2.50 Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et R la relation sur A donnée par la matrice

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Donner le graphe de la relation R.

b) Déterminer – en justifiant brièvement vos réponses – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

c) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur A ? (justifier) Dans l'affirmative, donner son diagramme de Hasse et préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)

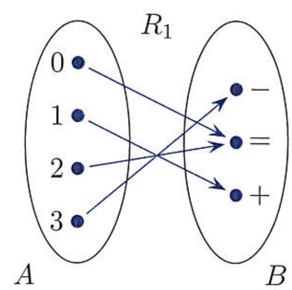
d) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur A ? (justifier) Dans l'affirmative, donner la partition de A définie par les classes d'équivalence de R.

2.7 Solutions d'exercices choisis

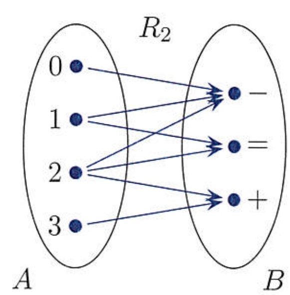
2.1 a) $R_1 = \{(-2, 1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (2, -1)\}$

b) $R_2 = \{(-1, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 1), (2, 0)\}$

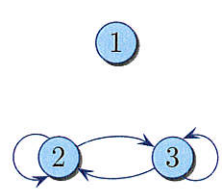
2.2 a) $\boldsymbol{M}(R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



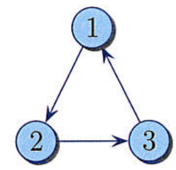
b) $\boldsymbol{M}(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



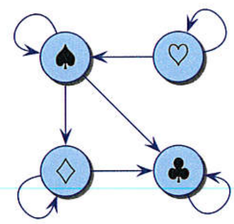
2.3 a) $\boldsymbol{M}(R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$



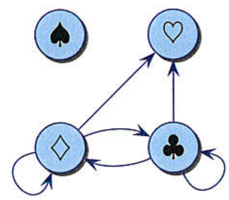
b) $\boldsymbol{M}(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



2.4 a) $R = \{(\spadesuit,\spadesuit),(\spadesuit,\diamondsuit),(\spadesuit,\clubsuit),(\heartsuit,\spadesuit),$
$(\heartsuit,\heartsuit),(\diamondsuit,\diamondsuit),(\diamondsuit,\clubsuit),(\clubsuit,\clubsuit)\}$



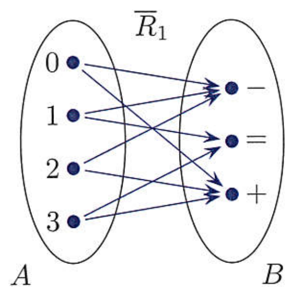
b) $S = \{(\spadesuit,\spadesuit),(\diamondsuit,\heartsuit),(\diamondsuit,\diamondsuit),(\diamondsuit,\clubsuit),(\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\diamondsuit),(\clubsuit,\clubsuit)\}$



2.5 La relation $\overline{R}$ est la relation $\geq$ sur $\mathbb{N}$ alors que la relation R^{-1} est la relation $>$ sur $\mathbb{N}$.

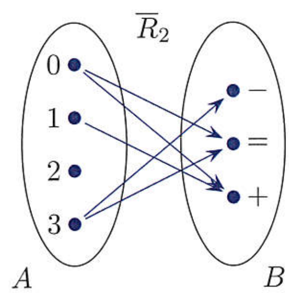
2.6 a) $\overline{R}_1 = \{(0,-),(0,+),(1,-),(1,=),(2,-),(2,+),(3,=),(3,+)\}$

$$\boldsymbol{M}(\overline{R}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



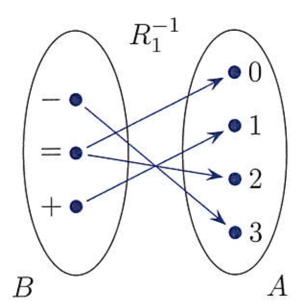
b) $\overline{R}_2 = \{(0,=),(0,+),(1,+),(3,-),(3,=)\}$

$$\boldsymbol{M}(\overline{R}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



