1.61 Soit les ensembles

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$,
2) $B = [1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$,
3) $C =]1, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$,
4) $D = \{2, 3\}$,
5) $E = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,
6) $F =]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$.

Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, les ensembles

a) $A \times F$, b) $A^2 \setminus C^2$, c) $(B \triangle E)^2$.

1.62 Pour les quatre ensembles

$$A = \{0, 1\}, \quad B = \{-1, 1\}, \quad C = \{-2, 0, 2\} \quad \text{et} \quad D = \{0, 2, 4\}$$

déterminer

a) $\mathscr{P}(B)$,
b) $A \triangle B \triangle C \triangle D$,
c) $(D \setminus C) \times (A \cup B)$,
d) $\{X \subseteq D \mid X \notin \mathscr{P}(C)\}$.

1.63 Soit A et B deux ensembles finis de cardinal respectif n et m, déterminer le cardinal de

a) $\mathscr{P}(A \times B)$ b) $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ c) $\mathscr{P}(A^k)$, $k \geq 1$

1.64 **Paradoxe de Russell**
Soit S l'ensemble contenant tous les ensembles X qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes :

$$S = \{X \mid X \notin X\}.$$

a) Pour chacun des ensembles X suivants, décider s'il appartient ou non à S :

$$X = \varnothing, \qquad X = \{\text{Oui}, \text{Non}\}, \qquad X = \{1, \{1\}\}, \qquad X = \mathbb{N}.$$

b) Montrer que l'affirmation $S \in S$ conduit à une contradiction.

c) Montrer que l'affirmation $S \notin S$ conduit, également, à une contradiction.

1.8 Solutions d'exercices choisis

1.1 a) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{-3, -1, 1, 3\}$
c) $\varnothing$
d) $\{-1, 0\}$

1.2 a) $\{1, 2, 3, 4\}$
b) $\varnothing$
c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
d) $\{-4, 4\}$

1.3 a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
b) $B = \{-3, -1, 1\}$
c) $C = \{0, 1, 2, 3\}$
d) $D = \{0, 3\}$

1.4 a) $\{1\} \notin \{0, 1\}$
b) $\{-1\} \in \{\{-1\}, \{1\}\}$
c) $\{1, 2\} \notin \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$
d) $2 \in \{0, 1, 2\}$
e) $1 \notin \{\{1\}\}$
f) $2 \notin \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$
g) $\varnothing \notin \varnothing$
h) $0 \notin \varnothing$
i) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

1.5 $A = B = D$ $(C = \{-1, 1\})$

1.7 a) $\{3\} \subseteq \{3,4\}$ b) $\{3\} \nsubseteq \{\{3\},\{4\}\}$ c) $\{\{2\}\} \subseteq \{\{0\},\{1\},\{2\}\}$ d) $\{2,4\} \subseteq \{2,4\}$ e) $\varnothing \subseteq \mathbb{Z}$ f) $\varnothing \subseteq \varnothing$

1.8 a) $\{3\} \subset \{3,4\}$ b) $\{3,4\} \not\subset \{3,4\}$ c) $\{2,3\} \nsubseteq \{\{2\},\{3\}\}$ d) $\{\{4\}\} \nsubseteq \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ e) $\varnothing \not\subset \varnothing$ f) $\{\varnothing\} \nsubseteq \varnothing$ g) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$ h) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$ i) $\varnothing \subset \mathbb{Z}$

1.10 a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,9\}$ b) $A \cap B = \{1\}$ c) $A \setminus B = \{2,3,4\}$ d) $B \setminus A = \{5,9\}$ e) $(A \cup B) \cap C = \{1,3\}$ f) $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4\}$ g) $A \setminus C = \{2,4\}$ h) $(A \setminus C) \setminus B = \{2,4\}$ i) $A \setminus (C \setminus B) = \{1,2,4\}$

1.11 a) $A \triangle B = \{1,2,3,7,8,9\}$ b) $B \triangle A = \{1,2,3,7,8,9\}$ c) $B \triangle C = \{1,3,4,6,8\}$ d) $C \triangle \varnothing = C$

1.12 a) $B \subseteq A$ b) $A \subseteq B$ c) $A \cap B = \varnothing$ d) Toujours vrai e) $A = B$ f) $A = B$ g) $A \subseteq B$ h) $B = \varnothing$

1.13 a) Voir figure 1.3.

b) L'identité est vraie car les colonnes 4 et 7 de la table donnée ci-dessous sont identiques.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

c) Premièrement, supposons que $x \in \overline{A \cap B}$. Il s'en suit que $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Dit autrement, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Ainsi $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Supposons maintenant que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. On doit avoir $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$, c.-à-d. $x \notin A$ ou $x \notin B$. Il s'en suit que $x \notin A \cap B$ et donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ceci montre que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ et la propriété est vérifiée.

