

無限次元位相空間入門

～Hilbert 立方体を通して無限次元空間の
特異な雰囲気味わおう～

後藤 達哉

2025 年 10 月 11 日
第 8 回すうがく徒のつどい

目次

- ① 導入
- ② 関数空間
- ③ 写像の無限合成
- ④ Hilbert 立方体の等質性
- ⑤ 発展話題

目次

- ① 導入
- ② 関数空間
- ③ 写像の無限合成
- ④ Hilbert 立方体の等質性
- ⑤ 発展話題

後藤 達哉 (でいぐにゃん)
オーストリアでポスドクをしている。

集合論，特に実数にまつわる無限組合せ論を研究している。

ジェネラルトポロジーと接する部分で何か面白いことができないかなと考えて van Mill のテキスト “Infinite-Dimensional Topology” を読んでいる。

それを読む中で面白いなと思った話を今回話す。

等質性

位相空間 X が等質的であるとは、任意の二点 $x, y \in X$ について x を y に写す同相写像があることを言う。

たとえばどの $n \in \mathbb{N}$ についてもユークリッド空間 \mathbb{R}^n は等質的 (平行移動を考えれば良い)。

閉区間 $[0, 1]$ は等質的ではない (中間値の定理を使って簡単に証明される)。

$n \geq 2$ に対しても $[0, 1]^n$ は等質的ではない (直観的には正しいが証明は簡単ではない)。

ところが、無限直積 $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ は等質的！この空間を Hilbert 立方体という。

本発表の流れ

前半で、必要な予備知識および Hilbert 立方体の等質性の証明をかなり丁寧にやる。

後半では証明を抜きにして少し発展的な話をしていく。

この講演で、無限次元空間を扱うときに普段使っている空間と違う特異な雰囲気を感じて楽しんでもらえたら幸いである。

目次

- ① 導入
- ② 関数空間
- ③ 写像の無限合成
- ④ Hilbert 立方体の等質性
- ⑤ 発展話題

X をコンパクト距離空間, Y を距離空間とする. $C(X, Y)$ を X から Y への連続写像全部の集合とする. $C(X, Y)$ に sup 距離 D を入れる.

$$D(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

X はコンパクトなので, \sup は実際には \max となる.

一様収束の命題

一様収束の命題

X と (Y, d) を距離空間とし、 $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を $C(X, Y)$ の Cauchy 列とし、各 x について $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在するとする。このとき $f: X \rightarrow Y$ で $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ と定められる写像は連続で、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $C(X, Y)$ である。

証明は省略。イプシロンデルタ論法をがりがりすればできる。



なお「各 x について $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在」の仮定は Y が完備距離空間であれば、自動的に成り立ちチェック不要。

$S(X, Y)$ と $H(X, Y)$ と $S_\varepsilon(X, Y)$ と $G_\varepsilon(X, Y)$

X, Y を距離空間で X はコンパクトとする． $S(X, Y)$ を X から Y への連続全射写像全部の集合とする． $H(X, Y)$ を X から Y への同相写像全部の集合とする． $H(X, X)$ を単に $H(X)$ と書く．

$\varepsilon > 0$ とする． $f \in C(X, Y)$ は任意の $y \in Y$ について $\text{diam}(f^{-1}(\{y\})) < \varepsilon$ のとき， ε 写像と呼ばれる．

$S_\varepsilon(X, Y)$ を X から Y への連続全射写像で ε 写像なもの全部の集合とする．
 $G_\varepsilon(X, Y)$ を X から Y への連続全射写像であって， ε 写像でないものの全部の集合とする．

これらの集合には $C(X, Y)$ からの相対位相が入る．

$S(X, Y)$ と $H(X, Y)$ と $S_\varepsilon(X, Y)$ と $G_\varepsilon(X, Y)$

命題

- 任意の $\varepsilon > 0$ について $G_\varepsilon(X, Y)$ は $C(X, Y)$ の閉集合.
- $S(X, Y)$ は $C(X, Y)$ の閉集合.

証明は省略.

命題

X と Y がともにコンパクト距離空間なとき, $H(X, Y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{1/n}(X, Y)$.

略証. 同相写像なら任意の ε について ε 写像. 逆に任意の ε について ε 写像だったら単射なことが分かるが, コンパクト Hausdorff 空間の間の連続全単射は同相写像なので, 同相写像なことが分かる.

