勝戦略になる.

Eve の必勝戦略 σ を固定する. $\langle M_i : i \in \omega^2 \rangle$ を可算初等的部分構造の \in 鎖で, $\sigma \in M_0$ なものとする. $M = \bigcup_i M_i$, $\delta_i = M_i \cap \omega_1$, $\delta = M \cap \omega_1$ とおく. $B \in P_S \cap M_0$ とする. 命題 2.6 により, 集合

$$C = \{f \in \mathbb{F}_\delta : f \restriction \alpha(B) \in B \text{ かつ } f \text{ は } M \text{ ジェネリック}\}$$

が J_δ 正であることを示せば良い. したがって, α の部分集合で順序型 ω なものを可算個集めた集合 \mathcal{X} について, $f \in C$ が見つかり, f の像は \mathcal{X} のメンバーどれとも有限の交差を持つことを示さなければならない.

命題 3.1 の証明のときと同じようにして、次のような ω^2 の共終列 $\langle i_n : n \in \omega \rangle$ であって、区間の列 $I_n = (\delta_{i_n+1}, \delta_{i_{n+1}})$ ($n \in \omega$) が次の条件を持つようにできる：

$$\mathcal{X} \text{ のどのメンバー } X \text{ も } X \subseteq^* \bigcup_n I_n \text{ を満たす.}$$

bookkeeping 論法により、次のようなゲームのプレイを構成できる：

- (A) Eve は戦略 σ に従う．Adam は最初に $B_0 = B$ をプレイする．
- (B) プレイの始切片で Eve が B_n をプレイする直前までのものは M_{i_n+1} に属する．
- (C) Eve のプレイ B_n の直後 Adam は上で定めた区間 I_n をプレイする．
- (D) Adam は M に属するすべての P_S の開稠密部分集合を順番に O_n ($n \in \omega$) としてプレイする．

(B) と $\sigma \in M_0$ により $\alpha(B_n) < \delta_{i_n+1}$ となるので、プレイ I_n は合法な手となる． $f: \delta \rightarrow \delta$ をプレイにより得られる関数とする．(D) とゲームのルール (1) により、 f は M ジェネリックであり、(2-1) により $f \upharpoonright \alpha(B) \in B$ である．また (C) と (2-2) により、 f の値域は任意の \mathcal{X} のメンバーと有限交叉を持つ．これで示せた． \square

命題 3.5. 強制概念 P_S のジェネリック関数の値域は、グラウンドモデルの任意の ω_1 の部分集合で順序型 ω を持つもの各々と有限の共通部分を持つ．

証明. V で議論する． $B \in P_S$ を条件、 $a \subseteq \omega_1$ を順序型 ω の部分集合、 $\alpha = \sup(a)$ とする． $\alpha \leq \alpha(B)$ としてよい．

$$C = \{f \in \mathbb{F}_\alpha : \text{ran}(f) \cap a \text{ は無限集合} \}$$

とおくイデアル J_α の定義より C は J_α 小である．よって、 $B \setminus C$ は条件．命題 2.5 より $B \setminus C \Vdash \dot{F}_{\text{gen}} \upharpoonright \alpha \in \dot{B} \setminus \dot{C}$ なので、 $B \setminus C \Vdash \text{“ran}(\dot{F}_{\text{gen}}) \cap a \text{ は有限集合”}$ となる． \square

命題 3.6. $\alpha \in \Omega$ について、 $\text{cov}(J_\alpha) = \text{add}(J_\alpha) = \mathfrak{b}$ である．

証明. Todorćević によるウォークの概念を使う． L を ω_1 上のはしご、すなわち各極限順序数 $\alpha < \omega_1$ に対して $L(\beta)$ は単調増大 ω 列で α に収束するものとする．可算順序数 $\delta < \gamma < \omega_1$ に対して γ から出発して δ へ到達するウォークというのは、次のように帰納的に定められる順序数の有限列 $\gamma = \gamma_0 > \gamma_1 > \dots > \gamma_n = \delta$ である： γ_m が後続順序数のとき γ_{m+1} はその前者、 γ_m が極限順序数のとき、 γ_{m+1} は $L(\gamma_m)$ のメンバーのうち δ 以上なものの最小．ウォークの重さとは、最大の $k \in \omega$ であって、ある $m < n$ について $\gamma_{m+1} = L(\gamma_m)(k)$ となるもののこと．

