Chapitre 2

Relations

Relation de A vers B

Une **relation *de l'ensemble A vers l'ensemble B*** est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$.

Si R est une relation de A vers B et si $(a,b) \in R$, a est dit *en relation avec* b ou *lié à* b. On notera également $a\,R\,b$ si $(a,b) \in R$ et $a\,\not R\,b$ si $(a,b) \notin R$.

Relation sur A

Une **relation *sur l'ensemble A*** est une relation de l'ensemble A vers lui-même, c.-à-d. un sous-ensemble de $A^2 = A \times A$.

Remarque. Les relations étudiées ici sont en fait des relations *binaires* modélisant des propriétés entre les éléments de *deux* ensembles. Il existe également des relations ternaires, et plus généralement n-aires, représentant des liens entre les éléments de plus de deux ensembles.

2.1 Soit $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ et $B = \{-1,0,1\}$. Pour chacune des relations suivantes de A vers B, donner la liste complète des couples formant la relation.

a) $R_1 = \{(a,b) \in A \times B \mid |a+2b| \leq 1\}$

b) $R_2 = \{(a,b) \in A \times B \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a-b = 2k\}$

2.1 Graphe représentatif et matrice d'une relation

Graphe d'une relation de A vers B

Si A et B sont deux ensembles *finis*, on associe à la relation R de A vers B un *graphe orienté biparti* appelé le **graphe représentatif de R** :

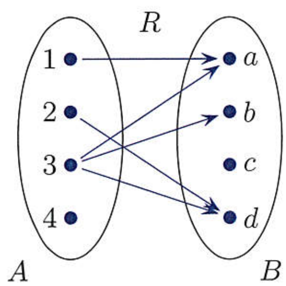
- ▷ Chaque élément de A et de B est représenté par un point distinct (ce sont les **sommets** du graphe).
- ▷ Chaque couple (a,b) de R est représenté par une flèche reliant le sommets correspondant à a à celui correspondant à b (ce sont les **arcs** du graphe).

Remarque. L'adjectif biparti tient au fait que les sommets du graphe peuvent être répartis en deux sous-ensembles (le premier correspondant aux éléments de A et le second à ceux de B) tels que tous les arcs du graphe relient deux sommets appartenant à des sous-ensembles différents (voir figure 2.1).

Matrice d'une relation

Si A et B sont deux ensembles *finis*, on associe également à la relation R de A vers B une **matrice** $\boldsymbol{M}(R)$ dont

- ▷ chaque ligne est associée à un élément de A,
- ▷ chaque colonne est associée à un élément de B,
- ▷ l'entrée à l'intersection de la ligne associée à l'élément $a \in A$ et de la colonne associée à l'élément $b \in B$ est égale à 1 si $(a, b) \in R$ et 0 sinon.



$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 2.1 – Graphe représentatif (à gauche) et matrice $\boldsymbol{M}(R)$ (à droite) de la relation $R = \{(1,a),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d)\}$ de l'ensemble $A = \{1,2,3,4\}$ vers l'ensemble $B = \{a,b,c,d\}$.

2.2 Soit $A = \{0,1,2,3\}$ et $B = \{-,=,+\}$. Pour chacune des relations suivantes de A vers B, donner son graphe représentatif et la matrice associée.

a) $R_1 = \{(0,=),(1,+),(2,=),(3,-)\}$

b) $R_2 = \{(0,-),(1,-),(1,=),(2,-),(2,=),(2,+),(3,+)\}$

Graphe d'une relation sur A

Si R est une relation sur un ensemble A *fini*, le graphe biparti défini précédemment contient deux sommets pour chaque élément de A. On préférera associer à une telle relation un **graphe représentatif** où chaque élément de A est représenté par un seul sommet et où deux sommets sont reliés par un arc lorsque les éléments correspondant de A sont en relation.

