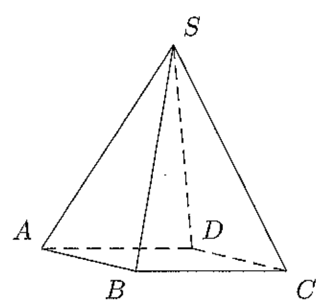
Chapitre 6

Calcul vectoriel et géométrie analytique

6.1 Calcul vectoriel

6.1 Soit une pyramide de sommet S et dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.



On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AS} = \vec{w}$. Exprimer $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CA}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

6.2 Soit A, B, C, D et E des points quelconques. Réduire le plus possible chaque expression.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$,

b) $\vec{b} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$,

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED}$,

d) $\vec{d} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB}$.

6.3 On donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Déterminer un vecteur $\vec{x}$ tel que

$$\frac{1}{3}\left(2\vec{x} + \vec{a} - \vec{b}\right) = 2\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{x} + 2\vec{a} - 3\vec{b}\right).$$

6.4 Soit un triangle ABC. Soit encore M le milieu du côté $[BC]$ et D tel que $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA}$. Exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

6.5 Parmi les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

lesquels sont colinéaires ?

6.6 On considère trois points du plan : $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$. Sachant que le centre de gravité G du triangle ABC est situé aux deux tiers des médianes du triangle,

a) exprimer $\overrightarrow{OG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$,

b) en déduire une formule donnant les coordonnées de G en fonction de celles de A, B et C,

c) calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle de sommets $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ et $C(5, -3)$.

6.7 Soit les vecteurs $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{d}$ tel que

$$-2\vec{a} + 3\vec{d} = 4\vec{b} - 3\vec{c}.$$

6.8 Calculer la distance séparant les points A et B dans les cas suivants :

a) $A(2, -1)$ et $B(-2, -4)$, b) $A(5, -3, 1)$ et $B(3, 0, 9)$, c) $A(0, 0, 1)$ et $B(6, 6, 7)$.

6.9 Trouver un vecteur unitaire $\vec{e}$ colinéaire au vecteur $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Existe-t-il plusieurs solutions ?

6.10 Dans chaque cas, décider si les triplets de points donnés sont alignés ou non.

a) $A(5, 2)$, $B(6, -3)$ et $C(7, 8)$, b) $A(3, 8)$, $B(5, -6)$ et $C(-1, 36)$.

6.11 Déterminer complètement le point C pour que les points A, B et C soient alignés dans les cas suivants :

a) $A(-1, 5)$, $B(3, -3)$ et $C(x, 1)$, b) $A(2, -1, 10)$, $B(8, 5, 1)$ et $C(y, 3, z)$,

6.12 Soit les quatre vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Trouver un vecteur $\vec{v}$ sachant que $\vec{v} + \vec{a}_1$ est colinéaire à $\vec{b}_1$ et $\vec{v} + \vec{a}_2$ est colinéaire à $\vec{b}_2$.

6.13 Étant donné les trois vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

quel multiple de $\vec{v}$ faut-il ajouter à $\vec{a}$ pour obtenir un vecteur colinéaire à $\vec{b}$?

6.14 Calculer l'angle entre les paires de vecteurs suivants :

a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Donner vos réponses en radians et en degrés (vous aurez besoin d'une machine à calculer).

6.34 Déterminer des équations cartésiennes des droites situées à une distance 3 de la droite d'équation cartésienne $(d) : 4x - 3y = 8$.

6.35 Déterminer les équations paramétriques des droites passant par $A(2,3)$ et équidistantes des points $B(10,2)$ et $C(0,4)$.

6.36 Déterminer les équations cartésiennes des droites passant par le point $A(1,1)$ et situées à distance 3 du point $B(-5,4)$.

6.37 Déterminer le point A' symétrique du point $A(2,-4)$ par rapport à la droite d'équation cartésienne $3x - 2y = 1$.

6.38 Déterminer les équations cartésiennes des droites situées à distance 3 du point $P(-2,3)$ et parallèles à la droite d'équation $8x_1 - 15x_2 + 34 = 0$.

6.39 Déterminer l'angle entre les droites de l'exercice 6.31.

6.40 Déterminer les équations cartésiennes des bissectrices des deux droites se coupant au sommet A du triangle de l'exercice 6.18.

6.3 Géométrie analytique de l'espace

6.41 On considère, dans l'espace, la droite Δ passant par les points $A(2,3,1)$ et $B(-8,7,-4)$.

a) Déterminer des équations paramétriques de cette droite.

b) La droite coupe-t-elle l'axe Ox_3 ? Si oui, en quel point ?

c) La droite coupe-t-elle l'axe Ox_2 ? Si oui, en quel point ?

d) La droite coupe-t-elle le plan Ox_1x_3 ? Si oui, en quel point ?

6.42 Donner une équation cartésienne du plan de représentation paramétrique

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

6.43 Donner une équation cartésienne du plan π passant par les point $A(1,1,-1)$, $B(-2,-2,2)$ et $C(1,-1,2)$.

6.44 Déterminer des équations paramétriques pour le plan π contenant le point $A(2,1-,5)$ ainsi que la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

6.45 Déterminer une équation cartésienne puis des équations paramétriques du plan π passant par le point $A(-1,-4,1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}^T$

6.46 Montrer que la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 &= 1 + \lambda \\ x_2 &= -2 + 2\lambda , \\ x_3 &= 3 + 4\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

est parallèle au plan $6x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 8 = 0$.

6.47 Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan

a) passant par le point $P(3, -2, 4)$ et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OP}$.

b) perpendiculaire au milieu du segment AB, avec $A(0, 2, 5)$ et $B(4, -4, 1)$.

c) passant par le point$P(5, 0, 1)$ et parallèle au plan d'équation $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17$.

6.48 Soit le plan π d'équation cartésienne $6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 8 = 0$. Calculer la distance entre π et

a) le point $P(1, 2, 3)$.

b) le plan d'équation $6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$.

c) le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

6.49 Déterminer l'équation cartésienne du plan perpendiculaire aux plans d'équation $3x-y+z = 0$ et $x + 5y + 3z = 0$ et passant par le point $A(2, 2, -1)$.

6.50 On considère les quatre points $A(1, 3, 2)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, 3)$ et $P(5, 6, 7)$. calculer les coordonnées du point P', projection orthogonale de P sur le plan définit par A, B et C.

6.51 Calculer la distance entre le point $P(1, -1, 1)$ et la droite d passant par $A(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$.

6.52 Calculer l'angle entre les plans

$$4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 11 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 4 = 0.$$

6.53 On considère les plans d'équation

$$(\pi_1) : 2x - y + z = 2 \qquad \text{et} \qquad (\pi_2) : 3x + y - 2z = 5.$$

a) Déterminer l'angle entre ces deux plans.

b) Déterminer des équations paramétriques de la droite d d'intersection de π_1 et π_2.

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant la droite d et passant par $A(1, 1, 0)$.

6.54 Calculer la distance séparant les droites $d_1(A_1, \vec{v}_1)$ et $d_2(A_2, \vec{v}_2)$ où

$$\overrightarrow{OA_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{OA_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6.55 On considère les plans d'équation

$$(\pi_1) : x + y + z = 4 \qquad \text{et} \qquad (\pi_2) : x - y + 3z = 5.$$

a) Déterminer des équations paramétriques de la droite d d'intersection de π_1 et π_2.

b) Déterminer l'angle entre les deux plans π_1 et π_2.

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan π passant par le point $A(1, 2, 3)$ et qui est parallèle à la droite d ainsi qu'à l'axe Ox_1.