
Davies–Rogers による奇妙な Hausdorff 測度の構成

後藤 達哉
2024 年 12 月 15 日 作成

目次

1 準備	1
2 Davies–Rogers の例	2
2.1 グラフ理論的補題	2
2.2 構成	4
2.3 標準的な集合と大きな集合	5
2.4 全体集合の測度が大きいこと	5
2.5 測度正かつ有限の部分集合が存在しないこと	6

1 準備

定義 1.1. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ がゲージ関数であるとは, f が広義単調増加, 右連続, $f(0) = 0$ を満たすことを言う.

定義 1.2. (X, d) を距離空間, f をゲージ関数, $\delta > 0$ を実数とする. $A \subseteq X$ に対し X の部分集合の列 $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ が A の δ 被覆であるとは,

$$A \subseteq \bigcup_n C_n \text{ かつ } (\forall n)[\text{diam}(C_n) \leq \delta]$$

を満たすことを言う. $A \subseteq X$ について

$$\mathcal{H}_{X,\delta}^f(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \omega} f(\text{diam}(C_n)) : \langle C_n : n \in \omega \rangle \text{ は } A \text{ の } \delta \text{ 被覆} \right\}$$

と定義して, A の Hausdorff 測度の δ 近似という.

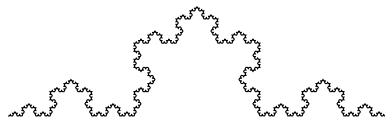
$$\mathcal{H}_X^f(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_{X,\delta}^f(A)$$

と定義して, A の Hausdorff 測度という.

注意 1.3. Hausdorff 測度の δ 近似 \mathcal{H}_δ^f および Hausdorff 測度 \mathcal{H}^f は外測度である. また, Hausdorff 測度 \mathcal{H}^f は Borel 集合を可測にする.

例 1.4. n 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^n における n 次元 Lebesgue 外測度とゲージ関数 $f(x) = x^n$ に関する Hausdorff 測度 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^f$ は定数倍を除いて等しい. また, たとえば \mathbb{R}^n においてゲージ関数 $f(x) = x$ が定める Hausdorff 測度 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^f$ は \mathbb{R}^n の中にある曲線の長さを定義する.

例 1.5. 次の図のような「Koch 曲線」と呼ばれる Euclid 平面内の図形はゲージ関数 $f(x) = x$ については無限大の Hausdorff 測度を取る．すなわち曲線の長さは無限大である．が、 $r = \log 4 / \log 3 = 1.26 \dots$ についてゲージ関数 $f(x) = x^r$ で Hausdroff 測度は正かつ有限である．



(正確に述べるとこの図は Koch 曲線の有限近似である．)

この例に一端が現れているが、フラクタル幾何学という分野では Hausdorff 測度はもっとも重要な概念の一つである．

注意 1.6. 任意の距離空間 (X, d) ，ゲージ関数 f ，実数 $\delta > 0$ に対して、 $\mathcal{H}^f(A) = 0$ と $\mathcal{H}_\delta^f(A) = 0$ は同値である．

定義 1.7. ゲージ関数 f が doubling であるとは、ある $C > 0$ があって、任意の $x > 0$ について、 $f(2x) < Cf(x)$ となることを言う．

次が顕著な定理である．

定理 1.8 (Howroyd)． (X, d) を解析的な距離空間、 f を doubling なゲージ関数とし、 $\mathcal{H}^f(X) > 0$ とする．するとコンパクト集合 $K \subseteq X$ が存在し、 $0 < \mathcal{H}^f(X) < \infty$ となる．

2 Davies–Rogers の例

Davies と Rogers は doubling という仮定を外すと Howroyd の定理はもはや成り立たないことを示した．

定理 2.1. あるコンパクト距離空間 (X, d) と (doubling でない) ゲージ関数 f の組で、次を満たすものが存在する： $\mathcal{H}^f(X) = \infty$ だが、どんな $A \subseteq X$ についても、 $\mathcal{H}^f(A) = 0$ または $\mathcal{H}^f(A) = \infty$ である．