Remarque. Le graphe représentatif d'une relation R sur un ensemble A s'obtient en fusionnant les deux sommets associés à chaque élément de A dans la représentation bipartie. À chaque fois qu'un élément est en relation avec lui-même on obtient alors un arc reliant un sommet à lui-même. Un tel arc est appelé une **boucle** (voir figure 2.2).

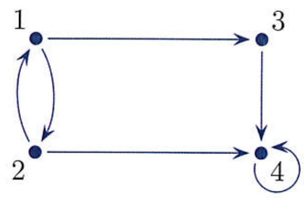


Figure 2.2 – Graphe de la relation $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(3,4),(4,4)\}$ sur l'ensemble $A = \{1,2,3,4\}$.

2.3 Pour chacune des relations suivantes sur l'ensemble $A = \{1,2,3\}$, donner son graphe représentatif et la matrice associée.

a) $R_1 = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ b) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

2.4 Sur l'ensemble $A = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, on considère les deux relations R et S données par les matrices ci-dessous. Pour chacune d'elles, donner la liste des couples formant la relation ainsi que le graphe associé.

a) $\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2 Opérations sur les relations

Une relation étant un ensemble (de couples), on peut effectuer sur des relations les mêmes opérations que sur des ensembles quelconques. Ainsi, si R et S sont deux relations de A vers B, on peut définir de nouvelles relations de A vers B en prenant l'union $R \cup S$, l'intersection $R \cap S$, la différence $R \setminus S$ ou, encore, la différence symétrique $R \triangle S$ de R et S.

À côté des transformations précédentes, il existe des opérations plus spécifiques aux relations, comme le passage aux relations complémentaire ou inverse, présenté ci-dessous, ou la composition de relations, objet du prochain paragraphe.

Relation complémentaire

Si R est une relation de A vers B, la **relation complémentaire de R**, notée $\overline{R}$, est la relation de A vers B formée de l'ensemble des couples $(a,b) \in A \times B$ n'appartenant pas à R :

$$\overline{R} := \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \notin R\} = (A \times B) \setminus R.$$

Relation inverse

Si R est une relation de A vers B, on définit la **relation inverse de R**, notée R^{-1}, comme la relation de B vers A formée de tous couples $(b,a) \in B \times A$ pour lesquels a est en relation avec b par R :

$$R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}.$$

2.5 Déterminer la relation complémentaire $\overline{R}$ et la relation inverse R^{-1} de la relation

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}.$$

2.6 Pour chacune des relations de l'exercice 2.2, donner la relation complémentaire ainsi que son graphe représentatif et la matrice associée.

2.7 Si R est une relation de A vers B, quelle transformation permet de passer de la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ à la matrice $\boldsymbol{M}(\overline{R})$?

2.8 Pour chacune des relations de l'exercice 2.2, donner la relation inverse ainsi que son graphe représentatif et la matrice associée.

2.9 Si R est une relation de A vers B, quelle transformation permet de passer de la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ à la matrice $\boldsymbol{M}(R^{-1})$?

Compositions de relations

Relation composée

Si R une relation de A vers B et S une relation de B vers C, la **composition** de R et S, notée $\boldsymbol{S \circ R}$, est la relation de A vers C formée des couples $(a, c) \in A \times C$ pour lesquels il existe (au moins) un élément $b \in B$ avec $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in S$:

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ avec } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in S\}.$$

Exemple

Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ et $C = \{x, y, z\}$ ainsi que les relations $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A vers B et $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B vers C. La composition de R et S est la relation de A vers C égale à

$$S \circ R = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}.$$

La figure 2.3 illustre le calcul de $S \circ R$ à l'aide des graphes représentatifs de R et S.

