Mathématiques Discrètes

Jean-François Hêche

Automne 2016-2017

Chapitre 1
Les ensembles

Ensembles et éléments

Un **ensemble** est une réunion d'**éléments** formant un tout.

- Un ensemble est entièrement déterminé par la collection de ses éléments.
- Dans les cas les plus simples, on peut décrire un ensemble en listant explicitement tous ses éléments entre accolades (on parle alors de description **en extension**).
- EXEMPLES.
  - L'ensemble des chiffres décimaux s'écrit

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

  - L'ensemble des voyelles de la langue française s'écrit

$$\{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{o}, \mathrm{u}, \mathrm{y}\}.$$

Relation d'appartenance : $\in$

- Si x est un élément d'un ensemble A, on dit qu'il **appartient** à cet ensemble, qu'il en **fait partie** ou encore que l'ensemble **contient** x et on note

$$\boxed{x \in A}.$$

- Si x n'appartient pas à l'ensemble A, on note

$$\boxed{x \notin A}.$$

- EXEMPLES.
  - $1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
  - $2 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
  - Faux $\in$ {Vrai, Faux}.
  - Peut-être $\notin$ {Oui, Non}.

Description des ensembles

- La description **en extension** n'est effective que pour les ensembles contenant très peu d'éléments.
- Pour des ensembles plus conséquents il est parfois possible de lister suffisamment d'éléments afin de faire ressortir un motif clair.
- EXEMPLES.
  - L'ensemble des entiers positifs inférieurs à 100 peut s'écrire

$$\{1, 2, 3, \ldots, 99\}.$$

  - L'ensemble (infini) des entiers positifs pairs peut s'écrire

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

  - L'ensemble (infini lui aussi) des entiers impairs peut s'écrire

$$\{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

Description des ensembles (suite)

- La forme privilégiée (en mathématiques) pour définir un ensemble est la description **en compréhension** obtenue en spécifiant une propriété satisfaite par tous les éléments de l'ensemble recherché et par eux seuls.
  - L'ensemble de tous les éléments x vérifiant la propriété $P(x)$ se note

$$\boxed{\{x \mid P(x)\}}$$

où la barre verticale | se lit « tel que ».

  - L'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble A vérifiant la propriété $P(x)$ se note

$$\boxed{\{x \in A \mid P(x)\}}.$$

Exemples

- L'ensemble des entiers positifs inférieurs à 100 peut s'écrire

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 99\}.$$

- L'ensemble des entiers positifs pairs peut s'écrire

$$\{x \mid x \text{ est pair et positif}\}$$

mais également

$$\{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{ou} \quad \{x \mid \exists\, k \in \mathbb{N}^*, x = 2k\}.$$

- L'ensemble des entiers impairs peut s'écrire

$$\{x \mid x \text{ est impair}\}$$

ou

$$\{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ou encore} \quad \{x \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}, x = 2k+1\}.$$

Ensembles égaux

Deux ensembles sont **égaux** si et seulement si tout élément de l'un est aussi élément de l'autre. Si A et B sont égaux, on note

$$\boxed{A = B}.$$

Deux précisions importantes s'imposent :

- Dans un ensemble, l'ordre des éléments n'a pas d'importance :

$$\{1, 3, 5\} = \{3, 5, 1\}.$$

- Dans un ensemble, les répétitions éventuelles d'un même élément ne comptent pas :

$$\{\text{i, n, f, i, n, i}\} = \{\text{f, i, n, i}\} = \{\text{f, i, n}\}.$$

Quelques ensembles importants de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- L'ensemble des **entiers** relatifs est noté $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- L'ensemble des nombres **rationnels** est noté $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0\}$.
- L'ensemble des nombres **réels** est noté $\mathbb{R}$.