2.1 グラフ理論的補題

グラフの部分集合は、その中のどの 2 点も結ばれていないとき独立部分集合というのであった．

補題 2.2. $n > 0$ を整数とする．このとき有限グラフ G が存在して次の性質が成り立つ：

- (1) G は n 個の独立部分集合に分割することはできない．
- (2) 任意の関数 $w: G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して、独立部分集合 $H \subseteq G$ が存在して、

$$\sum_{g \in H} w(g) \geq \frac{1}{4} \sum_{g \in G} w(g)$$

となる．

注意 2.3. $n > 0$ に対する補題のグラフ G は、次の性質を満たす：

$$|G| \geq \frac{4}{3}n.$$

実際、任意の $g \in G$ に対して $w(g) = 1$ と定めることにより、独立部分集合 $H \subseteq G$ があって、 $|H| \geq \frac{1}{4}|G|$

となる．すると，(1) より $G \setminus H$ は n 個以上元を持つ必要がある．よって， $n \leq |G \setminus H| \leq \frac{3}{4}|G|$ なので結論を得る．

補題 2.2 の証明． n は十分大きいと仮定してよく，特に $n > 2$ としてよい． \mathbb{R}^n において G を次のような条件を満たす極大な集合とする： G は \mathbb{R}^n の単位ベクトルからなり，互いの距離が $\varepsilon := 1/(2\sqrt{n})$ より大きい．極大性より，次がわかる：

$$\text{もし } \|h\| = 1 \text{ ならばある } g \in G \text{ について } \|h - g\| \leq \varepsilon.$$

G を頂点集合とし，次のように辺を定めてグラフを作る．

$$g \text{ と } g' \text{ の間に辺がある} \iff \|g - g'\| \geq 2 - \varepsilon^2.$$

このグラフ G が所望のものなことを示そう．

(1). G が n 個の部分集合 G_1, \dots, G_n に分割されたとする．このとき，そのうちの一つは独立でない，すなわち辺が張られた 2 頂点を見つけられることを示す． $\nu = 1, \dots, n$ に対して

$$H_\nu = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1, \|h - g\| \leq \varepsilon \text{ for some } g \in G_\nu\}$$

とおく．閉集合 H_ν ($\nu = 1, \dots, n$) たちは $S^{n-1} = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$ を被覆するので，Lusternik–Schnirelmann–Borsuk の定理より，その中の一つ H_ν は対蹠点 $\pm h$ を持つ． $\pm h \in H_\nu$ より，ある $g, g' \in G_\nu$ があって， $\|g - h\|, \|g' + h\| \leq \varepsilon$ となる．このとき

$$\begin{aligned} \|g - g'\| &\geq (g - g') \cdot h \\ &= \frac{1}{2}(-(g - h)^2 - (g' + h)^2 + g^2 + g'^2 + 2h^2) \\ &\geq \frac{1}{2}(-\varepsilon^2 - \varepsilon^2 + 4) \\ &= 2 - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

となる．

(2) ある $g \in G$ について $w(g) > 0$ と仮定して良い．そこで， $\sum_{g \in G} w(g) = 1$ と仮定しても良い．よって独立部分集合 $H \subseteq G$ であって， $\sum_{g \in H} w(g) \geq \frac{1}{4}$ なものを見つけられればよい．

各単位ベクトル x について

$$H(x) = \{g \in G : g \cdot x \geq \varepsilon\}$$

とおく．すると， $g \in H(x)$ について

$$\|g - \varepsilon x\|^2 = g^2 - 2\varepsilon g \cdot x + \varepsilon^2 x^2 \leq 1 - \varepsilon^2,$$

よって，

$$\|g - \varepsilon x\| \leq (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$$

を得る．したがって， $g, g' \in H(x)$ のとき

$$\|g - g'\| \leq \|g - \varepsilon x\| + \|g' - \varepsilon x\| \leq 2(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \leq 2 - \varepsilon^2$$

を得る．したがって， $H(x)$ は必ず独立集合となる．ゆえに，単位ベクトル x があって， $\sum_{g \in H(x)} w(g) \geq \frac{1}{4}$ となることを示せば十分．

σ^{n-1} を球面 S^{n-1} の通常の測度とする．すると

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \sum_{g \in H(x)} w(g) d\sigma^{n-1}(x) &= \sum_{g \in H(x)} \int_{S^{n-1}} w(g) d\sigma^{n-1}(x) \\ &= \sum_{g \in G} \left(w(g) \int_{g \cdot x \geq \varepsilon} d\sigma^{n-1}(x) \right) \\ &= \int_{h \cdot x \geq \varepsilon} d\sigma^{n-1}(x).\end{aligned}$$