前命題の嬉しさ

第一の嬉しさ：(Y が完備のとき) $H(X, Y)$ が完備距離付け可能と分かる！ (命題より $H(X, Y)$ は $C(X, Y)$ の G_δ 部分集合なので！)

第二の嬉しさ：新しく同相写像を作りたいときは，どの $S_{1/n}(X, Y)$ に入るように作れば良い．つまり，どの $G_{1/n}(X, Y)$ も避けるように作っていけばいいということになる．

(もっとも第一の嬉しさは今回の講演ではあまり関係がない．)

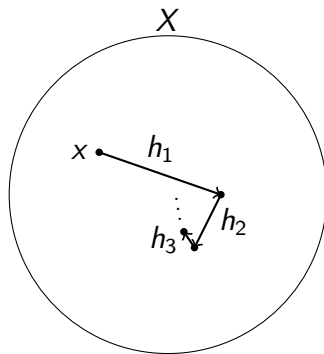
目次

- ① 導入
- ② 関数空間
- ③ 写像の無限合成**
- ④ Hilbert 立方体の等質性
- ⑤ 発展話題

Hilbert 立方体が等質的であることを示すには，同相写像を作らなければいけない．一発でそれを定義するのは難しいので，段階的に作っていきたい．そこで写像の無限合成という概念を考える．

モチベーション

X から X への同相写像の列 $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ があったとき，その無限合成 $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \circ \cdots \circ h_1$ を定義したい．どんな列に対してもこれが定まるのを期待するのは無理だが， h_n による変化量が n に従ってどんどん減っていけば可能そうに思える．



Cauchy 列の極限が集合を避けるための十分条件

補題

X を完備距離空間とし $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を X の部分集合の列とする． $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を X の点列ですべての n について

$$d(x_{n+1}, x_n) < 3^{-n} \cdot \min\{d(x_i, A_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

が成り立つものとする． $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ．

Cauchy 列の極限が集合を避けるための十分条件

補題 X を完備距離空間とし $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を X の部分集合の列とする. $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を X の点列で $d(x_{n+1}, x_n) < 3^{-n} \cdot \min\{d(x_i, A_i) : 1 \leq i \leq n\}$ が成り立つものとする. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

証明. $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ とおく. $n \in \mathbb{N}$ とする. 仮定よりすべての $m \in \mathbb{N}$ について

$$d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) < 3^{-(n+m-1)} \cdot d(x_n, A_n) \leq 3^{-m} \cdot d(x_n, A_n).$$

よって

$$d(x_{n+m}, x_n) < \sum_{i=1}^m 3^{-i} d(x_n, A_n).$$

両辺の $m \rightarrow \infty$ の極限をとると $d(x, x_n) \leq \frac{1}{2} d(x_n, A_n)$. この不等式から $x \notin A_n$ が従う. □

同相写像の無限合成定理

X をコンパクト距離空間とし、 $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を $H(X)$ の中の列とする.

- $d(h_{n+1}, \text{id}_X) < 2^{-n}$
- $d(h_{n+1}, \text{id}_X) < 3^{-n} \cdot \min\{d(h_i \circ \cdots \circ h_1, G_{1/i}(X, X)) : 1 \leq i \leq n\}$

とする. このとき $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \circ \cdots \circ h_1$ は存在し、 X から X への同相写像となる.

ここに $d(h_i \circ \cdots \circ h_1, G_{1/i}(X, X))$ は関数空間 $C(X, X)$ における点と集合の距離である. おおのこの $h_i \circ \cdots \circ h_1$ は同相写像だから任意の $\varepsilon > 0$ について ε 写像である. よって、 $\min\{d(h_i \circ \cdots \circ h_1, G_{1/i}(X, X)) : 1 \leq i \leq n\}$ は常に正の値であることに注意しておく.

