Chapitre 4
Suites et séries

Suites

Une **suite** numérique est une séquence ordonnée de nombres indicés par des entiers. Plus formellement, **une suite infinie de nombres réels**

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots)$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque entier non négatif un nombre réel.

- L'image de l'entier k est notée a_k (plutôt que $a(k)$) et est appelée le **terme d'indice k** de la suite.
- EXEMPLE. La suite des entiers positifs impairs peut être définie par

$$a_k = 2k + 1, \qquad k \geq 0,$$

ou, en commençant la numérotation depuis 1, par

$$b_k = 2k - 1, \qquad k \geq 1.$$

Suites finies et infinies

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Une suite est **finie** si elle possède un nombre fini de termes, c.-à-d. si l'ensemble des indices numérotant ses termes est fini. Dans le cas contraire, la suite est **infinie**.
- Les termes d'une suite finie sont, le plus souvent, numérotés de 0 à $n-1$ (ou de 1 à n) et la suite est notée

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \qquad \text{ou} \qquad (a_k, k = 0, \ldots, n-1).$$

- Une suite infinie est généralement définie sur $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) et on la note

$$(a_k, k = 0, 1, \ldots) \qquad \text{ou} \qquad (a_k, k \geq 0),$$

voire simplement (a_k) lorsque le contexte est clair.

Limite d'une suite infinie

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- La limite d'une suite de nombres réels est définie de manière similaire à celle d'une fonction réelle d'une variable réelle.
  Ainsi, **la suite $(a_k, k \in \mathbb{N})$ admet l comme limite** si, pour n'importe quel intervalle contenant l, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un indice suffisamment grand.
- Si la suite $(a_k, k \in \mathbb{N})$ admet l comme limite, on dit qu'**elle converge vers l** et on note $\lim_{k\to\infty} a_k = l$.
- EXEMPLE. La suite de terme général $a_k = \frac{k}{k+1}$ converge vers 1 :

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

En revanche, la suite de terme général $b_k = (-1)^k$ ne converge pas (on dit qu'elle **diverge**) et $\lim_{k\to\infty} b_k$ n'existe pas.

Suites définies par récurrence

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Une suite est définie **par récurrence** si ses termes sont définis de proche en proche, chacun étant calculé à l'aide du précédent voire des deux précédents ou plus.
- Pour être complète, une telle définition doit également spécifier une ou plusieurs **valeurs initiales** précisant les valeurs des termes qui ne peuvent être calculés à l'aide de la relation de récurrence.
- EXEMPLE. La suite $(a_k, k = 0, 1, \ldots)$ des entiers positifs impairs peut être définie par récurrence en posant

$$a_k = a_{k-1} + 2, \qquad k \geq 1$$

avec la condition/valeur initiale $a_0 = 1$. Si on préfère commencer la numérotation depuis 1, on obtient la relation

$$b_k = b_{k-1} + 2, \qquad k \geq 2$$

avec la condition initiale $b_1 = 1$.

Équations de récurrence

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Étant donné une suite définie par récurrence, une question importante (mais qui ne sera pas étudiée plus avant dans ce cours) est de savoir s'il est possible d'obtenir une expression directe (on dit aussi explicite) pour le calcul du terme général de la suite.
- EXEMPLE. Pour la suite $(a_k, k = 0, 1, \ldots)$ des entiers positifs impairs définie par la valeur initiale $a_0 = 1$ et l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + 2, \qquad k \geq 1$$

on a la formule simple et directe

$$a_k = 2k + 1, \qquad k \geq 0.$$

Une telle expression n'est pas toujours aussi facile à trouver...

La suite de Fibonacci

- En 1202 Leonardo Pisano (« Léonard de Pise ») plus connu sous le nom de Leonardo Fibonacci proposa le problème suivant :

  Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois ?

Leonardo Fibonacci
(v. 1175 - v. 1250)

- Si on note a_k le nombre de couples de lapins en âge de se reproduire présents pendant le mois k, la solution du problème précédent vérifie l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \qquad k \geq 2.$$

- La **suite de Fibonacci** est la solution de cette équation associée aux valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
- Les premiers termes de cette suite sont $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$.

