Chapitre 1

Ensembles

Ensemble et élément

Intuitivement, un **ensemble** est une collection d'**éléments** considérés comme un tout. On note un ensemble en entourant la liste de ses éléments par des accolades.

Exemple

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{\text{Oui}, \text{Non}, \text{Peut-être}\}$$

Ensemble vide

L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'**ensemble vide** et est noté $\varnothing$ ou $\{\,\}$.

Univers

L'ensemble qui contient tous les éléments (dans un contexte donné) est l'**univers** ou l'**ensemble universel** et sera généralement noté Ω.

1.1 Appartenance et égalité d'ensembles

Relation d'appartenance

Si x est un élément de l'ensemble S, on dit que x **appartient** à S et on note $x \in S$. Dans le cas contraire, x n'appartient pas à S et on note $x \notin S$.

Égalité d'ensembles

Deux ensembles A et B sont **égaux**, et on note $A = B$, s'ils contiennent les mêmes éléments.

Pour définir un ensemble, deux approches principales sont possibles. La première, utilisable dans les cas les plus simples uniquement, consiste à décrire un ensemble *en extension*, c.-à-d. en énumérant complètement (ou partiellement lorsqu'un motif clair peut être établi) ses éléments. La seconde approche consiste à définir en ensemble *en compréhension* en utilisant un *constructeur* d'ensembles qui spécifie une propriété satisfaite par tous les éléments recherchés et par eux seuls.

Exemple

L'ensemble S des chiffres décimaux peut être défini en extension par

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{ou} \quad S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

et en compréhension par

$$S = \{x \mid x \text{ est entier et } 0 \leq x \leq 9\} \quad \text{ou} \quad S = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}.$$

1.1 Écrire en extension les ensembles suivants :

a) $\{x \mid x \text{ est entier et } -2 < x \leq 5\}$

b) $\{y \mid y \text{ est impair et } |y| < 5\}$

c) $\{z \mid z \text{ est réel et } \cos(z) = 3/2\}$

d) $\{k \mid k \text{ est un entier vérifiant } k^2 = -k\}$

1.2 Écrire en extension les ensembles suivants :

a) $\{k \in \mathbb{N}^* \mid 0 \leq k \leq 4\}$

b) $\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid n < 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 10\}$

d) $\{z \in \mathbb{R} \mid \log_2(z^2) = 4\}$

Quantificateurs existentiel et universel

1) Le symbole $\exists$, appelé quantificateur existentiel, est l'abréviation de la condition « il existe (au moins) un ».
2) En ajoutant un point d'exclamation au symbole précédent on obtient le quantificateur d'unicité $\exists!$ qui se lit « il existe un seul et unique ».
3) Le quantificateur universel $\forall$ est, lui, l'abréviation de la condition « quel que soit » ou « pour tout ».

1.3 Écrire explicitement les éléments des ensembles suivants :

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -4 < n \leq 2\}$

b) $B = \{n \in A \mid n \text{ est impair}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists\, n \in A \text{ tel que } x = |n|\}$

d) $D = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists!\, n \in A \text{ tel que } y = |n|\}$

1.4 Décider si les appartenances suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\{1\} \in \{0, 1\}$

b) $\{-1\} \in \{\{-1\}, \{1\}\}$

c) $\{1, 2\} \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

d) $2 \in \{0, 1, 2\}$

e) $1 \in \{\{1\}\}$

f) $2 \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

g) $\varnothing \in \varnothing$

h) $0 \in \varnothing$

i) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

1.5 Déterminer lesquels, parmi les ensembles suivants, sont égaux :

a) $A = \{-1, 0, 1\}$

b) $B = \{x \mid x^3 = x\}$

c) $C = \{x \mid x = \cos(k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$

d) $D = \{0, 0, 1, -1, 1\}$

1.6 Déterminer lesquels, parmi les ensembles suivants, sont égaux :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + e^{-x} = 1\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| = 3\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\ln(x) = \ln(12 - x)\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x - 2} - \sqrt{x^2 - 8} = 0\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sin(k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 3(k - 1)^2, k = 0, 1, 2\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6x^2 + 9x = 0\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2/(x + 3) = 9/(x + 3)\}$

1.2 Inclusion et sous-ensembles

Relation d'inclusion

L'ensemble B est **inclus** dans l'ensemble A, et on note $B \subseteq A$, si tout élément appartenant à B appartient également à A :

$$B \subseteq A \iff (\forall x \in B, x \in A).$$

Sous-ensemble

Si B est inclus dans A, B est appelé un **sous-ensemble** ou une **partie** de A.

Propriétés

1) Tout ensemble est sous-ensemble de lui-même.
2) L'ensemble vide $\varnothing$ est un sous-ensemble de A quel que soit l'ensemble A.
3) Dans un contexte donné, tous les ensembles considérés sont des parties de l'univers Ω.