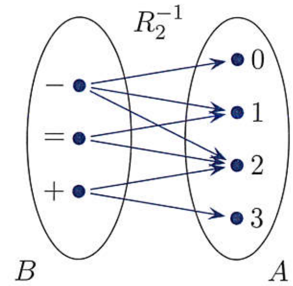
2.8 a) $R_1^{-1} = \{(=,0),(+,1),(=,2),(-,3)\}$

$$\boldsymbol{M}(R_1^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

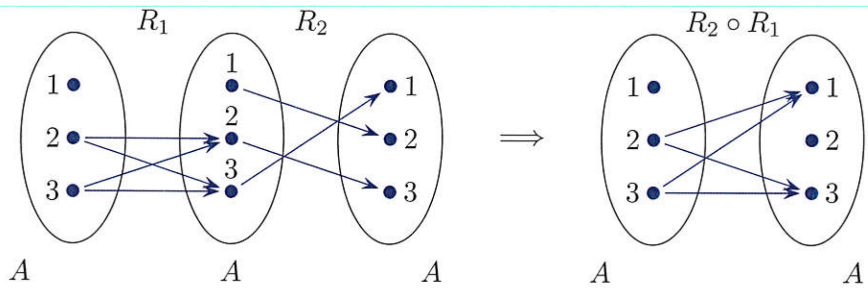


b) $R_2^{-1} = \{(-,0),(-,1),(=,1),(-,2),(=,2),(+,2),(+,3)\}$

$$\boldsymbol{M}(R_2^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

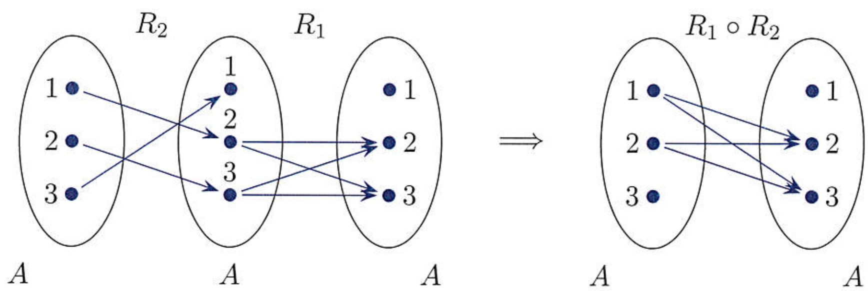


2.10 a)



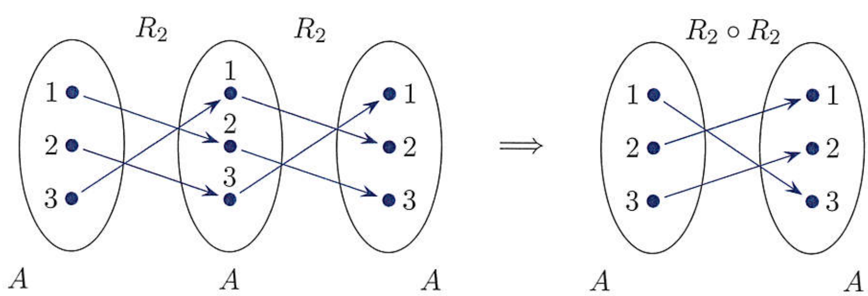
et $R_2 \circ R_1 = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

b)



et $R_1 \circ R_2 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

c)



et $(R_2)^2 = R_2 \circ R_2 = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$

2.11 a) $$\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ainsi } M(S \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $$M(S) \cdot M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ainsi } M(R \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $$M(R)^2 = M(R) \cdot M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ainsi } M(R^2) = M(R \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.12 a) $\overline{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y < 0\}$

b) $R^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{Z}^2 \mid y + x \geq 0\} = R$

c) $R^2 = R \circ R = \mathbb{Z}^2$ car, quel que soit le couple (x,z) d'entiers, en prenant $y = |x| + |z|$ on a $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ et donc $(x,z) \in R^2$.

