Chapitre 4

Suites et séries

4.1 Suites

Suite

Une **suite infinie de nombres réels** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$. Si on note a cette fonction, l'image de l'entier k est appelée le **terme** d'indice k de la suite et est notée a_k. La suite est elle notée $(a_k, k = 0, 1, \ldots)$ ou $(a_k, k \geq 0)$, voire simplement (a_k) lorsque le contexte est clair.

Une **suite finie de nombres réels** est une fonction de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ (ou de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$) dans $\mathbb{R}$. Le nombre n de termes de la suite est appelée la **longueur** de la suite.

Une suite de longueur n n'est pas différente d'un n-uple (et est notée de la même manière). Comme pour celui des composantes d'un n-uple, l'ordre d'apparition des termes d'une suite est essentiel et respecte toujours l'ordre croissant de leur indice.

On peut définir une suite de nombres réels de deux manières différentes :

1) En spécifiant une formule ou un algorithme permettant de calculer directement la valeur d'un terme quelconque de la suite quel que soit son indice.
2) À partir d'une relation de récurrence liant entre eux des termes consécutifs de la suite et permettant, à partir de valeurs initiales spécifiques, de calculer tous les termes de la suite de proche en proche.

Exemple

Pour décrire la suite (a_k) des entiers positifs pairs, le plus simple est de commencer la numérotation des termes à partir de 1 et d'utiliser la formule directe

$$a_k = 2k, \qquad k \geq 1.$$

Toujours en numérotant à partir de 1, on peut aussi décrire cette suite par la relation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + 2, \qquad k \geq 2$$

et la valeur initiale $a_1 = 2$.

Cette dernière information est essentielle pour définir complètement et correctement une suite récurrente. Dans le cas présent, la même relation de récurrence mais avec la valeur initiale $a_1 = 1$ décrirait la suite des entiers positifs impairs, suite sensiblement différente de celle des entiers positifs pairs !

4.1.1 Suites arithmétiques et géométriques

Suite arithmétique

La suite $(a_k, k \geq 0)$ est dite **arithmétique** si la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constante. Cette différence commune est appelée la **raison** de la suite.

Pour une valeur initiale a_0 donnée, une suite arithmétique de raison r satisfait donc l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + r, \qquad r \geq 1$$

et un terme quelconque de la suite peut être calculé par la formule directe

$$a_k = a_0 + k \cdot r, \qquad k \geq 0.$$

Suite géométrique

La suite $(a_k, k \geq 0)$ est dite **géométrique** si le rapport entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constant. Ce rapport commun est appelée la **raison** de la suite.

Pour une valeur initiale a_0 donnée, une suite géométrique de raison r satisfait donc l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} \cdot r, \qquad r \geq 1$$

et un terme quelconque de la suite peut être calculé par la formule directe

$$a_k = a_0 \cdot r^k, \qquad k \geq 0.$$

4.1 Donner les cinq premiers termes de la suite $(a_k, k \geq 0)$ si

a) $a_k = 2^{k+1}$,
c) $a_k = \dfrac{1 + (-1)^k}{2}$,
e) $a_k = \cos(k\pi)$,
b) $a_k = 7$,
d) $a_k = k \bmod 2$,
f) $a_k = \left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor \bmod 2$.

4.2 Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $(a_k, k \geq 1)$ si

a) $a_k = \dfrac{2^k}{k^2}$,
c) $a_k = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^{2k}$,
e) $a_k = \dfrac{\log_2(k)}{\sqrt{k}}$,
b) $a_k = \dfrac{2k^3 - 10k^2 + 3}{3k^3 + 4k - 9}$,
d) $a_k = \dfrac{\left(\ln(k)\right)^2}{k}$,
f) $a_k = \dfrac{\left(\ln(k)\right)^k}{k^{\ln(k)}}$.

4.3 Discuter, en fonction du nombre réel r, la limite de la suite de terme général $a_k = r^k$.

4.4 Pour chacune des suites d'entiers ci-dessous, déterminer une formule explicite permettant de calculer un terme quelconque a_k, $k \geq 0$ ou 1 à choix, de la suite.

a) $(3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots)$
d) $(0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, \ldots)$
b) $(15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots)$
e) $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots)$
c) $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$
f) $(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots)$

4.5 Donner une formule récurrente pour le terme général de chacune des suites de l'exercice 4.4. Ne pas oublier de préciser la ou les valeurs initiales de la suite !