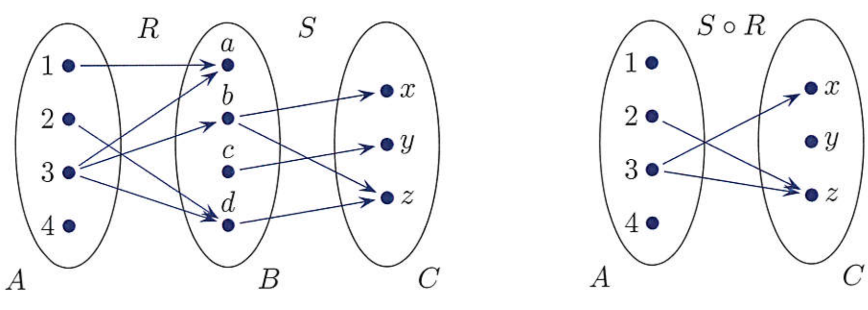


Figure 2.3 – Calcul de la composition de deux relations à l'aide de leur graphe représentatif.

Caclul de la matrice d'une composition

Si les ensembles A, B et C sont *finis*, la matrice $\boldsymbol{M}(S \circ R)$ de la composition de R et S s'obtient en calculant le produit matriciel $\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S)$ des matrices des deux relations et en remplaçant dans ce produit les éléments supérieurs à 1 par 1.

Exemple

Les matrices des relations R et S de l'exemple précédent sont

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le produit matriciel $\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S)$ est

$$\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice de la relation composée $S \circ R$ est

$$\boldsymbol{M}(S \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut composer plus de deux relations. Ainsi, si R est une relation de A vers B, S une relation de B vers C et T une relation de C vers D, la composition de R, S et T est la relation $T \circ S \circ R$ de A vers D obtenue en calculant, indifféremment,

$$(T \circ S) \circ R \qquad \text{ou} \qquad T \circ (S \circ R)$$

car la composition de relations est associative (mais pas commutative en général).

Puissance d'une relation

Si on compose une relation R *sur un ensemble* A avec elle-même, une ou plusieurs fois, on définit les **puissances de R** :

$$R^1 := R, \qquad R^2 := R \circ R, \qquad R^n := R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

2.10 En reprenant les relations de l'exercice 2.3, déterminer, à l'aide des graphes représentatifs bipartis, les relations

a) $R_2 \circ R_1$ b) $R_1 \circ R_2$ c) $(R_2)^2 = R_2 \circ R_2$

2.11 En reprenant les matrices des relations R et S de l'exercice 2.4, déterminer les matrices des relations

a) $S \circ R$ b) $R \circ S$ c) $R^2 = R \circ R$

2.12 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R formée de tous les couples (x, y) vérifiant

$$x + y \geq 0.$$

Déterminer

a) la relation complémentaire $\overline{R}$,

b) la relation inverse R^{-1},

c) la relation composée $R^2 = R \circ R$.

2.13 On considère les quatre ensembles

$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{i, j, k\}$, $D = \{r, s, t, u, v\}$,

et les quatre relations entre les ensembles précédents

$R = \{(a, z), (b, x), (b, y), (d, y)\}$, $T = \{(x, j), (x, k), (y, i), (z, i), (z, k)\}$,

$S = \{(a, t), (c, r), (c, v), (d, s), (d, t)\}$, $U = \{(r, j), (s, i), (t, i), (v, j), (v, k)\}$.

Pour chacune des compositions qui suivent, calculer la relation composée ou expliquer pourquoi elle n'existe pas.

a) $U \circ S$ b) $\overline{R} \circ T$ c) $T \circ S \circ R^{-1}$ d) $T^{-1} \circ \overline{T}$

2.3 Propriétés des relations sur un ensemble

On classifie les relations sur un ensemble à partir de quatre propriétés de base : la *réflexivité*, la *symétrie*, l'*antisymétrie* et la *transitivité*.

Réflexivité

Une relation R sur l'ensemble A est **réflexive** si chaque élément de A est en relation avec lui-même, c'est-à-dire si $(a, a) \in R$ pour tout élément $a \in A$.

Symétrie

Une relation R sur l'ensemble A est **symétrique** si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b on a aussi b en relation avec a, c'est-à-dire si $(a, b) \in R$ implique $(b, a) \in R$ quels que soient a et b dans A.

