比較可能性と比較不可能性が定める基数不変量

後藤 達哉

神戸大学システム情報学研究科博士後期 1 年

2022 年 11 月 26 日

数学基礎論若手の会 2022

林佑亮氏との共同研究．本研究は JSPS 科研費 JP22J20021 の助成を受けたものである

目次

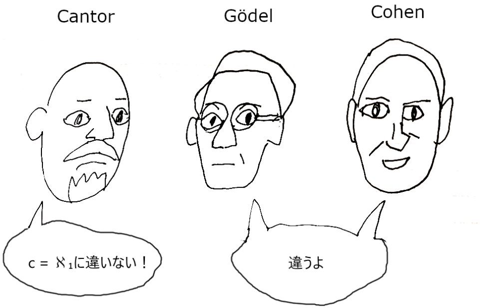
目次

集合論

集合論は無限集合，特にその濃度について様々な考察をする分野である．

可算濃度を $\aleph_0$ とし，連続体濃度を **c** と書く． 可算濃度の一個次の基数を $\aleph_1$ または ω_1 と書く．

$\aleph_0 < \mathbf{c}$ は ZFC の定理 (Cantor) だが，**c** が $\aleph_1$ かどうかであるかは ZFC で決定できない (Gödel, Cohen)．



基数不変量

(連続体の) 基数不変量は実数の構造から定まる基数であってそれらは典型的には $\aleph_1$ 以上 $\mathbf{c}$ 以下の値を取る．それらの多くは $\aleph_1$ と等しいことも $\mathbf{c}$ と等しいことも ZFC では証明できないものである．代表的な基数不変量は次の Cichoń の図式にまとめられている．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathbf{c} \\
 & & \mathbf{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

ここで矢印 $A \to B$ は $A \leq B$ が ZFC で証明できることを意味する．

Cichoń の図式に現れる基数不変量の定義

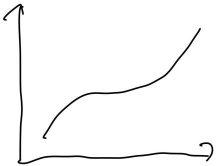
$\mathcal{N}$ は Lebesgue 測度 0 の集合の全体，$\mathcal{M}$ は瘦せ集合 (Baire の第一類集合) の全体のなすイデアルを表す．$\mathbb{R}$ 上のイデアル $\mathcal{I}$ に対して，

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I}\}$
- $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{|A| : A \subseteq \mathbb{R}, A \notin \mathcal{I}\}$
- $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{F} = \mathbb{R}\}$
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}, (\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in \mathcal{F})(A \subseteq B)\}$

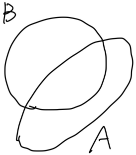
と定める．ω^ω 上の関係 $\leq^*$ を $x \leq^* y$ とは有限個の例外を除いたすべての n で $x(n) \leq y(n)$ のことだと定める．

- $\mathbf{d} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in F)(f \leq^* g)\}$
- $\mathbf{b} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \neg(\exists f \in \omega^\omega)(\forall g \in F)(g \leq^* f)\}$

と定める．



splitting number と reaping number



自然数の無限集合 A, B について A が B を**分割する**とは，

$$|B \cap A| = |B \setminus A| = \aleph_0$$

を満たすことだとする．自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ について

- $\mathcal{S}$ が **splitting family** $\iff$ $(\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A$ が B を分割する$)$
- $\mathcal{R}$ が **reaping family** $\iff$ $\neg(\exists A \in [\omega]^\omega)(\forall B \in \mathcal{R})(A$ が B を分割する$)$
  $\iff$ $(\forall A \in [\omega]^\omega)(\exists B \in \mathcal{R})(A$ が B を分割しない$)$

と定める．

- $\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S}$ は splitting family$\}$
- $\mathfrak{r} = \min\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R}$ は reaping family$\}$

s と r を足した Cichoń の図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{r} \arrow[urr] & & \\
\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[urr] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[uur] \arrow[rr] & & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[uuul] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \\
 & & \mathfrak{s} \arrow[uuul] \arrow[uur] \arrow[urr] & & \\
\aleph_1 \arrow[uu] \arrow[urr] & & & &
\end{tikzcd}
$$

目次

比較可能性と比較不可能性が定める基数不変量

$(P, \leq)$ を半順序集合とする．$p, q \in P$ が**比較可能**とは $p \leq q$ または $q \leq p$ が成り立つこととする．

$C, D \subseteq P$ について

- C が **comparable family in** P

$$\iff (\forall p \in P)(\exists q \in C)(p \text{ と } q \text{ が比較可能})$$

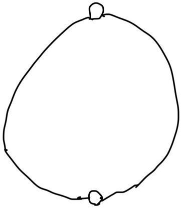
- D が **incomparable family in** P

$$\iff \neg(\exists p \in P)(\forall q \in D)(p \text{ と } q \text{ が比較可能})$$
$$\iff (\forall p \in P)(\exists q \in D)(p \text{ と } q \text{ が比較不可能})$$

と定める．

- $\mathbf{cp}(P) = \min\{|C| : C \text{ は comparable family in } P\}$
- $\mathbf{icp}(P) = \min\{|D| : D \text{ は incomparable family in } P\}$