4.6 Si le sixième terme d'une suite arithmétique est égal à 8 alors que le onzième terme est égal à -2, que valent le terme initial et la raison de la suite ?

4.1.2 Suites arithmético-géométriques

4.7 Chaque matin un patient prend une pilule contenant 20 mg de principe actif. Chaque jour, le corps du patient élimine 80% du médicament (quelle que soit la quantité présente dans son organisme). Déterminer une relation de récurrence pour la quantité de principe actif présente dans le corps du patient chaque matin (après la prise de la pilule quotidienne).

4.8 Le premier janvier de chaque année, Gaston dépose mille francs sur un compte portant des intérêts annuels de 2.5 % (intérêts composés). Si le compte est vide le matin du premier janvier 2000, déterminer une relation de récurrence permettant de calculer le montant a_k sur le compte au matin du premier janvier (avant le dépôt annuel de mille francs) de l'année $2000 + k$, $k \geq 1$.

4.9 Reprenons le contexte de l'exercice 4.7 et notons a_k la quantité (en milligrammes) de principe actif présente dans le corps du patient le matin du k-ième jour de traitement, juste après l'ingestion de la pilule quotidienne. Cette quantité satisfait la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_k &= \frac{1}{5}a_{k-1} + 20 \qquad k \geq 1 \\ a_0 &= 0 \end{cases}$$

a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_k - \lambda = \frac{1}{5}(a_{k-1} - \lambda) \qquad k \geq 1.$$

b) On considère la suite $(b_k = a_k - \lambda)_{k\geq 0}$. Donner la relation de récurrence associée à la suite $(b_k)_{k\geq 0}$ et préciser de quel type de suite il s'agit.

c) En utilisant les points précédents, développer une formule directe pour le calcul de a_k.

d) Si le patient suit son traitement depuis plusieurs années, quelle est la quantité de principe actif présente dans son organisme juste après l'ingestion de sa pilule quotidienne ?

4.10 En vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer une formule directe pour la suite arithmético-géométrique donnée par la relation de récurrence

$$a_k = r \cdot a_{k-1} + c, \qquad k \geq 1$$

avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ et $c \neq 0$.

4.2 Sommes et produits

Symbole somme – Notation sigma

Introduite par Euler au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, la lettre sigma majuscule (Σ) est couramment utilisée en mathématiques pour noter la somme des termes d'une suite. Étant donnée une suite $(a_k, k \geq 1)$, la somme $a_1 + \cdots + a_n$ de ses n premiers termes est notée

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

4.11 Développer complètement chacune des sommes qui suivent puis évaluer sa valeur.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 4$, c) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{2} n^3$.

4.12 Récrire chacune des sommes suivantes de manière à ce que l'indice de sommation débute avec la valeur donnée.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{30} \frac{1}{(1+k)^2} = \sum_{k=1}^{?} ?$, c) $\displaystyle\sum_{j=-10}^{0} (30-2j)^2 = \sum_{j=0}^{?} ?$, e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} \frac{i+5}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{?} ?$,

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i+3)^3 = \sum_{i=3}^{?} ?$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)^2+1} = \sum_{k=0}^{?} ?$, f) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} e^{\frac{(k-3)^2}{2}} = \sum_{k=0}^{?} ?$.

4.13 Développer complètement chacune des doubles sommes qui suivent puis évaluer sa valeur.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (i+2j)$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=4}^{6} (k^2 \cdot l)$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=0}^{2} k$.

4.14 Sachant que $\sum_{i=1}^{50} a_i = 25$ et $\sum_{j=1}^{30} b_j = 50$, calculer la valeur de la double somme

$$S = \sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{30} (a_i + b_j).$$

4.15 Récrire chacune des expressions suivantes à l'aide du symbole somme.

a) $1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 + \cdots + 99 \cdot 101$

b) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{11}{14} + \dfrac{15}{19} + \dfrac{19}{24} + \cdots + \dfrac{79}{99}$

4.16 Déterminer les nouvelles bornes de sommation de manière à conserver l'égalité dans chacune des expressions qui suivent.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=2}^{i+1} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij}$, b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+1}\sum_{j=i-2}^{n-1} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij}$,

---

Symbole produit

De manière analogue à la notation des sommes, la lettre pi majuscule (Π) est utilisée en mathématiques pour noter le produit des termes d'une suite. Étant donnée une suite $(a_k, k \geq 1)$, le produit $a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$ de ses n premiers termes est noté

$$\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

4.17 Évaluer chacune des expressions suivantes où n est un entier strictement positif et x un nombre réel.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} kx$, b) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} (j+1)^2$, c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x^k$.

