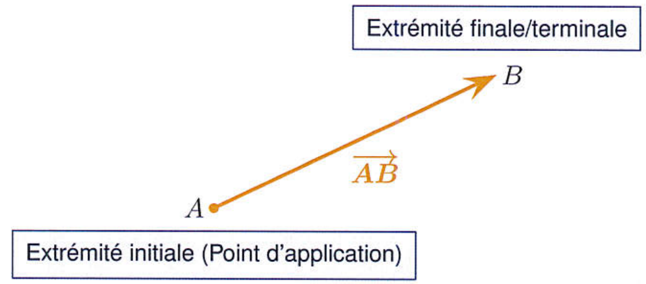
Chapitre 6

Calcul vectoriel

Vecteurs

Soient A et B deux points distincts (du plan, de l'espace, ...).

- Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ correspond au segment orienté (à la flèche) allant de A vers B.
- Le point A est l'**extrémité initiale** du vecteur. Il est également appelé son point d'application.
- Le point B est l'**extrémité finale** ou **terminale** du vecteur.



Vecteurs libres

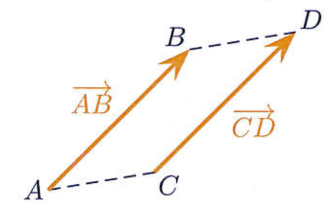
- En géométrie, le choix du point d'application d'un vecteur n'est pas important.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est entièrement caractérisé par
- sa **direction** : la direction (la pente) de la droite passant par A et B ;
- son **sens** : de A vers B (le sens de la demi-droite AB) ;
- sa **longueur** ou **norme**, notée $||\overrightarrow{AB}||$ (voire simplement $|\overrightarrow{AB}|$).

- Dans certaines applications (typiquement en physique), le choix du point d'application d'un vecteur est important. On parle alors de vecteurs liés pour les différencier des **vecteurs libres** considérés ici.

Vecteurs égaux

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux**, et on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si et seulement si
  - ils ont même direction (les droite AB et CD sont parallèles ou confondues) ;
  - ils ont même sens ;
  - ils ont même longueur.



- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement s'il existe une translation transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$.

Vecteurs colinéaires, opposés, unitaires

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de même direction sont dits **colinéaires** ou parallèles, et on note

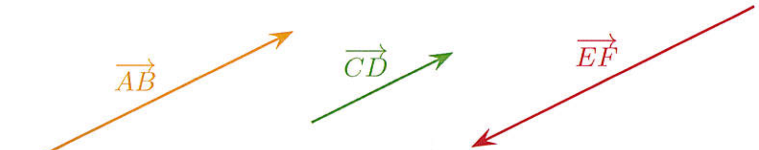
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}.$$

- Deux vecteurs de même direction et de même longueur mais de sens opposés sont dits **opposés**.

  En particulier $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés et on note

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

- Un vecteur **unitaire** est un vecteur de norme 1.



$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF} \qquad \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB}$$

Vecteur nul

Si les deux extrémités du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont confondues, c.-à-d. si $A = B$, on obtient le **vecteur nul** noté $\vec{0}$.

- La norme (la longueur) du vecteur nul est égale à zéro.
- La direction et le sens du vecteur nul sont indéterminés.
- Tous les vecteurs nuls sont égaux entre eux.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs (y compris lui-même).
- Le vecteur nul est également orthogonal à tous les vecteurs (y compris lui-même).

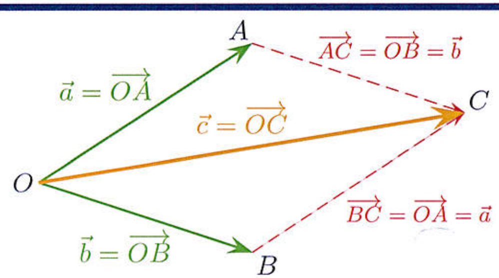
Addition vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ obtenu par la règle du parallélogramme ou par construction bout à bout.

Règle du parallélogramme. On choisit le même point d'application O pour les deux vecteurs :

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

La somme $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ est le vecteur représenté par la diagonale $\overrightarrow{OC}$ du parallélogramme $OACB$.