$g \in \omega^\omega$ と可算な極限順序数 β に対して、集合 $x(g, \beta) \subseteq \beta$ を次のように定める：

$$\begin{aligned} x(g, \beta) \cap [L(\beta)(n), L(\beta)(n+1)) &= \{ \delta : \delta \in [L(\beta)(n), L(\beta)(n+1)) \text{ かつ} \\ &\quad L(\beta)(n+1) \text{ から出発し } \delta \text{ へ到達する} \\ &\quad \text{ウォークの重みが } g(n) \text{ 未満} \}. \end{aligned}$$

ある固定された順序数からある固定された自然数未満の重みでウォーク全体は自然に木を作り、それは有限分岐かつ無限枝を持たないので König の補題よりその木は有限である．したがって、各々の $x(g, \beta) \cap [L(\beta)(n), L(\beta)(n+1))$ は有限となり、 $x(g, \beta)$ は順序型 ω を持つことがわかる．また、次も観察できる： $g <^* h$ なら $x(g, \beta) \subseteq^* x(h, \beta)$ ．また、どんな共終な集合 $x \subseteq \beta$ で順序型 ω を持つものについても $g \in \omega^\omega$ があり、 $x \subseteq x(g, \beta)$ ．

さて、 $\alpha \in \Omega$ とし、まず $\mathfrak{b} \leq \text{add}(J_\alpha)$ を示そう． $\kappa < \mathfrak{b}$ を仮定して、 $\kappa < \text{add}(J_\alpha)$ を示す． κ 個の

J_α 小な集合を任意に取るが、それらは次の形になっていると仮定して良い。

$$B_\gamma = \{f \in \mathbb{F}_\alpha : \text{ran}(f) \cap x_\gamma \text{ は無限集合} \} \quad (\gamma < \kappa).$$

ここで各 x_γ ($\gamma < \kappa$) は α の部分集合で順序型 ω を持つもの。 $\sup x_\gamma = \beta_\gamma$ とおく。先ほどの段落の注意により、各 γ について $g_\gamma \in \omega^\omega$ があり、 $x_\gamma \subseteq x(g_\gamma, \beta_\gamma)$ 。 $h \in \omega^\omega$ を g_γ ($\gamma < \kappa$) 全てを支配する関数とする。すると

$$B = \{f \in \mathbb{F}_\alpha : \text{ran}(f) \cap x(h, \beta) \text{ は無限集合 for some } \beta \leq \alpha\}$$

は J_α 小な集合で、 B_γ たち全てを包含する。

あとは、 $\text{cov}(J_\alpha) \leq \mathfrak{b}$ を示せばよい。 $\{g_\gamma : \gamma \in \mathfrak{b}\}$ を ω^ω の非有界な族とする。 $B_\gamma = \{f \in \mathbb{F}_\alpha : x(g, \alpha) \cap \text{ran}(f) \text{ は無限集合} \}$ とおくと

$$\bigcup_{\gamma < \mathfrak{b}} B_\gamma = \mathbb{F}_\alpha$$

である。 [TODO]

□

4 Laver イデアルの Covering Property Axiom

次の節において、第3節で導入した塔 $S = \langle J_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ の強制概念が Laver 強制法と似ていることを見る。そのための準備としてこの節では Laver イデアルの Covering Property Axiom を紹介する。

定義 4.1. Laver イデアルとは ω^ω 上のイデアルで $A_g = \{f \in \omega^\omega : (\forall^\infty n) f(n) \leq g(f \upharpoonright n)\}$ ($g: \omega^{<\omega} \rightarrow \omega$) で生成されるものである。