Vos réponses changent-elles si n est un entier non négatif ?

4.18 Déterminer la valeur du produit

$$\prod_{k=2}^{111}(k-1)(k+2).$$

4.19 Déterminer la valeur du produit

$$\prod_{k=3}^{100}\frac{k-2}{k+1}.$$

4.20 a) Récrire l'expression suivante à l'aide du symbole produit.

$$F=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot\ldots\cdot 100}.$$

b) Déterminer ensuite sa valeur.

4.3 Séries

4.3.1 Séries arithmétiques

Série arithmétique

Une **série arithmétique** est la somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Soit $(a_k = a_0 + k\cdot r, k \geq 0)$ une suite arithmétique de raison r et de terme initial a_0, la somme de ses n premiers termes est

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}(a_0+k\cdot r)=n\cdot\frac{a_0+a_{n-1}}{2}=n\cdot\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}.$$

Somme de n premiers entiers positifs

Dans le cas particulier de la suite $(a_k = k, k \geq 1)$ des entiers positifs (suite arithmétique de raison 1), la série associée n'est rien d'autre que la somme des n premiers entiers positifs et on obtient, en spécialisant la formule précédente,

$$S^{[1]}(n)=1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

4.21 Pour chacune des séries arithmétiques qui suivent, donner (a) son terme initial, (b) sa raison, (c) son nombre de termes et (d) sa valeur. (e) Récrire également chaque série à l'aide du symbole somme.

1) $S_1 = 1+2+3+4+\cdots+152+153$

2) $S_2 = 10+20+30+40+\cdots+500$

3) $S_3 = -10-7-4-\cdots+17+20$

4) $S_4 = \log_a 100+\log_a 10+\log_a 1+\cdots+\log_a 0{,}001 \qquad (a>0, a\neq 1)$

4.22 Calculer la valeur de chaque somme.

1) $S_1 = \sum_{k=1}^{100} (3k+2)$ 2) $S_2 = \sum_{k=0}^{50} (4k-1)$ 3) $S_3 = \sum_{k=-20}^{20} |7 - \frac{1}{2}k|$

4.23 Déterminer, en fonction des entiers positifs n et m, la valeur de chacune des doubles sommes suivantes.

a) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i+2j)$, b) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(3i-j)$, c) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(i\cdot j)$. d) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m} k$.

4.24 Combien de termes de la suite $(-9, -6, -3, \ldots)$ faut-il prendre pour que leur somme soit égale à 66 ?

4.25 Vous devez faire creuser un puits de 40 mètres de profondeur. Vous êtes en contact avec une personne qui est prête à exécuter le travail mais demande 100 francs pour le premier mètre, 120 pour le deuxième, 140 pour le troisième, etc.

a) Combien coûte le dernier mètre ?

b) Quel est le prix total d'exécution des travaux ?

4.3.2 Séries géométriques

Série géométrique

Une **série géométrique** est la somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique.

Soit $(a_k = a_0 \cdot r^k, k \geq 0)$ une suite géométrique de raison $r \neq 1$ et de terme initial a_0, la somme de ses n premiers termes est

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_0 \cdot r^k\right) = \frac{a_0 - a_n}{1-r} = \frac{a_0 - r \cdot a_{n-1}}{1-r}.$$

Dans l'expression $(a_0 - a_n)/(1-r)$ le terme a_n n'est pas le dernier terme de la somme (qui est a_{n-1}) mais le terme suivant de la suite géométrique.

En français, la valeur de la somme $S(n)$ de n termes consécutifs d'une suite géométrique se calcule par la formule

$$S(n) = \frac{\text{premier terme} - \text{raison} \times \text{dernier terme}}{1 - \text{raison}}.$$

4.26 Pour chacune des séries géométriques qui suivent, donner (a) son terme initial, (b) sa raison, (c) son nombre de termes et (d) sa valeur. (e) Récrire également chaque série à l'aide du symbole somme.

1) $S_1 = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2048}$

2) $S_2 = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{8} + 4 + \cdots + \sqrt{2048}$

3) $S_3 = 250 - 100 + 40 - 16 + \cdots + \frac{128}{125}$

4.27 Calculer la valeur de chaque somme (n et m étant des entiers positifs dans le cas de S_3).

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=-10}^{10} \frac{1}{(-2)^k}$ 2) $S_2 = \displaystyle\sum_{i=-5}^{15} \sum_{k=0}^{9} \left(5i + 2^k\right)$ 3) $S_3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{2^i}{4^j}$

4.28 On considère une suite géométrique dont le terme initial est $a_1 = 1000$ et dont le sixième terme est $a_6 = 8/25$. Déterminer la raison r de cette suite. Calculer également la valeur S de la série infinie associée.

