ランダム強制法は Knaster property, precaliber $\aleph_1$, σ-linked と σ-centered を満たすか？

Tatsuya Goto

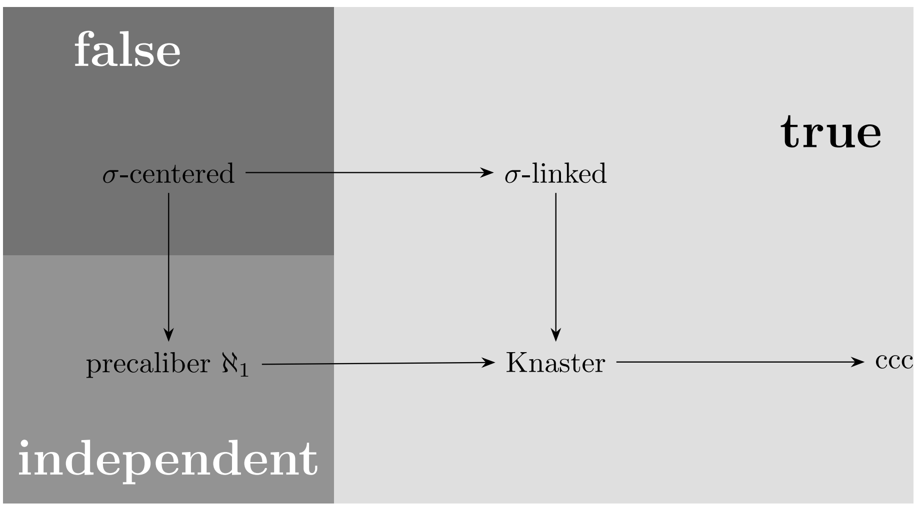
2026 年 1 月 22 日

There is an English version of this artcile: `https://t-goto.jp/articles/rfp-en.pdf`.

強制法の ccc (countable chain condition) より強い性質として，σ-centered，σ-linked，precaliber $\aleph_1$，Knaster がある．この記事では random forcing がどれを満たすか明らかにする．

$$\begin{tikzcd}
\sigma\text{-centered} \arrow[r] \arrow[d] & \sigma\text{-linked} \arrow[d] & \\
\text{precaliber } \aleph_1 \arrow[r] & \text{Knaster} \arrow[r] & \text{ccc}
\end{tikzcd}$$

結論からいうと，次の図の通りとなる．



つまり，σ-centered は不成立，precaliber $\aleph_1$ が成立するかどうかは独立，σ-linked およびそこから導かれる Knaster は成立する．

まず定義から始めよう．なお，必要な定義は復習するので，この記事で強制法の知識は不要である．

定義 1. (1) **強制概念**とは，擬順序集合のことである．

(2) 強制概念 P の元の集まりが**両立可能**であるとは，それらの下界が P に存在するときを言う．

(3) 強制概念 P の部分集合 A が**反鎖**であるとは，どの異なる 2 元 $p, q \in A$ も両立しないときを言う．

(4) 強制概念 P の部分集合 A が *linked* であるとは，どの 2 元 $p, q \in A$ も P の中で両立するときを言う．

(5) 強制概念 P の部分集合 A が *centered* であるとは，どの有限部分集合も P の中で両立するときを言う．

定義 2. P を強制概念とする．

(1) P が *ccc* を満たすとは，P の反鎖はどれも可算集合なことを意味する．

(2) P が *Knaster property* を満たすとは，どんな濃度 $\aleph_1$ の P の部分集合 A についても，ある濃度 $\aleph_1$ の A の部分集合 B がとれて，B は P の linked な部分集合となっていることを言う．

(3) P が *precaliber* $\aleph_1$ を満たすとは，どんな濃度 $\aleph_1$ の P の部分集合 A についても，ある濃度 $\aleph_1$ の A の部分集合 B がとれて，B は P の centered な部分集合となっていることを言う．

(4) P が *σ-linked* であるとは，P が P の linked な部分集合の可算和として表されるときを言う．

(5) P が *σ-centered* であるとは，P が P の centered な部分集合の可算和として表されるときを言う．

定義 3. P を強制概念とする．$Q \subseteq P$ が P の**稠密部分集合**であるとは，どんな $p \in P$ についても，ある $q \in Q$ があり，$q \leqslant p$ となることを意味する．

定義 4. ランダム強制法 $\mathbb{B}$ は Cantor 空間 2^ω の Lebesgue 測度正な Borel 集合からなり，包含関係で順序を入れた強制概念である．

あとで σ-linked を示すので，そこから導かれる ccc や Knaster property は示す必要がないが，ccc についてはそれが標準的な議論で知っておくべき事項であること，Knaster property については証明が面白いので載せておく．