Antisymétrie

Une relation R sur l'ensemble A est **antisymétrique** si pour toute paire d'éléments a et b distincts on n'a jamais a en relation avec b et b en relation avec a, c'est-à-dire si $(a, b) \in R$ et $a \neq b$ implique $(b, a) \notin R$ quels que soient a et b dans A.

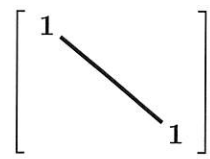
Transitivité

Une relation R sur l'ensemble A est **transitive** si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b, lui-même en relation avec un élément c, on a aussi a en relation avec c, c'est-à-dire si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ implique $(a, c) \in R$ quels que soient a, b et c dans A.

La symétrie et l'antisymétrie ne sont pas des propriétés opposées ! Il existe des relations à la fois symétriques et antisymétriques ainsi que des relations qui ne sont ni symétriques ni antisymétriques. Il n'est donc pas possible de conclure qu'une relation symétrique n'est pas antisymétrique et, encore moins, qu'une relation est automatiquement antisymétrique si elle n'est pas symétrique.

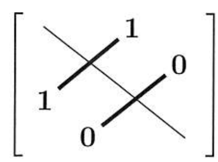
Propriété. Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est réflexive si et seulement si la diagonale principale de la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation ne contient que des 1.

Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est réflexive si et seulement si une boucle relie chaque sommet du graphe à lui-même.



Propriété. Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est symétrique si et seulement si la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

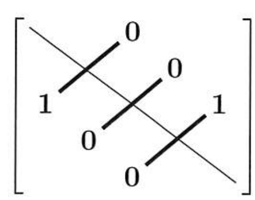
Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est symétrique si et seulement si entre deux sommets distincts il y a soit un arc dans chaque direction soit aucun arc (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).



Propriété. Une relation R sur un ensemble A est symétrique si et seulement si $R = R^{-1}$.

Propriété. Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est antisymétrique si et seulement si, dans la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation, il n'existe pas deux 1 en symétrie par rapport à la diagonale principale :

Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est antisymétrique si et seulement si il y a *au plus* un arc entre toute paire de sommets distincts (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).



Théorème

Une relation R sur un ensemble A est transitive si et seulement si $R^2 \subseteq R$.

2.14 Pour chacune des relations R et S définies par les matrices de l'exercice 2.4, déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

2.15 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R formée de tous les couples (x, y) vérifiant

$$x + y \geq 0.$$

Déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

2.16 Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour chacune des relations suivantes sur A, déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

a) $R_1 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ c) $R_3 = \{(2,4), (4,2)\}$

b) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ d) $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

2.4 Relations d'ordre

Relation d'ordre

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'ordre** si elle est simultanément réflexive, antisymétrique et transitive.

Éléments comparables

Si R est une relation d'ordre sur A, deux éléments a et b de A sont dits **comparables** si a est en relation avec b ou si b est en relation avec a (voire les deux dans le cas particulier où $a = b$).

Ordre partiel et ordre total

Une relation d'ordre R sur l'ensemble A est

- ▷ un **ordre partiel** s'il existe au moins deux éléments de A non comparables,
- ▷ un **ordre total** ou **linéaire** si toute paire d'éléments de A est comparable.

Diagramme de Hasse

Si R est une relation d'ordre sur un ensemble fini A, le **diagramme de Hasse** de R est une simplification de son graphe représentatif obtenue

- ▷ en supprimant toutes les boucles (elles se déduisent de la réflexivité de la relation) ;
- ▷ en supprimant tous les arcs se déduisant par transitivité ;
- ▷ en positionnant les sommets du graphe de manière à ce que tous les arcs restants soient dirigés vers le haut ;
- ▷ en supprimant l'orientation des arcs (on parle alors d'*arêtes*), le sens de la relation étant toujours du sommet situé en bas vers celui situé en haut.