4.29 Que valent les séries infinies suivantes ?

1) $S_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{15} - \frac{1}{75} - \frac{1}{375} - \dots$

2) $S_2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81} + \frac{2}{243} + \frac{1}{729} + \dots$

3) $S_3 = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{28} - \frac{1}{32} + \frac{1}{56} - \frac{1}{64} + \frac{1}{112} - \frac{1}{128} + \frac{1}{224} - \frac{1}{256} + \frac{1}{448} - \frac{1}{512} + \dots$

4) $S_4 = 4 + 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

(La suite des signes est $+ + + - + + + - + + + - \dots$)

4.30 Une personne se déplace en faisant tantôt un pas vers l'avant, tantôt un pas vers l'arrière. Pour chaque pas, sa longueur vaut la moitié du précédent. Si elle commence par un pas en avant de 1 mètre, à quelle distance de son point de départ va-t-elle se stabiliser ?

4.31 Une balle en caoutchouc rebondit chaque fois aux trois quarts de la hauteur dont elle tombe. Initialement, elle est lâchée d'une hauteur de 6m. Quelle distance aura parcourue la balle une fois qu'elle se sera immobilisée ?

4.3.3 Séries télescopiques

4.32 Pour une suite $(a_k, k \geq 0)$ quelconque, calculer en fonction de l'entier $n \geq 1$,

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1})$ b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(a_i - a_{i+1})$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+3} - a_{k-1})$

4.33 Calculer la valeur de la série

$$S(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad n \geq 1.$$

INDICATION. Utiliser l'identité

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

4.34 a) Déterminer la valeur de la série

$$S(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)}, \qquad n \geq 3.$$

b) Déterminer ensuite, si elle existe, la limite de $S(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

4.4 Raisonnement par induction

4.35 Vérifier les formules suivantes à l'aide d'un raisonnement par induction :

a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1, \qquad n \geq 1$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}, \qquad n \geq 1$

4.36 Vérifier les formules suivantes à l'aide d'un raisonnement par induction :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1), \qquad n \geq 1$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \qquad n \geq 1$

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \qquad n \geq 2$

4.37 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$

a) $n^3 + 2n$ est divisible par 3,

b) $n^2 + 5n$ est divisible par 2,

c) $n^3 - n$ est divisible par 6,

d) $5^n - 1$ est divisible par 4.

4.38 Pour tout entier positif k, on définit le k-ième *nombre harmonique* H_k comme la somme des inverses de k premiers entiers positifs :

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}.$$

Montrer à l'aide d'un raisonnement par induction que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1.$$

4.39 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x.$$

4.40 Montrer, à l'aide d'un raisonnement par induction, que la somme des cubes de trois entiers positifs consécutifs est divisible par 9.

4.41 Loi de De Morgan

Soit $(A_1, A_2, \ldots)$ une suite d'ensembles dans un univers Ω. Vérifier à l'aide d'un raisonnement par induction que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

4.42 On considère la suite $(a_k, k \geq 0)$ définie par la relation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}, \qquad k \geq 2$$

et les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par induction, que

$$a_k = 2^{k+1} - (-1)^k, \qquad k \geq 0.$$

4.5 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

4.43 Donner une formule explicite pour le terme général de chacune des suites suivantes.

a) $(10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \ldots)$,

b) $(0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, \ldots)$.

c) $(0, 4, 8, 28, 80, 244, 728, 2188, 6560, 19684, \ldots)$.

INDICATION. Considérer la suite auxiliaire $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

4.44 Donner une formule récurrente pour le terme général de chacune des suites suivantes. Préciser la ou les valeurs initiales nécessaires à votre formulation.

a) $(20, 25, 35, 50, 70, 95, 125, 160, \ldots)$,

b) $(2, 0, 4, 0, 16, 0, 256, 0, 65536, \ldots)$.

c) $(10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000, \ldots)$.

4.45 Déterminer les nouvelles bornes de sommation de manière à conserver l'égalité dans chacune des expressions qui suivent.

a) $\displaystyle\sum_{j=-10}^{0}(30-2j)^2 = \sum_{j=?}^{?}4j^2$, b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=\max(1,i-2)}^{n-2} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij}$.