Laver 強制法の条件 T について $[T]$ は常に Laver イデアル正である。また任意の Borel な Laver イデアル正集合について、ある Laver 強制法の条件 T が存在し、 $[T]$ がその正集合に含まれる。したがって、Laver 強制法は Laver イデアルのイデアル強制法 $P_I = (\text{Borel}(\mathbb{R}) \setminus I, \subseteq)$ に稠密埋め込みされる。

定義 4.2. I を実数上のイデアルとする。 $\alpha < \omega_1$ とし $B \subseteq \mathbb{R}^\alpha$ とする。 B が I 完全であるとは、次の二条件を満たすときを言う。

- 全ての $\beta < \alpha$ と $s \in B \upharpoonright \beta$ について $\{r \in \mathbb{R} : s \frown r \in B \upharpoonright (\beta + 1)\}$ は I 正。
- α 未満の順序数の任意の ω 列 $(\beta_n : n \in \omega)$ と包含で単調増大な任意の列 $\langle s_n : n \in \omega \rangle$ について $s_n \in B \upharpoonright \beta_n$ (for all n) ならば、 $\bigcup_n s_n \in B \upharpoonright \bigcup_n \beta_n$ 。

注意 4.3. この I 完全性の概念について次が知られている：順序数 κ について強制概念 $P_{I,\kappa}$ を

$$P_{I,\kappa} := \{B : (\exists X \subseteq \kappa \text{ 可算集合}) B \text{ は } \mathbb{R}^X \text{ の Borel な } I \text{ 完全集合} \}$$

かつ $C \leq B \iff \text{dom}(B) \subseteq \text{dom}(C) \ \& \ C \upharpoonright \text{dom}(B) \subseteq B$ と定める。イデアル I が iterable という I の定義可能性や properness を含む条件を仮定した上で、この強制概念 $P_{I,\kappa}$ はイデアル強制法 $P_I = (\text{Borel}(\mathbb{R}) \setminus I, \subseteq)$ の長さ κ の可算台反復に稠密埋め込みされる。したがって、「Borel な \mathbb{R}^α の Laver 完全集合」というのは、だいたい「Laver 強制法の長さ α の反復の条件」のことなのである。

定義 4.4. Laver イデアルの Covering Property Axiom $\text{CPA}(\text{Laver})$ を次の原理とする。 $\mathfrak{b} > \aleph_1$ かつ次の Adam と Eve の二人の間の長さ ω_1 のゲームに Eve の必勝戦略が存在しない。各ラウンド $\beta < \omega_1$ で Adam は $\alpha_\beta < \omega_1$ と Laver 完全な Borel 集合 $B_\beta \subseteq \mathbb{R}^{\alpha_\beta}$ と Borel 関数 $f_\beta: B_\beta \rightarrow \mathbb{R}$ をプレイし、続いて Eve は Laver 完全な Borel 部分集合 $C_\beta \subseteq B_\beta$ をプレイする。Adam が勝つのは、 $\bigcup_{\beta < \omega_1} f_\beta "C_\beta = \mathbb{R}$ となるとき。

定理 4.5. Laver 強制法の長さ ω_2 の可算台反復は CPA(Laver) を強制する.

証明. $V \models \text{CH}$ と仮定してよい. Laver イデアルを I とする. イデアル強制法 P_I の長さ α の可算台反復を P_α と書く. $\dot{\sigma}$ を P_{ω_2} 名前で Eve の戦略であることが強制されるものとする. 反映の議論により, $\gamma < \omega_2$ がとれて, $\dot{\sigma}[G] \cap V[G_\gamma]$ が $V[G_\gamma]$ に属し, かつこのモデルでそれが再び Eve の戦略となる. Adam にこのモデルにある全ての三つ組 (α, B, f) の枚挙 $\langle (\alpha_\beta, B_\beta, f_\beta) : \beta < \omega_1 \rangle$ をプレイさせる (中間モデルで CH が成り立っていることに注意). Eve は先程の戦略 $\dot{\sigma}[G] \cap V[G_\gamma]$ にしたがって, $\langle C_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ をプレイする.