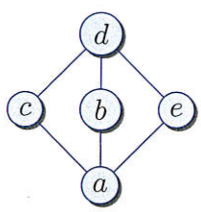
2.17 Pour chacune des relations sur l'ensemble $A = \{v, w, x, y, z\}$ données par les matrices ci-dessous, déterminer – en justifiant vos réponses – s'il s'agit d'une relation d'ordre. Dans l'affirmative, décider s'il s'agit d'un ordre partiel ou total et donner son diagramme de Hasse.

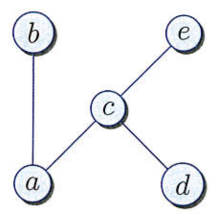
a) $\boldsymbol{M}(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\boldsymbol{M}(R_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{M}(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\boldsymbol{M}(R_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.18 Comment se présente le diagramme de Hasse d'un ordre total ?

2.19 Déterminer les matrices des relations d'ordre définies par les diagrammes de Hasse suivants.

a) 

b) 

2.20 Donner le diagramme de Hasse de la relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(\{x, y, z\})$.

2.21 Relation de divisibilité

L'entier n divise l'entier m si n est non nul et s'il existe un entier k tel que $m = kn$. Si n divise m, on note $n \mid m$.

a) Montrer que la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre.

b) S'agit-il d'un ordre partiel ou total ?

2.22 Déterminer le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

2.23 Ordre lexicographique

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels, on définit la relation R par

$$(a, b)\, R\, (c, d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leq d).$$

Vérifier qu'il s'agit d'un ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

INDICATION. Commencer par représenter graphiquement l'ensemble des points (a, b) vérifiant $(a, b)\, R\, (0, 0)$ puis l'ensemble des points (c, d) vérifiant $(0, 0)\, R\, (c, d)$.

2.5 Relations d'équivalence

Relation d'équivalence

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'équivalence** si elle est simultanément réflexive, symétrique et transitive.

2.24 Parmi les relations suivantes sur l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes du département ce semestre, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

a) $R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ possèdent un ordinateur de la même marque}\}$

b) $R_2 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ ont le même groupe sanguin}\}$

c) $R_3 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ sont frères}\}$

d) $R_4 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ ont la même nationalité}\}$

Classes d'équivalence et partitions

Éléments équivalents

Si R est une relation d'équivalence sur l'ensemble A et si a et b sont deux éléments de A en relation (on a forcément a en relation avec b et b en relation avec a par symétrie de R), a et b sont dits **équivalents** pour la relation R.

Classe d'équivalence

Le sous-ensemble de A formé de tous les éléments équivalents à $a \in A$, pour la relation R, est appelé la **classe d'équivalence de a** et est noté $[a]_R$ ou, simplement, $[a]$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur la relation R.

Propriété

Deux classes d'équivalence $[a]$ et $[b]$ sont ou bien égales ou bien disjointes.

Partition

Une **partition** d'un ensemble A est une décomposition de A en sous-ensemble disjoints. Plus précisément, la collection $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de sous-ensembles de A est une partition de A si et seulement si

$$A_i \cap A_j = \varnothing \qquad \text{si } i \neq j$$

et

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A.$$

Théorème.
Si R est une relation d'équivalence sur A, l'ensemble des classes d'équivalence de R forme une partition de A.

2.25 Pour chacune des relations sur l'ensemble $A = \{v, w, x, y, z\}$ données par les matrices ci-dessous, déterminer – en justifiant vos réponses – s'il s'agit d'une relation d'équivalence. Dans l'affirmative, donner ses classes d'équivalence.

a) $\boldsymbol{M}(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\boldsymbol{M}(R_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{M}(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\boldsymbol{M}(R_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.26 Relation de congruence
Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ on considère la relation R définie par

$$a\,R\,b \iff a - b \text{ est un multiple de } 5.$$

a) Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Déterminer les classes d'équivalence de R.

2.27 Soit R la relation sur $\mathbb{Z}^2$ définie par

$$(a, b)\ R\ (c, d) \iff a + d = b + c.$$

La relation R est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$? Dans l'affirmative, donner les classes d'équivalence de $(0, 0)$, $(2, 1)$ et $(0, -1)$, sinon préciser les propriétés qui ne sont pas vérifiées.
INDICATION. On peut aussi définir la relation R par : $(a, b)\ R\ (c, d) \iff a - b = c - d$.

