Chapitre 5
Analyse combinatoire et dénombrement

Le principe d'addition

- **Principe d'addition :**

  Si un premier ensemble contient n_1 options et un deuxième n_2 options différentes de celles du premier, alors il existe $n_1 + n_2$ manières différentes de choisir une de ces options.

- Formulation à l'aide du langage ensembliste :

  Si A et B sont deux ensembles **finis** et **disjoints** alors
  $$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

- EXEMPLE. Si un menu propose 5 entrées froides et 3 entrées chaudes, il y a $5 + 3 = 8$ choix possibles d'entrées.

Généralisation

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
Principes de base
Principe des tiroirs
Permutations
Arrangements
Combinaisons
Coefficients binomiaux
Triangle de Pascal
Binôme de Newton
Objets non distincts
Arrangements avec rép.
Comb. avec rép.
Résumé
Inclusion-exclusion
5. Proba. discrètes

- **Principe d'addition généralisé :**

  Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles **finis** et **deux à deux disjoints**, alors
  $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$
  Ce que l'on peut aussi écrire : $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$

- RAPPELS. Deux ensembles A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \varnothing$ et les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints si $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.

  Le cardinal de l'ensemble A, noté $|A|$, est égal au nombre d'éléments (différents) qu'il contient.

Le principe de multiplication

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
Principes de base
Principe des tiroirs
Permutations
Arrangements
Combinaisons
Coefficients binomiaux
Triangle de Pascal
Binôme de Newton
Objets non distincts
Arrangements avec rép.
Comb. avec rép.
Résumé
Inclusion-exclusion
5. Proba. discrètes

- **Principe de multiplication :**

  Si on doit faire un premier choix parmi n_1 options différentes puis un deuxième parmi n_2 options différentes (pas forcément différentes des premières), alors il existe $n_1 \cdot n_2$ possibilités différentes d'effectuer ces deux choix consécutifs.

- Formulation à l'aide du langage ensembliste :

  Si A et B sont deux ensembles **finis**, alors
  $$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

- EXEMPLE. Si un menu propose 5 entrées et 3 plats, il y a $5 \cdot 3 = 15$ menus différents possibles.

Généralisation

- **Principe de multiplication généralisé :**

> Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n ensembles **finis**, alors
> $$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

- Cas particulier :

> Dans le cas (fréquent) où tous les ensembles A_i sont tous égaux à un même ensemble A, on obtient
> $$|A^n| = |A|^n.$$

- RAPPEL. Si A et B sont deux ensembles, le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble formé de tous les couples (paires ordonnées) (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

Le principe des tiroirs de Dirichlet

- **Principe des tiroirs de Dirichlet (*Pigeonhole principle*) :**

> Si $k + 1$ objets (ou plus) sont rangés dans k boîtes alors il y aura au moins une boîte contenant 2 objets (ou plus).

- Généralisation :

> Si N objets sont rangés dans k boîtes alors il y aura au moins une boîte contenant au moins $\lceil N/k \rceil$ objets.

- RAPPEL. Pour un nombre réel x, on note $\lceil x \rceil$ sa partie entière supérieure (c.-à-d. le plus petit entier supérieur ou égal à x) et $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière inférieure (c.-à-d. le plus grand entier inférieur ou égal à x).

Permutations

> Une **permutation de n objets distincts** correspond à un ordre particulier de ces n objets.

- Si les objets sont identifiés par des numéros allant de 1 à n (ce qui est toujours possible), une permutation de taille n est une bijection de l'ensemble $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui-même.
- RAPPEL. Une bijection est une fonction à la fois injective et surjective.

> **Théorème.** *Si P_n désigne le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments, on a*
> $$P_n = n!$$

- RAPPEL. La factorielle de l'entier positif n est $n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (on complète la définition en posant $0! = 1$).

Arrangements

> Un **arrangement de k objets parmi n** est une liste *ordonnée* de k objets *distincts*, choisis parmi n objets *distincts*.

> **Théorème.** *Si A_k^n désigne le nombre d'arrangements de k objets parmi n, on a*
> $$A_k^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- Une permutation est un arrangement de n objets parmi n et on a bien

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n.$$

- REMARQUES. Un arrangement de k parmi n n'est défini que pour $0 \le k \le n$.

Combinaisons

Une **combinaison de k objets parmi n** est un sous-ensemble de k objets *distincts*, choisis parmi n objets *distincts* (l'ordre n'ayant pas d'importance).

