Chapitre 3

Les fonctions

Fonctions, images et préimages

Soit A et B deux ensembles non vides. Une **fonction de A dans B** (on dit aussi de A vers B) est une affectation d'exactement un élément de B à chaque élément de A.

- L'élément de B associé à a par la fonction f est noté $f(a)$. De plus, si $b = f(a)$, b est dit l'**image de a par f** ou la **valeur de f en a** alors que a est dit une **préimage de b par f** ou un **antécédent de b par f**.
- NOTATION. Une fonction f de A dans B se note :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & f(a) \end{array}}$$

- REMARQUE. Un élément de l'ensemble B peut avoir une ou plusieurs préimages, tout comme il peut n'en avoir aucune.

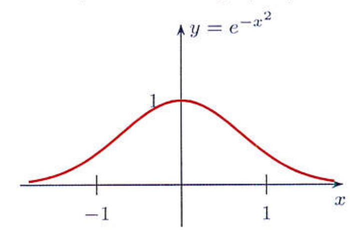
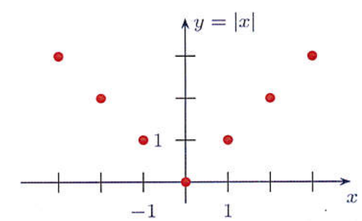
Graphe d'une fonction

- Si f est une fonction de A dans B, l'ensemble de tous les couples (a, b) où a est un élément de A et $b = f(a)$ est l'unique image de a par f définit le **graphe de la fonction f** :

$$\boxed{\text{Graphe de } f := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}.}$$

- Lorsque les ensembles A et B sont égaux à $\mathbb{R}$ (ou à des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ ou des intervalles réels), le graphe d'une fonction f de A dans B peut être représenté par l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère Oxy) dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$. Cette représentation graphique de f (souvent appelée, elle-même, graphe de f) est très courante et peut s'avérer particulièrement utile lors de l'étude des propriétés de f.

Exemples

Fonction	Représentation graphique
$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = e^{-x^2} \end{array}$	
$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & y = \lvert x \rvert \end{array}$	

Fonctions et relations

- Le graphe d'une fonction f de A dans B étant un sous-ensemble de $A \times B$, il peut être vu comme une relation de A vers B. Dans cette optique,

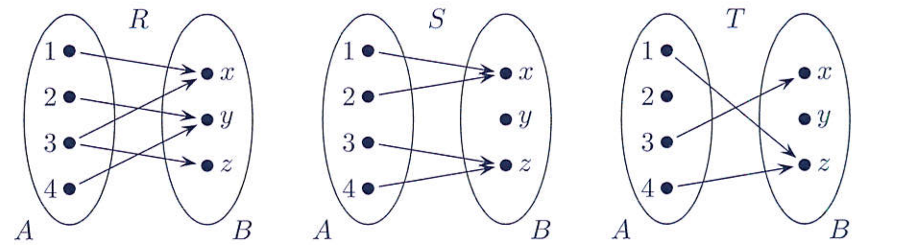
> **Une fonction de A dans B** est une relation de A vers B avec la propriété que chaque élément de A est en relation avec un et un seul élément de B.

- EXEMPLE 1. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x\}$ est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car chaque entier est en relation avec un et un seul autre entier (son double).
- EXEMPLE 2. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ n'est pas une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car chaque entier non nul est en relation avec deux entiers (lui-même et son opposé).

Exemple 3

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{x, y, z\}$. Parmi les trois relations R, S et T de A vers B dont les graphes sont donnés ci-dessous, seule la relation S définit une fonction de A dans B.
En effet,

- la relation R n'est pas une fonction car l'élément 3 est en relation avec deux éléments de B ;
- la relation T n'est pas une fonction car l'élément 2 n'est en relation avec aucun élément de B.