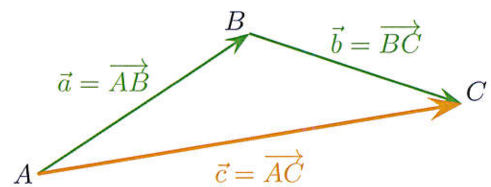
Addition vectorielle (2)

Construction bout à bout. On choisit l'extrémité finale de $\vec{a}$ comme extrémité initiale de $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{BC}.$$

La somme de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est alors

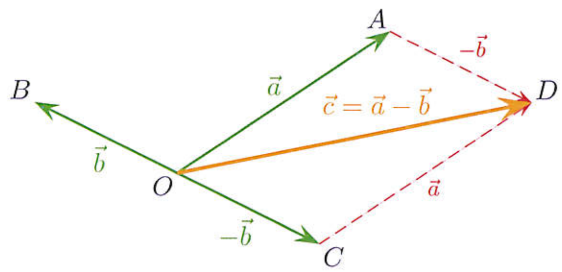
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Soustraction vectorielle

La différence des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ obtenu en additionnant au vecteur $\vec{a}$ l'opposé du vecteur $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



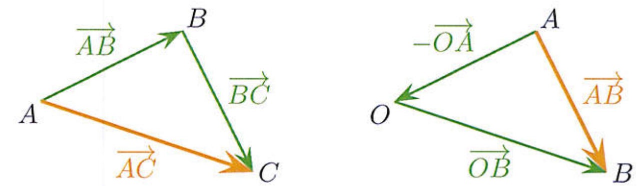
Relation de Chasles

- La construction bout à bout est également connue sous le nom de **relation de Chasles** :

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$$

- Cette relation s'écrit aussi

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$$



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Propriétés de l'addition vectorielle

- **Commutativité** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a toujours

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.}$$

- **Associativité** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on a toujours

$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).}$$

- **Élément neutre** : quel que soit le vecteur $\vec{a}$, on a toujours

$$\boxed{\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}.}$$

- **Élément opposé** : quel que soit le vecteur $\vec{a}$, il existe toujours un (seul) vecteur opposé $-\vec{a}$ vérifiant

$$\boxed{\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}.}$$

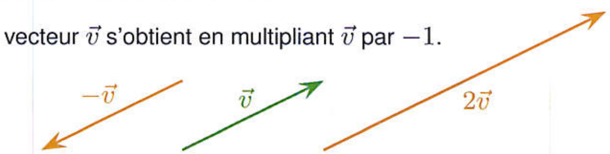
Multiplication par un scalaire

Soient λ un scalaire non nul (autrement dit un nombre réel non nul) et $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Le **produit de $\vec{v}$ par λ**, note $\lambda\vec{v}$ ou $\lambda \cdot \vec{v}$, est le vecteur ayant

- la même direction que $\vec{v}$;
- le même sens que $\vec{v}$ si λ est positif ou le sens opposé à celui de $\vec{v}$ si λ est négatif ;
- une longueur égale à $|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.

- Si $\lambda = 0$ alors $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ quel que soit $\vec{v}$.
- Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ quel que soit λ.
- L'opposé du vecteur $\vec{v}$ s'obtient en multipliant $\vec{v}$ par -1.



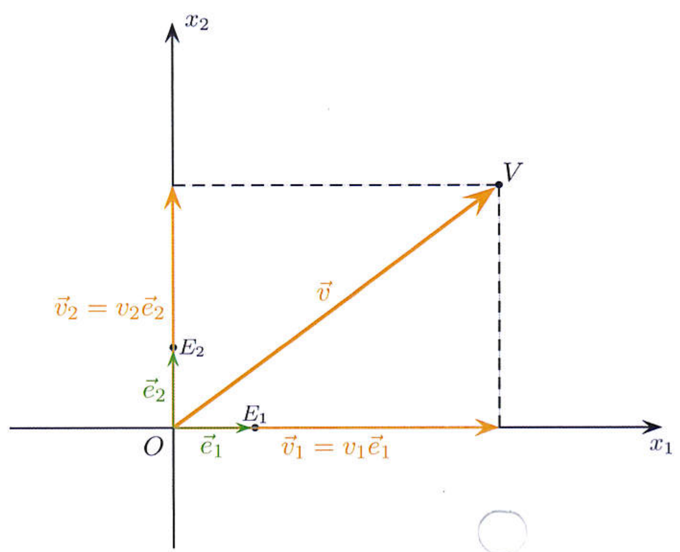
Propriétés de la multiplication par un scalaire