Théorème. *Si C_k^n désigne le nombre de combinaisons de k objets parmi n, on a*

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- REMARQUE. Une combinaison de k parmi n n'est définie que pour $0 \leq k \leq n$.
- **Propriété.** Il y a autant de possibilités de sélectionner k objets parmi n (les k « gagnants ») que de possibilités de sélectionner $n-k$ objets parmi n (les $n-k$ « perdants »). Autrement dit, pour deux entiers non négatifs k et n vérifiant $k \leq n$, on a

$$\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n.}$$

heig-vd

Coefficients binomiaux

1. Les ensembles
2. Les relations
3. Les fonctions
4. Suites et séries
5. Combinatoire
Principes de base
Principe des tiroirs
Permutations
Arrangements
Combinaisons
Coefficients binomiaux
Triangle de Pascal
Binôme de Newton
Objets non distincts
Arrangements avec rép.
Comb. avec rép.
Résumé
Inclusion-exclusion
5. Proba. discrètes

Les nombres C_k^n de combinaisons de k objets parmi n sont également appelés des **coefficients binomiaux** et notés

$$C_k^n = \binom{n}{k}.$$

Théorème (Identité de Pascal). *Soient k et n deux entiers positifs avec $0 < k < n$. Alors*

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$$

ou, de manière équivalente,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Blaise Pascal (1623-1662)

heig-vd

Triangle de Pascal

L'identité de Pascal est à la base de la représentation suivante des coefficients binomiaux, appelée **triangle de Pascal** :

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

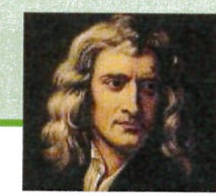
n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	

heig-vd

Formule du binôme de Newton

Théorème (Binôme de Newton). *Soient a et b deux nombres réels et n un entier non négatif. Alors*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$



Isaac Newton (1643-1727)

- EXEMPLE. Le développement de $(x+y)^4$ est

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

heig-vd

Permutations d'objets non distincts

heig-vd

Théorème. *Le nombre de permutations de n objets comptant k_1 objets de type 1, k_2 objets de type 2, …, k_m objets de type m est*

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!}.$$

- EXEMPLE. À partir des lettres du mot « baobab » il est possible de créer

$$\frac{6!}{2!3!1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 60$$

mots différents.

- REMARQUE. Les nombres $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$ sont appelés **coefficients multinomiaux** et notés

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}.$$

Nombre de partitions ordonnées

heig-vd

Théorème. *Le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble de cardinal n en m sous-ensembles disjoints, le premier de cardinal k_1, le deuxième de cardinal k_2, …, le dernier de cardinal k_m est égal au coefficient multinomial*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!}.$$

- EXEMPLE. Il y a

$$\binom{9}{2, 3, 4} = \frac{9!}{2!3!4!} = 9\cdot 4\cdot 7\cdot 5 = 1260$$

manières différentes de répartir 9 personnes en un premier groupe de taille 2, un deuxième groupe de taille 3 et un dernier groupe de taille 4.

Arrangements avec répétitions

heig-vd

Un **arrangement de k objets parmi n avec répétitions** est une liste ordonnée de k objets choisis parmi n objets distincts, chacun d'eux pouvant être sélectionné autant de fois que désiré.

Théorème. *Si on note $\overline{A_k^n}$ le nombre d'arrangements de k objets parmi n avec répétitions, on a*

$$\overline{A_k^n} = n^k.$$

- Un arrangement avec répétitions peut être vu comme le résultat d'un tirage au sort avec remise et où l'ordre est important.
- EXEMPLE. En français, le nombre de mots (sans lettres accentuées ni caractères diacritiques) de longueur 5 est $\overline{A_5^{26}} = 26^5$.

Combinaisons avec répétitions

heig-vd

- EXEMPLE. On désire former un plateau de 4 fruits à partir de bananes (B), d'oranges (O) et de pommes (P).

Combien de plateaux différents est-il possible de former ?

