5.96 Aujourd'hui sort le dernier e-bidule, pas vraiment mieux que le précédent, nettement plus cher mais tellement indispensable ! Trois amis se sont levés tôt dans l'espoir de mettre la main sur un exemplaire du précieux graal. Arrivés devant les portes d'un point de vente isolé, ils se retrouvent dans une foule de trente passionnés (eux y-compris) qui jouent des coudes pour être les premiers.

Avant l'ouverture des portes, le gérant du magasin décide de distribuer aléatoirement des numéros de passage. Il annonce ensuite qu'il n'a reçu que quinze exemplaires de l'appareil.

Calculer la probabilité que les trois amis repartent chacun avec un exemplaire du dernier e-bidule, autrement dit calculer la probabilité qu'ils aient reçu tous les trois un numéro de passage entre 1 et 15.

5.97 La clé d'activation d'un logiciel se présente sous la forme d'un code hexadécimal de onze chiffres (pas forcément tous différents) tirés au hasard.

a) Combien de clés d'activation différentes existe-t-il ?

b) Quelle est la probabilité qu'une clé contienne au moins un chiffre répété ?

c) Quelle est la probabilité qu'une clé contienne au moins 2 fois le chiffre F ?

d) Quelle est la probabilité qu'une clé contienne exactement 5 chiffres décimaux (pas forcément différents) ?

e) Quelle est la probabilité que, dans la clé générée, chaque chiffre soit plus grand que le suivant ?

f) Quelle est la probabilité qu'une clé soit formée d'exactement deux chiffres différents ?

5.98 Lors du repas de clôture d'un symposium, six personnes se retrouvent à la même table. Montrer qu'il y en a au moins trois qui ne se connaissent pas (deux à deux) ou au moins trois qui se connaissent (deux à deux).

5.99 Démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{k-i} \cdot \binom{n}{i}$$

où m, n et k sont des entiers non négatifs avec $k \leq \min(m, n)$.

INDICATION. Interpréter le terme de gauche comme le nombre de sélections de k boules dans une urne contenant m boules rouges et n boules bleues.

5.6 Solutions d'exercices choisis

5.1 $23 + 15 + 19 = 57$ (principe d'addition)

5.2 $26 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,600$ (principe de multiplication)

5.3 $2^6 = 64$ (principe de multiplication)

5.4 $24 \cdot 9 \cdot 10^3 = 216\,000$ (principe de multiplication)

5.5 $2^{\lceil n/2 \rceil}$ (on ne peut choisir librement que la moitié du mot soit les $\lceil n/2 \rceil$ premières lettres)

5.6 $26 + 26 \cdot 36 - 5 = 957$

5.7 a) $20^6 = 64\,000\,000$ b) $26^6 - 20^6 = 244\,915\,776$ c) $26 \cdot 25^5 = 253\,906\,250$

5.8 $36^6(1+36+36^2) - 26^6(1+26+26^2)$

5.9 a) 3 b) 10

5.10 367

5.11 23

5.12 a) $k = \sum_{i=1}^{m} n_i$ b) $k = \prod_{i=1}^{m} n_i$

5.13 a) $7! = 5\,040$ b) $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ c) 1

5.14 a) $7! = 5\,040$ b) 240 c) (i) 120 (ii) 720

5.15 a) $8! = 40\,320$ b) $7! \cdot 2! = 10\,080$ c) $(4!)^2 \cdot 2 = 1152$

5.16 $(8-1)! = 5\,040$

5.17 $1 - \frac{A_6^{10}}{10^6} = 0{,}8488$

5.18 $\binom{9}{4} = 126$

5.19 $\binom{13}{3} = 816$

5.20 $\binom{24}{6} = 134\,596$

5.21 a) $7^4 = 2\,401$ b) 840 c) $1\,029$ d) 360

5.22 a) 56 b) 24 c) 32

5.23 $\binom{100}{7} = 16\,007\,560\,800$

5.24 a) m^n b) 0 si $n > m$, $A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ si $n \leq m$

5.25 a) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

b) $(2x_1 - x_2)^5 = 32x_1^5 - 80x_1^4x_2 + 80x_1^3x_2^2 - 40x_1^2x_2^3 + 10x_1x_2^4 - x_2^5$

c) $(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$

5.26 $-64\,064$

5.27 a) $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = 495$ c) 0

b) $\binom{9}{6} \cdot 3^6 \cdot (-2)^3 = -489\,888$ d) $-969/64$

5.28 a) 2^n b) 0 c) $(x+1)^n$

5.29 $\binom{9}{2,4,2,1} = 3780$

5.30 $\binom{11}{5,2,1,1,2} = 83\,160$

5.31 $\binom{11}{3,4,4} = 11\,550$

5.32 a) $\overline{C_{12}^6} = 6\,188$ b) $\overline{C_3^6} = 56$ c) $\overline{C_6^6} = 462$