La suite de Fibonacci (suite)

- On montre que le terme général a_k de la suite de Fibonacci est

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \qquad k \geq 0.$$

- Le nombre $(1+\sqrt{5})/2$ est appelé le **nombre d'or** et est noté Φ :

$$\boxed{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618033989}$$

- ESQUISSE DE RÉSOLUTION. On cherche des solutions de la forme $a_k = r^k$. En substituant dans l'équation de récurrence, le nombre r doit vérifier, pour tout $k \geq 2$, $r^k = r^{k-1} + r^{k-2}$ ou encore $r^2 = r + 1$ (il s'agit du polynôme caractéristique de l'équation de récurrence). Les deux racines de ce polynôme sont $r_1 = (1+\sqrt{5})/2 = \Phi$ et $r_2 = (1-\sqrt{5})/2 = -1/\Phi$. La solution générale de l'équation est alors $a_k = C_1(r_1)^k + C_2(r_2)^k$, $k \geq 0$, où C_1 et C_2 sont deux constantes dont les valeurs sont calculées grâce aux conditions initiales de la suite de Fibonacci.

Suites arithmétiques

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

Une **suite arithmétique** est une suite où la différence entre deux termes consécutifs est constante.
La différence commune r (entre deux termes consécutifs) est appelée la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite arithmétique est donné par la formule directe

$$a_k = a_0 + k \cdot r, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

ou par la définition récurrente

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + r, & k \geq 1 \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

- EXEMPLE. Les suites $(2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$ et $(-2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ sont des suites arithmétiques de raisons respectives 3 et 2.

Suites géométriques

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

Une **suite géométrique** est une suite où le rapport entre deux termes consécutifs est constant.
Le rapport commun r (entre deux termes consécutifs) est appelée la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite géométrique est donné par la formule directe

$$a_k = a_0 \cdot r^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

ou par la définition récurrente

$$\begin{cases} a_k = r \cdot a_{k-1}, & k \geq 1 \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

- EXEMPLE. La suite $(1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$ est une suite géométrique de raison -2 alors que $(3, 3/10, 3/100, 3/1000, \ldots)$ est une suite géométrique de raison $1/10$.

Sommes et produits

Symbole somme : $\sum$

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Le calcul de la somme des termes d'une suite est une opération très courante pour laquelle on utilise la notation abrégée

$$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

- Dans l'expression ci-dessus (parfois appelée notation sigma), la variable k est l'**indice de sommation** et le choix de la lettre k est *arbitraire* :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{\text{indice}=0}^{n} a_{\text{indice}}.$$

Exemples

- Pour la suite $(a_j, j = 1, \ldots, 5)$ de terme général $a_j = j^2$ on a

$$\sum_{j=1}^{5} a_j = \sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

- Pour la suite de terme général $b_k = (-1)^k$ pour $k \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{3} b_k = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0.$$

Plus généralement, pour $n \geq 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Notation sigma généralisée

- Plutôt que d'utiliser la forme délimitée où l'indice de sommation prend successivement toutes les valeurs entières entre la borne inférieure et la borne supérieure (bornes incluses), il est également possible (et parfois plus simple et efficace) de spécifier sous le signe $\sum$ l'ensemble des valeurs souhaitées pour l'indice de sommation (à l'aide d'une ou plusieurs conditions).
- Ainsi, la somme des n premiers termes de la suite $(a_k, k \geq 1)$ peut s'écrire, au choix,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{1 \leq k \leq n} a_k .}$$

- Remarque. La possibilité d'une telle construction est évidemment due à la commutativité et à l'associativité de l'addition.

Sommes vides

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Si, dans la forme délimitée, la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure, la somme est « vide » et sa valeur est alors égale à 0, l'élément neutre de l'addition :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{m} a_k := 0 \quad \text{si } m < n.}$$

- Exemple. $\sum_{k=5}^{2} a_k = 0$ quelle que soit la suite (a_k).
- Plus généralement, si la condition définissant l'ensemble des valeurs possibles de l'indice de sommation est vide, la somme vaut 0 :

$$\boxed{\sum_{k \in \varnothing} a_k := 0.}$$

Décalage de l'indice de sommation

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Une opération particulièrement utile et fréquence lors de la simplification d'expressions faisant intervenir des sommes consiste à **décaler l'indice de sommation**.
- Pour une suite $(a_k, k \geq 1)$ on a, par exemple,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

- Avec la forme généralisée de la notation, on a « simplement »

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = \sum_{1 \leq k+1 \leq n} a_{k+1} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_{k+1}.$$