1.14 b) L'identité est vraie car les colonnes 5 et 8 de la table qui suit sont identiques.

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

c) On veut montrer : $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. On a d'une part

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap \overline{(B \cup C)} && \text{(définition de la différence : } S \setminus T = S \cap \overline{T}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{(1}^{\text{re}} \text{ loi de De Morgan)} \\ &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(associativité de l'intersection)} \end{aligned}$$

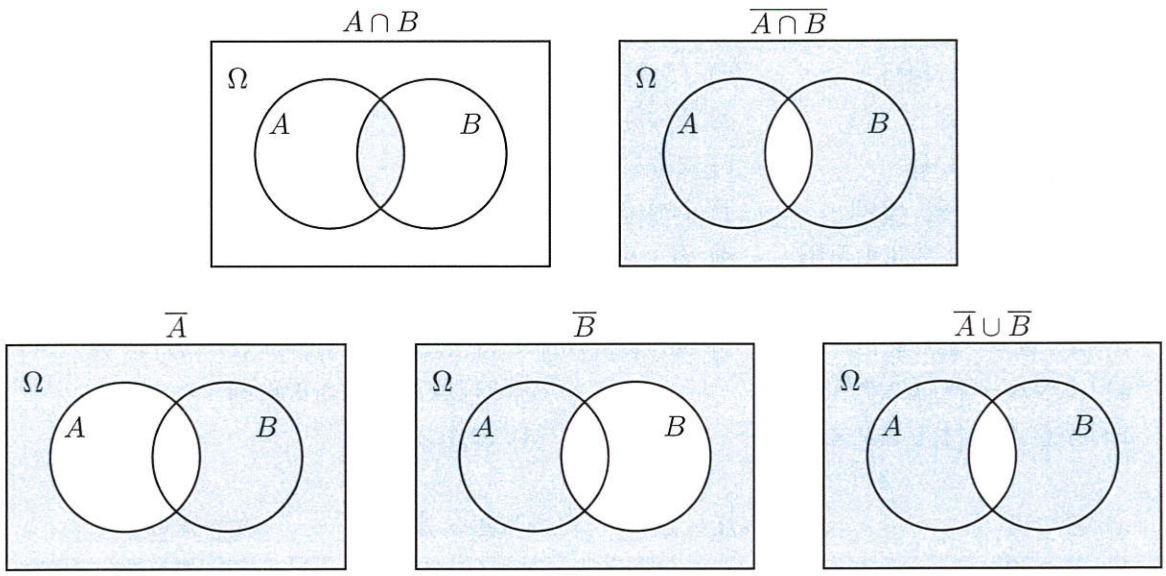


Figure 1.3 – Vérification de la deuxième loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ à l'aide de diagrammes de Venn. Les surfaces pleines représentent le résultat des différentes opérations. La validité de la loi résulte de l'égalité des deux diagrammes de droite.

et d'autre part

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cap (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{(déf. de la différence)}\\
&= A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} && \text{(associativité de l'intersection)}\\
&= (A \cap A) \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(commutativité et associativité de } \cap\text{)}\\
&= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(idempotence : } A \cap A = A\text{)}
\end{aligned}$$

1.15 a)

$$\begin{aligned}
A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} && \text{(définition de la différence : } S \setminus T = S \cap \overline{T}\text{, } 2\times\text{)}\\
&= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) && \text{(2}^{\text{e}}\text{ loi de De Morgan)}\\
&= A \cap (\overline{A} \cup B) && \text{(involution)}\\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) && \text{(distributivité de } \cap\text{)}\\
&= \varnothing \cup (A \cap B) && \text{(complémentarité)}\\
&= A \cap B && \text{(identité)}
\end{aligned}$$

b) Premier développement :