2.6 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

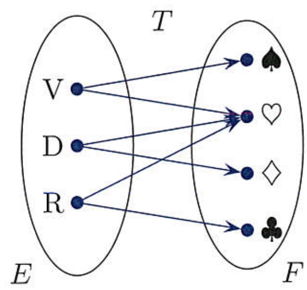
2.28 On considère les ensembles :

$$E = \{\mathrm{V}, \mathrm{D}, \mathrm{R}\} \qquad \text{et} \qquad F = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$$

ainsi que la relation S de E vers F :

$$S = \{(\mathrm{V}, \spadesuit), (\mathrm{D}, \heartsuit), (\mathrm{D}, \diamondsuit), (\mathrm{R}, \spadesuit), (\mathrm{R}, \clubsuit)\}$$

et la relation T, elle aussi de E vers F, de graphe :



a) Donner les matrices des relations S et T.

b) Donner les matrices des relations $\overline{S}$ et T^{-1}.

c) Calculer, à l'aide des matrices précédentes, la matrice de la relation $U = \overline{S} \circ T^{-1}$.

d) Donner le graphe de la relation U.

2.29 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, on considère la relation « plus grand que », c'est-à-dire la relation

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > y\right\}.$$

Déterminer

a) la relation complémentaire $\overline{R}$,

b) la relation inverse R^{-1},

c) la relation composée $R^2 = R \circ R$,

d) la relation composée $R \circ R^{-1}$.

2.30 Soit R la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \leq 3\}.$$

Déterminer – en justifiant vos réponses – si la relation R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

2.31 Pour chacune des relations suivantes sur $\mathbb{Z}$, déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

a) $R_1 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$

c) $R_3 = \{(x, y) \mid x \leq 2y\}$

d) $R_4 = \{(x, y) \mid x = y + 1 \text{ ou } x = y - 1\}$

e) $R_5 = \{(x, y) \mid x = y \text{ ou } x = -y\}$

f) $R_6 = \{(x, y) \mid x + y = 4\}$.

2.32 Soit A et B deux ensembles non vides avec $|A| = n$ et $|B| = m$. Combien existe-t-il de relations de A vers B ?

2.33 Soit A un ensemble non vide de cardinal égal à n. Déterminer

a) le nombre de relations sur A,

b) le nombre de relations symétriques sur A.

2.34 Trouver l'erreur dans la « démonstration » suivante qu'une relation symétrique et transitive est également réflexive.

> Supposons la relation R symétrique et transitive. Alors $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ par symétrie. De plus, puisqu'on a $x\,R\,y$ et $y\,R\,x$, on a aussi $x\,R\,x$ par transitivité. Ainsi R est réflexive.

Table 2.1 – Données pour l'exercice 2.35

Prénom	Domicile	Couleur des yeux	Taille (en cm)	Année de naissance
Aline	Lausanne	bleu	167	1994
Bastien	Yverdon	brun	180	1991
Claudia	Yverdon	vert	175	1996
David	Lausanne	bleu	183	1995
Élodie	Yverdon	brun	171	1994
Frank	Lausanne	bleu	175	1997

2.35 On considère les données de la table 2.1.

a) Sur l'ensemble S des personnes apparaissant dans la table, on définit la relation R par :

$$R = \{(x, y) \in S^2 \mid x \text{ et } y \text{ ont au plus 5 centimètres de différence de taille}\}.$$

1. Étudier les propriétés de la relation R (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).
2. La relation R définit-elle une relation d'ordre sur l'ensemble S ? Dans l'affirmative, décider s'il s'agit d'un ordre partiel ou total.
3. La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur l'ensemble S ? Dans l'affirmative, donner ses classes d'équivalence.

b) Mêmes questions pour la relation T définie par :

$$T = \{(x, y) \in S^2 \mid x \text{ et } y \text{ habitent la même localité et ont la même couleur d'yeux}\}.$$

2.36 Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et la relation R sur A donnée par

$$R = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}.$$

a) Donner la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ de la relation R.

b) Donner la matrice $\boldsymbol{M}(R^2)$ de la relation $R^2 = R \circ R$.

c) La relation R est-elle transitive ? Justifier votre réponse.

d) La relation R est-elle une relation d'ordre ? Justifier votre réponse et, dans l'affirmative, décider s'il s'agit d'un ordre partiel ou total.