2.13 a) $U \circ S = \{(a,i), (c,j), (c,k), (d,i)\}$

b) $\overline{R} \circ T$ n'existe pas car l'ensemble d'arrivée de T $(= C)$ n'est pas contenu dans l'ensemble de départ de $\overline{R}$ $(= A)$

c) $T \circ S \circ R^{-1}$ n'existe pas car l'ensemble d'arrivée de S $(= D)$ n'est pas contenu dans l'ensemble de départ de T $(= B)$

d) $T^{-1} \circ \overline{T} = \{(x,y), (x,z), (y,x), (y,z), (z,x)\}$

2.14 a) (1) R est réflexive car la matrice $M(R)$ ne contient que des 1 dans sa diagonale principale.

(2) R n'est pas symétrique que l'élément $(2,1)$ de $M(R)$ est égal à 1 alors que l'élément symétrique $(1,2)$ est nul (on a donc $(\heartsuit, \spadesuit) \in R$ et $(\spadesuit, \heartsuit) \notin R$).

(3) R est antisymétrique car il n'existe pas deux 1 symétriques dans $M(R)$.

(4) R n'est pas transitive car

$$(M(R))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies M(R^2) = M(R \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $R^2 \nsubseteq R$ (les couples $(\heartsuit, \diamondsuit)$ et $(\heartsuit, \clubsuit)$ appartiennent à R^2 mais pas à R).

b) (1) S n'est pas réflexive car l'élément $(2,2)$ de $M(S)$ n'est pas égal à 1 ($\heartsuit$ n'est pas en relation avec lui-même).

(2) S n'est pas symétrique que l'élément $(3,2)$ de $\boldsymbol{M}(S)$ est égal à 1 alors que l'élément symétrique $(2,3)$ est nul (on a donc $(\diamondsuit,\heartsuit) \in S$ et $(\heartsuit,\diamondsuit) \notin S$).

(3) S n'est pas antisymétrique car les éléments $(3,4)$ et $(4,3)$ de $\boldsymbol{M}(S)$ sont tous deux égaux à 1 (on a donc $(\diamondsuit,\clubsuit) \in S$ et $(\clubsuit,\diamondsuit) \in S$ alors que $\diamondsuit \neq \clubsuit$).

(4) S est transitive car

$$(\boldsymbol{M}(S))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{M}(S^2) = \boldsymbol{M}(S \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}(S)$$

et $S^2 \subseteq S$ (en fait $S^2 = S$).

2.15 (1) La relation R n'est pas réflexive. On a en effet $(-1,-1) \notin R$ (et plus généralement $(k,k) \notin R$ pour tout entier k négatif).

(2) La relation R est symétrique car l'addition est commutative :

$$(x,y) \in R \iff x+y \geq 0 \iff y+x \geq 0 \iff (y,x) \in R.$$

(3) La relation R n'est pas antisymétrique. On a par exemple $(1,2) \in R$ et $(2,1) \in R$ mais $1 \neq 2$.

(4) La relation R n'est pas transitive. On a par exemple $(-1,3) \in R$ et $(3,-2) \in R$ mais $(-1,-2) \notin R$. En fait on a $R^2 = \mathbb{Z}^2$ (exercice 2.12) et $R^2 \not\subseteq R$.

2.16 a) (1) R_1 n'est pas réflexive car $(1,1) \notin R_1$ (ou $(4,4) \notin R_1$).

(2) R_1 n'est pas symétrique car si $(2,4) \in R_1$ mais $(4,2) \notin R_1$.

(3) R_1 n'est pas antisymétrique car $(2,3) \in R_1$ et $(3,2) \in R_1$ alors que 2 et 3 sont deux éléments différents de A.

(4) R_1 est transitive car $(R_1)^2 = R_1$. En effet

$$(\boldsymbol{M}(R_1))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{M}(R_1^2) = \boldsymbol{M}(R_1)$$

b) R_2 est réflexive, symétrique et transitive mais n'est pas antisymétrique.

c) (1) R_3 n'est pas réflexive car $(1,1) \notin R_3$ (et, plus généralement, $(x,x) \notin R_3$ quel que soit $x \in A$).