写像の無限合成：証明

証明. $f_n = h_n \circ \cdots \circ h_1$ とおく. すべての n について

$$d(f_{n+1}, f_n) = d(h_{n+1} \circ \cdots \circ h_1, h_n \circ \cdots \circ h_1) \leq d(h_{n+1}, \text{id}_X) < 2^{-n}. \quad (*)$$

よって $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ はコーシー列. よって, 「一様収束の命題」より, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ が存在する. $S(X, X)$ は閉集合で各 f_n はその元なので, f も $S(X, X)$ の元. 「Cauchy 列の極限が集合を避けるための十分条件補題」と定理の2つ目の仮定および, (*) より, $f \in \bigcap_n S_{1/n}(X, X) = H(X)$ が従う. \square

写像の無限合成：証明

$f: Z \rightarrow X, g, h: X \rightarrow Y$ 連続ならば $d(g \circ f, h \circ f) \leq d(g, h)$

証明. $f_n = h_n \circ \cdots \circ h_1$ とおく. すべての n について

$$d(f_{n+1}, f_n) = d(h_{n+1} \circ \cdots \circ h_1, h_n \circ \cdots \circ h_1) \leq d(h_{n+1}, \text{id}_X) < 2^{-n}. \quad (*)$$

よって $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ はコーシー列. よって, 「一様収束の命題」より, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ が存在する. $S(X, X)$ は閉集合で各 f_n はその元なので, f も $S(X, X)$ の元. 「Cauchy 列の極限が集合を避けるための十分条件補題」と定理の2つ目の仮定および, (*) より, $f \in \bigcap_n S_{1/n}(X, X) = H(X)$ が従う. \square

目次

- ① 導入
- ② 関数空間
- ③ 写像の無限合成
- ④ Hilbert 立方体の等質性
- ⑤ 発展話題

Hilbert 立方体の定義

説明が簡単になるので，Hilbert 立方体を $[0, 1]$ の直積でなく， $J := [-1, 1]$ の直積で定義する： $Q = J^{\mathbb{N}}$.

Q に直積位相を入れるがそれは次の距離とコンパクトなのはよく知られている．

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

以後 Hilbert 立方体 Q にはこの距離が備わっているものとして考えていく．

また Q の擬内部 s を

$$s = \{x \in Q : \text{すべての } n \text{ で } x_n \in (-1, 1)\}$$

と定義する．

平面上のある同相写像の存在補題

$$J = [-1, 1].$$

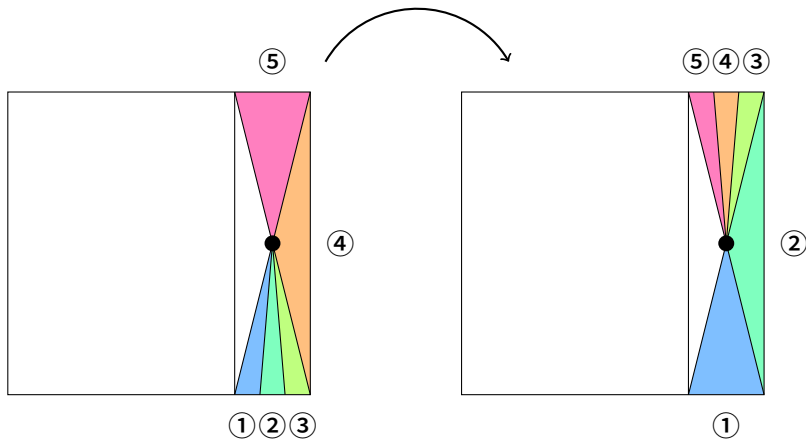
補題

$0 < \varepsilon < 1$ とする．このとき同相写像 $\phi : J^2 \rightarrow J^2$ があって，

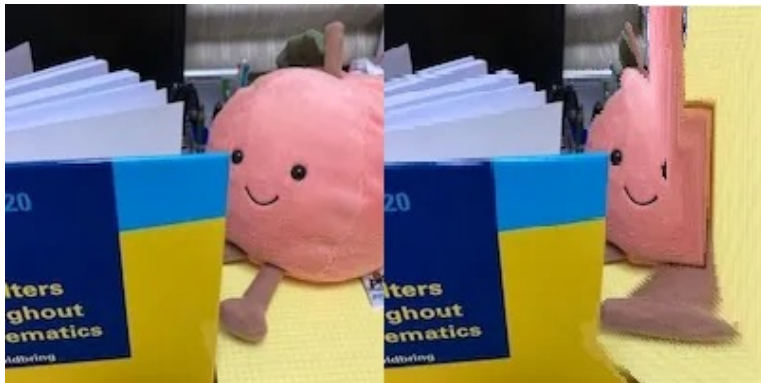
- ① $\phi(p, q) = (p, q)$ if $p \leq 1 - \varepsilon$.
- ② $\phi(\{1\} \times J)$ は $(1 - \varepsilon, 1) \times \{1\}$ の部分集合である．

