a) Si le *taux* (la fréquence) *d'arrivée* est de λ requêtes par heure, quel est le temps moyen entre deux arrivées successives ?

b) Si le *taux* (la fréquence) *de service* est de μ requêtes par heure, quel est le temps moyen de traitement d'une requête ?

On définit le *facteur d'utilisation* ρ dans le serveur par le rapport entre les taux d'arrivée et de service :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

c) Si le système est en opération pendant une très longue période, quelle condition doit satisfaire le facteur d'utilisation ρ pour que le serveur soit *stable*, c.-à-d. que le nombre de requêtes en attente n'explose pas ?

Sous certaines conditions (en particulier que le serveur soit stable), on peut montrer que la proportion du temps où k requêtes sont présentes dans le système (en traitement ou en attente) est égale à

$$(1-\rho)\rho^k, \qquad k \geq 0.$$

Afin de déterminer le nombre moyen N de requêtes présentes (en traitement ou en attente) à un instant donné, il suffit de calculer la moyenne pondérée

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k.$$

d) Calculer le nombre moyen N de requêtes présentes dans un serveur stable.

Le nombre moyen N_a de requêtes en attente à un instant donné est, lui, égal à la moyenne pondérée

$$N_a = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)(1-\rho)\rho^k$$

car pendant la proportion du temps où k requêtes sont présentes (proportion égale à $(1-\rho)\rho^k$), il y en a $(k-1)$ en attente.

e) Calculer le nombre moyen N_a de requêtes en attente dans un serveur stable.

4.6 Solutions d'exercices choisis

4.1 a) $a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 16, a_4 = 32$
b) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 7$
c) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1$
d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0$
e) $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1$
f) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0$

4.2 a) La suite diverge vers $+\infty$
b) $\lim_{k\to+\infty} \frac{2k^3 - 10k^2 + 3}{3k^3 + 4k - 9} = \frac{2}{3}$
c) $\lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2k} = e^{-2}$
d) $\lim_{k\to+\infty} \frac{\log(k)^2}{k} = 0$
e) $\lim_{k\to+\infty} \frac{\log(k)}{\sqrt{k}} = 0$
f) La suite diverge vers $+\infty$

4.4 a) $a_k = 3 \cdot 2^k,\ k \geq 0$ (ou $a_k = 3 \cdot 2^{k-1},\ k \geq 1$)
b) $a_k = 15 - 7k,\ k \geq 0$ (ou $a_k = 22 - 7k,\ k \geq 1$)
c) $a_k = \cos(k\frac{\pi}{2}),\ k \geq 0$ ou $a_k = ((k+1) \bmod 2)(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor},\ k \geq 0$
d) $a_k = 2^k - 1,\ k \geq 0$ (ou $a_k = 2^{k-1} - 1,\ k \geq 1$)

4.5 a) $a_k = 2a_{k-1},\ k \geq 1$ avec $a_0 = 3$

b) $a_k = a_{k-1} - 7,\ k \geq 1$ avec $a_0 = 15$

c) $a_k = -a_{k-2},\ k \geq 2$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$

d) $a_k = 2a_{k-1} + 1,\ k \geq 1$ avec $a_0 = 0$ (ou $a_k = a_{k-1} + 2^{k-1},\ k \geq 1$ avec $a_0 = 0$)

4.6 Le k-ième terme d'une suite arithmétique de raison r et de terme initial a_1 est $a_k = a_1 + (k-1)r,\ k \geq 1$. Ainsi,

$$a_{11} - a_6 = a_1 + 10r - (a_1 + 5r) = 5r.$$

De l'énoncé on a $a_{11} - a_6 = -2 - 8 = -10$ et la raison de la suite est $r = -2$. De $a_6 = a_1 + 5r$, on obtient la valeur du terme initial : $a_1 = a_6 - 5r = 8 - 5(-2) = 18$.

4.7 Si a_k dénote la quantité (en milligrammes) de principe actif présente dans le corps du patient le matin du k-ième jour de traitement juste après la prise quotidienne, on a

$$a_k = \frac{1}{5}a_{k-1} + 20, \qquad \text{pour } k \geq 1,$$

avec $a_0 = 0$.