Domaine de définition et ensemble image

Soit f une fonction de A dans B,

- l'ensemble A est appelé le **domaine de définition** de f (ou l'**ensemble de définition** de f, ou simplement le **domaine** de f),
- l'ensemble B est appelé le **codomaine** de f,
- l'ensemble de toutes les images des éléments de A par f est appelé l'**image**, l'**ensemble image** ou la **portée** de la fonction et est noté $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(A)$,
- plus généralement, pour tout sous-ensemble S de A, l'**image de S par f**, notée $f(S)$, est le sous-ensemble de B formé de toutes les images des éléments de S :
$$f(S) := \{f(s) \mid s \in S\},$$
- pour tout sous-ensemble T de B, l'**image réciproque de T par f**, notée $f^{-1}(T)$, est le sous-ensemble de A formé de toutes les préimages des éléments de T :
$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Compositions de fonctions

> Soit f une fonction A dans B et g une fonction de B dans C, la **composition des fonctions f et g**, notée $g \circ f$, est la fonction de A dans C définie par
> $$(g \circ f)(a) := g(f(a)) \qquad \forall a \in A.$$

- EXEMPLE. Soit f et g les deux fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définies par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 3x + 2$.
  - La composition de f et g est
  $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$
  - alors que la composition de g et f est
  $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7.$$
- PROPRIÉTÉ. En général la composition de fonctions n'est pas commutative.

Fonctions injectives

Une fonction f de A dans B est **injective** si et seulement si elle ne prend jamais deux fois la même valeur.

- Autrement dit, la fonction f de A dans B est injective si et seulement si des éléments distincts de A ont toujours des images distinctes :

$$\boxed{\forall x, y \in A, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)}.$$

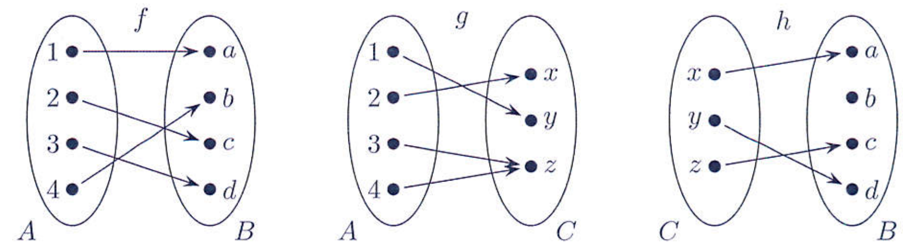
- Passant à la contraposée, on a aussi que la fonction f de A dans B est injective si et seulement si tout élément de B a *au plus* une préimage :

$$\boxed{\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y}.$$

- Une fonction injective est appelée une **injection**.

Exemples

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f, g et h données par les graphes qui suivent, seules les fonctions f et h sont injectives.



- EXEMPLE 2. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$ mais $1 \neq -1$.
- EXEMPLE 3. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x + 1$ est injective car $x \neq y$ implique $x + 1 \neq y + 1$.

Fonctions surjectives

Une fonction f de A dans B est **surjective** si et seulement si chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A, c'est-à-dire si et seulement si chaque élément de B a *au moins* une préimage.

- **Propriété.** Une fonction f de A dans B est surjective si et seulement si l'ensemble image de f est égal au codomaine tout entier :

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = B}$$

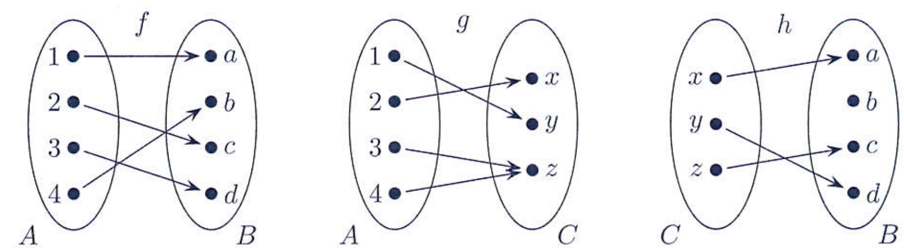
ou encore

$$\boxed{f \text{ est surjective} \iff f(A) = B}.$$

- Une fonction surjective est appelée une **surjection**.

Exemples

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f, g et h données par les graphes qui suivent, seules les fonctions f et g sont surjectives.



- EXEMPLE 2. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à x associe $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier x avec $f(x) < 0$.
- EXEMPLE 3. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x + 1$ est surjective car pour tout entier y, il existe un entier x tel que $f(x) = y$, à savoir $x = y - 1$.