5.33 a) $\overline{C_6^3} = 28$ b) $\overline{C_3^3} = 10$ c) $\overline{C_6^4} = 84$

5.34 $\overline{C_{11}^3} = 78$

5.35 $\overline{C_{13}^4} = 560$

5.36 $\overline{C_{17}^4} = 1\,140$

5.37 $\overline{C_7^{100}}$

5.38 a) 30 b) 29 c) 24 d) 18

5.39 1 086

5.40 220

5.41 150

5.42 $4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$ si $n \geq 4$ et 0 sinon

5.43 8

5.66 234

5.45 $\dfrac{11}{50} = 0{,}22$

5.46 $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$

5.47 a) $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$ b) 0

5.48 a) $\dfrac{1}{\binom{36}{4}} = \dfrac{1}{58\,905} \simeq 0{,}000017$

b) $\dfrac{\binom{9}{4}}{\binom{36}{4}} = \dfrac{126}{58\,905} = \dfrac{2}{935} \simeq 0{,}00214$

c) $\dfrac{\binom{4}{1}\binom{32}{3}}{\binom{36}{4}} = \dfrac{19840}{58\,905} = \dfrac{3968}{11\,781} \simeq 0{,}3368$

d) $1 - \dfrac{\binom{32}{4}}{\binom{36}{4}} = \dfrac{22945}{58\,905} = \dfrac{4589}{11\,781} \simeq 0{,}3895$

e) 0

f) i. $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{24}{2}}{\binom{36}{4}} = \dfrac{828}{58\,905} = \dfrac{92}{6545} \simeq 0{,}01406$

ii. $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{24}{2} + \binom{3}{3}\binom{24}{1}}{\binom{36}{4}} = \dfrac{852}{58\,905} = \dfrac{284}{19635}$

$\simeq 0{,}01446$

5.49 a) $\dfrac{\binom{13}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{1}{4165} \simeq 0{,}00024$

b) $\dfrac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{6}{4165} \simeq 0{,}00144$

5.50 $\dfrac{C_6^{100}}{A_6^{100}} = \dfrac{1}{6!} = \dfrac{1}{720} \simeq 0{,}00139$

5.51 $1 - \dfrac{\binom{13}{5}4^5}{\binom{52}{5}} = \dfrac{2053}{4165} \simeq 0{,}493$

5.52 $\dfrac{2}{5} = 0{,}4$

5.53 $\dfrac{1}{6} = 0{,}16\bar{6}$

5.54 a) 0

b) $\dfrac{1}{144}$

c) $\dfrac{2}{144} = \dfrac{1}{72}$

d) $\dfrac{\overline{C_8^2}}{12^2} = \dfrac{1}{16}$

e) $\dfrac{1}{72}$

f) $\dfrac{1}{144}$

5.55 a) $\dfrac{1}{6^3} = \dfrac{1}{216}$

b) $\dfrac{1}{216}$

c) 0

d) $\dfrac{\overline{C_4^3}}{6^3} = \dfrac{15}{216} = \dfrac{5}{72}$

e) $\dfrac{5}{72}$

f) $\dfrac{\overline{C_6^3} - 3}{6^3} = \dfrac{25}{216}$

5.56 $\dfrac{\overline{C_{100}^4} - 4}{100^4} = \dfrac{176\,847}{10^8}$

5.57 a) $\dfrac{1}{7!} = \dfrac{1}{5040}$

b) $\dfrac{1}{2}$ (par symétrie)

c) $\dfrac{1}{6}$

5.58 $\dfrac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{741}{543\,004} \simeq 0{,}001388$

5.59 $\dfrac{1}{365}$ (hyp. d'équiprobabilité des dates et non prise en compte du 29 février)

5.60 $1 - \dfrac{A_n^{365}}{\overline{A_n^{365}}} = 1 - \dfrac{A_n^{365}}{365^n}$ pour $2 \leq n \leq 365$

5.61 a) $A_{10}^{36} = \dfrac{36!}{26!}$

b) $36 \cdot 35^9$

5.62 a) $C_4^{14} = 1\,001$ b) $\overline{C_7^5} = C_7^{11} = C_4^{11} = 330$ c) $\overline{C_4^5} = C_4^8 = 70$