Manipulations de sommes

- La notation Σ n'étant qu'un raccourci pour représenter l'addition de plusieurs nombres, elle possède les mêmes propriétés que l'addition usuelle, à savoir l'associativité, la commutativité et la distributivité du produit par rapport à la somme.
- Plus précisément, si K est un ensemble (fini) d'entiers, typiquement $\{1, 2, \ldots, n\}$, les sommes sur les éléments de K peuvent être transformées à l'aide des deux règles simples :
  1) **Associativité et commutativité** :

$$\sum_{k\in K}(a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k.$$

  2) **Distributivité** (du produit par rapport à la somme) :

$$\sum_{k\in K} c\cdot a_k = c\sum_{k\in K} a_k \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Sommes multiples

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Il est parfois nécessaire d'utiliser deux indices (voire plus) pour spécifier les termes apparaissant dans une somme. On note alors a_{ij} (ou $a_{i,j}$) le terme d'« indice » (i, j).
- EXEMPLE. La table qui suit présente un extrait des notes obtenues lors des contrôles continus pour le cours MAD.

		Travail écrit n° j			
	a_{ij}	1	2	3	4
Étudiant n° i	1	5.9	6.0	5.6	5.7
	2	4.2	3.7	3.6	4.1
	3	5.1	5.1	4.1	4.5
	4	2.7	3.6	3.3	1.6
	5	5.5	4.2	5.4	5.3

L'entrée en ligne i et colonne j est notée a_{ij} et correspond à la note de l'étudiant n° i lors du travail écrit n° j.

Pour calculer la somme de toutes ses notes (par exemple pour calculer la moyenne globale du contrôle continu) on est amené à effectuer une double somme.

Sommes multiples (suite)

Cette double somme T peut être calculée

- en sommant les valeurs ligne par ligne (autrement dit étudiant par étudiant) :

$$T = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} a_{ij} = \sum_{j=1}^{4} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{4} a_{2,j} + \sum_{j=1}^{4} a_{3,j} + \sum_{j=1}^{4} a_{4,j} + \sum_{j=1}^{4} a_{5,j}$$
$$= 23.2 + 15.6 + 18.8 + 11.2 + 20.4 = 89.2$$

- ou en sommant les valeurs colonne par colonne (autrement dit travail écrit par travail écrit) :

$$T = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} a_{ij} = \sum_{i=1}^{5} a_{i,1} + \sum_{i=1}^{5} a_{i,2} + \sum_{i=1}^{5} a_{i,3} + \sum_{i=1}^{5} a_{i,4}$$
$$= 23.4 + 22.6 + 22.0 + 21.2 = 89.2$$

Manipulation de sommes multiples

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Si les ensembles de sommation sont finis et indépendants les uns des autres (les valeurs possibles pour un indice ne dépendent pas de la valeur d'un autre indice), on peut échanger l'ordre de sommation dans une somme multiple :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} = \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} a_{ij} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}.$$

- Comme illustré dans l'exemple précédent, cette propriété revient à dire que **la somme de tous les éléments d'une table à deux entrées peut être établie ligne par ligne ou colonne par colonne**.

Manipulation de sommes multiples (suite)

- Lorsque les valeurs possibles pour l'indice de la somme intérieure dépendent de la valeur de l'indice de la somme extérieure, il n'est plus possible d'échanger sans autre l'ordre de sommation !

  Dans de telles situations, le recours à la notation généralisée est souvent utile.

- EXEMPLE. Dans la table la table carrée, ci-contre, la somme des éléments sur et au-dessus de la diagonale est, en effectuant le calcul ligne après ligne,

$i \backslash j$	1	2	3
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$S = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} a_{ij} = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{22}+a_{23}) + (a_{33})$$

alors qu'en effectuant le calcul colonne après colonne, elle est égale à

$$S = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = (a_{11}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23}+a_{33}).$$

Manipulation de sommes multiples (suite)

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- De manière plus généralement, on a

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.}$$

- En effet, pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$1 \le i \le j \le n \iff \begin{cases} 1 \le i \le n \\ i \le j \le n \end{cases}$$

mais également

$$1 \le i \le j \le n \iff \begin{cases} 1 \le j \le n \\ j \le i \le n \end{cases}$$

heig-vd

Sommes multiples

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- Il arrive parfois que l'on veuille sommer tous les produits des termes de deux suites afin de calculer une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

- EXEMPLE. Pour les suites de termes généraux $a_i = i^2$ et $b_j = 1/j$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} i^2 \cdot \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{4}\left(i^2 + \frac{i^2}{2} + \frac{i^2}{3}\right) \\ &= \left(1^2 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{3}\right) + \cdots + \left(4^2 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^2}{3}\right) \\ &= \frac{11}{6} + \frac{44}{6} + \frac{99}{6} + \frac{176}{6} = 55.\end{aligned}$$

heig-vd

Sommes multiples (suite)