命題 5. $\mathbb{B}$ は ccc を満たす．

証明. $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{B}$ とする．鳩の巣論法より，ある正整数 n について，この中で測度が $1/n$ 以上なものが $\aleph_1$ 個存在する．それらの中に両立する 2 元が見つからなかったら，

全体の測度が ∞ となって矛盾する． □

Knaster property の証明では次の (飛び) 道具を使う． この事実の証明は Jech の本 (Theorem 9.7 of [Jec03]) などを参照のこと．

定理 6 (Erdős-Dushnik-Miller の定理)**.** $\omega_1 \to (\omega_1, \omega)^2$ である．

どんな色塗り $c\colon [\omega_1]^2 \to 2$ についても次のどちらかが成り立つ．

1. ある $H \in [\omega_1]^{\omega_1}$ があって，c は $[H]^2$ 上で定数 0 を取る．
1. ある $K \in [\omega_1]^{\omega}$ があって，c は $[K]^2$ 上で定数 1 を取る．

以下の Knaster property の証明は Jorge Antonio Cruz Chapital 氏に教えていただいた．

命題 7. $\mathbb{B}$ は Knaster property を満たす．

証明. $\mathbb{B}$ のサイズ $\aleph_1$ の部分集合 A を任意にとる．

$A_n = \{p \in A : \mu(p) > 1/n\}$ とおくと $A = \bigcup_{n \in \omega \setminus 1} A_n$ であるため，ある n が存在して A_n が非可算なので，はじめからこの A_n が A であったと仮定して，すべての $p \in A$ について $\mu(p) > 1/n$ としてよい．

A 上の色塗り $c\colon [A]^2 \to 2$ を

$$c(p,q) = \begin{cases} 0 & p \text{ と } q \text{ が両立可能なとき} \\ 1 & p \text{ と } q \text{ が両立不能なとき} \end{cases}$$

と定める．

Erdős-Dushnik-Miller の定理の条件 1 か条件 2 のどちらかが成り立つが，条件 2 はありえない．

なぜなら，P の元であって互いに両立不能なものはたかだか n 個しかないからだ．

よって，条件 1 が成り立つ．すなわち濃度 $\aleph_1$ の $B \subseteq A$ がとれて，c は $[B]^2$ 上で定数 1 をとるが，c の定義よりこれは Knaster の性質の証拠となる部分集合である． □

命題 8. $\mathbb{B}$ は σ-linked である．

証明. $s \in 2^{<\omega}$ に対して

$$L_s = \left\{ p \in \mathbb{B} : \frac{\mu(p \cap [s])}{\mu([s])} > \frac{1}{2} \right\}$$

とおく．

各 L_s が linked なことは測度半分より大きい集合の共通部分は測度正になる，ということから従う．

また，Lebesgue の密度定理により，$\bigcup_{s \in 2^{<\omega}} L_s$ は $\mathbb{B}$ の稠密部分集合である．

よって稠密部分集合が σ-linked なので，$\mathbb{B}$ も σ-linked である． □

命題 9. $\mathbb{B}$ は σ-centered ではない．

この命題は σ-centered な強制概念はランダム実数を付け加えないという命題 (see e.g. Lemma 3.7 of [Bre09]) から従うが，ここではそれに依らない直接証明を与える．

証明. $\mathbb{B}' = \{K \in \mathbb{B} : K$ はコンパクト $\}$ とおく．$\mathbb{B}'$ は $\mathbb{B}$ の稠密部分集合であり，かつ σ-centered なことは稠密部分集合に受け継がれるので，$\mathbb{B}'$ が σ-centered でないことを示せば十分.

$\mathbb{B}'$ が σ-centered だと仮定し，$\mathbb{B}' = \bigcup_{n\in\omega} C_n$ と表す．ここで各 C_n は centered な部分集合である．各有限部分 $F \subseteq C_n$ は共通拡大を持つので，$\bigcap F$ は測度正，したがって非空である．ところが，コンパクト空間の有限交差性を持つ閉集合族は交わりを持つことから，$\bigcap C_n \neq \varnothing$ もわかる．各 n について $x_n \in \bigcap C_n$ を取る．

$X = \{x_n : n \in \omega\}$ とおく．C_n たち全部が $\mathbb{B}'$ を覆うので，どんな $K \in \mathbb{B}'$ についても $K \cap X \neq \varnothing$ である．

他方で，X は可算集合だから測度は 0，よって $2^\omega \setminus X$ は測度 1 なので，正の測度のコンパクト集合 $K \subseteq 2^\omega \setminus X$ が取れる．これは前段落に矛盾. □

命題 10 (525G of [Fre08])**.** $\mathbb{B}$ が precaliber $\aleph_1$ を満たすことは $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) > \aleph_1$ と同値である．したがって，$\mathbb{B}$ が precaliber $\aleph_1$ を満たすことは ZFC から独立である．

証明. 定義を拡張しておく．強制概念 P が precaliber κ を満たすとは，どんな κ 部分集合についても，その κ 部分集合があってそれが centered となることを意味する．$\mathsf{pc}(P)$ を P が precaliber κ を満たさない最小の κ とする.