4.11 a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40,$

c) $\displaystyle\sum_{n=-2}^{2} n^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = 0.$

4.12 a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{30} \frac{1}{(1+k)^2} = \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{k^2},$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i+3)^3 = \sum_{i=3}^{n+3} i^3,$

c) $\displaystyle\sum_{j=-10}^{0} (30-2j)^2 = \sum_{j=0}^{10} (50-2j)^2,$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)^2+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+1},$

e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} \frac{i+5}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{10} \frac{i+4}{i^2},$

f) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} e^{\frac{(k-3)^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n-3} e^{\frac{k^2}{2}}.$

Remarque. Pour le point c) on a aussi $\displaystyle\sum_{j=-10}^{0} (30-2j)^2 = \sum_{j=0}^{10} (30+2j)^2.$

4.13 a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} (i+2j) = (1+2) + (1+4) + (1+6) + (2+2) + (2+4) + (2+6) = 33,$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=4}^{6} (k^2 \cdot l) = (1\cdot 4) + (1\cdot 5) + (1\cdot 6) + (4\cdot 4) + (4\cdot 5) + (4\cdot 6) = 75,$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=0}^{2} k = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 18.$

4.14 $S = 3250$

4.17 a) $\prod_{k=1}^{n} kx = (n!)x^n$ b) $\prod_{j=0}^{n}(j+1)^2 = ((n+1)!)^2$ c) $\prod_{k=1}^{n} x^k = x^{\sum_{k=1}^{n} k} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Les trois réponses restent correctes lorsque n est nul.

4.19

$$\prod_{k=3}^{100}\frac{k-2}{k+1} = \frac{\prod_{k=3}^{100} k-2}{\prod_{k=3}^{100} k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{98} k}{\prod_{k=4}^{101} k} = \frac{98!\cdot 3!}{101!} = \frac{6}{101\cdot 100\cdot 99} = \frac{1}{101\cdot 50\cdot 33}$$

4.21 1) (a) $a_1 = 1$, (b) $r = 1$, (c) $n = 153$, (d) $S_1 = 153\cdot\frac{1+153}{2} = 153\cdot 77 = 11\,781$,

(e) $S_1 = \sum_{k=1}^{153} k$ ou $S_1 = \sum_{k=0}^{152}(k+1)$.

4.22 1) Il s'agit d'une série arithmétique de raison 3 et de terme initial 5, ainsi :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{100}(3k+2) = 100\frac{(5+302)}{2} = 15\,350.$$

On a aussi

$$S_1 = 3\sum_{k=1}^{100} k + 2\sum_{k=1}^{100} 1 = 3\cdot\frac{100\cdot 101}{2} + 200 = 3\cdot 50\cdot 101 + 200 = 15\,150 + 200 = 15\,350.$$

4.23 a)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i+2j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} 2j = m\sum_{i=1}^{n} i + 2n\sum_{j=1}^{m} j\\ &= m\frac{n(n+1)}{2} + 2n\frac{m(m+1)}{2} = \frac{nm(n+2m+3)}{2}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(3i-j) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} 3i + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} -j = 3(m+1)\sum_{i=0}^{n} i - (n+1)\sum_{j=0}^{m} j,\\ &= 3(m+1)\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\frac{m(m+1)}{2} = \frac{(n+1)(m+1)(3n-m)}{2}\end{aligned}$$

c) $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(i\cdot j) = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} j\right) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}.$$

d) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot(m+1).$$

4.24 Il faut sommer les 11 premiers termes de la suite.

4.25 a) 880.– b) 19 600.–

4.26 1) (a) $a_1 = 2$, (b) $r = -1/2$, (c) $n = 13$, (d) $S_1 = \frac{2-(-1/2)(1/2048)}{1-(-1/2)} = \frac{2^{13}+1}{3\cdot 2^{11}}$,

(e) $S_1 = \sum_{k=1}^{13} 2(-\frac{1}{2})^{k-1}$ ou $S_1 = \sum_{k=0}^{12} 2(-\frac{1}{2})^{k}$.

4.27 1) Il s'agit d'une série géométrique de raison $r = -1/2$, comptant $n = 21$ termes, de terme initial $a_{-10} = 2^{10}$ et de dernier terme $a_{10} = 2^{-10}$. On a donc

$$S_1 = \sum_{k=-10}^{10}\frac{1}{(-2)^k} = 2^{10}\frac{1-(-1/2)^{21}}{1-(-1/2)} = \frac{2^{11}+2^{-10}}{3}$$

$$\begin{aligned}
2)\ S_2 &= \sum_{i=-5}^{15}\sum_{k=0}^{9}\left(5i+2^k\right) = \sum_{i=-5}^{15}\sum_{k=0}^{9}5i + \sum_{i=-5}^{15}\sum_{k=0}^{9}2^k = 5\cdot 10\sum_{i=-5}^{15} i + 21\sum_{k=0}^{9}2^k \\
&= 50\cdot\frac{(15-5)\cdot 21}{2} + 21\cdot\frac{2^{10}-2^0}{2-1} = 50\cdot 105 + 21\cdot 1023 = 5250 + 21\,483 = 26\,733
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)\ S_3 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{2^i}{4^j} = \left(\sum_{i=1}^{n}2^i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\right)^j\right) = \left(2\cdot\frac{1-2^n}{1-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m}{1-\frac{1}{4}}\right) \\
&= \left(\frac{2^{n+1}-2}{3}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right)
\end{aligned}$$