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

- En utilisant la distributivité on a aussi et plus simplement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} i^2 \cdot \frac{1}{j} &= \sum_{i=1}^{4}\Big(i^2 \cdot \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{j}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{4} i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{j}\Big) \\ &= \Big(1+4+9+16\Big)\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big) \\ &= 30 \cdot \frac{11}{6} = 55.\end{aligned}$$

- De manière générale, pour deux ensembles finis d'entiers I et J, on a

$$\boxed{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big).}$$

heig-vd

Symbole produit : $\prod$

- De manière similaire à l'utilisation de la lettre sigma majuscule pour dénoter la somme de plusieurs termes, la lettre pi majuscule est utilisée pour représenter le produit de plusieurs termes :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.}$$

- En plus de la forme délimitée ci-dessus, on peut également utiliser une notation généralisée :

$$\prod_{k=1}^{5} 2^k = \prod_{1\le k\le 5} 2^k = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{(1+2+3+4+5)} = 2^{15}.$$

Produits vides

- Si l'ensemble des valeurs possibles pour l'indice du produit est vide (par exemple si la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure) le produit vaut, par convention, 1 (l'élément neue de la multiplication) :

$$\boxed{\prod_{k\in\varnothing} a_k := 1.}$$

- EXEMPLE.

$$\prod_{k=13}^{4} a_k = 1$$

quelle que soit la suite (a_k).

Manipulations de produits

- Le produit de nombres réels étant une opération **associative** et **commutative** on a, pour des ensembles finis I et J,

$$\prod_{i\in I}(a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\cdot\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$$

et

$$\prod_{i\in I}\left(\prod_{j\in J} a_{ij}\right) = \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} a_{ij}\right).$$

- REMARQUE. La deuxième propriété revient à dire que le produit de tous les éléments d'une table à deux entrées peut être établie aussi bien ligne par ligne que colonne par colonne.

Fonction factorielle

Si n est un entier positif, la **factorielle de n**, notée $n!$, est le produit des entiers de 1 à n :

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On complète la définition précédente en posant $0! := 1$.

- La fonction factorielle vérifie l'équation de récurrence

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad n \ge 1$$

avec la valeur initiale $0! = 1$.

- Formule de Stirling :

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n}\right) < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2}\right)$$

et, pour n grand, $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Séries

Séries

- Il est souvent utile de calculer la somme des termes d'une suite. On parle alors de **séries** et, pour la suite $(a_k, k = 1, \dots, n)$, la série associée est

$$\boxed{S(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.}$$

- EXEMPLE. Pour la suite de terme général $a_k = (-1)^k$, $k \geq 0$, on a la série

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \\ &= 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Séries arithmétiques

- Une **série arithmétique** est la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\boxed{S(n) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \ldots + (a_0 + (n-1)r) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kr).}$$

- RAPPEL. Le terme général d'une suite arithmétique est

$$\boxed{a_k = a_0 + k \cdot r, \qquad k = 0, 1, \ldots}$$

- On obtient facilement une expression pour $S(n)$ en écrivant

$$\begin{array}{rcccccccccc} S(n) & = & a_0 & + & a_0 + r & + & a_0 + 2r & + & \ldots & + & a_0 + (n-1)r \\ S(n) & = & a_0 + (n-1)r & + & a_0 + (n-2)r & + & a_0 + (n-3)r & + & \ldots & + & a_0 \\ \hline 2S(n) & = & 2a_0 + (n-1)r & + & 2a_0 + (n-1)r & + & 2a_0 + (n-1)r & + & \ldots & + & 2a_0 + (n-1)r \end{array}$$

Séries arithmétiques (suite)

- Ainsi

$$2S(n) = n(2a_0 + (n-1)r)$$

et

$$\boxed{\boldsymbol{S(n) = \frac{n}{2}(2a_0 + (n-1)r) = n \cdot a_0 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}}.}$$

- En utilisant la décomposition

$$2a_0 + (n-1)r = a_0 + (a_0 + (n-1)r) = a_0 + a_{n-1},$$

on obtient la formule, plus facile à mémoriser,

$$\boxed{\boldsymbol{S(n) = n \cdot \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} = n \cdot \frac{\textbf{premier terme} + \textbf{dernier terme}}{2}}.}$$