とおく。



cp と icp の表

P	$\mathbf{cp}(P)$	$\mathbf{icp}(P)$
$\omega^\omega \setminus \mathbb{0}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$
$\mathbb{Z}^\omega$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$
$\mathbb{R}^\omega$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$
ℓ^1	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	$\mathrm{add}(\mathcal{N})$
Cohen 代数	$\aleph_0$	2
ランダム代数	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	2
$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$	$\mathfrak{r}$	2
Turing 次数	$\mathfrak{c}$	$\aleph_1$
$\mathcal{N} \setminus \{\varnothing\}$	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	? $\in [\mathrm{add}(\mathcal{N}), \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{N}), \mathrm{non}(\mathcal{N})\}]$
$\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}$	$\mathrm{cof}(\mathcal{M})$	? $\in [\mathrm{add}(\mathcal{M}), \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{M})\}]$

ここで $\mathbb{0} = \{x \in \omega^\omega : (\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(x(n) = 0)\}$.

区間分割

区間分割とは ω の長さ有限の
区間への分割で左側から順番に
自然数で添字付けているものを指す

IP を区間分割の全体の集合とする．
区間分割 $\mathbb{I} = (I_n : n \in \omega)$ と $\mathbb{J} = (J_k : k \in \omega)$ について

$$\mathbb{J} \sqsubset \mathbb{I} \iff (\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\exists k)(J_k \subseteq I_n)$$

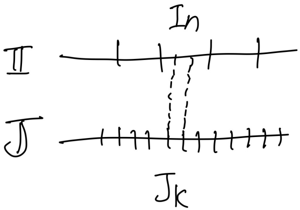
と定める．

- $\mathbf{d}_{\mathrm{IP}} = \min\{|F| : F \subseteq \mathrm{IP}, (\forall \mathbb{I} \in \mathrm{IP})(\exists \mathbb{J} \in F)\mathbb{I} \sqsubset \mathbb{J}\}$
- $\mathbf{b}_{\mathrm{IP}} = \min\{|F| : F \subseteq \mathrm{IP}, \neg(\exists \mathbb{I} \in \mathrm{IP})(\forall \mathbb{J} \in F)\mathbb{J} \sqsubset \mathbb{I}\}$

とおく．

- $\mathbf{d}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{d}, \mathbf{b}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{b}$

が知られている．



$\mathbf{d} \leq \mathbf{cp}(\omega^\omega \searrow \mathbb{0})$ の証明 (1/3)

1. 基数 κ について $\kappa < \mathbf{d}$ を仮定して，$\kappa < \mathbf{cp}(\omega^\omega \searrow \mathbb{0})$ を導けばよい．
2. そこで $\kappa < \mathbf{d}$ を仮定する．
3. $\kappa < \mathbf{cp}(\omega^\omega \searrow \mathbb{0})$ を示すために $F \subseteq \omega^\omega \searrow \mathbb{0}$ で $|F| = \kappa$ なものを任意にとる．このとき F が comparable family でないこと，すなわちある $h \in \omega^\omega \searrow \mathbb{0}$ であって，どの F の元とも比較不能なものの存在を言えばよい．
4. 各 $f \in F$ について $A_f = \{n : f(n) > 0\}$ とおく．区間分割 $\mathbb{I}^f = (I_n^f : n \in \omega)$ を各区間 I_n^f が A_f の点を少なくとも 3 つ持ち，かつ $(\forall a \in \omega)(a \leq \min I_n^f \to f(a) \leq \min I_{n+1}^f)$ なように定める．
5. 仮定 $\kappa < \mathbf{d} = \mathbf{d}_{\mathrm{IP}}$ より，ある区間分割 $\mathbb{J} = (J_k : k \in \omega)$ があって，$(\forall n_0)(\exists n \geq n_0)(\forall k)(J_k \not\subseteq I_n^f)$ となる．

$\mathbf{d} \leq \mathbf{cp}(\omega^\omega \setminus \mathbb{O})$ の証明 (2/3)

❻ $h_\mathbb{J} \in \omega^\omega \setminus \mathbb{O}$ を $h_\mathbb{J}(m) = \begin{cases} \min J_{k+2} & (\text{if } m \in J_k \text{ and } m = \min J_k) \\ 0 & (\text{if } m \in J_k \text{ and } m > \min J_k) \end{cases}$ で定める．

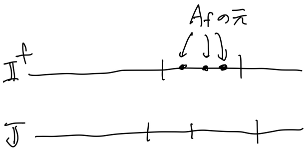
❼ この $h_\mathbb{J}$ がどの F の元とも比較不能であることを示す．

❽ $f \in F$ を固定する．

❾ まず $f >^\infty h_\mathbb{J}$ を示そう．

$n_0 \in \omega$ を任意にとる．すると $n > n_0$ がとれて $(\forall k)(J_k \not\subseteq I^f_n)$ である．I^f_n と交わる J_k の個数は 2 個以下なことに注意しよう．しかし，区間 I^f_n には A_f の点が 3 個以上ある．よって，I^f_n から A_f の点 m であって，$\mathbb{J}$ の区間の左端点ではないものをとれる．すると $m \geq 3n > n_0$, $f(m) > 0$ かつ $h_\mathbb{J}(m) = 0$ である．よって，$f >^\infty h_\mathbb{J}$.