(2) R_3 est symétrique car $(2,4) \in R_3$ et $(4,2) \in R_3$ et qu'il s'agit des deux seuls couples de la relation.

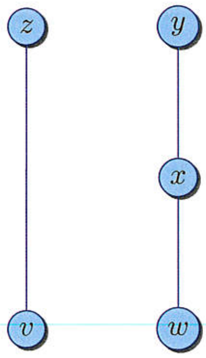
(3) R_3 n'est pas antisymétrique car $(2,4) \in R_3$ et $(4,2) \in R_3$ alors que 2 et 4 sont deux éléments différents de A.

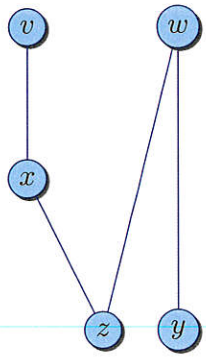
(4) R_3 n'est pas transitive car $(2,4) \in R_3$ et $(4,2) \in R_3$ mais $(2,2) \notin R_3$.

d) R_4 est antisymétrique mais n'est ni réflexive, ni symétrique, ni transitive.

2.17 a) Ordre partiel b) Ordre partiel c) Pas un ordre d) Ordre total

Diagrammes de Hasse :

a) 

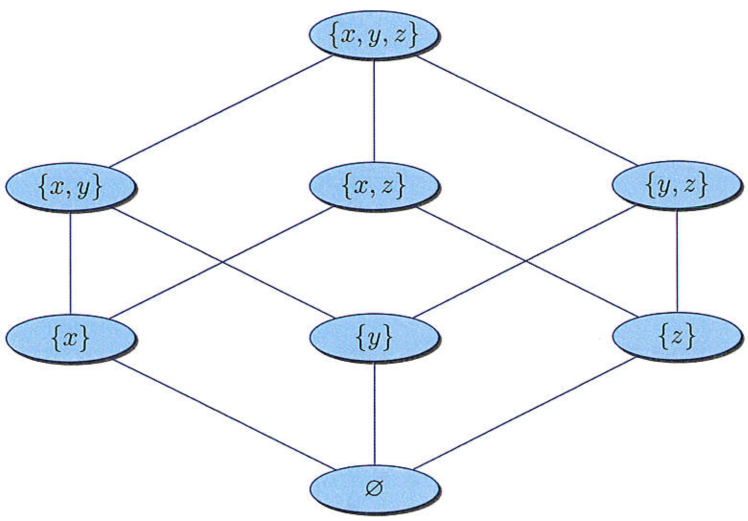
b) 

d) 

2.18 Une chaîne verticale unique.

2.19 a) $\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.20



2.21 a) (1) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est réflexive car tout entier positif n se divise lui-même ($n = 1 \cdot n$).

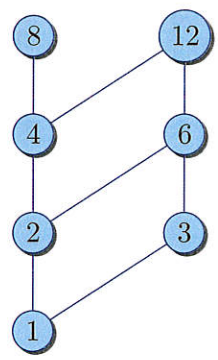
(2) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est antisymétrique. En effet, si $n \mid m$, il existe un entier positif k avec $m = kn$ mais, alors, $n = (1/k)m$. Ainsi on aura également $m \mid n$ si et seulement si $1/k$ est entier ce qui n'est possible que si $k = 1$ (k est positif). On en conclut donc que $n \mid m$ et $m \mid n$ si et seulement si $n = m$.

(3) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est transitive. En effet, si $n \mid m$ et $m \mid p$, il existe deux entiers positifs k et l tels que $m = kn$ et $p = lm$ mais alors $p = lm = l(kn) = (lk)n$ est $n \mid p$ (car lk est un entier).

La relation de divisibilité étant réflexive, antisymétrique et transitive, il s'agit bien d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel. Il existe, en effet, de nombreuses paires d'entiers positifs $\{a, b\}$ où a ne divise pas b et b ne divise pas a (par exemple, $a = 2$ et $b = 3$).