この補題は「幾何的に明らか」としてテキストでは証明が省略されている．
だけど，ぱっと見てそう思える人は頭が良いと思う…．

平面上のある同相写像の存在補題



平面上のある同相写像の存在補題



平面上のある同相写像の存在補題の系

系

$x \in Q, m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ とする. このとき Q から自身への同相写像 h があって,

- ① $d(h, \text{id}_Q) < \varepsilon$.
- ② $h(x)_m \in (-1, 1)$.
- ③ h は最初の $m - 1$ 個の成分を変えない

証明. $x_m \in (-1, 1)$ なら $h = \text{id}$ でよい. よって一般性を失うことなく, $x_m = 1$ としてよい. 自然数 $n > m$ を $2^{-(n-2)} < \varepsilon$ となるよう取る. 前の補題より $\phi: J_m \times J_n \rightarrow J_m \times J_n$ が取れて, $\phi(p, q) = (p, q)$ if $p \leq 1 - 2^{-(n-1)}$ かつ $\phi(\{1\} \times J_n) \subseteq (1 - 2^{-(n-1)}, 1) \times \{1\}$ となる. (J_m, J_n の添字は Q の m 番目, n 番目の直積因子であることを明示するためにつけているだけのもの). $h = \phi \times \text{id}_R$ とおく. ただし R は n, m 以外の直積因子の直積.

平面上のある同相写像の存在補題の系

このとき結論の (2) と (3) は明らか. (1) を示そう.

$$\begin{aligned}d(h(x), x) &= 2^{-m}|h(x)_m - x_m| + 2^{-n}|h(x)_n - x_n| \\&\leq 1 \cdot 2^{-(n-1)} + 2^{-n} \cdot 2 \\&\leq 2^{-(n-2)} \\&< \varepsilon\end{aligned}$$

となって良い.



補題

$x \in Q$ とすると, $h \in H(Q)$ があって, $h(x) \in s$.

証明. 求めるべき $h \in H(Q)$ は $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の無限合成で定める. $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を帰納的に次を満たすように定める:

- ① h_n は最初の $n - 1$ 成分を変えない
- ② $(h_n \circ \cdots \circ h_1(x))_n \in (-1, 1)$
- ③ $d(h_n, \text{id}_Q)$ は「同相写像の無限合成定理」の仮定を満たすくらい小さい

Hilbert 立方体の等質性

証明の続き． $h_0 = \text{id}_Q$ とする． h_0, \dots, h_n が構成できたとする． h_{n+1} を構成するために「同相写像の無限合成定理」の仮定を満たすのに必要なくらい小さな $\varepsilon > 0$ を固定する．先ほどの系より， $h_{n+1} \in H(Q)$ があって，
 $d(h_{n+1}, \text{id}_Q) < \varepsilon$ かつ h_{n+1} は最初の n 成分を変えず，
 $h_{n+1}(h_n \circ \dots \circ h_1(x))_{n+1} \in (-1, 1)$ となる．この h_{n+1} で良い．

Hilbert 立方体の等質性

$h \in H(Q)$ を $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の無限合成とすると, $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が満たす条件 (1), (2) により, 任意の m について

$$h(x)_m = \left(\lim_{n \geq m} h_n \circ \dots \circ h_1(x) \right)_m = (h_m \circ \dots \circ h_1(x))_m \in (-1, 1)$$

となる.



定理

Hilbert 立方体 Q は等質的である。

証明. $x, y \in Q$ とする. 先程の補題より $h_1, h_2 \in H(Q)$ があって,
 $h_1(x) \in s, h_2(y) \in s$. s の点同士については一方を他方に写す同相写像 g は容易に作れる: $g(h_1(x)) = h_2(y)$. よって, $h_2^{-1} \circ g \circ h_1$ が求めるべき同相写像である. □

振り返り

次を満たす列 $\langle h_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が本質的だった.

- ① h_n は最初の $n - 1$ 成分を変えない
- ② $(h_n \circ \cdots \circ h_1(x))_n \in (-1, 1)$
- ③ $d(h_n, \text{id}_Q)$ は「同相写像の無限合成定理」の仮定を満たすくらい小さい

帰納法による列の構成の観点から見ると (2) は (計算理論や集合論などで) よくやる「第 n ステップで第 n の要件を満たすようにする」論法, (1) はこれまでに満たした要件を害さないようにするためのものだと言える.