- En ajoutant le suffixe *, on supprime 0 des ensembles précédents :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

- En ajoutant le suffixe $_+$, on ne garde que les éléments positifs ou nuls (≥ 0) :

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}.$$

- En ajoutant le suffixe $_-$, on ne garde que les éléments négatifs ou nuls (≤ 0).

heig-vd

Intervalles réels

- Un **intervalle réel** est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.
- On distingue trois types d'intervalles :
  - les **intervalles fermés** lorsque les deux bornes font partie de l'ensemble :

$$\boxed{[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}}\ ;$$

  - les **intervalles ouverts** lorsque les deux bornes sont exclues de l'ensemble :

$$\boxed{]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}}\ ;$$

  - les **intervalles semi-ouverts** lorsqu'une seule des deux bornes appartient à l'ensemble :

$$\boxed{]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}} \quad \text{et} \quad \boxed{[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}}.$$

- La borne inf. peut être égale à $-\infty$ et la borne sup. à $+\infty$ (elles ne sont jamais inclues) :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \qquad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

heig-vd

Ensemble vide et ensemble universel

- L'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant aucun élément, il est noté $\varnothing$ ou, plus rarement, $\{\ \}$.

A priori, les éléments d'un ensemble peuvent être de natures très diverses, ainsi

$$A = \{\text{rouge}, \{3\}, \text{vendredi}, \pi\}$$

est un ensemble tout à fait valide.

- Dans les applications les éléments pouvant appartenir à un ensemble ne sont pas quelconques mais proviennent d'un **ensemble universel** (ou **univers**), noté généralement Ω, contenant tous les éléments à prendre en compte dans un contexte donné.

heig-vd

Sous-ensembles et relation d'inclusion : $\subseteq$

> L'ensemble B est un **sous-ensemble** de l'ensemble A si et seulement si tous les éléments de B sont aussi des éléments de A.

- Si B est un sous-ensemble de A on dit que B est **inclus** dans A ou que B est **une partie** de A et on note

$$\boxed{B \subseteq A}.$$

- Mathématiquement, cela s'écrit

$$\boxed{B \subseteq A \iff (\forall x \in B, x \in A)}$$

et se lit

B est un sous-ensemble de A si et seulement si chaque élément x appartenant à B appartient également à A.

heig-vd

Quelques propriétés

- Tout ensemble A est un sous-ensemble de lui-même :

$$\boxed{A \subseteq A, \quad \forall A}.$$

- L'ensemble vide $\varnothing$ est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble :

$$\boxed{\varnothing \subseteq A, \quad \forall A}.$$

et en particulier de lui-même :

$$\boxed{\varnothing \subseteq \varnothing}.$$

- Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement s'ils sont sous-ensembles l'un de l'autre (principe de double inclusion) :

$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A}.$$

Sous-ensembles propres et inclusion stricte : $\subset$

1. Les ensembles
Ensembles et éléments
Appartenance
Ensembles égaux
Ensemble vide et ensemble universel
Sous-ensembles
Opérations sur les ensembles
Cardinaux
Ensemble des parties
Produit cartésien
2. Les relations
3. Les fonctions

- Il est parfois important d'insister sur le fait que B est un sous-ensemble de A mais que B n'est pas égal à A tout entier (il existe donc au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B).

  Dans un tel cas, B est dit un **sous-ensemble propre** de A. Il est alors **strictement inclus** dans A et cette situation est notée

$$\boxed{B \subset A}.$$

- Évidemment, si B est un sous-ensemble propre de A alors B est également un sous-ensemble de A :

$$\boxed{B \subset A \Longrightarrow B \subseteq A}.$$

- ASTUCE MNÉMOTECHNIQUE. On peut rapprocher les symboles d'inclusion $\subseteq$ et $\subset$ des comparateurs $\leq$ et $<$.

heig-vd

Appartenance vs inclusion

Les notions d'appartenance et d'inclusion ne doivent pas être confondues !

Pour l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, on a

- 1 est un élément de $A : 1 \in A$;
- 1 n'est pas un sous-ensemble de $A : 1 \nsubseteq A$;
- $\{1\}$ est un sous-ensemble de $A : \{1\} \subseteq A$;
- $\{1\}$ n'est pas un élément de $A : \{1\} \notin A$.