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \triangle B &= (A \cap \overline{B}) \triangle B && \text{(déf. de la différence)}\\
&= \Big((A \cap \overline{B}) \setminus B\Big) \cup \Big(B \setminus (A \cap \overline{B})\Big) && \text{(déf. de la différence sym.)}\\
&= \Big(A \cap \overline{B} \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}\Big) && \text{(déf. de la différence)}\\
&= \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}\Big) && \text{(idempotence : } \overline{B} \cap \overline{B} = \overline{B}\text{)}\\
&= \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})\Big) && \text{(De Morgan)}\\
&= \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(B \cap (\overline{A} \cup B)\Big) && \text{(involution : } \overline{\overline{B}} = B\text{)}\\
&= \Big(A \cap \overline{B}\Big) \cup B && \text{(absorption)}\\
&= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) && \text{(distributivité de } \cup\text{)}\\
&= (A \cup B) \cap \Omega && \text{(complémentarité)}\\
&= A \cup B && \text{(identité)}
\end{aligned}$$

Autre développement :

$$
\begin{array}{rcll}
(A \setminus B) \triangle B & = & (A \cap \overline{B}) \triangle B & \text{(déf. de la différence)} \\
 & = & \big((A \cap \overline{B}) \setminus B\big) \cup \big(B \setminus (A \cap \overline{B})\big) & \text{(déf. de la différence sym.)} \\
 & = & \big(A \cap \overline{B} \cap \overline{B}\big) \cup \big(B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}\big) & \text{(déf. de la différence)} \\
 & = & \big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}\big) & \text{(idempotence)} \\
 & = & \big((A \cap \overline{B}) \cup B\big) \cap \big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{(A \cap \overline{B})}\big) & \text{(distributivité de } \cup) \\
 & = & \big((A \cap \overline{B}) \cup B\big) \cap \Omega & \text{(complémentarité)} \\
 & = & (A \cap \overline{B}) \cup B & \text{(identité)} \\
 & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) & \text{(distributivité de } \cup) \\
 & = & (A \cup B) \cap \Omega & \text{(complémentarité)} \\
 & = & A \cup B & \text{(identité)}
\end{array}
$$

1.17 a) $A \triangle (B \triangle C) = \{2, 5, 8\}$
b) $(A \triangle B) \triangle C = \{2, 5, 8\}$
c) $A \cup (B \triangle C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
d) $(A \cup B) \triangle (A \cup C) = \{8\}$
e) $A \cap (B \triangle C) = \{1, 3, 4, 6\}$
f) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, 3, 4, 6\}$

1.19 a) A est fini ($A = \varnothing$) et $|A| = 0$
b) B est fini et $|B| = 26$
c) C est infini ($C =]0, 1[$)
d) D est infini ($D = \{x \mid x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)

1.20 a) $|\{4\}| = 1$
b) $|\{\{4\}\}| = 1$
c) $|\{4, \{4\}\}| = 2$
d) $|\{4, \{4\}, \{4, 4\}\}| = 2$
e) $|\varnothing| = 0$
f) $|\{\varnothing\}| = 1$
g) $|\{\varnothing, \{4\}\}| = 2$
h) $|\{4, \{4\}, \{4, \{4\}\}\}| = 3$

1.21 a) 32 b) 29 c) Données incohérentes

1.22 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

1.23 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

1.26 a) $\mathscr{P}(\{0\}) = \{\varnothing, \{0\}\}$
b) $\mathscr{P}(\{x, y, z\}) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$
c) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
d) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0\})) = \mathscr{P}(\{\varnothing, \{0\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{0\}\}, \{\varnothing, \{0\}\}\}$

1.27 $2^n - 2$

1.28 1023

1.29 26

1.30 a) $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
b) $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$
c) $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$
d) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}\}$
e) $\mathscr{P}(A \cap B) = \{\varnothing, \{1\}\}$
f) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}\}$