4.28 La suite étant géométrique on a $a_6 = a_1\cdot r^5$. Ainsi

$$r^5 = \frac{a_6}{a_1} = \frac{8}{25\cdot 1000} = \frac{2^3}{5^2\cdot 10^3} = \frac{1}{5^5}$$

et la raison cherchée est $r = 1/5$. La valeur de la série infinie associée est

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1000}{1-1/5} = \frac{5000}{4} = 1250.$$

4.29 1) Il s'agit d'une série géométrique de raison $1/5$ et de terme initial $-1/3$:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = -\frac{5}{12}.$$

$$\begin{aligned}
2)\ S_2 &= 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{1}{81}+\frac{2}{243}+\frac{1}{729}+\dots \\
&= \underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r=\frac{1}{3} \text{ et } a_0=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{243}+\dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r=\frac{1}{9} \text{ et } a_0=\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{2}+\frac{3}{8} = \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{1}{81}+\frac{2}{243}+\frac{1}{729}+\dots \\
&= \underbrace{\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r=\frac{1}{9} \text{ et } a_0=1} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{27}+\frac{2}{243}+\dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r=\frac{1}{9} \text{ et } a_0=\frac{2}{3}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = (1+\frac{2}{3})\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

4.30 La distance parcourue avant stabilisation est

$$D = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}\ [\text{m}].$$

4.31 La distance parcourue par la balle est de 42 mètres.

4.32 a) $$\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n} a_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j + a_n\right) - \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right) = a_n - a_0$$

4.33 $$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

4.34 $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ et } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{3}{4}$$

4.35 a) On veut montrer que la formule

$$P(n) = \text{« } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \text{ »}$$

est correcte pour tout entier $n \geq 1$. En utilisant le symbole somme, cette formule s'écrit

$$P(n) = \text{« } \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \text{ »}$$

1) *Pas initial* : Pour $n = 1$ on a, d'une part

$$1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1$$

et, d'autre part,

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Ainsi la formule est correcte pour $n = 1$ et le pas initial est vérifié.

2) *Pas d'induction* : On suppose la formule correcte pour $m \geq 1$ fixé, c.-à-d. on considère l'hypothèse d'induction

$$\text{H.I. : } \sum_{k=1}^{m} k \cdot k! = (m+1)! - 1$$

et on vérifie qu'elle est encore correcte au pas suivant, c.-à-d. que

$$\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! = (m+2)! - 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{m} k \cdot k! + (m+1) \cdot (m+1)! \overset{\text{H.I.}}{=} (m+1)! - 1 + (m+1) \cdot (m+1)! \\ &= (m+1)!\,(1 + (m+1)) - 1 = (m+1)!(m+2) - 1 = (m+2)! - 1.\end{aligned}$$

Ainsi le pas d'induction est vérifié et on peut conclure que la formule est correcte pour tout entier $n \geq 1$.

4.36 a) On veut montrer, pour tout $n \geq 1$, la formule

$$P(n) = \text{« } \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1) \text{ »}$$

1) *Pas initial* : Pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1$ et $\frac{(-1)^1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = -1$, ainsi $P(1)$ est vraie.

2) *Pas d'induction* : Supposons $P(m)$ correcte pour un $m \geq 1$ fixé, c.-à-d. supposons que

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^m}{2} m(m+1) \qquad \text{(H.I.)}$$

et montrons que $P(m+1)$ l'est encore, c.-à-d. que

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^{(m+1)}}{2}(m+1)(m+2) = -\frac{(-1)^m}{2}(m+1)(m+2).$$

On a

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{m}(-1)^k k^2 + (-1)^{(m+1)}(m+1)^2.$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, on peut remplacer la dernière somme par

$$\frac{(-1)^m}{2} m(m+1).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k k^2 &= \frac{(-1)^m}{2} m(m+1) + (-1)^{(m+1)}(m+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^m}{2} m(m+1) - (-1)^m (m+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^m}{2}(m+1)(m - 2(m+1)) \\
&= \frac{(-1)^m}{2}(m+1)(-m-2) = -\frac{(-1)^m}{2}(m+1)(m+2).
\end{aligned}$$

Ainsi $P(m+1)$ est correcte si $P(m)$ l'est.

Le pas initial et le pas d'induction ayant été vérifiés, on peut conclure que la formule est correcte pour tout $n \geq 1$.

4.37 a) On veut montrer, pour tout $n \geq 0$, la propriété

$$P(n) = « \; n^3 + 2n \text{ est divisible par } 3 \; »$$

1) *Pas initial* : Pour $n = 0$ on a $n^3 + 2n = 0$ et comme 0 est divisible par tout entier positif, $P(0)$ est vraie.