- **Distributivités** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et les scalaires λ et μ, on a toujours
$$\boxed{\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.}$$
et
$$\boxed{(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.}$$
- **Associativité numérique** : quels que soient le vecteur $\vec{a}$ et les scalaires λ et μ, on a toujours
$$\boxed{(\lambda\cdot\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})}$$
- **Élément neutre** : quel que soit le vecteur $\vec{a}$, on a toujours
$$\boxed{1\cdot\vec{a} = \vec{a}.}$$

Coordonnées dans le plan

- On se donne deux axes perpendiculaires :
  - un axe Ox_1 horizontal appelé l'axe des abscisses et orienté de gauche à droite ;
  - un axe Ox_2 vertical appelé l'axe des ordonnées et orienté de bas en haut ;
  - se coupant en un point O appelé l'origine.
- Sur chaque axe on choisit des segments unités $[OE_1]$ et $[OE_2]$.
- Les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ sont les **vecteurs de base**.
- Le couple $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ forme une **base orthonormée** de l'ensemble des vecteurs du plan.
- Le triplet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ définit un **repère cartésien** du plan avec le point O comme **origine**.

Illustration



Coordonnées et composantes

- Soit V un point du plan et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Par projection sur les axes Ox_1 et Ox_2 on a
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$
  - $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les **composantes** vectorielles de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
  - v_1 et v_2 sont les **composantes** numériques de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
- Dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, le vecteur $\vec{v}$ est représenté (de manière unique) par le vecteur colonne
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$
et on notera $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.
- Dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, le point V a les **coordonnées cartésiennes** (v_1, v_2) et on notera $V(v_1, v_2)$.

Opérations vectorielles dans une base

Soient $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ deux vecteurs.

- **Égalité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales :

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \iff u_1 = v_1 \text{ et } u_2 = v_2$$

- **Addition, soustraction et multiplication par un scalaire** : les trois opérations se font composantes par composantes :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix}$$

Opérations vectorielles dans une base (2)

- **Vecteur nul et vecteurs de base** :

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Vecteur opposé** :

$$-\vec{v} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

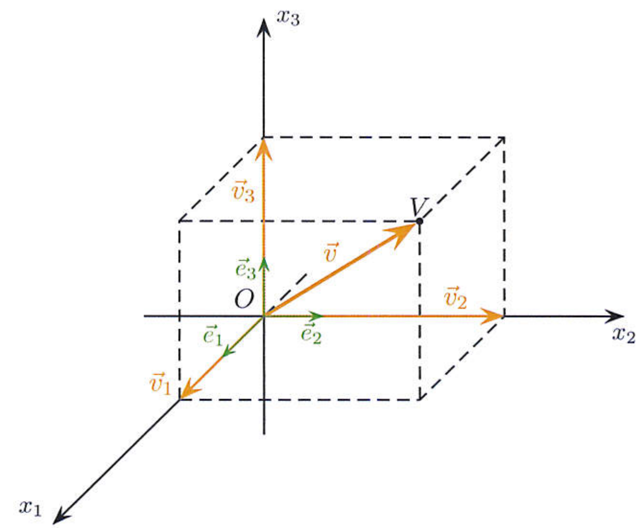
- **Relation de Chasles** : pour deux points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ on a

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}}$$

Coordonnées dans l'espace

- On se donne trois axes perpendiculaires deux à deux :
  - un axe Ox_1 pour les abscisses ;
  - un axe Ox_2 pour les ordonnées ;
  - un axe Ox_3 pour les hauteurs ;
  - se coupant en un point O.
- Sur chaque axe on choisit des segments unités $[OE_1]$, $[OE_2]$ et $[OE_3]$.
- Les vecteurs $\vec{e}\ :_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ et $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ sont les **vecteurs de base**.
- Le triplet $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ forme une **base orthonormée** de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- Le quadruplet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ définit un **repère cartésien** de l'espace avec le point O comme **origine**.

Illustration



Coordonnées et composantes

- Soit V un point de l'espace et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Par projection sur les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 on a

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

- Dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, le vecteur $\vec{v}$ est représenté (de manière unique) par le vecteur colonne (**vecteur de composantes**)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

et on notera $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

- Dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, le point V a les **coordonnées cartésiennes** (v_1, v_2, v_3) et on notera $V(v_1, v_2, v_3)$.