1.33 a) $A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

b) $B \times A = \{(x,a),(y,a),(x,b),(y,b),(x,c),(y,c)\}$

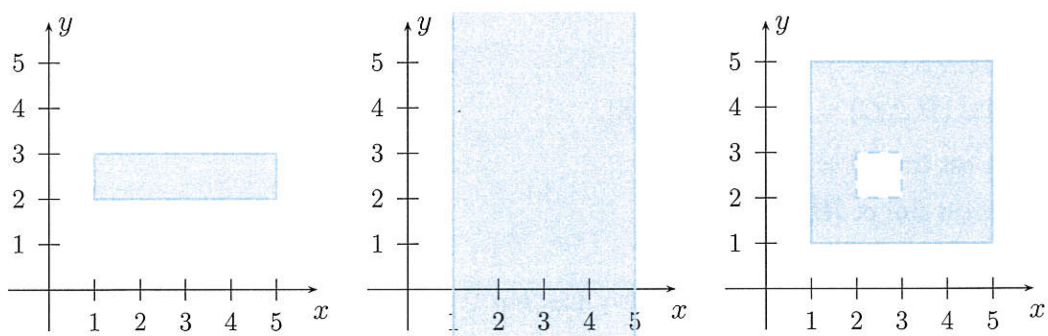
c) $A \times B \times C = \{(a,x,0),(a,x,1),(a,y,0),(a,y,1),(b,x,0),(b,x,1),$
$(b,y,0),(b,y,1),(c,x,0),(c,x,1),(c,y,0),(c,y,1)\}$

d) $C^3 = C \times C \times C = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

e) $C \times \varnothing = \varnothing$

f) $C \times \{\varnothing\} = \{(0,\varnothing),(1,\varnothing)\}$

1.34



(a) (b) (c)

1.36 a) $(A \times B) \cup (B \times A)$

b) $(B^2 \setminus F^2) \cup (D \times E) \cup (E \times D)$

c) $((A \setminus F) \times B) \cup (B \times (A \setminus F)) \cup E^2$

1.37 a) $|T \times U| = |T| \cdot |U| = 1 \cdot 2 = 2$

b) $|S^3| = |S|^3 = 3^3 = 27$

c) $|S \times \mathscr{P}(U)| = |S| \cdot |\mathscr{P}(U)| = |S| \cdot 2^{|U|} = 3 \cdot 2^2 = 12$

d) $|\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(U)| = |\mathscr{P}(T)| \cdot |\mathscr{P}(U)| = 2^{|T|} \cdot 2^{|U|} = 2^1 \cdot 2^2 = 8$

1.38 Si $A = B$ ou si l'un des deux ensembles au moins est égal à $\varnothing$

1.39 $S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

1.40 Non, contre-exemple : $x = 1$, $y = \{1\}$ et $z = \{\{1\}\}$, on a bien $x \in y$ et $y \in z$ mais $x \notin z$.

1.44

a) $1 \in \{1,\{1\},2,\{2\}\}$	d) $\mathscr{P}(\{1\}) \not\subseteq \{1,2,\{1,2\}\}$	g) $(\varnothing,\varnothing) \notin \varnothing^2$
b) $\{1,2\} \notin \{1,\{1\},2,\{2\}\}$	e) $\varnothing \in \mathscr{P}(\{1\})$	h) $\{0,1\} \in \mathscr{P}(\{0,1\})$
c) $\{1,2\} \subseteq \{1,\{1\},2,\{2\}\}$	f) $\{\varnothing\} \subseteq \mathscr{P}(\{1\})$	i) $\{0,1\} \not\subseteq \mathscr{P}(\{0,1\})$

1.45 a) $\{3\} \notin A$ e) $9 \in A$ i) $\{\{3,9\},\{3,3\}\} \subseteq \mathscr{P}(A)$
b) $\{\{0,2\},\{4\}\} \notin \mathscr{P}(A)$ f) $\{\varnothing\} \notin \mathscr{P}(A)$ j) $\{(5,5)\} \subseteq A^2$
c) $\{\varnothing\} \not\subseteq A$ g) $(7,7) \notin A$ k) $(1,5,9) \in A^3$
d) $(1,7) \in A^2$ h) $\{(1,7)\} \not\subseteq \mathscr{P}(A^2)$ l) $\{2,-1,0\} \not\subseteq A$

1.46 a) $\mathscr{P}(A)$ c) $\mathscr{P}(A)^2$ e) Aucun
b) A^2 d) Tous f) $\mathscr{P}(A)$

1.47 a) A^2 e) $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A^2)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$
b) $\mathscr{P}(A)$ f) A
c) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$ g) Aucun
d) A^2 h) $\mathscr{P}(A)$

1.50 $(A \cup B \cup C) \setminus (A \triangle B \triangle C)$ ou $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$ ou ...