2) *Pas d'induction* : Pour $m \geq 0$ fixé, supposons $P(m)$ vraie, c.-à-d. supposons que $m^3 + 2m$ soit divisible par 3, et montrons que $P(m+1)$ l'est encore, c.-à-d. que

$$(m+1)^3 + 2(m+1)$$

est également divisible par 3. On a

$$\begin{aligned}
(m+1)^3 + 2(m+1) &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 2m + 2 \\
&= \left(m^3 + 2m\right) + 3\left(m^2 + m + 1\right)
\end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction $m^3 + 2m$ est divisible par 3 et comme $3(m^2 + m + 1)$ l'est également, leur somme est divisible par 3. Ainsi si $P(m)$ est vraie, $P(m+1)$ l'est également et on peut conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

4.47 a) $C(t) = C(t-1)(1+I)$, $t \geq 1$ avec $C(0) = M$ et $I = i/100$

b) $C(t) = M(1+I)^t$, $t \geq 0$

c) $C(t) = M(1+I/2)^{2t}$, $t \geq 0$

d) $C(t) = M(1+I/k)^{kt}$, $t \geq 0$

e) $C(t) = Me^{It}$, $t \geq 0$ car $\lim_{k\to\infty}(1+x/k)^{ak} = e^{ax}$

4.50 a) $S_1 = \dfrac{124}{63}$ b) $S_2 = \dfrac{5}{7}$ c) $S_3 = \dfrac{65625}{124}$

4.51 On a

$$(k+1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n}[3k^2 + 3k + 1].$$

La partie gauche est égale à

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1$$

car il s'agit d'une série télescopique. Pour la partie droite, on a

$$\sum_{k=1}^{n}[3k^2 + 3k + 1] = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = 3S^{[2]}(n) + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

Ainsi

$$3S^{[2]}(n) + \frac{3}{2}n(n+1) + n = (n+1)^3 - 1$$

et

$$\begin{aligned}
S^{[2]}(n) &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} - n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

4.52 $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

4.53 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{n}{2(2+3n)}$

4.55 a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i} 2\right) = 2^{n+1} - 2$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} 3\right) = 3^n \cdot n!$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} |2k - 17| = 225$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i-j)^2 = \frac{nm}{6}(2n^2+2m^2-3nm-1)$

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{2} + 3\right) = \frac{(n+6)!}{5! \cdot 2^{n+1}} = \frac{(n+6)!}{15 \cdot 2^{n+4}}$

4.56 $P(n) = -\dfrac{(-1)^n}{n \cdot n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$

4.57 $S = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6} = \dfrac{n^3 - n}{6}$

4.58 Avant d'atteindre le prix plancher de 12.-, la suite des prix des CD forme une suite arithmétique de raison $r = -1/2$. Afin de bénéficier du prix minimal il faut acheter au moins

$$m = \frac{\text{prix max} - \text{prix min}}{\text{rabais par CD}} + 1 = \frac{24-12}{1/2} + 1 = 24 + 1 = 25\text{CD}.$$

Pour un nombre n de CD achetés inférieur ou égal à 25, le prix p_n du n^e CD est

$$p_n = p_1 + r(n-1) = 24 - \frac{n-1}{2}, \quad 1 \leq n \leq 25$$

et le montant d'une commande de n CD est donné par la valeur de la série arithmétique associée :

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{n(p_1 + p_n)}{2} = \frac{n(24 + 24 - \frac{n-1}{2})}{2} = \frac{n(97-n)}{4}, \quad 0 \leq n \leq 25$$

Si n est supérieur à 25, le prix de la commande est

$$\begin{aligned} M(n) &= M(25) + 12(n-25) = \frac{25(97-25)}{4} + 12(n-25) \\ &= 25 \cdot 18 - 25 \cdot 12 + 12n = 25 \cdot 6 + 12n = 150 + 12n, \quad n > 25 \end{aligned}$$

En résumé, le montant $M(n)$ d'une commande de n CD est

$$M(n) = \begin{cases} \dfrac{n(97-n)}{4} & \text{si } 0 \leq n \leq 25 \\ 150 + 12n & \text{si } n > 25. \end{cases}$$

4.59 a) $L = 20$ centimètres, b) $D = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94$ centimètres.

4.62 a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)2^k = 4 + 2^{n+1}(n-2)$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4}$

4.64 a) $\dfrac{1}{\lambda}$ heures, b) $\dfrac{1}{\mu}$ heures, c) $\rho < 1$, d) $N = \dfrac{\rho}{1-\rho}$, e) $N_a = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$.