Norme euclidienne dans le plan

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Vecteur nul
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Géométrie analytique

- Dans le plan muni d'une base orthonormée, la norme (euclidienne) du vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ est, par Pythagore,

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

- La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance entre les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ et vaut

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

Norme euclidienne dans l'espace

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Vecteur nul
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Géométrie analytique

- De même, dans l'espace muni d'une base orthonormée, la norme du vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ est

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

alors que celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

Propriétés de la norme euclidienne

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Vecteur nul
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Géométrie analytique

- **Inégalité triangulaire** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ on a toujours

$$\boxed{\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}$$

De plus il n'y a égalité que si les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens (ou si un des deux vecteurs est nul).

- Positivité et séparation : la norme d'un vecteur est un nombre positif ou nul et le seul vecteur de norme zéro est le vecteur nul :

$$\boxed{\|\vec{a}\| \geq 0 \quad \forall\, \vec{a} \qquad \text{et} \qquad \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}}$$

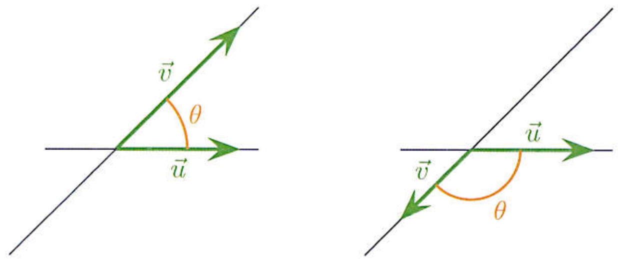
- Homogénéité : quels que soient le scalaire λ et le vecteur $\vec{a}$ on a toujours

$$\boxed{\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|}$$

Angle entre deux vecteurs

heig-vd

L'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se mesure en représentant les deux vecteurs comme des segments orientés de même origine et est alors égal à l'angle compris entre les deux demi-droites issues de cette origine commune et contenant les deux vecteurs.



- L'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mesuré en radians comme il se doit, est toujours compris entre 0 et π.

Produit scalaire et orthogonalité

heig-vd

Le **produit scalaire** (euclidien) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le scalaire (le nombre réel) défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** (ou perpendiculaires) si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est égal au vecteur nul alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à zéro.

  Une conséquence directe est que le vecteur nul est orthogonal à n'importe quel vecteur (y compris lui-même).

Angle entre deux vecteurs (2)

heig-vd

L'**angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

- Si un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal, par convention, à $\pi/2$ (l'angle entre le vecteur nul et lui-même n'est pas défini).
- NOTATION. L'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté

$$\angle(\vec{u}, \vec{v})$$

et on a donc, pour deux vecteurs non nuls,

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right).$$

Propriétés du produit scalaire

heig-vd

- **Commutativité/Symétrie** : quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a toujours

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- **Linéarité** : quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les scalaires λ et μ, on a toujours

$$\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w}$$

- **Associativité** : quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le scalaire λ on a toujours

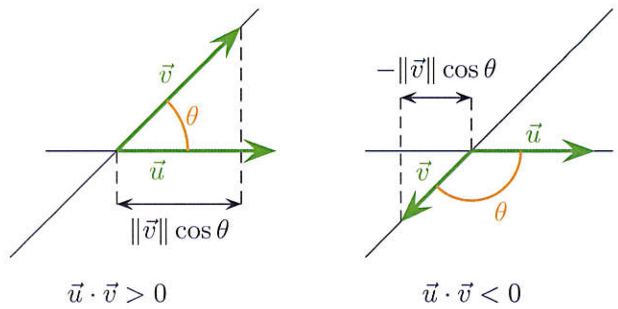
$$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{u}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- Positivité : quel que soit le vecteur $\vec{u}$ on a toujours

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Interprétation géométrique du produit scalaire

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal **au produit de la norme du premier vecteur et de la longueur de la projection orthogonale du second sur le premier**, cette longueur étant comptée positivement si l'angle entre les deux vecteurs est aigu et négativement si cet angle est obtus.