ここで最後の $\int_{g \cdot x \geq \varepsilon} d\sigma^{n-1}(x)$ の値は g の取り方によらないので、 $h \in S^{n-1}$ を一つ固定した．

よって、集合 C を $C = \{x \in S^{n-1} : h \cdot x \geq \varepsilon\}$ で定めると、最後の式は $\sigma^{n-1}(C)$ である．したがって、ある $x \in S^{n-1}$ が存在し、

$$\sum_{g \in H(x)} w(g) \geq \frac{\sigma_{n-1}(C)}{\sigma_{n-1}(S^{n-1})}$$

となる．今、 $\sigma_{n-1}(S_{n-1})$ および $\sigma_{n-1}(C)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}(S_{n-1}) &= \int_{-1}^1 \sigma_{n-2}(S^{n-2})(1-x^2)^{(n-3)/2} dx \\ &= \frac{n}{n-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)} \sigma_{n-2}(S^{n-2}), \\ \sigma_{n-1}(C) &= \int_{\varepsilon}^1 \sigma_{n-2}(S^{n-2})(1-x^2)^{(n-3)/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{n-1}(S^{n-1}) - \int_{\varepsilon}^1 \sigma_{n-2}(S^{n-2})(1-x^2)^{(n-3)/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{n-1}(S^{n-1}) - \varepsilon \sigma_{n-2}(S^{n-2})\end{aligned}$$

となる．ただし、第 1 行から第 2 行への変形は $t = x^2$ の置換積分やベータ関数の定義式、ベータ関数とガンマ関数の公式を使った．したがって、

$$\frac{\sigma_{n-1}(C)}{\sigma_{n-1}(S^{n-1})} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}n\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right)$$

となる．Stirling の近似により、上の式は近似的に

$$\frac{1}{2} - \varepsilon(n/2\pi)^{1/4} = \frac{1}{2} - (1/8\pi)^{1/2} > \frac{1}{4}$$

となる．したがって、十分大きい n に対して

$$\frac{\sigma_{n-1}(C)}{\sigma_{n-1}(S^{n-1})} \geq \frac{1}{4}$$

となる． □

2.2 構成

$n > 0$ に対して補題 2.2 で定まるグラフを $G(n)$ と書くことにする．

列 $\langle n_i, G_i, N_i : i \geq 1 \rangle$ を次のように定める．ただし n_1 は任意に選んで固定する．

$$\begin{aligned}G_i &= G(n_i) \\ N_i &= |G_i| \\ n_i &= 2N_{i-1}\end{aligned}$$

最後の式より

$$\frac{N_1 \dots N_{i-1}}{n_1 \dots n_i} \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow \infty$$

なことに注意する．集合 Ω を

$$\Omega = \prod_{i \geq 1} G_i$$

で定める． Ω 上の距離 ρ を次で定める： $x, y \in \Omega, x \neq y$ に対して $x(i) \neq y(i)$ なる最小の i を取ったとき

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 2^{-i-1} & (\text{もし } x(i) \text{ と } y(i) \text{ がグラフ } G_i \text{ においてつながっているとき}) \\ 2^{-i} & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

ρ は距離関数であることは容易に確認できる． $d(x, y) = 2^{-i}$ で定まる距離とは 2 倍しかずれないので， (Ω, ρ) と (Ω, d) は Lipschitz 同型である．したがって， (Ω, ρ) は完備距離空間であり，Cantor 空間と同相である．

ゲージ関数 h を次で定める：

$$h(0) = 0, h(2^{-i}) = (n_1 \dots n_i)^{-1} \text{ (for } i \geq 0).$$

ただしこれら以外の点については線形に補間する．

この距離空間 (Ω, ρ) とゲージ関数 ρ が定理 2.1 を示すための所望のものである．それを以下の節で証明していこう．

2.3 標準的な集合と大きな集合

部分集合 $S \subseteq \Omega$ が,

$$S = \prod_{i \geq 1} H_i$$

の形をしていて，ある $j \geq 1$ について

- $i < j$ については H_i は G_i の一点部分集合
- H_j は G_j の非空部分集合
- $i > j$ について $H_i = G_i$

の形をしているとしよう． H_j が G_j の独立集合であるとき， S をランク j の標準的な集合と呼ぶことにし， $H_j = G_j$ のときは S をランク j の大きな集合と呼ぶことにする．