4.46 Pour la suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \qquad k \geq 2$$

et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, calculer la limite du quotient $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ lorsque k tend vers l'infini. (On supposera que cette limite existe)

RAPPEL. Si f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{k\to\infty} f(k) = L$ alors

$$\lim_{k\to\infty} f(k-1) = \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{k\to\infty} f(k+1) = L \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{f(k)} = \frac{1}{L} \quad (\text{si } L \neq 0)$$

4.47 Un montant M est placé sur un compte portant un intérêt annuel de i % (intérêt composé).

a) Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer le capital $C(t)$ présent sur le compte après t années.

b) Déterminer une formule directe pour $C(t)$.

c) Que deviennent vos formules si les intérêts sont crédités à la fin de chaque semestre ?

d) Même question si les intérêts sont crédités k fois par année ?

e) Que se passe-t-il si k tend vers l'infini ?

4.48 On considère une suite géométrique dont le troisième terme est $a_3 = 1000$ et dont le treizième terme est $a_{13} = 125/128$. Déterminer la raison r et le terme initial a_1 de cette suite. Calculer également la valeur S de la série infinie associée.

4.49 Soit $(C_1, C_2, \ldots)$ une suite infinie de cubes tels que le volume de C_{k+1} est égal à la moitié du volume de C_k $(k \geq 1)$. Déterminer, en fonction de la longueur a de l'arête du premier cube, la hauteur H de la « tour » obtenue en superposant tous les cubes de la suite.

4.50 Que valent les séries infinies suivantes ?

a) $S_1 = 10 - 8 + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} + \frac{1}{100} - \frac{1}{64} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{512} + \frac{1}{10000} - \frac{1}{4096} + \ldots$

b) $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \cdots$

(La suite des signes est $+ + - + + - + + - \ldots$)

c) $S_3 = 625 - 125 + 25 + 5 - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$

(La suite des signes étant $+ - + + - + + - + + - + + - \dots$)

4.51 Déterminer la valeur de la série

$$S^{[2]}(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

INDICATION. Considérer la somme $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3]$.

4.52 Calculer la valeur de la série

$$S(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1), \qquad n \geq 1.$$

4.53 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}.$$

4.54 On considère la suite $(a_k, k \geq 0) = (1, 11, 111, 1111, \dots)$.

a) Donner une formule récurrente pour le terme général a_k de cette suite.

b) Donner une formule directe pour le terme général a_k de cette suite.

INDICATION. $1111 = 1 + 10 + 100 + 1000$.

c) Calculer ensuite la somme $S(n)$ des n premiers termes de cette suite.

4.55 Évaluer chacune des expressions qui suivent en fonction des entiers positifs n et m.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i} 2 \right)$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} 3 \right)$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} |2k - 17|$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (i-j)^2$

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{2} + 3 \right)$

4.56 Déterminer, en fonction de l'entier $n \geq 2$, la valeur du produit

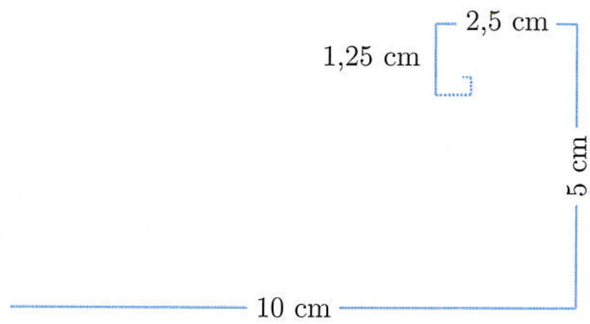
$$P(n) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right).$$

4.57 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la double somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} j$.

4.58 Un site de vente en ligne propose des CD musicaux au prix de 24.- le premier, 23.50 le deuxième, 23.- le troisième, 22.50 le quatrième et ainsi de suite jusqu'à un prix minimal de 12.- (qui s'applique alors à tous les CD supplémentaires).

Déterminer une fonction permettant de calculer le montant que doit payer un client de ce site en fonction du nombre n de CD qu'il achète.

4.59 Suite à une erreur de programmation, un logiciel de dessin industriel a un comportement fort étrange. À chaque tentative de dessiner un carré, le résultat obtenu est une spirale dont chaque côté est deux fois plus court que le précédent.



a) Calculer la longueur L du trait dessiné par une table traçante si on utilise ce logiciel pour dessiner un carré de 10 centimètres de côté.

b) Calculer également la distance D séparant le point de départ et le point de convergence de la spirale.