Produit scalaire dans une base orthonormée

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Vecteur nul
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Géométrie analytique
heig-vd

- Dans une base orthonormée $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ (base canonique) des vecteurs du plan, le produit scalaire des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

est simplement égal à

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

- De même, dans la base canonique $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ des vecteurs de l'espace, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = [u_1\ u_2\ u_3]^T$ et $\vec{v} = [v_1\ v_2\ v_3]^T$ est

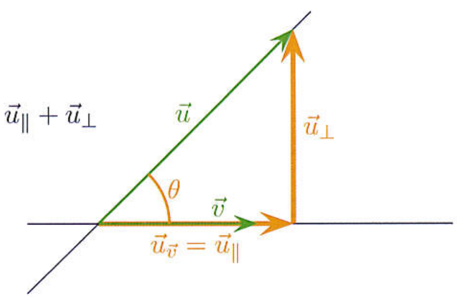
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

Projections orthogonales

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Vecteur nul
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Géométrie analytique
heig-vd

- La **projection orthogonale** du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$ est notée $\vec{u}_{\vec{v}}$ ou $\vec{u}_{\|}$ (lorsque le vecteur $\vec{v}$ sur lequel on projette est clairement établi).
- La composante de $\vec{u}$ orthogonale à $\vec{v}$ est, elle, notée $\vec{u}_{\perp}$.

$$\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}$$



- REMARQUE. Les deux notations $\vec{a}_{\|}$ et $\vec{a}_{\perp}$ supposent que le vecteur $\vec{b}$ sur lequel on projette est clairement identifié par le contexte.

Projections orthogonales (2)

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Vecteur nul
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Géométrie analytique
heig-vd

- En partant de l'interprétation géométrique du produit scalaire, on obtient que la longueur de la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est

$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \begin{cases} \|\vec{u}\| \cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} & \text{si } \theta \text{ est aigu (c.-à-d. si } \vec{u} \cdot \vec{v} > 0) \\ -\|\vec{u}\| \cos\theta = -\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} & \text{si } \theta \text{ est obtus (c.-à-d. si } \vec{u} \cdot \vec{v} < 0) \end{cases}$$

- Cette projection est colinéaire à $\vec{v}$ et donc à $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ (vecteur unitaire de même direction et même sens que $\vec{v}$).
- Finalement elle est de même sens que $\vec{v}$ si θ est aigu et de sens opposé à $\vec{v}$ si θ est obtus.
- Pour obtenir la projection $\vec{u}_{\vec{v}}$ il suffit de multiplier $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ par la norme $\|\vec{u}_{\vec{v}}\|$ si θ est aigu et de multiplier $-\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ par la norme $\|\vec{u}_{\vec{v}}\|$ si θ est obtus.

Projections orthogonales (3)

- On obtient alors

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \begin{cases} \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v} & \text{si } \theta \text{ est aigu} \\ -\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\left(-\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v} & \text{si } \theta \text{ est obtus} \end{cases}$$

- La **projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$** est donc

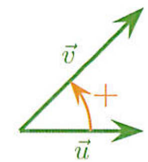
$$\boxed{\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}}$$

- Quant à la **longueur de la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$** elle est égale à

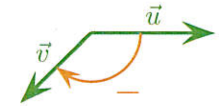
$$\boxed{\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}}$$

Orientations

- Dans le plan, une base $(\vec{u},\vec{v})$ (c.-à-d. un couple de vecteurs non colinéaires) est dite **directe** ou **orientée positivement** si le passage de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ (par la rotation de plus petit angle) se fait dans le sens trigonométrique positif (sens contraire des aiguilles d'une montre, sens anti-horaire).



$(\vec{u};\vec{v})$ est une base directe



$(\vec{u};\vec{v})$ est une base indirecte

- Dans l'espace, une base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ (c.-à-d. un triplet de vecteurs non coplanaires) est dite **directe** ou **orientée positivement** si elle vérifie la règle (des 3 doigts) de la main droite (aussi appelée règle du tire-bouchon ou du tournevis).

Produit vectoriel

Le **produit vectoriel** associe à tout couple $(\vec{a},\vec{b})$ de vecteurs de l'espace un troisième vecteur $\vec{c}$ noté

$\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{b}$ ou $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ (lu « a cross b »)

- Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non colinéaires, le vecteur $\vec{c}$ est tel que
  1) la direction de $\vec{c}$ est perpendiculaire à celles de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, autrement dit $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
  2) le sens de $\vec{c}$ est donné par le règle de la main droite, autrement dit le triplet $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ forme une base directe de l'espace ;
  3) la norme de $\vec{c}$ est égale à $\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$ où θ est l'angle compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, autrement dit la norme de $\vec{c}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires alors leur produit vectoriel est égal à $\vec{0}$.