また, h_n の取り方に使った補題の系の証明は「奥の方に逃げれる次元がたくさんあるので奥へ奥へと逃げる」ことがポイントだと言える. 無限次元ならではの論法だと言えよう.

目次

- ① 導入
- ② 関数空間
- ③ 写像の無限合成
- ④ Hilbert 立方体の等質性
- ⑤ 発展話題

全体の同相写像へ広げられる部分集合

Hilbert 立方体の等質性は「一点集合の間の同相写像を全体の同相写像に拡張できる」こととして解釈できるが、この一点集合の概念はどこまで拡張できるだろうか．その答えの一つを与えるのが次の概念．

閉集合 $A \subseteq Q$ は次の条件を満たすとき、**Z 集合**と呼ばれる：任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $f \in C(Q, Q)$ があって、 $d(f, \text{id}_Q) < \varepsilon$ かつ $f(Q) \cap A = \emptyset$.

全体の同相写像へ広げられる部分集合

定理

A, B が Z 集合で $f: A \rightarrow B$ が同相写像のとき，同相写像 $\tilde{f}: Q \rightarrow Q$ があって f を延長する．

Z 集合の例：Hilbert 立方体の「側面」 $\pi_n^{-1}(\{-1, 1\})$ ($n \in \mathbb{N}$) は Z 集合． $K \subseteq S$ がコンパクトなら， K は Z 集合． Z 集合の有限和はまた Z 集合．

Z 集合の非例：nowhere dense でない閉集合は Z 集合ではない (対偶： Z 集合は nowhere dense)．

アブゾーバー

Z 集合の可算和で表される集合を Z_σ 集合と呼ぶ.

Z_σ 集合 A がアブゾーバーであるとは, 任意の Z 集合 K, L と $\varepsilon > 0$ に対して同相写像 $h: Q \rightarrow Q$ があって, 次の 3 条件を満たすこと.

- $d(h, \text{id}_Q) < \varepsilon$
- $h \upharpoonright K = \text{id}_K$
- $h(L \setminus K) \subseteq A$.

アブゾーバー

定理

A, B がアブゾーバーなら、同相写像 $h: Q \rightarrow Q$ があり、 $h(A) = B$ となる。

方針：写像の無限合成 + 往復論法。

系

A がアブゾーバーで B が Z_σ 集合なら、同相写像 $h: Q \rightarrow Q$ があり、 $h(A \cup B) = A$ となる。

系の証明。アブゾーバーの定義より、仮定から $A \cup B$ もアブゾーバーとなるので良い。 □

定理

$B(Q) := Q \setminus s$ はアブゾーバーである.

系

$A \subseteq s$ を σ コンパクトな部分集合とする. すると $s \setminus A$ と s は同相.

系の証明. $B(Q)$ はアブゾーバーであり, A は Z_σ 集合なので, 系より同相写像 $h: Q \rightarrow Q$ があり, $h(B(Q) \cup A) = B(Q)$. 補集合を取ると $h(s \setminus A) = s$. \square

s は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同相なので次も得られる.

系

$A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を σ コンパクトな部分集合とする. すると $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus A$ と $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は同相.

n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n においては, 一点を取り除いたらもとの空間と非同相な空間が得られることと対比しよう.

他のもっと面白い話題 (講演者がまだ証明を終えていない)

- Hilbert 空間 ℓ^2 と $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は同相.
- アルファベット T の形をした空間 T は Hilbert 立方体 Q の直積因子 $Q \simeq T \times Q$.
 - より一般に距離空間が Hilbert 立方体の直積因子である必要十分条件は「コンパクトかつ絶対近傍レトラクト」.
- Hilbert 立方体の錐は Hilbert 立方体と同相: $\Delta(Q) \simeq Q$.
 - 逆にコンパクトかつ絶対レトラクトかつ錐が自身と同相な距離空間は, Hilbert 立方体と同相.

- [Mil88] J. van Mill. *Infinite-dimensional topology: prerequisites and introduction*. Vol. 43. Elsevier, 1988.
- [yam20] yamyamtopo. *Hilbert 立方体の等質性*.
<https://yamyamtopo.wordpress.com/2020/04/28/>. 2020.