2.22



2.24 Seule R_2 est une relation d'équivalence. R_1 et R_4 ne sont pas transitives alors que R_3 n'est pas réflexive.

2.25 R_1, R_3 et R_4 sont des relations d'équivalence. R_2 n'est pas symétrique et n'est donc pas une relation d'équivalence.

Classes d'équivalence :

R_1 : $[v] = [w] = \{v, w\}$, $[x] = [z] = \{x, z\}$, $[y] = \{y\}$

R_3 : $[v] = [x] = \{v, x\}$, $[w] = [y] = [z] = \{w, y, z\}$

R_4 : $[v] = \{v\}$, $[w] = \{w\}$, $[x] = \{x\}$, $[y] = \{y\}$, $[z] = \{z\}$

2.27 i) La relation R est réflexive car

$$(a, b)\ R\ (a, b) \iff a + b = b + a$$

ce qui est toujours vrai car l'addition est commutative.

ii) La relation R est symétrique car

$$(a, b)\ R\ (c, d) \iff a + d = b + c \iff c + b = d + a \iff (c, d)\ R\ (a, b).$$

iii) La relation R est transitive car

$$\begin{array}{rlcl} & (a, b)\ R\ (c, d) & \text{et} & (c, d)\ R\ (e, f) \\ \iff & a + d = b + c & \text{et} & c + f = d + e \\ \iff & a - b = c - d & \text{et} & c - d = e - f \\ \implies & a - b = e - f & & \\ \iff & a + f = b + e & & \\ \iff & (a, b)\ R\ (e, f). & & \end{array}$$

La relation R étant réflexive, symétrique et transitive, elle définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$.

1) La classe d'équivalence de $(0, 0)$ est

$$\begin{aligned} [(0, 0)] &= \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b = 0\} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a = b\} \\ &= \{\ldots, (-3, -3), (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots\}. \end{aligned}$$

2) La classe d'équivalence de $(2, 1)$ est

$$\begin{aligned} [(2, 1)] &= \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b = 1\} \\ &= \{\ldots, (-3, -4), (-2, -3), (-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), \ldots\}. \end{aligned}$$

3) La classe d'équivalence de $(0, -1)$ est la même que celle de $(2, 1)$: $[(0, -1)] = [(2, 1)]$.

2.28 a) $\boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{M}(\overline{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{M}(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

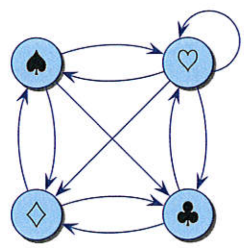
c) Pour calculer la matrice de la relation $U = \overline{S} \circ T^{-1}$ on commence par calculer le produit

$$\boldsymbol{M}(T^{-1}) \cdot \boldsymbol{M}(\overline{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

puis on y remplace les éléments supérieurs à 1 par des 1 afin d'obtenir

$$\boldsymbol{M}(U) = \boldsymbol{M}(\overline{S} \circ T^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d) La relation U est une relation sur l'ensemble F et son graphe représentatif est



2.29 a) $\overline{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$ (relation « plus petit ou égal à »)

b) $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$ (relation « plus petit que »)

c) $R^2 = R \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > y + 1\}$

d) $R \circ R^{-1} = \mathbb{Z}^2$ (relation « complète »)

2.30 La relation R est uniquement réflexive.

2.31 a) (1) R_1 n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R_1$ (et, plus généralement, $(x, x) \notin R_1$ quel que soit l'entier x).

(2) R_1 est symétrique car si $(x, y) \in R_1$ on a $x \neq y$ mais également $y \neq x$ et donc $(y, x) \in R_1$.

(3) R_1 n'est pas antisymétrique car on a, par exemple, $(1, 2) \in R_1$ et $(2, 1) \in R_1$ alors que 1 et 2 sont deux éléments différents de $\mathbb{Z}$.

(4) R_1 n'est pas transitive car, par exemple, $(1, 2) \in R_1$ et $(2, 1) \in R_1$ mais $(1, 1) \notin R_1$.

b) (1) R_2 n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R_2$ ($0^2 \ngeq 1$).