Propriétés du produit vectoriel

- **Anti-commutativité/Antisymétrie** : inverser l'ordre des vecteurs du couple change le sens du produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{b}\wedge\vec{a} = -(\vec{a}\wedge\vec{b})}$$

- **Distributivité** (à gauche et à droite) :

$$\boxed{\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{c}+\vec{b}\wedge\vec{c}}$$

- Compatibilité avec la multiplication par un scalaire :

$$\boxed{(\lambda\vec{a})\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})}$$

- Les deux propriétés précédentes peuvent être combinées en une seule, la **bilinéarité** :

$$\boxed{\vec{a}\wedge(\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\wedge\vec{b})+\mu(\vec{a}\wedge\vec{c})} \quad \text{et} \quad \boxed{(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\wedge\vec{c} = \lambda(\vec{a}\wedge\vec{c})+\mu(\vec{b}\wedge\vec{c})}$$

Propriétés du produit vectoriel (2)

- **Non-associativité** : le produit vectoriel n'est pas associatif en général :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \qquad \text{en général}$$

- **Identité de Lagrange** :

$$\boxed{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

DÉMONSTRATION. Si θ est l'angle compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, le terme de gauche est égal à

$$\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \sin^2\theta$$

alors que celui de droite est égal à

$$\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \cos^2\theta = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2\theta)$$

car $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$.

Calcul du produit vectoriel

- Dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace (et plus généralement dans toute base orthonormée directe de l'ensemble des vecteurs de l'espace), le produit vectoriel de

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

est égal à

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Exemple

- Pour les vecteurs $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ on a

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 5 \\ \vec{e}_2 & -2 & 4 \\ \vec{e}_3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$= -10\vec{e}_1 - (-16)\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Chapitre 6

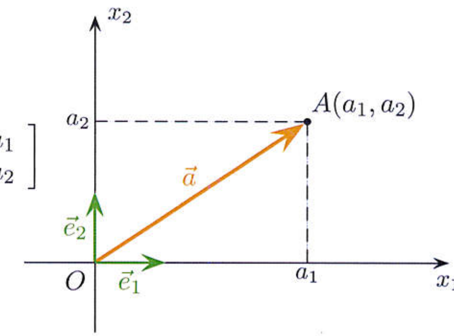
Géométrie analytique du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

On travaille dans le plan, noté $\mathbb{R}^2$, muni

- d'une base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormée et directe (aussi notée $(\vec{i}, \vec{j})$) ;
- d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (aussi noté $(O, \vec{i}, \vec{j})$) ;
- du produit scalaire euclidien.

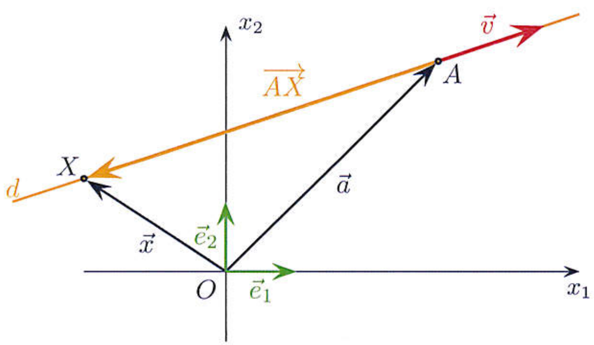
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



Droite du plan

- Soit A un point du plan et $\vec{v}$ un vecteur non nul. La **droite d passant par A** et de **vecteur directeur $\vec{v}$** est l'ensemble des points X pour lesquels $\overrightarrow{AX}$ et $\vec{v}$ sont parallèles :

$$d = d(A, \vec{v}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



Équation vectorielle de d

- Si X est un point quelconque de $d = d(A, \vec{v})$ et si on pose $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, alors

$$\begin{aligned} X \in d \iff \overrightarrow{AX} &= \lambda \vec{v}, & \lambda \in \mathbb{R} \\ \iff \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}, & \lambda \in \mathbb{R} \\ \iff \vec{x} &= \vec{a} + \lambda \vec{v}, & \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- La forme

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}} \qquad (1)$$

est appelée l'équation (paramétrique) vectorielle de d.

- REMARQUES. Pour définir d, on peut choisir pour A n'importe quel point de d et on peut remplacer $\vec{v}$ par n'importe quel multiple non nul.