4.60 On considère une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels (par exemple la suite des notes obtenues à un travail écrit).

a) Écrire, à l'aide du symbole somme, la formule permettant de calculer la moyenne (arithmétique) $\overline{x}$ de cette suite.

On définit la *variance* σ^2 de la suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par la formule

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2.$$

(La variance est donc égale à la moyenne des carrés des écarts à la moyenne)

b) Montrer que la variance σ^2 peut également être calculée par la formule

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \overline{x}^2.$$

4.61 Soit x un nombre réel différent de 1 et n un entier positif. On considère la fonction

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

a) Calculer la dérivée $f_n'(x)$.

b) Déduire du résultat précédent la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

c) Sous quelle condition (sur x) la série précédente converge-t-elle ? Quelle est alors la limite de la série ?

4.62 Calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)2^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{3^k}$

4.63 La *courbe de Koch* est la courbe fractale obtenue en partant d'un segment de droite et en modifiant récursivement, un nombre infini de fois, chaque segment de la courbe actuelle de la façon suivante :

1) on divise le segment en trois segments de même longueur ;
2) on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment du milieu de la première étape et pointant « vers l'extérieur » ;
3) on supprime le segment du milieu, base du triangle équilatéral construit ci-dessus.

Le *flocon de Koch* est obtenu de façon similaire mais en partant d'un triangle équilatéral. Les trois premières itérations de la construction de la courbe de Koch et du flocon de Koch sont présentées en figure 4.1.

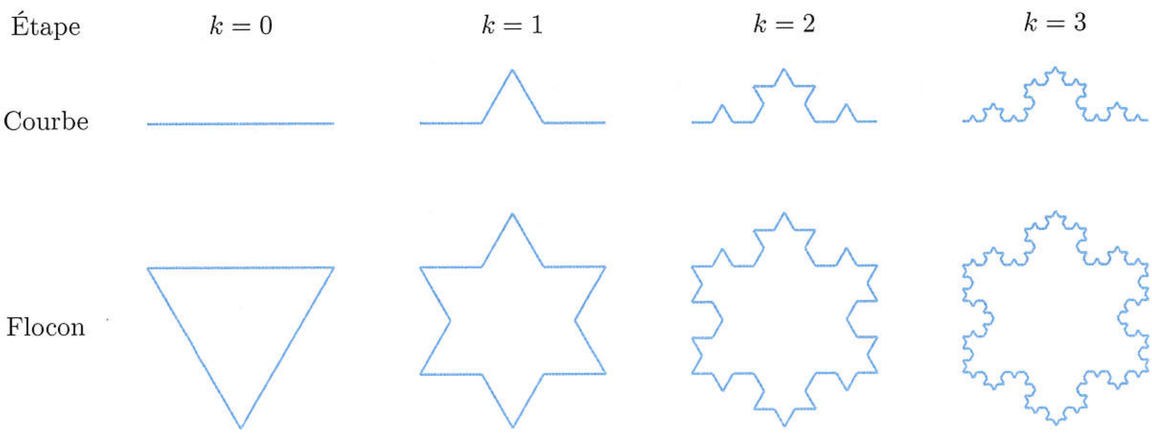


Figure 4.1 – Illustration des trois premières itérations de la construction de la courbe de Koch et du flocon de Koch.

a) Pour $k \geq 1$, on définit T_k comme le nombre de triangles ajoutés au flocon lors de l'itération k (c.-à-d. lors du passage de la courbe de l'étape $k-1$ à celle de l'étape k).

   Donner une formule directe pour le terme général de la suite $(T_k, k \geq 1)$.

   Remarque. Le nombre T_k est égal au nombre de côtés du flocon de l'étape $k-1$.

b) On note c la longueur d'un côté du triangle équilatéral initial et A_0 son aire. On a évidemment
$$A_0 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$
   Pour $k \geq 1$, on définit A_k comme l'aire d'un des triangles ajoutés lors de l'itération k.

   Exprimer A_k en fonction de A_{k-1} puis directement en fonction de A_0.

c) Utiliser les résultats précédents pour calculer l'aire du flocon de Koch (en fonction de A_0 ou de c).

4.64 Un serveur de calcul reçoit des requêtes à la fréquence de λ requêtes par heure. Les requêtes sont traitées les unes après les autres dans leur ordre d'arrivée et la puissance du serveur permet de traiter au maximum μ requêtes par heure.