Exemples

1) Pour la suite arithmétique $(2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$ de terme initial $a_0 = 2$ et de raison $r = 3$, la somme des $n = 5$ premiers termes est

$$S(5) = n \cdot a_0 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{5(5-1)}{2} = 10 + 3 \cdot 10 = 40.$$

En utilisant la deuxième formule (plus simple), on a aussi (le premier terme de la suite est 2 et le cinquième 14)

$$S(5) = 5 \cdot \frac{2+14}{2} = 40.$$

2) La somme des 50 premiers nombres positifs impairs est

$$S(50) = \sum_{k=0}^{49}(2k+1) = 50 \cdot \frac{1+99}{2} = 2500.$$

heig-vd

Somme des n premiers entiers positifs : $S^{[1]}(n)$

- Pour $a_0 = 1$ et $r = 1$, la suite arithmétique associée est simplement la suite des entiers positifs et la somme des n premiers entiers positifs, notée $S^{[1]}(n)$, est

$$\boxed{S^{[1]}(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

- EXEMPLE. La somme des entiers compris entre 100 et 200 (bornes incluses) est

$$S = \sum_{k=100}^{200} k = 101 \cdot \frac{100+200}{2} = 101 \cdot 150 = 15\,150$$

mais on a aussi

$$S = \sum_{k=100}^{200} k = \left(\sum_{k=1}^{200} k\right) - \left(\sum_{k=1}^{99} k\right) = \frac{200 \cdot 201}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2} = 15\,150.$$

heig-vd

Somme des n premiers entiers positifs (suite)

- On peut obtenir le résultat précédent de plusieurs manières. En particulier, on a

$$(k+1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = 2k + 1.$$

- En sommant l'identité précédente on obtient une série télescopique pour le membre de gauche

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2 - k^2\right) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 - 1
\end{aligned}$$

alors que le membre de droite se réduit à

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2S^{[1]}(n) + n.$$

heig-vd

Somme des n premiers entiers positifs (suite)

- Ainsi la somme $S^{[1]}(n)$ cherchée vérifie

$$2S^{[1]}(n) + n = (n+1)^2 - 1$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
S^{[1]}(n) = \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{1}{2}((n+1)^2 - 1 - n) \\
&= \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - 1 - n) \\
&= \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

- REMARQUE. Le développement précédent peut sembler bien compliqué mais a l'avantage de pouvoir être repris pour le calcul de la somme des carrés des n premiers entiers positifs, puis de celle de leurs cubes, etc.

heig-vd

Séries géométriques

- Une **série géométrique** est la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{S(n) = a_0 + (a_0 r) + (a_0 r^2) + \ldots + (a_0 r^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 r^k).}$$

- RAPPEL. Le terme général d'une suite géométrique est

$$\boxed{a_k = a_0 \cdot r^k, \qquad k = 0, 1, \ldots}$$

- Pour calculer $S(n)$, considérons $S(n) - rS(n)$:

$$\begin{aligned}(1-r)S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(a_0 r^k) - r\sum_{k=0}^{n-1}(a_0 r^k) = a_0\left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - r\sum_{k=0}^{n-1} r^k\right) \\ &= a_0\left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}\right) = a_0\left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=1}^{n} r^k\right) = a_0(1-r^n).\end{aligned}$$

Ainsi $(1-r)S(n) = a_0(1-r^n)$.

Séries géométriques (suite)

- Si $r \neq 1$, on a donc

$$\boxed{S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 r^k = \frac{a_0(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_0 - a_n}{1-r}.}$$

Attention ! a_n n'est pas le dernier terme sommé (qui est a_{n-1}) mais le suivant dans la suite géométrique. On a donc aussi

$$\boxed{\begin{aligned} S(n) &= \frac{a_0 - a_n}{1-r} = \frac{a_0 - r \cdot a_{n-1}}{1-r} \\ &= \frac{\text{premier terme} - \text{raison} \times \text{dernier terme}}{1 - \text{raison}}.\end{aligned}}$$

- Si $r = 1$, la suite est constante et $S(n) = na_0$.