Équations paramétriques de d

- En passant aux composantes, l'équation (1) s'écrit

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & a_1 & + & \lambda v_1 \\ x_2 & = & a_2 & + & \lambda v_2 \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}} \tag{2}$$

avec

$$X(x_1, x_2), \qquad A(a_1, a_2) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

- Le système (2) correspond aux **équations paramétriques** de la droite d.
- REMARQUE. Le choix du point A et du vecteur directeur $\vec{v}$ n'étant pas unique, une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Équation cartésienne de d

- En éliminant le paramètre λ dans les équations paramétriques de d on obtient une **équation cartésienne** de la droite. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0} \tag{3}$$

où A_1, A_2 et A_3 sont trois nombres réels vérifiant $(A_1, A_2) \neq (0, 0)$.

- Si $A_1 = 0$, la droite est horizontale (x_1 peut prendre n'importe quelle valeur alors que celle de x_2 est fixée).
- Si $A_2 = 0$, la droite est verticale (cette fois c'est x_2 qui peut prendre n'importe quelle valeur et x_1 qui est fixé).
- Si la droite n'est pas verticale ($A_2 \neq 0$), on peut isoler x_2 et écrire son équation cartésienne sous la forme (bien connue)

$$x_2 = mx_1 + h \qquad \text{ou encore} \qquad y = mx + h$$

où m est la pente de la droite et h son ordonnée à l'origine.

Vecteur normal et équation normale de d

- Un **vecteur normal** à d est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{v}$, c.-à-d. tel que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
- La droite d, passant pas A et de vecteur normal $\vec{n}$, est formée de tous les points X pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{AX}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

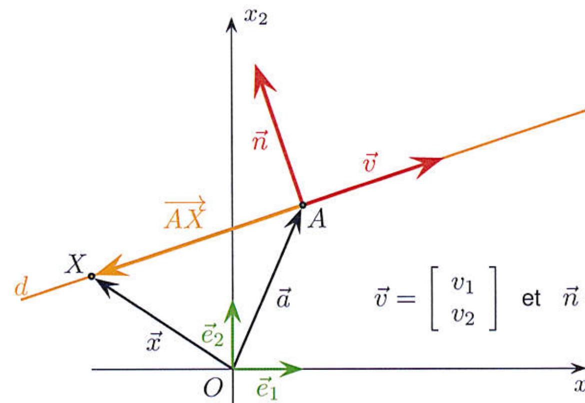
  Dans cette approche, la droite d est décrite pas son **équation normale**

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0} \tag{4}$$

où

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}.$$

Illustration



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \vec{x} - \vec{a}$$

Liens entre les différentes représentations de d

- Si on développe l'équation normale $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ on obtient

$$n_1x_1 + n_2x_2 - (n_1a_1 + n_2a_2) = 0$$

et en comparant cette expression à l'équation cartésienne

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$$

on obtient

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de x_1 et x_2 dans l'équation cartésienne de d correspondent aux composantes d'un vecteur normal à d.

Positions relatives de deux droites

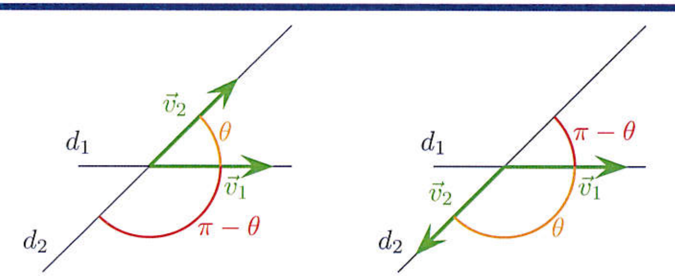
1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
6. Géométrie analytique
Le plan $\mathbb{R}^2$
Droite du plan
Équation vectorielle
Équations paramétriques
Équation cartésienne
Équation normale
Positions relatives
Angles
Distance point-droite
Dist. entre 2 droites

- Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires (parallèles).
  - Deux droites parallèles n'ont aucun point en commun ou en ont une infinité.
  - Si elles ont une infinité de points en commun elles sont dites **confondues** et représentent le même ensemble de points du plan.
- Deux droites sont **sécantes** si elles possèdent un seul point en commun.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ou, de manière équivalente, si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Angle entre deux droites

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
6. Géométrie analytique
Le plan $\mathbb{R}^2$
Droite du plan
Équation vectorielle
Équations paramétriques
Équation cartésienne
Équation normale
Positions relatives
Angles
Distance point-droite
Dist. entre 2 droites

L'angle entre deux droites sécantes est égal au plus petit angle compris entre des vecteurs directeurs de chacune des droites ou, de manière équivalente, entre des vecteurs normaux de chacune des droites.



$$\angle(d_1, d_2) = \min\Big(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \pi - \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\Big) \in [0; \pi/2]$$

- L'angle entre deux droites confondues est égal à 0 alors que celui entre deux droites parallèles mais non confondues n'est pas défini.