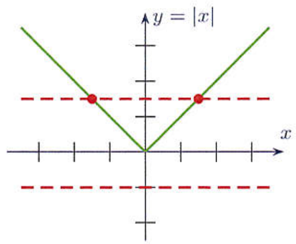
Cas des fonctions réelles

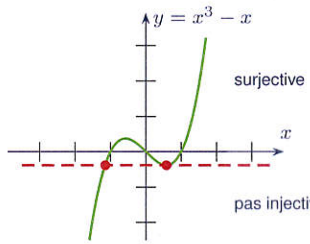
Une fonction réelle (d'une variable réelle) est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction réelle est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte son graphe en **au plus 1 point**.
- Une fonction réelle est surjective si et seulement si toute droite horizontale intersecte son graphe en **au moins 1 point**.

pas injective

pas surjective





surjective

pas injective

Remarques

- Le caractère injectif ou surjectif d'une fonction f est très sensible au choix de son domaine de définition A et de son codomaine B.
- Ainsi, la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas injective si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car tout nombre positif possède deux préimages) mais le devient si elle est définit de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- De manière similaire, cette même fonction n'est pas surjective si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car tout nombre négatif ne possède pas de préimage) mais le devient si elle est définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.
- De manière générale, il est toujours possible d'obtenir une surjection à partir d'une fonction f de A dans B en restreignant, si nécessaire, le codomaine B à l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$.

Fonctions bijectives et fonctions inverses

Une fonction f de A dans B est **bijective** si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

- Si f est une **bijection** de A dans B, chaque élément de B possède *une et une seule* préimage.
- On peut alors définir la **fonction inverse** ou **réciproque de f**, notée f^{-1}, comme la fonction de B dans A qui associe à chaque élément de B son unique préimage :

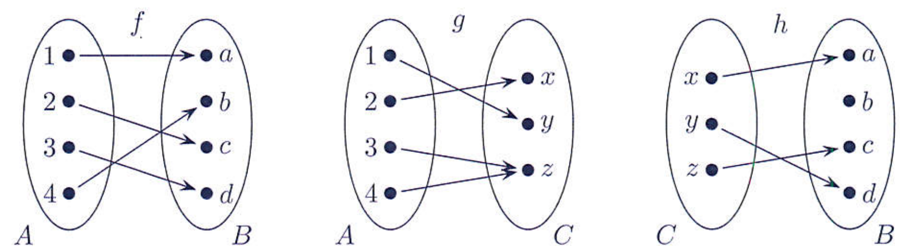
$$\boxed{f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)}.$$

- **Propriété.** Pour une fonction bijective f de A dans B on a

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in B.$$

Exemples

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f, g et h données par les graphes qui suivent, seule la fonction f est bijective.



- EXEMPLE 2. La fonction f qui à x associe $f(x) = x^2$ est bijective si elle est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Son inverse est alors la fonction $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$).

Parties entières inférieures et supérieures

Soit x un nombre réel,

- la **partie entière inférieure de x** (« *floor function* »), notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier plus petit ou égal à x ;
- la **partie entière supérieure de x** (« *ceiling function* »), notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier plus grand ou égal à x.

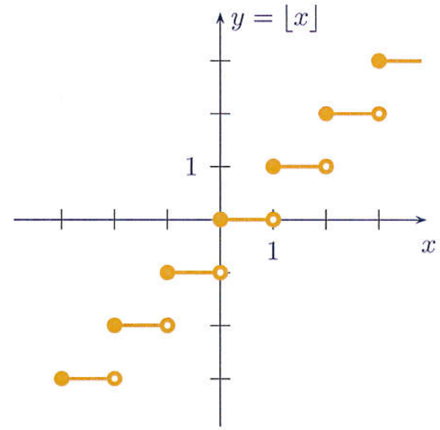
- EXEMPLES.

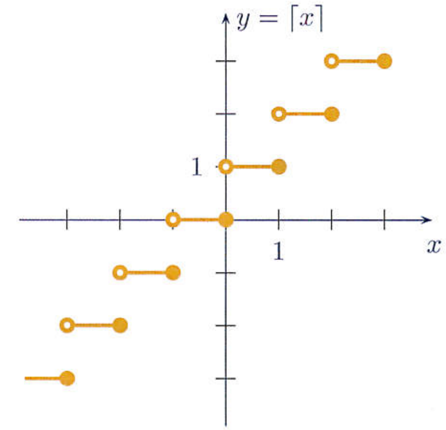
$$\lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor = 0 \qquad \lceil \tfrac{1}{2} \rceil = 1 \qquad \lfloor -\tfrac{1}{2} \rfloor = -1 \qquad \lceil -\tfrac{1}{2} \rceil = 0$$

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3.1 \rceil = 4 \qquad \lfloor 7 \rfloor = 7 \qquad \lceil 7 \rceil = 7$$

heig-vd

Graphes des fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$





heig-vd

L'opération modulo

Soit a un entier et m un entier positif. On note $a \bmod m$ (lu « a modulo m ») le reste de la division (entière) de a par m.