Sous-ensemble propre et inclusion stricte

Si B est un sous-ensemble de A mais n'est pas égal à A, B est dit un **sous-ensemble propre** de A. Si on veut insister sur le fait que B est (ou doit être) un sous-ensemble propre de A (et ne peut donc être égal à A), on pourra utiliser la notation $B \subset A$. On a donc

$$B \subset A \iff B \subseteq A \text{ et } B \neq A.$$

1.7 Décider si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\{3\} \subseteq \{3, 4\}$ c) $\{\{2\}\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ e) $\varnothing \subseteq \mathbb{Z}$

b) $\{3\} \subseteq \{\{3\}, \{4\}\}$ d) $\{2, 4\} \subseteq \{2, 4\}$ f) $\varnothing \subseteq \varnothing$

1.8 Décider si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\{3\} \subset \{3, 4\}$ d) $\{\{4\}\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ g) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$

b) $\{3, 4\} \subset \{3, 4\}$ e) $\varnothing \subset \varnothing$ h) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

c) $\{2, 3\} \subseteq \{\{2\}, \{3\}\}$ f) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$ i) $\varnothing \subset \mathbb{Z}$

1.9 Est-il possible de trouver deux ensembles A et B tels que $A \in B$ et $A \subseteq B$?

1.3 Opérations sur les ensembles

Les trois opérations ensemblistes de base sont l'*union*, l'*intersection* et le *complément*. Elles correspondent aux opérateurs logiques « ou », « et » et « non ».

Union

L'**union**, ou la **réunion**, de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble formé par les éléments appartenant à A ou à B (ou aux deux) :

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Intersection

L'**intersection** de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble formé par les éléments appartenant à A et à B :

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sans élément commun, c.-à-d. tels que $A \cap B = \varnothing$, sont dits **disjoints**.

Complément

Le **complément** de l'ensemble A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble formé de tous les éléments de l'univers Ω n'appartenant pas à A :

$$\overline{A} := \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

À l'aide des trois opérations de base, on définit deux autres opérations courantes : la *différence* et la *différence symétrique* (cette dernière correspond à l'opérateur logique « ou exclusif »).

Différence

La **différence** de deux ensembles A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Différence symétrique

La **différence symétrique** de deux ensembles A et B, notée $A \triangle B$ ou parfois $A \oplus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant soit à A soit à B mais pas aux deux. À l'aide des opérations précédentes, elle peut être définie par

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ou par

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

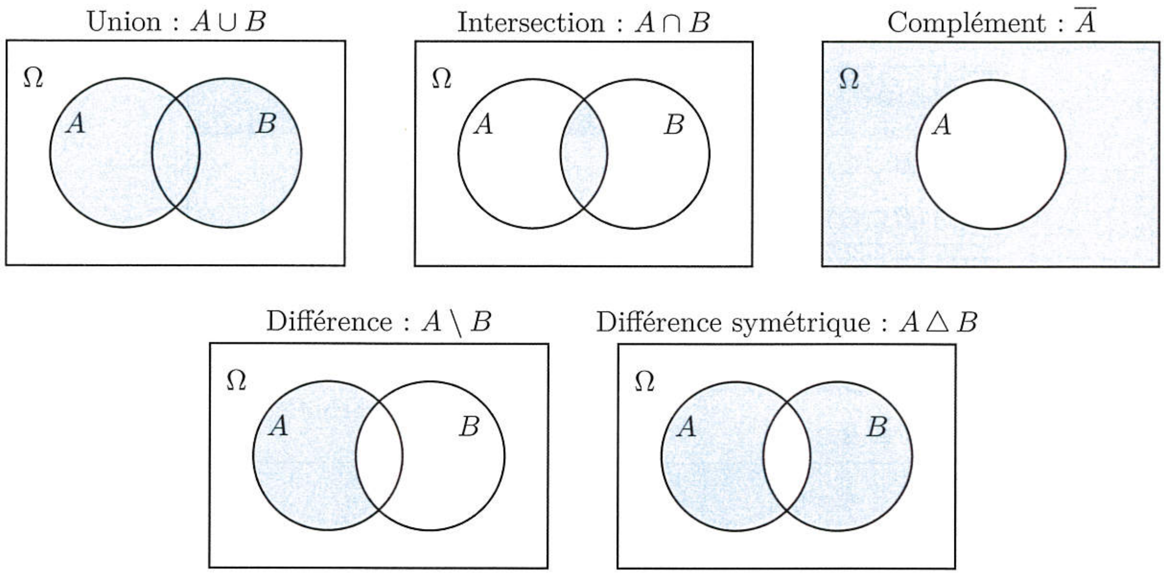

Figure 1.1 – Illustration des opérations ensemblistes à l'aide de diagrammes de Venn. Les surfaces pleines représentent le résultat des différentes opérations.