Distance d'un point à une droite

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes
6. Calcul vectoriel
6. Géométrie analytique
Le plan $\mathbb{R}^2$
Droite du plan
Équation vectorielle
Équations paramétriques
Équation cartésienne
Équation normale
Positions relatives
Angles
Distance point-droite
Dist. entre 2 droites

- La distance du point P à la droite d est égale à la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$ où A est un point quelconque de d et $\vec{n}$ est un vecteur normal à d :

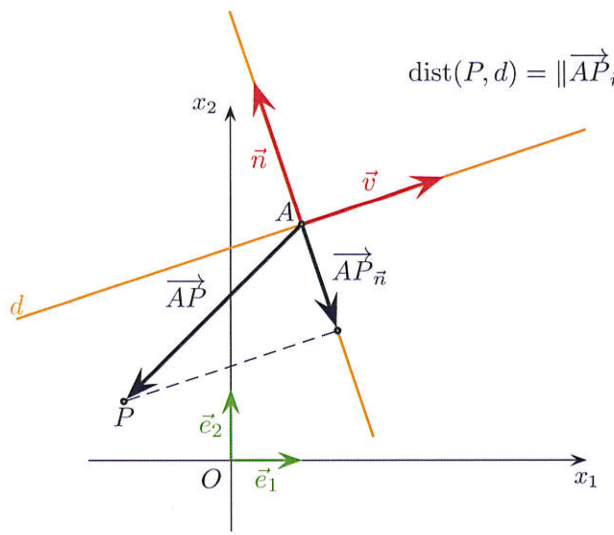
$$\mathrm{dist}(P, d) = \|\overrightarrow{AP}_{\vec{n}}\|.$$

- En utilisant les résultats obtenus précédemment on a

$$\mathrm{dist}(P, d) = \|\overrightarrow{AP}_{\vec{n}}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Illustration

$$\operatorname{dist}(P,d) = \|\overrightarrow{AP}_{\vec n}\| = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec n|}{\|\vec n\|}$$



Distance d'un point à une droite (2)

heig-vd

- Si l'équation cartésienne de la droite d est $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, on sait que

$$\vec n = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

est un vecteur normal à d. Ainsi, si les coordonnées cartésiennes des points sont $P(x_1, x_2)$ et $A(a_1, a_2)$, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\vec n &= \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\\ &= A_1x_1 + A_2x_2 - (A_1a_1 + A_2a_2)\\ &= A_1x_1 + A_2x_2 + A_3\end{aligned}$$

car $A \in d \iff A_1a_1 + A_2a_2 = -A_3$. La distance entre P et d est donc

$$\boxed{\operatorname{dist}(P(x_1,x_2), d) = \frac{|A_1x_1 + A_2x_2 + A_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}}$$

Distance entre deux droites parallèles

heig-vd

- Parler de distance entre deux droites du plan n'a de sens que pour deux droites parallèles (ou confondues).
- La distance entre deux droites parallèles d_1 et d_2 est égale à la distance entre d_1 et un point quelconque de d_2 (ou inversement).
- Si les droites d_1 et d_2 sont données par les équations cartésiennes

$$(d_1) : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad (d_2) : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3' = 0$$

alors la distance entre d_1 et d_2 est simplement

$$\boxed{\operatorname{dist}(d_1, d_2) = \frac{|A_3 - A_3'|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}}$$

Exemples

heig-vd

- La distance entre la droite d d'équation $3x_1 + 2x_2 - 1 = 0$ et le point $P(4, -1)$ est

$$\operatorname{dist}(P, d) = \frac{|3\cdot 4 + 2\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

- Pour calculer la distance entre les droites d'équations $(d_1) : y = 4 - 3x$ et $(d_2) : 6x + 2y = 1$ on commence par récrire leurs équations cartésiennes sous une forme « compatible » :

$$(d_1) : 6x + 2y - 8 = 0 \qquad \text{et} \qquad (d_2) : 6x + 2y - 1 = 0.$$

La distance séparant les deux droites est alors simplement

$$\operatorname{dist}(d_1, d_2) = \frac{|-8+1|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{40}} = \frac{7}{2\sqrt{10}}.$$