ランク j の大きな集合はランク $j-1$ の標準的な集合であることに注意したい．また，ランク j の標準的な集合は直径 2^{-j} を持つことがかんたんに分かる．

補題 2.4. Ω の部分集合 S が二点以上の点を持っているとき，同じ直径の標準的な集合で S を包むものが存在する．

2.4 全体集合の測度が大きいこと

補題 2.5. $\mathcal{H}^h(\Omega) = \infty$.

証明． $\mathcal{H}_{2^{-i}}^h(\Omega) \geq N_1 \dots N_{i-1} / n_1 \dots n_{i-1}$ を示せば十分である（注意 2.3 より）． \mathcal{V} を Ω の 2^{-i} 被覆とする．

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} h(\text{diam}(V)) \geq N_1 \dots N_{i-1} / n_1 \dots n_{i-1}$$

を示さなければならない． \mathcal{V} のどのメンバーも二点以上元を持つと仮定してよい．したがって，補題 2.4 より， \mathcal{V} のどの元も標準的な集合と仮定できる． Ω はコンパクトで，標準的な集合はすべて開集合

なので、 \mathcal{V} は有限個のメンバーからなると仮定できる。さらに重なる部分を削ることにより、互いに重ならない被覆だと仮定してよい。

まず、 \mathcal{V} に直径 2^{-i} より小さい標準的な集合 (つまりランクが $j > i$ な標準的な集合) がある場合を考えよう。このとき次を示す：別の Ω の被覆 \mathcal{W} があって、

$$|\mathcal{W}| < |\mathcal{V}| \text{ かつ } \sum_{W \in \mathcal{W}} h(\text{diam}(W)) < \sum_{V \in \mathcal{V}} h(\text{diam}(V)) \quad (*)$$

となる。ランクが $j > i$ な標準的な集合があるのでそれを一つ固定する。すると $W = \{x_0\} \times \{x_1\} \cdots \times H_j \times G_{j+1} \times G_{j+2} \times \cdots$ と書ける (H_j は独立集合)。 $W' = \{x_0\} \times \{x_1\} \cdots \times G_j \times G_{j+1} \times G_{j+2} \times \cdots$ とおくと W' はランク j の大きな集合である。 W' はどの $V \in \mathcal{V}$ にも被覆されないことに注意しよう。そこで、次が示された：ある大きな集合でランクが i より大きいものがあり、どの $V \in \mathcal{V}$ にも被覆されない。 W_0 をこのような大きな集合の一つで、極大なランク j を持つものとする。すると W_0 は \mathcal{V} の中の標準的な集合たちで覆われる。それらを W_1, \dots, W_k としよう。 W_1, \dots, W_k はどれもランク j の標準的な集合である。ランク $j-1$ 以下のものがあつたとすると、その一つで W_0 を被覆することになり、それは W_0 の取り方に矛盾する。ランク $j+1$ 以上のものがあつたとすると、それは W_0 に含まれているが、それは極大性に反する。

第 j 成分への射影 $\pi_j(W_1), \dots, \pi_j(W_k)$ を考えよう。これは G_j の独立集合による被覆である。したがって、個数 k は n_j より大きい。したがって、

$$\sum_{l=1}^k h(\text{diam}(W_l)) > n_j \cdot h(2^{-j}) = h(2^{-j+1}) = h(\text{diam}(W_0)).$$

したがって、 $\mathcal{W} = (\mathcal{V} \setminus \{W_1, \dots, W_k\}) \cup \{W_0\}$ は $(*)$ を満たす被覆となる。

以上より、 \mathcal{V} がランク i の標準的な集合のみからなるときを考えれば十分である。このとき各ランク i の大きな集合は \mathcal{V} の中の n_i 個の元で覆われる。ランク i の大きな集合は $N_1 \dots N_{i-1}$ 個あるから、

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} h(\text{diam}(V)) > n_i \cdot h(2^{-i}) \cdot N_1 \dots N_{i-1} = N_1 \dots N_{i-1} / n_1 \dots n_{i-1}$$