このゲームが $V[G]$ において Adam の勝ちであることを証明しよう. $V[G]$ は $V[G_\gamma]$ から見て P_{ω_2} 拡大であることに注意する. モデル $V[G_\gamma]$ で議論し, $A \in P_{\omega_2}$ を条件, \dot{r} を実数の P_{ω_2} 名前とする. すると条件 $B \leq A$ と Borel 関数 $f: \mathbb{R}^{\text{dom}(B)} \rightarrow \mathbb{R}$ があって, $B \Vdash \dot{r} = f(\vec{r}_{\text{gen}}) \upharpoonright \text{dom}(B)$ となる. Adam の手の選び方より $\beta < \omega_1$ があって, 一意な順序同型 $\pi: \alpha_\beta \rightarrow \text{dom}(B)$ について, B_β は B に送られ, f_β は f に送られる. $C \leq B$ を C_β の π による像とする. すると $C \Vdash \dot{r} \in f_\beta "C_\beta$ となる. 条件 A と名前 \dot{r} の任意性により, $V[G] \models \mathbb{R} = \bigcup_{\beta < \omega_1} f_\beta "C_\beta$ が示された. \square

次の命題が CPA(Laver) から含意される Cichoń の図式の星座を決定する. 巨大基数を仮定した場合は, これは Zapletal の tame invariants の結果の系だが, 今は巨大基数は仮定していないことに注意しておく.

命題 4.6. CPA(Laver) は $\text{cov}(\text{null}) = \text{non}(\text{null}) = \aleph_1$ を含意する.

証明. CPA(Laver) が $\text{cov}(\text{null}) = \aleph_1$ を含意することを見るために, まず次の主張を示す.

主張 A: 任意の $\alpha < \omega_1$ と Borel Laver 完全集合 $B \subseteq \mathbb{R}^\alpha$ と $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ について Borel Laver 完全部分集合 $C \subseteq B$ が存在し, $f[C] \in \text{null}$.

(\therefore) Laver 強制法の長さ α の可算台反復を \mathbb{L}_α と書くことにしよう. 任意の $\alpha < \omega_1$ と $p \in \mathbb{L}_\alpha$ と \dot{x} について $q \leq p$ in \mathbb{L}_α と測度 0 な Borel 集合 N があり, $S \Vdash \dot{x} \in \dot{N}$ となることは, \mathbb{L}_α が Laver の性質を満たすことから解る. このことから主張 A のステートメントを示すが, 「Borel Laver 完全集合」が Laver 強制法の反復の条件に変わっているのは, 注意 4.3 より良いだろう (全く同じ概念ではないが, お互いに稠密になっているのでよい). 与えられた Borel 関数 f に対して, $\Vdash \dot{x} = f(\vec{g})$ とおく. ここに \vec{g} は Laver 実数の列. 上で書いたように $q \leq p$ と測度 0 な Borel 集合 N があり, $q \Vdash \dot{x} \in \dot{N}$ となとしよう. α, \dot{x}, q, N を含む可算初等部分モデル M を取り, \mathbb{L}_α の properness より, $r \leq q$ で M ジェネリックなものを取る. すると, $r \Vdash \dot{x} \in \dot{N}$ なので, r に対応する Borel Laver 完全部分集合 C の任意の点 \vec{g} について $f(\vec{g}) \in N$ を満たす. つまり $f[C] \subseteq N$ となる. よって, $f[C]$ は測度 0. //

主張で各 α, B, f について定まる C を $C(\alpha, B, f)$ と書く. Eve の戦略として Adam が最後にプレイした (α, B, f) に対して $C(\alpha, B, f)$ をプレイするものを考える. CPA(Laver) よりこれは必勝戦略でないので, Adam のプレイ $(\alpha_\beta, B_\beta, f_\beta : \beta < \omega_1)$ が存在し, Adam が勝つ. すなわち, $C_\beta = C(\alpha_\beta, B_\beta, f_\beta)$ と書くとき, $\bigcup_{\beta < \omega_1} f_\beta "C_\beta = \mathbb{R}$ が成り立つ. ここで $C(\alpha, B, f)$ の選び方より各 $f_\beta "C_\beta$ は測度 0 なので, $\text{cov}(\text{null}) = \aleph_1$ が成り立つ.