5.63 2 488 320

5.44 352

5.64 248

5.67 $-1\,320$

5.65 $\dfrac{(n-1)!}{2}$

5.68 $\overline{C_6^5} = C_6^{10} = 210$

5.69 14 702 688

5.70 $\binom{7}{2} = 21$

5.71 $\overline{C_5^4} = 56$

5.72 21 jours, 16 heures et 50 minutes

5.73 Il contient au moins $\left\lceil \frac{20}{7} \right\rceil = 3$ consonnes consécutives

5.74 $53(1 + 63 + 63^2 + 63^3) = 13\,466\,240$

5.75 $\overline{C_{10}^6} - 6 = 2\,997$

5.76 a) $\left\lfloor \frac{9\,999}{5} \right\rfloor = 1\,999$ b) $\left\lfloor \frac{9\,999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9\,999}{10} \right\rfloor = 1\,000$

5.77 a) $5!/2 = 60$ (par symétrie) b) $4! = 24$

5.78 $\dfrac{n(n-3)}{2}$

5.79 $50 \cdot (26^3 - 20^3) \cdot \lfloor 9999/4 \rfloor = 50 \cdot 9576 \cdot 2499 = 1\,196\,521\,200$

5.80 a) $7!/3! = 840$ b) $5! = 120$ c) $5! = 120$

5.81 $2800/10^5 = 7/250$

5.82 Vrai (8 équipes pour 7 scores finaux différents possibles)

5.83 a) $\binom{12}{4} = 495$ b) $\overline{C_5^3} = 21$

5.84 a) $\dfrac{11!}{2!2!2!} = 4\,989\,600$ b) $8 \cdot \dfrac{9!}{2!2!} = 725\,760$

5.85 a) $\binom{10}{6} = 210$ b) $\binom{8}{4} = 70$ c) 155

5.86 $\binom{9}{5} = 126$

5.87 3^n

5.88 a) $|S(x,r)| = \binom{n}{r}$ b) $|S(x,r)| = \binom{n}{r}(q-1)^r$

5.89 $\dfrac{40}{243} \simeq 0{,}1646$

5.90 $p = \dfrac{C_8^{26}}{A_8^{26}} = \dfrac{1}{8!} = \dfrac{1}{40\,320} \simeq 0{,}0000248$

5.91 a) $\dfrac{33}{16\,660} \simeq 0{,}00198$ b) $\dfrac{2197}{8330} \simeq 0{,}2637$

5.92 $\dfrac{1499}{50\,000} \simeq 0{,}02998$

5.93 $\dfrac{1}{10}$

5.94 $\dfrac{4}{77} \simeq 0{,}05195$

5.95 a) $\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$

b) $10^6 - 9^6 = 468\,559$

c) $72\,000$

5.96 $\dfrac{13}{116} \simeq 0{,}112$

5.97 a) $\overline{A_{11}^{16}} = 16^{11}$

b) $1 - \dfrac{A_{11}^{16}}{\overline{A_{11}^{16}}} = 1 - \dfrac{16!}{5!\cdot 16^{11}} \simeq 0{,}99$

c) $1 - \dfrac{\overline{A_{11}^{15}}}{\overline{A_{11}^{16}}} - \dfrac{\binom{11}{1}\overline{A_{10}^{15}}}{\overline{A_{11}^{16}}} = 1 - \left(\dfrac{15}{16}\right)^{11} - \dfrac{11}{16}\left(\dfrac{15}{16}\right)^{10} = 1 - \dfrac{13}{8}\left(\dfrac{15}{16}\right)^{10} \simeq 0{,}148$

d) $\dfrac{\binom{11}{5}\overline{A_5^{10}A_6^6}}{\overline{A_{11}^{16}}} = \dfrac{11!\cdot 10^5\cdot 6^6}{5!\cdot 6!\cdot 16^{11}} \simeq 0{,}123$

e) $\dfrac{C_{11}^{16}}{\overline{A_{11}^{16}}} = \dfrac{16!}{5!11!16^{11}} \simeq 2{,}48\cdot 10^{-10}$

f) $\dfrac{\binom{16}{2}\left(\overline{A_{16}^{2}} - 2\right)}{\overline{A_{11}^{16}}} = \dfrac{16\cdot 15\cdot (2^{16}-2)}{2\cdot 16^{11}} = \dfrac{15\cdot (2^{15}-1)}{2^{40}} \simeq 4{,}47\cdot 10^{-7}$