Une énumération explicite de tous les plateaux possibles montre qu'il en existe 15 différents :

▸ 4 B	▸ 4 O	▸ 4 P
▸ 3 B, 1 O	▸ 3 B, 1 P	▸ 3 O, 1 B
▸ 3 O, 1 P	▸ 3 P, 1 B	▸ 3 P, 1 O
▸ 2 B, 2 O	▸ 2 B, 2 P	▸ 2 O, 2 P
▸ 2 B, 1 O, 1 P	▸ 2 O, 1 B, 1 P	▸ 2 P, 1 B, 1 O

Combinaisons avec répétitions (suite)

Une **combinaison de k objets parmi n avec répétitions** correspond au résultat d'un tirage avec remise de k objets parmi n objets distincts où l'ordre n'est pas pris en compte.

Théorème. *Si on note $\overline{C_k^n}$ le nombre de combinaisons de k objets parmi n avec répétitions, on a*

$$\overline{C_k^n} = C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

- EXEMPLE. Pour le problème des plateaux de fruits, $n = 3$ et $k = 4$, ainsi

$$\overline{C_k^n} = \overline{C_4^3} = C_4^{3+4-1} = C_4^6 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

heig-vd

Démonstration de la formule pour $\overline{C_k^n}$

DÉMONSTRATION.

- On numérote les n objets de 1 à n. Toute combinaison avec répétitions de k objets parmi ces n objets peut être représentée (de manière unique) par une suite formée de k symboles 1 et de $n-1$ symboles 0.
- Plus précisément, une combinaison avec répétitions formée de k_1 exemplaires du premier objet, de k_2 exemplaires du deuxième objet, ..., de k_n exemplaires du dernier objet correspond à la suite formée de k_1 symboles 1 suivi d'un 0 puis de k_2 symboles 1 suivi d'un 0 et ainsi de suite jusqu'à se terminer par k_n symboles 1.
- Exemple. Pour les trois fruits bananes, oranges et pommes (dans cet ordre), le plateau formé d'une banane et de trois oranges est représenté par la suite

$$101110.$$

- Le nombre de séquences composées de k symboles 1 et de $n-1$ symboles 0 est égal à

$$C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

□

heig-vd

Résumé

Type	répét.	symbole	formule	conditions
Permutations	non	P_n	$n!$	$n \geq 0$
Arrangements	non	A_k^n	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$0 \leq k \leq n$
	oui	$\overline{A_k^n}$	n^k	$k \geq 0, n \geq 1$
Combinaisons	non	C_k^n, $\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$0 \leq k \leq n$
	oui	$\overline{C_k^n}$	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$k \geq 0, n \geq 1$

heig-vd

Principe d'inclusion-exclusion

- Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints, le principe d'addition permet de calculer le cardinal de l'union des deux ensembles :

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Si A et B ne sont pas disjoints, les éléments de leur intersection sont comptés *deux fois* dans la formule précédente, il faut donc ajuster le résultat en retirant le nombre d'éléments communs :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- La formule précédente, connue sous le nom de **principe d'inclusion-exclusion** (pour deux ensembles), se généralise à un nombre quelconque d'ensembles.

heig-vd

Principe d'inclusion-exclusion (suite)

Théorème [Principe d'inclusion-exclusion]. *Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors,*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

DÉMONSTRATION.

- Afin de démontrer l'égalité, il suffit de vérifier que chaque élément de l'union est compté exactement une fois par le membre de droite de la formule précédente.

Principe d'inclusion-exclusion (démonstration)

- Soit, donc, un élément a quelconque appartenant à exactement p ensembles, avec $1 \le p \le n$.
- Cet élément est compté $\binom{p}{1}$ fois dans $\sum |A_i|$. Il est compté $\binom{p}{2}$ fois dans $\sum |A_i \cap A_j|$ et, en général, $\binom{p}{m}$ fois dans la somme faisant intervenir les intersections de m ensembles.
- Le nombre total de fois où l'élément est compté par la formule est égal à

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \cdots + (-1)^{p+1}\binom{p}{p}.$$

- En utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$0 = (1 + (-1))^p = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \cdots + (-1)^p \binom{p}{p}.$$

- On en déduit que

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \cdots + (-1)^{p+1}\binom{p}{p} = \binom{p}{0} = 1$$

et chaque élément de l'union est bien compté exactement une fois. □

Chapitre 5

Introduction aux probabilités discrètes

Les probabilités et le hasard

- La théorie des probabilités permet de modéliser et de décrire des phénomènes aléatoires, c.-à-d. des phénomènes qui, lorsqu'ils sont observés sous des conditions déterminées, ne mènent pas toujours à la même issue.
- La théorie des probabilités et la combinatoire partagent des origines communes qui remontent aux travaux de Pascal et de Fermat au XVII[e] siècle et de Laplace au XVIII[e] siècle.