主張 10.1. $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leqslant \mathsf{pc}(\mathbb{B})$.

証明. この主張の証明では，$\mathbb{B}$ を商 Boole 代数 $\mathsf{Borel}(2^\omega)/\mathcal{N}$ から最小元を取り除いた強制概念として扱う．$\mathbb{B}$ の元に代表元の測度として測度が well-defined に定まるのでそれも μ と書き，$\mathbb{B}$ は完備 Boole 代数なことに注意．また，$\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ はランダム強制法の Martin's number に一致することも思いだそう.

$\mathsf{pc}(\mathbb{B}) \geqslant \aleph_1$ は簡単にわかることに注意．そこで非可算基数 κ について，$\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ と仮定して，$\kappa < \mathsf{pc}(\mathbb{B})$ を示す．$\{a_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathbb{B}$ とする．鳩の巣論法で縮めて，$\delta = \inf_{\alpha<\kappa} \mu(a_\alpha) > 0$ としてよい．$c = \inf\{\sup_{\alpha\in\kappa\setminus J} a_\alpha : J \subseteq \kappa, |J| < \kappa\}$ とおく．$\mu(c) > 0$ に注意.

帰納的に κ の互いに素な可算部分集合の列 $\langle I_\beta : \beta < \kappa\rangle$ を各 $\beta < \kappa$ について $c \leqslant \sup_{\alpha\in I_\beta}$ となるように取る．ここは $\mathbb{B}$ の ccc なことより，任意個の sup はそこから可算個元を取って，同じ sup を得られることを使った.

各 $\beta < \kappa$ について

$$D_\beta = \{b \in \mathbb{B}_{\leqslant c} : \exists \alpha \in I_\beta\ b \leqslant a_\alpha\}$$

とおく．D_β は $\mathbb{B}_{\leqslant c}$ の稠密集合である．$\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \mathfrak{m}(\mathbb{B}) \leqslant \mathfrak{m}(\mathbb{B}_{\leqslant c})$ なので D_β たち全部と交わるフィルター G が取れる．$\Gamma = \{\alpha < \kappa : \exists b \in G\ b \leqslant a_\alpha\}$ とおく．G が filter な

ことから $\{a_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ は centered なことがわかる．また，各 $\beta < \kappa$ について $\Gamma \cap I_\beta \neq \varnothing$ なので $\{a_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ はサイズ κ である． //

この主張より $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) > \aleph_1$ ならば，$\mathbb{B}$ が precaliber $\aleph_1$ を持つことがわかる．

主張 10.2. $\mathsf{pc}(\mathbb{B}) \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{N})$.

証明. $\kappa < \mathsf{pc}(\mathbb{B})$ を仮定する．すなわち $\mathbb{B}$ は κ-caliber を持つと仮定する．このとき $\kappa < \mathrm{cov}(\mathcal{N})$ を導く．背理法で $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leqslant \kappa$ を仮定する．すると測度 0 集合の列で全体を覆うもの $\langle N_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ が取れる．各 α について N_α と互いに素な測度正コンパクト集合 K_α を取る．$\mathbb{B}$ が precaliber κ を持つので，ある $\Gamma \in [\kappa]^\kappa$ があって，$\{K_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ は centered となる．ゆえにコンパクト性より $x \in \bigcap_{\alpha<\kappa} K_\alpha$ が取れる．つまり, $x \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ となるが，これは A_α たちが全体 2^ω を覆うことに矛盾する． //

この主張より，$\mathbb{B}$ が precaliber $\aleph_1$ を持つならば，$\mathrm{cov}(\mathcal{N}) > \aleph_1$ がわかる． □

References

[Bre09] Jörg Brendle. “Forcing and the structure of the real line: the Bogotá lectures”. *Lecture notes* (2009).

[Fre08] D. H. Fremlin. “Measure theory, vol. 5”. *Set-Theoretic Measure Theory, Parts I, II. Torres Fremlin, Colchester* (2008).

[Jec03] T. Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded.* Springer, 2003.