次に CPA(Laver) から $\text{non}(\text{null}) = \aleph_1$ を導く. $B \subseteq \omega^\omega \times 2^\omega$ を Borel 集合で, どの $x \in \omega^\omega$ についても B_x は測度 0 かつ $\{B_x : x \in \omega^\omega\}$ がイデアル null の中で共終になっているものを取る. 次の主張を示せば十分である.

主張 B: 任意の $\alpha < \omega_1$ と $p \in \mathbb{L}_\alpha$ と \dot{x} について $q \leq p$ in \mathbb{L}_α と $z \in 2^\omega$ があり, $q \Vdash z \notin \dot{B}_x$.

(\therefore) \mathbb{L}_α がグラウンドモデルの外測度正集合を外測度正のまま保つことから直ちに従う. //

これにより命題が示された. \square

5 Laver 強制法との類似性

第3節での塔 $S = \langle J_\alpha : \alpha \in \Omega \rangle$ に付随する強制概念 P_S が Laver 強制法といくつかの共通した性質を持つことを見る。

命題 5.1. P_S は (ω^ω, \leq^*) の意味での支配的実数を付け足す。

証明. 命題 3.6 と同じ議論で示せるが、完全を期すために同じ議論をここで繰り返す。命題 3.6 と同じにしご L と関数 x をここで使う。 G を (V, P_S) ジェネリックフィルターとして、 $V[G]$ で議論する。ジェネリック関数 $F: \omega_1 \rightarrow \omega_1$ を考える。 F の不動点 $\alpha < \omega_1$ を取る。 $f = F \upharpoonright \alpha$ とおく。各 n について $y_n \in \text{ran}(f) \cap [L(\alpha)(n), L(\alpha)(n+1))$ をとる ([TODO: しかし、ほぼ全ての n で交わるだろうか?]). $L(\alpha)(n+1)$ から出発して y_n にたどり着くウォークの重さを k_n とする。 $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ が V 上支配的実数なことを示そう。 $g \in \omega^\omega \cap V$ を取る。 $x(g, \alpha)$ は順序型 ω の α の部分集合なので、ジェネリック実数の性質より、 $\text{ran}(f) \cap x(g, \alpha)$ は有限集合となる。したがって、 x の定義より $g \leq^* \langle k_n : n \in \omega \rangle$ が導かれる。 \square

補題 5.2. (1) B を Borel J_α 正な集合とすると、Borel 単射 $g: \omega^\omega \rightarrow B$ があって、 J_α 小な集合の逆像は Laver 小である。言い換えると、 g による Laver 正な集合の像は J_α 正である。
(2) 任意の $\alpha \in \Omega$ と $\beta < \omega_1$ と Borel J_α 完全な $B \subseteq \mathbb{F}_\alpha$ について、ある Borel 関数 $g: (\omega^\omega)^\beta \rightarrow B$ があって、Laver 完全な集合の g による像は J_α 完全となる。

証明. (1). Laver 強制法は支配的実数を足すので、命題 3.6 により、ある \mathbb{F}_α の元でグラウンドモデルの元でコードされる Borel な J_α 小集合に属さないものも追加する。よってある Laver 条件 p と Borel 関数 g があって、 $p \Vdash "g(\dot{\ell})$ はグラウンドモデルの元でコードされる Borel な J_α 小集合に属さない" となる。ただし $\dot{\ell}$ は Laver 実数の名前である。このことと Laver 強制法の均質性により、(1) が従う。