1.51 a) $A = B$ b) $B \subseteq A$ c) $A \cap B = \varnothing$

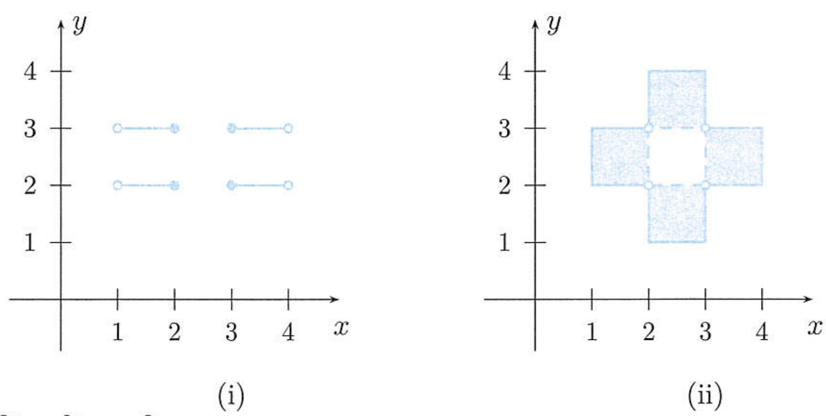
1.52 1) $\Omega = (A \cup B) \cup \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
2) $B = \Omega \setminus \overline{B} = \{3,4,7,9\}$
3) $B \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{7,9\}$
4) $B \setminus A = B \setminus (A \cup C) = \{7,9\}$ car $B \cap C = \varnothing$
5) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \{2,3,4,5\}$
6) $C \setminus A = (A \cup C) \setminus A = \{6,10,11\}$
7) $C = (C \setminus A) \cup (A \cap C) = \{5,6,10,11\}$

1.57 1) On sait que $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ (ex. 1.24). Ainsi

$$|A \cap B| = \frac{|A| + |B| - |A \triangle B|}{2} = \frac{7+6-5}{2} = 4$$

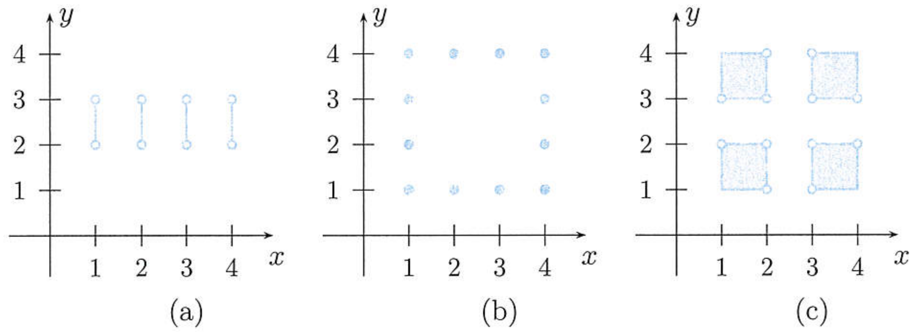
2) $|A^2 \times B| = |A^2| \cdot |B| = |A|^2 \cdot |B| = 7^2 \cdot 6 = 49 \cdot 6 = 294$
3) $|\mathscr{P}(B)| = 2^{|B|} = 2^6 = 64$
4) $$\begin{aligned} |\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)| &= |\mathscr{P}(A)| + |\mathscr{P}(B)| - |\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)| && \text{(ex. 1.22)} \\ &= |\mathscr{P}(A)| + |\mathscr{P}(B)| - |\mathscr{P}(A \cap B)| && \text{(ex. 1.31)} \\ &= 2^{|A|} + 2^{|B|} - 2^{|A \cap B|} = 2^7 + 2^6 - 2^4 \\ &= 128 + 64 - 16 = 176 \end{aligned}$$

1.60 a)



b) $(B^2 \setminus C^2) \cup D^2$

1.61



1.62 a) $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$

b) $A \triangle B \triangle C \triangle D = \{-2, -1, 0, 4\}$

c) $(D \setminus C) \times (A \cup B) = \{(4, -1), (4, 0), (4, 1)\}$

d) $\{X \subseteq D \mid X \notin \mathscr{P}(C)\} = \{\{4\}, \{0, 4\}, \{2, 4\}, \{0, 2, 4\}\}$

1.63 a) 2^{nm} b) $2^{(n+m)}$ c) $2^{n^k},\ k \geq 1$