- Par définition, le reste de la division de a par m est l'unique entier *non négatif* permettant d'écrire $a = mq + r$ avec q entier et $0 \leq r < m$.
- EXEMPLES.

$$17 \bmod 5 = 2, \quad 134 \bmod 205 = 134 \quad \text{et} \quad -94 \bmod 9 = 5.$$

- REMARQUE. Une autre manière de définir le modulo (qui se généralise aux nombres réels positifs) est de poser

$$\boxed{a \bmod m := a - m\lfloor a/m \rfloor}.$$

- EXEMPLE.

$$\begin{aligned} -94 \bmod 9 &= -94 - 9\lfloor -94/9 \rfloor = -94 - 9\lfloor -10.\bar{4} \rfloor \\ &= -94 - 9(-11) = -94 + 99 = 5. \end{aligned}$$

heig-vd

Fonction factorielle

Si n est un entier positif, la **factorielle de n**, notée $n!$, est le produit des entiers de 1 à n :

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Pour $n = 0$, on pose $0! = 1$.

- La factorielle croît très rapidement. Pour $n \geq 4$ on a $n! > 2^n$.
- La factorielle apparaît fréquemment en combinatoire mais également en analyse :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

et plus généralement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

heig-vd

Bijections et cardinalité : équipotence

- Rappelons que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments distincts dans l'ensemble.
- On peut étendre la notion de cardinal à tous les ensembles (finis ou infinis) :

> Deux ensembles A et B ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de A sur B.

- Deux ensembles de même cardinal sont dits **équipotents**.
- Si un ensemble A (non vide) est fini, il est possible de numéroter ses éléments de 1 à n. On crée alors une bijection de A vers l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Ainsi un ensemble (non vide) est fini si et seulement s'il est équipotent avec l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et on a alors $|A| = n$.

Cardinal de $\mathbb{N}$

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble infini.
- Son cardinal est noté $\aleph_0$ (Aleph zéro).
- Si on retire 0 de $\mathbb{N}$ on obtient l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers positifs. Cet ensemble est, lui aussi, infini et son cardinal est le même que celui de $\mathbb{N}$.

  En effet la fonction $f(n) = n + 1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ et ces deux ensembles ont donc même cardinal.
- L'ensemble $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ des entiers positifs pairs est un ensemble infini de même cardinal que $\mathbb{N}$.

  En effet la fonction $f(n) = 2n$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{P}$.
- En fait toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit de même cardinal que $\mathbb{N}$ tout entier. En ce sens l'ensemble des entiers naturels est « le plus petit ensemble infini ».

Ensembles dénombrables

> Un ensemble qui est soit fini soit de même cardinal que l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$) est dit **dénombrable**. Si tel n'est pas le cas, l'ensemble est dit **non dénombrable**.

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs contient (strictement) l'ensemble $\mathbb{N}$ mais il est également dénombrable.

  En effet la fonction

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

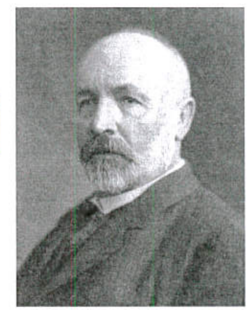
  est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
- On montre que les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{N}^3$,... sont tous dénombrables.

  Mais existe-t-il des ensembles non dénombrables ?

Théorème de Cantor

- Le théorème suivant, dû à G. Cantor, montre qu'il existe des ensembles non dénombrables, « plus grands que $\mathbb{N}$ ».

> **Théorème (G. Cantor).** *Pour tout ensemble A, $|\mathscr{P}(A)| > |A|$.*



Georg Cantor (1845-1918)

- Ainsi $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ et l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable. Cet ensemble a le même cardinal que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels qui est donc lui aussi non dénombrable.
- Quelques ensembles dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^k$ $(k \geq 1)$, ...
- Quelques ensembles non dénombrables : $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, ...
- Quelques propriétés.
  - Si $B \subseteq A$ alors $|B| \leq |A|$. En particulier, si A est dénombrable alors tous ses sous-ensembles le sont et, réciproquement, si B est non dénombrable alors tous ses sur-ensembles le sont aussi.
  - S'il existe une injection de A dans B alors $|A| \leq |B|$ et si B est dénombrable alors A l'est aussi. Réciproquement, s'il existe une surjection de A dans B alors $|A| \geq |B|$ et si B est non dénombrable alors A l'est aussi.