となり示したいことが示せた。 □

2.5 測度正かつ有限の部分集合が存在しないこと

補題 2.6. Ω 上のどんな有限 Borel 測度 μ も \mathcal{H}^f 測度 0 集合に集中する。すなわち、どんな有限 Borel 測度 μ についても Borel 集合 A があって $\mu(A) = \mu(\Omega)$ かつ $\mathcal{H}^h(A) = 0$ を満たす。特に、 \mathcal{H}^f は Ω の部分集合で必ず 0 か ∞ の値を取る。

証明. どんな $\varepsilon > 0$ についても、Borel 集合 E があって、 $\mu(E) < \varepsilon$ かつ $\mathcal{H}^h(\Omega \setminus E) < \varepsilon$ となることを示せば十分である。

さらに、これを示すためには、次を示せば十分である：どんな $\varepsilon > 0$ についても、Borel 集合 $E(\varepsilon)$ があって、 $\mu(E(\varepsilon)) < \varepsilon$ かつ $\mathcal{H}_1^h(\Omega \setminus E(\varepsilon)) < \varepsilon$ となる。なぜなら、これを示せば、 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(\varepsilon_n)$ where $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$ とおけばいいからである。(Hausdorff 測度とその δ 近似の差異は注意 1.6 と同様の議論で解消できる。)

さて、このような $E(\varepsilon)$ を構成しよう。 Ω 上の有限 Borel 測度 μ と実数 $\eta > 0$ が与えられたとする。このときある i があって

$$N_1 \dots N_{i-1} / n_1 \dots n_i < \eta.$$

ランク i の大きな集合 V が与えられたとし、それをランク $i+1$ の大きな集合の和集合で $V = V^1 \cup V^2 \cup \dots \cup V^N$ と書こう。射影 $\pi_i(V^s)$ は G_i の一点部分集合 $\{g^s\}$ である。補題 2.2 の (1) を $w(g) = \mu(V^s)$ という重み関数で適用すると、 G_i の独立部分集合 H が存在し、

$$\mu\left(\bigcup\{V^s : g^s \in H\}\right) \geq \frac{1}{4}\mu(V)$$

となる。 $W := \bigcup\{V^s : g^s \in H\}$ はランク i の標準的な集合である。したがって、

$$\mathcal{H}_1^h(W) \leq h(2^{-i}) = 1/n_1 \dots n_i$$

となる。

さて、これと同じ構成を $N_1 \dots N_{i-1}$ 個あるすべての大きな集合に対して行おう。対応する集合 W たちを全部和集合したものを F_1 と書く。すると

$$\mu(F_1) \geq \frac{1}{4}\mu(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F_1) < \eta$$

である。

同じ結果を今度は Borel 測度 μ_1 で $\mu_1(X) = \mu(X \setminus F_1)$ で定義されるものについて適用すると Borel 集合 F_2 がとれて、

$$\mu_1(F_2) \geq \frac{1}{4}\mu_1(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F_2) < \eta$$

となる。 $F'_2 = F_1 \cup F_2$ とおくと、

$$\mu(F'_2) \geq \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\mu(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F'_2) < 2\eta$$

となる。この操作を繰り返すと各 k について、Borel 集合 F'_k で

$$\mu(F'_k) \geq \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)\mu(\Omega) \text{ かつ } \mathcal{H}_1^h(F'_k) < k\eta$$

となるものを取りることができる。 k を十分大きく取り、その後で η を十分小さく取ること、 $E(\varepsilon) = F'_k$ は $\mu(E(\varepsilon)) < \varepsilon$ かつ $\mathcal{H}_1^h(\Omega \setminus E(\varepsilon)) < \varepsilon$ を満たす。これで証明された。 \square

参考文献

- [DR69] Roy O. Davies and C. A. Rogers. “The Problem of Subsets of Finite Positive Measure”. *Bulletin of the London Mathematical Society* 1.1 (Mar. 1969), pp. 47–54.
- [Fre00] D.H. Fremlin. *Measure Theory*. 2000.
- [How95] John D Howroyd. “On dimension and on the existence of sets of finite positive Hausdorff measure”. *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.3 (1995), pp. 581–604.