Pour l'ensemble $B = \{\{e\}, \{f, g\}, \{h\}\}$, on a

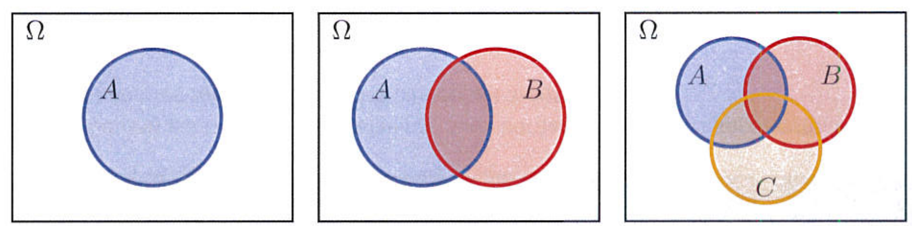
- e n'est ni un élément ni un sous-ensemble de $B : e \notin B$ et $e \nsubseteq B$;
- $\{e\}$ est un élément de B mais pas un sous-ensemble : $\{e\} \in B$ mais $\{e\} \nsubseteq B$;
- $\{\{e\}\}$ est un sous-ensemble de B mais pas un élément : $\{\{e\}\} \notin B$ mais $\{\{e\}\} \subseteq B$;
- f et $\{f\}$ ne sont ni des éléments ni des sous-ensembles de B.

Les risques de confusion et d'erreurs apparaissent principalement lorsque des ensembles sont éléments d'autres ensembles !

heig-vd

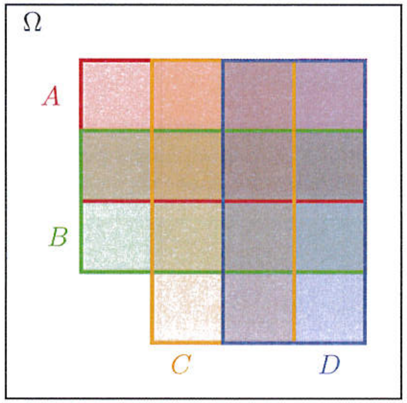
Diagramme de Venn

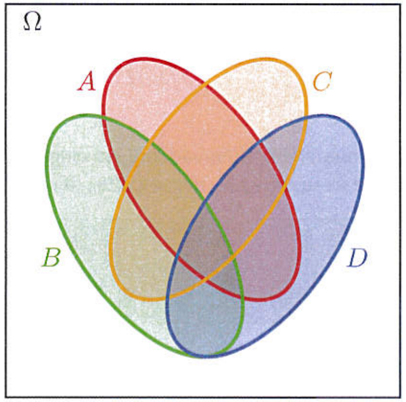
- Les **diagrammes de Venn** permettent de représenter graphiquement des ensembles et offrent une approche visuelle utile pour vérifier des propriétés simples.
- Dans un diagramme de Venn,
  - l'ensemble universel Ω est représenté par un rectangle,
  - les ensembles étudiés par des surfaces simples (typiquement des cercles),
  - la disposition de ces surfaces est telle que chaque possibilité de chevauchement apparaît une et une seule fois (un diagramme pour n ensembles compte 2^n cellules).
- EXEMPLE. Diagrammes de Venn pour, respectivement, 1, 2 et 3 ensembles.



heig-vd

Diagrammes de Venn pour 4 ensembles



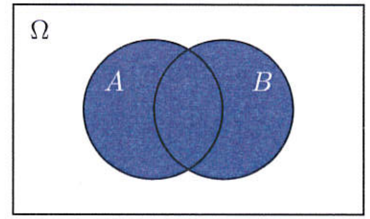


Opérations sur les ensembles : Union

Soient A et B deux ensembles dans un univers Ω.