Blaise Pascal (1623-1662)

Pierre de Fermat (v. 1605-1665)

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

- Introduite lors de l'étude des jeux de chance, la modélisation probabiliste occupe, aujourd'hui, une place importante tant dans le monde scientifique, économique et politique (météorologie, fiabilité, simulation, mathématiques financières, médecine, ...) que dans la vie de tous les jours (loterie, casin[illegible]rcé, ...).

Expériences et ensemble fondamental

Comme toute discipline (scientifique ou non), la théorie des probabilités possède son propre jargon :

- Une **expérience** (ou **épreuve**) **aléatoire** (ou **stochastique**) est une expérience dont il est impossible de prévoir exactement le résultat (ou l'issue).

  aléatoire (du latin *alea* : coup de dé) : qui relève du hasard, qui dépend d'un événement incertain.

  stochastique (du grec *stokhastikos* : viser) : qui est de nature aléatoire.

- L'**ensemble fondamental** (ou l'**univers**) est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

  NOTATION. L'ensemble fondamental sera noté Ω.

Événements

- Un **événement** est un ensemble d'issues possibles d'une expérience aléatoire. En d'autres termes, un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω.

  NOTATION. On utilisera la notation usuelle pour les ensembles, c.-à-d. les lettres majuscules : $A, B, C, \dots$

- Un **événement élémentaire** correspond à un événement formé d'une seule issue possible.

  NOTATION. $A = \{\omega\}$.

- L'**événement impossible** est celui qui ne se réalise jamais et correspond à l'ensemble vide : $\varnothing$.

- L'**événement certain** se réalise à coup sûr, il représente le fait que : « *quelque chose se passera !* » et correspond à Ω.

Les probabilités discrètes

- Dans la théorie des probabilités discrètes, les espaces fondamentaux Ω sont finis ou tout au moins dénombrables.
- Nous ne considérerons ici que le cas fini où l'univers est formé de n événements élémentaires :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

- Le plus souvent, les résultats présentés se généralisent directement aux situations où Ω est infini dénombrable (au prix de difficultés techniques cependant).
- En revanche, lorsque Ω est un ensemble non dénombrable (par exemple lorsque le résultat d'une expérience est un nombre réel), il est nécessaire de recourir aux résultats de la théorie du calcul différentiel et intégral.

Loi de probabilités (mesure de probabilités)

Définir une **loi de probabilités sur un univers Ω** revient à associer à chaque événement $A \subseteq \Omega$ (c.-à-d. à chaque ensemble de résultats possibles) un nombre réel $P(A)$, appelé la **probabilité de l'événement A**, qui satisfait les trois axiomes suivants :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ quel que soit $A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si A et B sont deux événements exclusifs alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- REMARQUE. Deux événements A et B sont dits **exclusifs** ou **incompatibles** s'ils correspondent à deux ensembles d'issues disjoints, c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple

- Pour l'expérience consistant à lancer un dé à 6 faces et à observer le résultat obtenu, l'espace fondamental associé est

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Si le dé est équilibré (non pipé), les probabilités associées à chaque événement élémentaire (un des six résultats possibles) sont égales et

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

- Pour l'événement $A = \{2, 4, 6\}$ (« le résultat est pair »), la probabilité de A est

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Quelques propriétés des probabilités

À partir des trois axiomes de base, on obtient facilement les propriétés suivantes :

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

L'hypothèse d'équiprobabilité

- Les probabilités modélisent la notion intuitive de « chance de réalisation » d'un événement et, dans de nombreuses applications, il est naturel de supposer que chaque élément de l'espace fondamental (c.-à-d. chaque événement élémentaire) a autant de chance de se produire qu'un autre.

Tous les événements élémentaires ont alors la même probabilité !

- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ on a alors

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\})$$

et en utilisant le fait que $P(\Omega) = 1$ on en déduit que

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les probabilités discrètes

- Si l'événement A est formé de plusieurs événements élémentaires, ces derniers sont autant d'issues incompatibles de l'expérience. Ainsi, en utilisant le troisième axiome, on a sous l'hypothèse d'équiprobabilité

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires de } \boldsymbol{A}}{\text{nombre total d'événements élémentaires}} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{\Omega}|}.$$

- Cette définition fréquentiste des probabilités a été proposée pour la première fois par Laplace et demande que la probabilité d'un événement soit égale au nombre de résultats favorables divisé par le nombre de résultats possibles de l'expérience :

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{\# d'issues favorables}}{\text{\# d'issues total}} = \frac{\text{\# de réussites}}{\text{\# de réussites + \# d'échecs}}.$$

Exemple 1

- On tire deux cartes au hasard d'un jeu de bridge (52 cartes réparties en 4 couleurs : ♠, ♡, ♢, ♣, de 13 cartes : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, A).
- Quelle est la probabilité de tirer 2 as ?
  - Il y a 4 as dans le jeu et $C_2^4 = \binom{4}{2} = 6$ paires de cartes formées uniquement d'as.
  - On peut former $C_2^{52} = \binom{52}{2}$ paires de cartes au total.
  - La probabilité cherchée est donc

$$\begin{aligned} p &= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{52!}{2!\,50!}} = \frac{4!\,50!}{2!\,52!} \\ &= \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \frac{1}{13 \cdot 17} = \frac{1}{221} \simeq 0{,}004525. \end{aligned}$$

heig-vd

Exemple 2

- On lance deux dés équilibrés à six faces. Quelle est la probabilité que la somme des résultats soit égale à 7 ?
  - En considérant les lancers comme successifs (ce qui revient à considérer que les deux dés sont distingués), l'univers Ω est formé de tous les couples (x, y) où x est le résultat du premier lancer et y celui du second et il y a alors $|\Omega| = 6^2 = 36$ issues différentes possibles à l'expérience.
  - Avec ce choix, les différents résultats possibles (les événements élémentaires) sont tous **équiprobables** !
  - Considérer directement le résultat final de l'expérience (la somme des deux lancers) aboutit à l'univers $\Omega' = \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$ dont les éléments *ne sont pas équiprobables* !
  - Pour déterminer la probabilité cherchée, on peut énumérer les couples de résultats donnant une somme de 7 : $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$.
  - La probabilité d'obtenir une somme égale à 7 est donc

$$p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

heig-vd

Exemple 2 (suite)

- Une autre approche (plus facilement généralisable au lancer de plus de deux dés et plus élégante qu'une laborieuse énumération) consiste à calculer le nombre de couples (x, y) formé d'entiers entre 1 et 6 (bornes comprises) dont la somme vaut 7.
- Ce nombre est égal au nombre de solutions de l'équation $x + y = 7$ avec x et y deux entiers compris entre 1 et 6 ou encore de l'équation $x' + y' = 5$ avec x' et y' deux entiers compris entre 0 et 5.
- Comme toute solution entière non négative de l'équation $x' + y' = 5$ satisfait automatiquement $x' \leq 5$ et $y' \leq 5$, le nombre cherché est

$$\overline{C_5^2} = C_5^6 = 6$$

et la probabilité cherchée est

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

heig-vd

Remarque sur l'hypothèse d'équiprobabilité

Comme dit précédemment, il est souvent naturel de supposer équiprobables toutes les issues élémentaires d'une expérience.

- Tel est le cas, par exemple, des deux résultats possibles (PILE et FACE) du lancer d'une pièce équilibrée ou des six résultats possibles de celui d'un dé non pipé.
- Parfois, il s'agit d'une hypothèse simplificatrice mais tout à fait acceptable en première approximation : une personne a autant de chance d'avoir son anniversaire le premier janvier que n'importe quel autre jour de l'année.
- Parfois, elle dépend du choix de l'espace fondamental Ω. Pour l'expérience consistant à lancer deux fois de suite une pièce équilibrée, on peut définir les deux espaces fondamentaux

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\text{PILE \& PILE}, \text{PILE \& FACE}, \text{FACE \& FACE}\} \\ \Omega_2 &= \{(\text{PILE}, \text{PILE}), (\text{PILE}, \text{FACE}), (\text{FACE}, \text{PILE}), (\text{FACE}, \text{FACE})\} \end{aligned}$$

  Un seul permet d'utiliser l'hypothèse d'équiprobabilité ! (Si on veut obtenir une modélisation utile de l'expérience)
- Finalement, il arrive qu'elle soit tout simplement inacceptable. Sur l'univers $\Omega = \{\text{GAGNÉ}, \text{PERDU}\}$ représentant votre résultat, il est raisonnable de supposer les deux issues équiprobables si vous affrontez Roger Federer au jeu de « pile ou face » mais il en va tout autrement s'il s'agit d'un match de tennis.

heig-vd