(2) R_2 est symétrique car $xy = yx$ ainsi si $xy \geq 1$, on a aussi $yx \geq 1$.

(3) R_2 n'est pas antisymétrique car on a, par exemple, $(1, 2) \in R_2$ et $(2, 1) \in R_2$ alors que 1 et 2 sont deux entiers différents.

(4) R_2 est transitive. En effet, si $xy \geq 1$ alors x et y sont tous deux de même signe (soit tous deux positifs soit tous deux négatifs). De même si $yz \geq 1$, y et z sont de même signe et on en déduit que x et z sont de même signe ou, encore, que $xz \geq 1$, c.-à-d. que $(x,z) \in R_2$.

c) (1) R_3 n'est pas réflexive car $(-1,-1) \notin R_3$ $(-1 \not\leq 2(-1) = -2)$ et, plus généralement, $(x,x) \notin R_3$, quel que soit l'entier négatif x.

(2) R_3 n'est pas symétrique car $(1,3) \in R_3$ $(1 \leq 2 \cdot 3)$ mais $(3,1) \notin R_3$ $(3 \not\leq 2 \cdot 1)$.

(3) R_3 n'est pas antisymétrique car on a, par exemple, $(1,2) \in R_3$ $(1 \leq 2 \cdot 2)$ et $(2,1) \in R_3$ $(2 \leq 2 \cdot 1)$ alors que 1 et 2 sont deux entiers différents.

(4) R_3 n'est pas transitive car on a, par exemple, $(3,2) \in R_3$ $(3 \leq 2 \cdot 2)$ et $(2,1) \in R_3$ $(2 \leq 2 \cdot 1)$ mais $(3,1) \notin R_3$ car $3 \not\leq 2 \cdot 1$.

d) Notons premièrement que

$$(x = y+1 \text{ ou } x = y-1) \iff x - y = \pm 1 \iff |x-y| = 1$$

(1) La relation n'est pas réflexive car $(0,0) \notin R_4$.

(2) La relation est symétrique car $(x,y) \in R_4 \iff |x-y| = 1 \iff |y-x| = 1 \iff (y,x) \in R_4$.

(3) La relation n'est pas antisymétrique car $(0,1) \in R_4$ et $(1,0) \in R_4$ mais $0 \neq 1$.

(4) La relation n'est pas transitive car $(0,1) \in R_4$ et $(1,2) \in R_4$ mais $(0,2) \notin R_4$.

e) Notons premièrement que $(x = y \text{ ou } x = -y) \iff |x| = |y|$

(1) La relation est réflexive car $|x| = |x|$ quel que soit $x \in \mathbb{Z}$ et donc $(x,x) \in R_5$ quel que soit $x \in \mathbb{Z}$.

(2) La relation est symétrique car $(x,y) \in R_5 \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff (y,x) \in R_5$.

(3) La relation n'est pas antisymétrique car $(1,-1) \in R_5$ et $(-1,1) \in R_5$ mais $1 \neq -1$.

(4) La relation est transitive car si $|x| = |y|$ et $|y| = |z|$ alors $|x| = |z|$ ainsi si $(x,y) \in R_5$ et $(y,z) \in R_5$ alors $(x,z) \in R_5$.

f) (1) La relation n'est pas réflexive car $(0,0) \notin R_6$.

(2) La relation est symétrique car $(x,y) \in R_6 \iff x+y = 4 \iff y+x = 4 \iff (y,x) \in R_6$.

(3) La relation n'est pas antisymétrique car $(0,4) \in R_6$ et $(4,0) \in R_6$ mais $0 \neq 4$.

(4) La relation n'est pas transitive car $(0,4) \in R_6$ et $(4,0) \in R_6$ mais $(0,0) \notin R_6$.

2.32 Il existe $2^{|A| \cdot |B|} = 2^{nm}$ relations différentes de A vers B.

2.33 a) 2^{n^2} b) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

2.35 a) 1. (i) La relation R est réflexive car toute personne a la même taille qu'elle-même (et donc une différence de taille avec elle-même ne dépassant pas 5 centimètres).