- L'**union** ou la **réunion** de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (voire aux deux) :

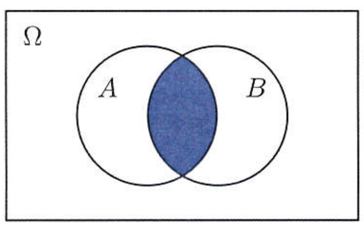
$$\boxed{A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}.$$



Opérations sur les ensembles : Intersection

- L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B :

$$\boxed{A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}}.$$

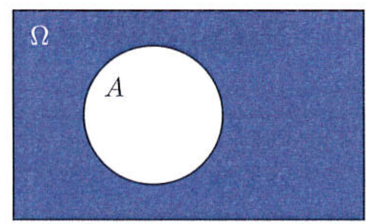


Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si leur intersection est vide, autrement dit si $A \cap B = \varnothing$.

Opérations sur les ensembles : Complément

- Le **complément** (absolu) de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de l'ensemble universel n'appartenant pas à A :

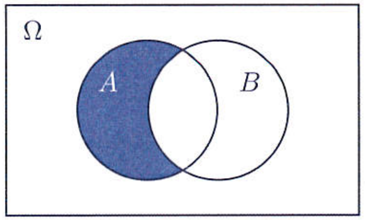
$$\boxed{\overline{A} := \{x \in \Omega \mid x \notin A\}}.$$



Opérations sur les ensembles : Différence

- La **différence** entre A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$\boxed{A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}}.$$



- La différence $A \setminus B$ est aussi appelée le **complément relatif** de B par rapport à A et on a

$$\boxed{\overline{A} = \Omega \setminus A} \quad \text{et} \quad \boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}.$$

Opérations sur les ensembles : Différence symétrique

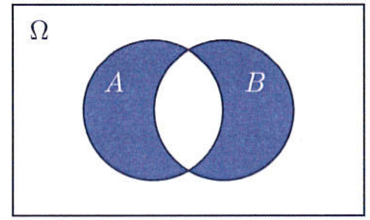
1. Les ensembles
- Ensembles et éléments
- Appartenance
- Ensembles égaux
- Ensemble vide et ensemble universel
- Sous-ensembles
- **Opérations sur les ensembles**
- Cardinaux
- Ensemble des parties
- Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

- La **différence symétrique** de A et B, notée $A \triangle B$ ou $A \oplus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant soit A soit B (mais pas aux deux) :

$$\boxed{A \triangle B := \{x \mid \text{soit } x \in A \text{ soit } x \in B\}}.$$



- En utilisant les opérations précédentes, on montre facilement que

$$\boxed{A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}.$$

Propriétés et identités

Les opérations ensemblistes vérifient de nombreuses propriétés et identités dont les principales sont présentées ci-dessous.

- **Associativités**

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Associativité de l'union	Associativité de l'intersection

REMARQUE. Pour les opérations associatives (comme l'union et l'intersection) le parenthèsage n'est pas essentiel et une expression du style $A \cup B \cup C$ est bien définie car indépendante du parenthèsage et donc de l'ordre dans lequel elle est évaluée :

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

- **Commutativités**

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Commutativité de l'union	Commutativité de l'intersection

Propriétés et identités (suite)

- **Distributivités**

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivité de l'union par rapport à l'intersection
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivité de l'intersection par rapport à l'union

- **Lois de De Morgan**

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
1re loi de De Morgan	2e loi de De Morgan

- **Absorptions**

$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
1re loi d'absorption	2e loi d'absorption

Tables d'appartenance

- Ces propriétés et identités se vérifient facilement à l'aide de diagrammes de Venn ou en montrant (à l'aide de raisonnements logiques) que chaque côté d'une égalité est un sous-ensemble de l'autre.
- On peut aussi recourir à des **tables d'appartenance** pour vérifier une identité.
- À titre d'exemple, pour la première loi de De Morgan ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$) on a la table d'appartenance.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Les colonnes 4 et 7 de cette table étant identiques, la première loi de De Morgan se trouve vérifiée.

Cardinal d'un ensemble fini

- Un ensemble A est **fini** si son nombre d'éléments (distincts) est un entier naturel. Dans le cas contraire, l'ensemble A est **infini**.