Exemples

1) Pour la suite géométrique $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ de raison $r = 2$ et de terme initial $a_0 = 1$, on a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1.$$

2) Pour la suite géométrique $(3, -6, 12, -24, 48, \ldots)$ de raison $r = -2$ et de terme initial $a_0 = 3$, on a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 3(-2)^k = \frac{a_0(1-r^n)}{1-r} = \frac{3(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = 1 - (-2)^n.$$

Le terme général de cette suite étant $a_k = 3(-2)^k$, $k \geq 0$, on a aussi

$$S(n) = \frac{a_0 - a_n}{1-r} = \frac{3 - 3(-2)^n}{1-(-2)} = 1 - (-2)^n.$$

Séries géométriques infinies

- Si la raison r d'une suite géométrique vérifie $|r| < 1$ les termes de la suite tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini :

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_0 r^k = a_0 \lim_{k\to\infty} r^k = 0$$

et la série converge également lorsque le nombre de termes sommés tend vers l'infini :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_0 r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0(1-r^n)}{1-r} = \boxed{\frac{a_0}{1-r}}.$$

- EXEMPLE. Pour la suite géométrique $(1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots)$ on a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^n}{1/2} = 2(1-1/2^n) \quad \text{et} \quad S(\infty) = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Raisonnement par récurrence et preuve par induction

Exemple introductif

- Considérons la suite des entiers positifs impairs

$$(1, 3, 5, 7, \ldots) = (2k-1, k \geq 1)$$

et la série associée $S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

- On a

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 = 1^2 \\ S(2) &= 1+3 = 4 = 2^2 \\ S(3) &= 1+3+5 = 9 = 3^2 \end{aligned}$$

- Des observations précédentes, on est tenté de conclure que

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Preuve par induction

- La **preuve par induction** (ou **par récurrence**) est une approche extrêmement puissante pour démontrer certains résultats.
- En effet, de nombreux théorèmes affirment qu'une propriété ou une formule $P(n)$ est vraie pour tous les entiers positifs n (dans l'exemple précédent, la formule $P(n)$ est « la somme des n premiers entiers positifs impairs est égale à n^2 »).

Afin d'établir, par induction, le bien-fondé d'une telle affirmation, deux étapes sont **nécessaires** :

1) **Pas initial** : On vérifie que la propriété est vraie lorsque $n = 1$.

2) **Pas d'induction** : On suppose la propriété vraie « au pas m », où m est un entier positif arbitraire, (il s'agit de l'**hypothèse d'induction**) et on montre que sous cette hypothèse, la propriété est encore vraie « au pas $m+1$ ».

Exemple

Montrons par induction que la formule

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1) **Pas initial** : Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 \qquad \text{et} \qquad n^2 = 1^2 = 1.$$

La formule est donc vraie pour $n = 1$.

Exemple (suite)

2) **Pas d'induction** : On suppose la formule vraie pour $m \geq 1$ fixé.
C'est-à-dire, on suppose que la formule suivante est vraie (pour le m choisi uniquement) :

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2.$$

Il s'agit de l'**hypothèse d'induction**.

Sous cette hypothèse, on doit montrer que la formule reste vraie au pas $m+1$. Plus précisément, on doit vérifier l'égalité

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) = (m+1)^2.$$

Exemple (suite)

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
Suites
Suites récurrentes
Suites arithmétiques
Suites géométriques
Symbole somme : $\sum$
Symbole produit : $\prod$
Fonction factorielle
Séries
Séries arithmétiques
Séries géométriques
Preuve par induction
Induction forte
5. Combinatoire
5. Proba. discrètes

On a

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m}(2k-1) + \big(2(m+1)-1\big).$$

On utilise l'hypothèse d'induction pour remplacer la somme par m^2 :

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) \quad = \quad m^2 + (2m+1) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2.$$

Ceci termine le pas d'induction : si la formule est vraie au pas m alors elle l'est encore au pas $m+1$.

On a montré que $P(1)$ est vraie et que si $P(m)$ est vraie pour un m positif arbitraire alors $P(m+1)$ l'est aussi. On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Principe d'induction forte

- Dans le schéma de base de la preuve par induction on démontre la validité de la propriété $P(m+1)$ en supposant uniquement celle de $P(m)$.
- Une approche tout aussi valide mais plus générale consiste à utiliser le schéma de preuve suivant :

1) **Pas initial** : On vérifie que la propriété $P(1)$ est vraie.
2) **Pas d'induction** : On suppose la propriété vraie jusqu'au pas m, c.-à-d. pour tout entier k avec $1 \leq k \leq m$ (**hypothèse d'induction forte**), et on montre qu'elle l'est encore au pas $m+1$:

$$P(k) \text{ vraie pour } 1 \leq k \leq m \Longrightarrow P(m+1) \text{ vraie.}$$