(ii) La relation R est symétrique car la différence de taille entre x et y est la même que celle entre y et x (elle sera donc dans les deux cas soit inférieure ou égale à 5 centimètres soit supérieure à cette limite).

(iii) La relation R n'est pas antisymétrique : on a, par exemple, Aline et Élodie en relation l'une avec l'autre bien qu'il s'agisse de deux personnes différentes.

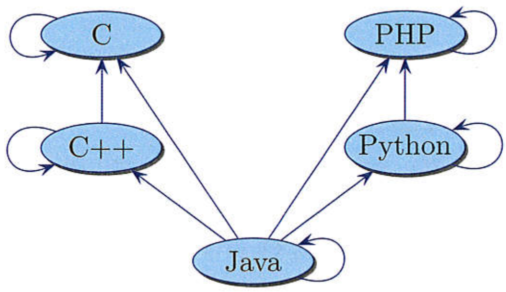
(iv) La relation R n'est pas transitive. En effet, on a Aline en relation avec Élodie et Élodie en relation avec Claudia mais Aline n'est pas en relation avec Claudia (leur différence de taille étant égale à 8 cm).

2. La relation R n'est pas une relation d'ordre car elle n'est ni antisymétrique ni transitive.
3. La relation R n'étant pas transitive, elle ne définit pas une relation d'équivalence.

2.38 a) La table contenant le nombre d'experts préférant le langage i au langage j est

	C	C++	Java	PHP	Python
C	—	1	1	2	2
C++	3	—	1	2	2
Java	3	3	—	3	3
PHP	2	2	1	—	1
Python	2	2	1	3	—

Le graphe de la relation R et sa matrice $\boldsymbol{M}(R)$ sont donc



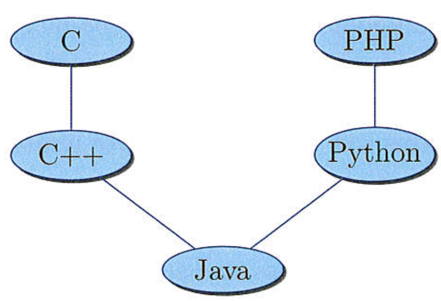
$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 1. La relation R est réflexive : la diagonale principale de $\boldsymbol{M}(R)$ ne contient que des 1.
2. La relation R n'est pas symétrique : on a, par exemple, Java en relation avec C++ mais C++ n'est pas en relation avec Java.
3. La relation R est antisymétrique : la matrice $\boldsymbol{M}(R)$ ne contient pas deux 1 en symétrie en dehors de sa diagonale principale et le graphe de R ne contient pas deux arcs de sens opposés.
4. La relation R est transitive. En effet, si on calcule le carré de $\boldsymbol{M}(R)$ on obtient

$$\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et, en remplaçant tous les termes positifs par des 1, on a $\boldsymbol{M}(R^2) = \boldsymbol{M}(R)$ ce qui prouve que R^2 est un sous-ensemble de R.

c) La relation R est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Son diagramme de Hasse est donné ci-dessous. L'ordre n'est que partiel (les langages C et PHP, par exemple, ne sont pas comparables).



d) La relation R n'étant pas symétrique, elle ne définit pas une relation d'équivalence.

2.41 a) La relation S est formée de tous les couples $(h_1, h_2) \in H^2$ où h_1 et h_2 parlent au moins une même langue nationale suisse.

b) (1) S n'est pas réflexive en général car H peut contenir des personnes ne parlant aucune langue nationale suisse.

(2) S est toujours symétrique car si h_1 parle une même langue nationale suisse que h_2, il en est de même dans l'autre sens : $(h_1, h_2) \in S \Rightarrow (h_2, h_1) \in S$.

(3) S n'est pas antisymétrique en général car dès que S contient un couple (h_1, h_2) avec $h_1 \neq h_2$ alors S contient aussi le couple (h_2, h_1) par symétrie est n'est donc pas antisymétrique.

(4) S n'est pas transitive en général car H peut contenir un personne h_1 parlant uniquement français, une personne h_2 parlant français et allemand et une personne h_3 ne parlant qu'allemand. On a alors $(h_1, h_2) \in S$ et $(h_2, h_3) \in S$ mais $(h_1, h_3) \notin S$.