> Si A est un ensemble fini, le **cardinal**, ou la **cardinalité**, de A, noté $|A|$, est égal au nombre d'éléments distincts de A.

- EXEMPLES.
  - $|\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \dots, \mathrm{z}\}| = 26$ (en français tout au moins)
  - $|\{0, 1, 1, 0, 1, 0, 0\}| = 2$
  - $|\varnothing| = 0$
- REMARQUE. Il existe plusieurs notations, plus ou moins répandues, pour noter le cardinal d'un ensemble. Ainsi on trouvera tantôt

$$|A|, \quad \mathrm{Card}(A), \quad n(A) \quad \text{ou encore} \quad \#(A).$$

Ensemble des parties

> Pour un ensemble A donné, l'**ensemble des parties** de A est l'ensemble $\mathscr{P}(A)$ formé de tous les sous-ensembles de A.

- EXEMPLE. Pour l'ensemble $\{\text{Oui}, \text{Non}\}$, on a

$$\mathscr{P}(\{\text{Oui}, \text{Non}\}) = \{\varnothing, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}.$$

- **Propiété.** Quel que soit l'ensemble A, l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble A tout entier sont des parties de A, on aura donc toujours

$$\varnothing \in \mathscr{P}(A) \quad \text{et} \quad A \in \mathscr{P}(A).$$

> **Théorème.** *Soit A un ensemble fini de cardinal $|A| = n$, alors*
> $$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Couples, triplets et n-uples

- Un **couple** (a, b) est une liste *ordonnée* de deux éléments a et b.
- Un **triplet** (a, b, c) est une liste *ordonnée* de trois éléments a, b, c.
- Plus généralement, un **n-uple** $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une liste *ordonnée* de n éléments appelés ses **composantes**.
- Le nombre n est appelé la **taille** du n-uple.
- Deux n-uples sont égaux si et seulement s'ils sont formés des mêmes éléments aux mêmes positions :

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ et } b = d$$

et plus généralement

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Produit cartésien de deux ensembles

Le **produit cartésien** $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble de *tous* les couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$\boldsymbol{A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.}$$

- EXEMPLE. Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{x, y, z\}$, on a

$$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$$

Théorème. *Si* $|A| = n$ *et* $|B| = m$ *alors*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = nm.$$

Produit cartésien de n ensembles

- Le produit cartésien peut être étendu à un nombre quelconque d'ensembles :

$$\boxed{\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}}}.$$

- Un cas particulier et fréquent apparaît lorsque tous les ensembles A_i sont égaux. On a alors $A_i = A$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et on note $\boldsymbol{A^n}$ leur produit cartésien :

$$\boxed{\boldsymbol{A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}}}.$$

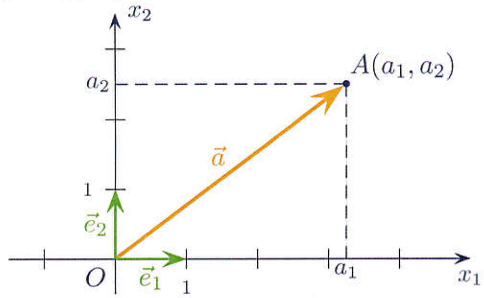
On définit ainsi les **puissances** (entières et positives) de l'ensemble A.

- On a $A^1 = A$ ainsi que la propriété

$$A^k \times A^l = A^{k+l} \qquad \forall k, l \in \mathbb{N}^*.$$

Repère cartésien et coordonnées cartésiennes

- Pour définir un repère cartésien du plan, on choisit un point O (l'origine), deux axes (généralement orthogonaux) et deux vecteurs de base de longueur 1 (un sur chaque axe).
- Chaque point A du plan est alors identifié (repéré) par ses coordonnées cartésiennes (a_1, a_2), correspondant aux projections du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur chaque axe.
- Chaque point du plan correspond alors à un couple de nombres réels et le plan est assimilé au produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Représentation géométrique de produits cartésiens