2.37 Soient A l'ensemble formé de Mme Goud (MGD) et MM. Breguet (GMB), Cuisenaire (OCE), Graf (MGF) et Rentsch (RRH) et B l'ensemble des étudiant-e-s du département TIC suivant, ce semestre, le cours INF1.

On considère la relation R de A vers B formée de tous les couples (a, b) où le professeur a enseigne INF1 à l'étudiant-e b.

a) Que représente la relation $S = R \circ R^{-1}$?

b) La relation S est-elle une relation d'ordre ? Si oui, s'agit-il d'un ordre partiel ou total ? (commenter)

c) La relation S est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, que représentent ses classes d'équivalence ?

2.38 On a demandé à quatre experts en informatique de noter cinq langages de programmation en fonction de leurs préférences. Les notes attribuées sont résumées dans la table qui suit, la note 5 correspondant au langage préféré.

	Experts			
Langage	1	2	3	4
C	1	4	3	2
C++	2	5	1	4
Java	5	1	5	5
PHP	3	2	4	1
Python	4	3	2	3

Sur l'ensemble formé des cinq langages de programmation, on définit la relation R par :

« Le langage a est en relation avec le langage b s'il s'agit du même langage ($a = b$) ou si le nombre d'experts préférant le langage a au langage b est plus grand que le nombre d'experts préférant le langage b au langage a. »

a) Donner le graphe de la relation R ainsi que la matrice de R.

INDICATION. Commencer par construire la table dont les lignes et les colonnes sont associées aux cinq langages et dont l'élément en ligne i et colonne j correspond au nombre d'experts préférant le langage i au langage j.

b) Quelles sont les propriétés (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité) de la relation R ? Justifier brièvement chaque réponse.

c) La relation R définit-elle une relation d'ordre (Justifier brièvement) ? Si oui, donner son diagramme de Hasse et préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total (Justifier brièvement).

d) La relation R définit-elle une relation d'équivalence (Justifier brièvement) ? Si oui, donner ses classes d'équivalence.

2.39 Lors d'une compétition sportive, n équipes disputent un tournoi complet (chaque équipe affronte une fois chacun de ses adversaires).

À l'issue des rencontres on définit sur l'ensemble $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ des n équipes la relation R de la manière suivante : l'équipe e_i est en relation avec l'équipe e_j si $e_i = e_j$ ou si le nombre de victoires de e_i est supérieur au nombre de victoires de e_j ou si, à nombre égal de victoires, e_i a battu e_j (dans le sport en question il n'y a jamais de match nul).

La relation R est réflexive par construction. Elle est également antisymétrique car pour avoir deux équipes en relation l'une avec l'autre il faudrait qu'elles aient le même nombre de victoires et qu'elles aient toutes les deux remporté leur match direct ce qui n'est pas possible.

Lors de la dernière édition de la compétition, 4 équipes s'affrontèrent et le tableau des résultats fut le suivant :

	e_1	e_2	e_3	e_4	Total
e_1		0	0	1	1
e_2	1		1	0	2
e_3	1	0		1	2
e_4	0	1	0		1

a) Donner la matrice de la relation R correspondant à la table de résultats précédente.

b) En utilisant la matrice de R, vérifier que la relation est transitive. Préciser les résultats intermédiaires.

c) Donner le diagramme de Hasse de la relation R.

d) La relation R définit-elle toujours un ordre, quels que soient le nombre d'équipes et les résultats des matchs ? Justifier.