2.44 a) i) La relation R est réflexive car

$$(a,b)\ R\ (a,b) \iff |a| + |b| = |a| + |b|$$

ce qui est toujours vrai.

ii) La relation R est symétrique car

$$(a,b)\ R\ (c,d) \iff |a| + |b| = |c| + |d| \iff |c| + |d| = |a| + |b| \iff (c,d)\ R\ (a,b).$$

iii) La relation R n'est pas antisymétrique car $(1,2)\ R\ (2,1)$ et $(2,1)\ R\ (1,2)$ mais $(1,2) \neq (2,1)$.

iv) La relation R est transitive car

$$\begin{aligned} & (a,b)\ R\ (c,d) \quad \text{et} \quad (c,d)\ R\ (e,f) \\ \iff & |a| + |b| = |c| + |d| \quad \text{et} \quad |c| + |d| = |e| + |f| \\ \implies & |a| + |b| = |e| + |f| \\ \iff & (a,b)\ R\ (e,f). \end{aligned}$$

b) La relation R n'étant pas antisymétrique, elle ne définit pas un ordre sur $\mathbb{Z}^2$.

c) La relation R étant réflexive, symétrique et transitive, elle définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$.

1) La classe d'équivalence de $(0,0)$ est

$$[(0,0)] = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| + |b| = 0\} = \{(0,0)\}.$$

2) La classe d'équivalence de $(1,1)$ est

$$\begin{aligned} [(1,1)] &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| + |b| = 2\} \\ &= \{(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2), (1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}. \end{aligned}$$

3) La classe d'équivalence de $(-2,1)$ est

$$\begin{aligned} [(-2,1)] &= \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| + |b| = 3\} \\ &= \{(3,0), (2,1), (2,-1), (1,2), (1,-2), (0,3), (0,-3), (-1,2), (-1,-2), \\ &\qquad (-2,1), (-2,-1), (-3,0)\}. \end{aligned}$$

2.45 a) (1) R est réflexive car quel que soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ on a $|x_1 - x_1| = |y_1 - y_1| = 0$ ce qui montre que $(x_1, y_1)\ R\ (x_1, y_1)$.

(2) R est symétrique car quels que soient (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ on a $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ et $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ ainsi $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| \iff |x_2 - x_1| = |y_2 - y_1|$ et $(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2) \iff (x_2, y_2)\ R\ (x_1, y_1)$.

(3) R n'est pas antisymétrique car $(1, 0)\ R\ (0, 1)$ et $(0, 1)\ R\ (1, 0)$ mais $(1, 0) \neq (0, 1)$.

(4) R n'est pas transitive car $(1, 0)\ R\ (0, 1)$ et $(0, 1)\ R\ (-1, 0)$ mais $(1, 0) \not R\ (-1, 0)$.

b) La relation R ne définit pas un ordre car elle n'est ni antisymétrique ni transitive.

c) La relation R ne définit pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive.

2.47 La relation R est uniquement réflexive. Elle ne définit donc ni un ordre ni une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2.48 a) (1) La relation R n'est pas réflexive car pour toute partie A non vide de E (il y en a quand même 1023) on a $(A, A) \notin R$. Par exemple $(E, E) \notin R$.

(2) La relation R est symétrique car l'intersection est une opération commutative :

$$(A, B) \in R \iff A \cap B = \varnothing \iff B \cap A = \varnothing \iff (B, A) \in R.$$

(3) La relation R n'est pas antisymétrique. On a, par exemple, $(E, \varnothing) \in R$ et $(\varnothing, E) \in R$ mais $E \neq \varnothing$.

(4) La relation R n'est pas transitive. Pour toute partie A non vide de E on a $(A, \varnothing) \in R$ et $(\varnothing, A) \in R$ mais $(A, A) \notin R$.

b) La relation R^2 est la relation complète : $R^2 = \mathscr{P}(E)^2$ (il suffit de prendre l'ensemble vide comme « intermédiaire »).