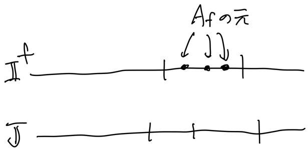
$f >^\infty h \iff f(n) > h(n)$
となる n が無限個存在する



$\mathbf{d} \le \mathbf{cp}(\omega^\omega \setminus \mathbb{O})$ の証明 (3/3)

10. 次に $f <^\infty h_{\mathbb{J}}$ を示そう．
$I_n^f = [i_n, i_{n+1}), J_k = [j_k, j_{k+1})$ とする．$k_0 \in \omega$ とする．すると $(\forall n_0)(\exists n \ge n_0)(\forall k)(J_k \not\subseteq I_n^f)$ により，n であって，$i_n > j_{k_0}$ かつ $(\forall k)(J_k \not\subseteq I_n^f)$ なものをとれる．k を $i_n \in J_k$ なものとする．すると $j_k \le i_n$ かつ $i_{n+1} < j_{k+2}$ である，なぜなら $\mathbb{J}$ の区間で I_n と触れるものは高々 2 個だから．i_{n+1} のとり方より $f(j_k) \le i_{n+1} < j_{k+2}$ を得る．よって，$f(j_k) < h_{\mathbb{J}}(j_k)$. また $i_n \in J_k$ なので $i_n < j_{k+1}$ だから，$j_{k_0} < i_n < j_{k+1}$．よって，$k_0 \le k$ を得る．これで $f <^\infty h_{\mathbb{J}}$ が示せた．
11. これで証明終了．

$$h_{\mathbb{J}}(m) = \begin{cases} \min J_{k+2} & (\text{if } m \in J_k \text{ and } m = \min J_k) \\ 0 & (\text{if } m \in J_k \text{ and } m > \min J_k) \end{cases}$$



Tukey 射についての注意

上の証明をよく読むと「Tukey 射**」**$(\mathbb{IP}, \mathbb{IP}, \sqsubset) \to (\omega^\omega \setminus \mathbb{0}, \omega^\omega \setminus \mathbb{0}, \leq^* \cup \geq^*)$ **を作っていることがわかる．**
したがって，d $\leq$ **cp**$(\omega^\omega \setminus \mathbb{0})$ **だけでなく，その「双対」icp**$(\omega^\omega \setminus \mathbb{0}) \leq$ **b も示されている．**

未解決問題と今後の課題

未解決問題：

1. ZFC で $\mathbf{icp}(\mathcal{N} \setminus \{\varnothing\}) = \mathrm{add}(\mathcal{N})$ が示せるか？
2. ZFC で $\mathbf{icp}(\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}) = \mathrm{add}(\mathcal{M})$ が示せるか？
3. $\mathbf{cp}((\mathcal{N} \cap \mathrm{Borel}) \setminus \{\varnothing\})$, $\mathbf{icp}((\mathcal{N} \cap \mathrm{Borel}) \setminus \{\varnothing\})$, $\mathbf{cp}((\mathcal{M} \cap \mathrm{Borel}) \setminus \{\varnothing\})$, $\mathbf{icp}((\mathcal{M} \cap \mathrm{Borel}) \setminus \{\varnothing\})$ の値は何か？
4. $\mathbf{cp}(\mathcal{P}(\omega_1)/\mathrm{NS}_{\omega_1}) = \aleph_1$ という主張の無矛盾性の強さはどれくらいか？

今後の課題： comparability や incomparability を使って half generic real を作れないか？

P	$\mathbf{cp}(P)$	$\mathbf{icp}(P)$
$\omega^\omega \setminus \mathbb{0}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$
$\mathbb{Z}^\omega$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$
$\mathbb{R}^\omega$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{b}$
ℓ^1	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	$\mathrm{add}(\mathcal{N})$
Cohen 代数	$\aleph_0$	2
ランダム代数	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	2
$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$	$\mathfrak{r}$	2
Turing 次数	$\mathfrak{c}$	$\aleph_1$
$\mathcal{N} \setminus \{\varnothing\}$	$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	? $\in [\mathrm{add}(\mathcal{N}), \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{N}), \mathrm{non}(\mathcal{N})\}]$
$\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}$	$\mathrm{cof}(\mathcal{M})$	? $\in [\mathrm{add}(\mathcal{M}), \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{M})\}]$

参考文献

[BJ95] Tomek Bartoszynski and Haim Judah. *Set Theory: on the structure of the real line*. CRC Press, 1995.

[Bla10] Andreas Blass. "Combinatorial cardinal characteristics of the continuum". In: *Handbook of set theory*. Springer, 2010, pp. 395–489.

[Bur89] Maxim R Burke. "Weakly dense subsets of the measure algebra". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 106.4 (1989), pp. 867–874.