2.40 On considère les ensembles $C = \{3, 4, \infty\}$ et $F = \{\blacksquare, \triangle, \lozenge, \bullet, \square, \blacktriangleleft\}$ ainsi que la relation R de C vers F définie par

$$R = \{(c, f) \in C \times F \mid c \text{ est le nombre de côtés de la figure } f\}.$$

a) Donner le graphe et la matrice de la relation R.

b) Donner le graphe de la relation $S = R \circ R^{-1}$.

c) En français, quelle propriété/condition vérifient les couples de la relation S ?

d) Quelles sont les propriétés de la relation S ? (Justifier, brièvement, chaque réponse)

e) La relation S définit-elle un ordre (si oui, donner son diagramme de Hasse) ? Une relation d'équivalence (si oui, donner ses classes d'équivalence) ?

2.41 Soient $L = \{\text{allemand}, \text{français}, \text{italien}, \text{romanche}\}$ l'ensemble des quatre langues nationales, H un sous-ensemble (non vide) de personnes vivantes et R la relation de H vers L formée de tous les couples (h, l) où la personne h parle couramment la langue l.

À partir de ces données on construit la relation $S = R^{-1} \circ R$.

a) En une phrase, que représente la relation S.

b) Pour chacune des affirmations qui suivent décider si elle est vraie ou fausse. Argumenter brièvement chaque réponse.

(1) La relation S est toujours réflexive.

(2) La relation S est toujours symétrique.

(3) La relation S est toujours antisymétrique.

(4) La relation S est toujours transitive.

2.42 Soit A un ensemble non vide et R et S deux relations sur A. Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non. Argumenter chaque réponse.

a) Si la relation R est non vide alors la relation composée $R^{-1} \circ R$ est réflexive.

b) Si les relations R et S sont réflexives alors la relation composée $S \circ R$ l'est aussi.

c) Si les relations R et S sont symétriques alors la relation composée $S \circ R$ l'est aussi.

d) Si la relation S est antisymétrique alors la relation complémentaire $\overline{S}$ l'est aussi.

2.43 Donner le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur l'ensemble

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

2.44 Soit R la relation sur $\mathbb{Z}^2$ définie par

$$(a, b)\ R\ (c, d) \iff |a| + |b| = |c| + |d|.$$

a) Étudier les propriétés de la relation R (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).

b) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$?
Dans l'affirmative, s'agit-il d'un ordre partiel ou total ?

c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$?
Dans l'affirmative, donner les classes d'équivalence de $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-2, 1)$.

2.45 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ des couples d'entiers on considère la relation R définie par

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \iff |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$$

a) Déterminer – en justifiant brièvement chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

b) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)

c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, décrire ou représenter graphiquement la classe d'équivalence du couple $(1, 0)$.

2.46 Sur l'ensemble des couples d'entiers strictement positifs (c.-à-d. sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$), on considère la relation R définie par

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff ad = bc.$$

a) La relation R est-elle une relation d'ordre ? Si oui, s'agit-il d'un ordre partiel ou total ?

b) La relation R est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, quelles sont ses classes d'équiva-lence ?

2.47 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R définie par

$$x\, R\, y \iff |x| \geq y$$

a) Déterminer – en justifiant brièvement chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

b) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)

c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$? (justifier) Dans l'affirmative, donner les classes d'équivalences de 0 et de 5.

2.48 Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ l'ensemble des chiffres décimaux et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Sur ce dernier ensemble on considère la relation R formée de tous les couples (A, B) de sous-ensembles disjoints de E :

$$(A, B) \in R \qquad \iff \qquad A \cap B = \varnothing.$$

a) Déterminer – en justifiant chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

b) Déterminer la relation $R^2 = R \circ R$.

2.49 Sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs on considère la relation R définie par

$$(a, b) \in R \qquad \iff \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } b = a^n.$$

a) Déterminer – en justifiant chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

b) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$? (Justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (Justifier)

c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^*$? (Justifier) Dans l'affirmative, donner la classe d'équivalence de l'entier 2.