(2) の証明は (1) を使い、 β に関する帰納法を行えばよい。 \square

定理 5.3. P_S の長さ ω_2 の可算台反復は CPA(Laver) を強制する。

証明. 定理 4.5 と並行な議論である。

$V \models \text{CH}$ と仮定してよい。Laver イデアルを I とする。イデアル強制法 P_S の長さ α の可算台反復を P_α と書く。 $\dot{\sigma}$ を P_{ω_2} 名前前で Eve の戦略であることが強制されるものとする。反映の議論により、 $\gamma < \omega_2$ がとれて、 $\dot{\sigma}[G] \cap V[G_\gamma]$ が $V[G_\gamma]$ に属し、かつこのモデルでそれが再び Eve の戦略となる。Adam にこのモデルにある全ての三つ組 (α, B, f) の枚挙 $\langle (\alpha_\beta, B_\beta, f_\beta) : \beta < \omega_1 \rangle$ をプレイさせる。Eve は先程の戦略 $\dot{\sigma}[G] \cap V[G_\gamma]$ にしたがって、 $\langle C_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ をプレイする。

このゲームが $V[G]$ において Adam の勝ちであることを証明しよう。 $V[G]$ は $V[G_\gamma]$ から見て P_{ω_2} 拡大であることに注意する。モデル $V[G_\gamma]$ で議論し、 $p \in P_{\omega_2}$ を条件、 \dot{r} を実数の P_{ω_2} 名前とする。条件 p を強めることで、次を仮定できる： $\alpha \in \Omega$ と可算集合 $X \subseteq \omega_2$ と Borel J_α 完全集合 $B \subseteq \mathbb{F}_\alpha^X$ と Borel 関数 $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ があって、 $p = B$ かつ $B \Vdash \dot{r} = \dot{f}(\vec{F}_{\text{gen}} \upharpoonright (\alpha \times X))$ となる。先ほどの補題より、Borel 関数 $g: (\omega^\omega)^{\text{ot}(X)} \rightarrow B$ であって、Laver 完全集合の像が J_α 完全となるものを取ろう。

Adam の手の選び方より $\beta < \omega_1$ があって、 $B_\beta = (\omega^\omega)^{\text{ot}(X)}$ かつ $f_\beta = f \circ g$ となる。このとき、条件 $q = g "C_\beta \leq p$ は $\dot{r} \in f_\beta "C_\beta$ を強制する。条件 p と名前 \dot{r} の任意性により、 $V[G] \models \mathbb{R} = \bigcup_{\beta < \omega_1} \dot{f}_\beta "C_\beta$ が示された。 \square

系 5.4. P_S の長さ ω_2 の可算台反復は $\text{cov}(\text{null}) = \text{non}(\text{null}) = \aleph_1$ を強制する。 \square

6 strong-CPA(Laver) と Borel 予想

[TODO]

7 疑問

P_S の長さ ω_2 の可算台反復で得られるモデルは Laver モデルと Cichoń の図式の星座の意味では全く同じ結果を得ることが分かったが、それ以外の性質はどうなっているかという疑問は当然問える。

疑問 7.1. P_S の長さ ω_2 の可算台反復は Borel 予想を強制するか？ する場合、より強い質問として、CPA(Laver) は Borel 予想を含意するか？

疑問 7.1 に付随して、次の 3 つの疑問が自然である ([Woh20] も参照せよ)。

疑問 7.2. P_S はグラウンドモデルにある非可算な強測度零集合を全て壊すか？

疑問 7.3. P_S および P_S の任意長さの可算台反復はグラウンドモデルの実数の集合の Lebesgue 外測度が正であることを保つか？

疑問 7.4. P_S は Laver の性質を持つか？

Cichoń の図式ではなく、Blass の図式に着目すれば、次の疑問も自然である。

疑問 7.5. P_S の長さ ω_2 の可算台反復において、groupwise density number \mathfrak{g} の値はいくつか？ (Laver モデルでは $\mathfrak{g} = \aleph_2$ であった)。

参考文献

- [Woh20] Wolfgang Wohofsky. “Borel conjecture, dual Borel conjecture, and other variants of the Borel conjecture”. *Centenary of the Borel conjecture* (2020), pp. 135–227.
- [Zap04] Jindřich Zapletal. *Descriptive set theory and definable forcing*. American Mathematical Soc., 2004.