1.10 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 9\}$ et $C = \{1, 3, 7, 11\}$, calculer

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$
d) $B \setminus A$
e) $(A \cup B) \cap C$
f) $A \cup (B \cap C)$
g) $A \setminus C$
h) $(A \setminus C) \setminus B$
i) $A \setminus (C \setminus B)$

1.11 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calculer

a) $A \triangle B$
b) $B \triangle A$
c) $B \triangle C$
d) $C \triangle \varnothing$

1.12 Dans chacun des cas suivants, déterminer quelle condition (la plus générale possible) doivent vérifier les ensembles A et B pour que l'affirmation soit correcte. Argumenter chaque réponse (à l'aide de diagrammes de Venn, de tables d'appartenance, de développements logiques, ...).

a) $A \cup B = A$
b) $A \cap B = A$
c) $A \setminus B = A$
d) $A \cap B = B \cap A$
e) $A \setminus B = B \setminus A$
f) $A \cup B \subseteq A \cap B$
g) $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$
h) $A \triangle B = A$

Propriétés des opérations ensemblistes

Les principales identités vérifiées par les opérations ensemblistes de base sont résumées dans la table 1.1 où A, B et C sont trois sous-ensembles d'un même univers Ω.

1.13 Vérifier la deuxième loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

a) à l'aide de diagrammes de Venn,
b) à l'aide d'une table d'appartenance,
c) en montrant que chaque côté de l'égalité est un sous-ensemble de l'autre.

Table 1.1 – Propriétés des opérations ensemblistes de base.

Identité		**Nom**
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$		Associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		Distributivité
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$		Commutativité
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$		De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$		Absorption
$\overline{\overline{A}} = A$		Involution
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotence
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$	Identité
$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \Omega = \Omega$	Domination
$A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	Complémentarité

1.14 Soit A, B et C trois ensembles (dans un univers Ω). Vérifier l'identité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

a) à l'aide de diagrammes de Venn,

b) à l'aide d'une table d'appartenance,

c) à l'aide des définitions et des propriétés des opérations sur les ensembles (préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée).

1.15 Soit A et B deux ensembles (dans un univers Ω), simplifier les expressions suivantes en utilisant les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes. Préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée et vérifier vos résultats à l'aide de diagrammes de Venn.

a) $A \setminus (A \setminus B)$ b) $(A \setminus B) \triangle B$ c) $A \cup (B \setminus A)$ d) $A \cap (B \setminus A)$

1.16 a) La différence est-elle une opération commutative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \setminus B = B \setminus A$$

quels que soient les ensembles A et B ?

b) La différence est-elle une opération associative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

quels que soient les ensembles A, B et C ?

1.17 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calculer

a) $A \triangle (B \triangle C)$
b) $(A \triangle B) \triangle C$
c) $A \cup (B \triangle C)$
d) $(A \cup B) \triangle (A \cup C)$
e) $A \cap (B \triangle C)$
f) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

1.18 a) La différence symétrique est-elle une opération commutative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \triangle B = B \triangle A$$

quels que soient les ensembles A et B ?

b) La différence symétrique est-elle une opération associative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

quels que soient les ensembles A, B et C ?

1.4 Ensembles finis et cardinal d'un ensemble

Ensemble fini

Un ensemble est **fini** s'il contient n éléments distincts où n est un entier non négatif. Dans le cas contraire, l'ensemble est **infini**.

Cardinal d'un ensemble

Le **cardinal**, ou la **cardinalité**, d'un ensemble fini A, notée $|A|$, est égal au nombre d'éléments distincts appartenant à l'ensemble A.

Certains auteurs préfèrent les notations Card(A), $\#(A)$ ou $n(A)$ pour désigner le cardinal d'un ensemble. Exemples : $A = \{5, 6, 7\} \Rightarrow |A| = 3$
$B = \emptyset \Rightarrow |B| = |\emptyset| = 0$

1.19 Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fini ou non. Dans l'affirmative, donner son cardinal.

a) $A = \{$entiers à la fois pairs et impairs$\}$
b) $B = \{$cantons suisses$\}$
c) $C = \{$réels positifs plus petits que 1$\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = -1\}$

1.20 Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

a) $\{4\}$
b) $\{\{4\}\}$
c) $\{4, \{4\}\}$
d) $\{4, \{4\}, \{4, 4\}\}$
e) $\varnothing$
f) $\{\varnothing\}$
g) $\{\varnothing, \{4\}\}$
h) $\{4, \{4\}, \{4, \{4\}\}\}$

1.21 Soit A et B deux ensembles finis vérifiant $|A| = 26$ et $|B| = 6$. Déterminer le cardinal de $A \cup B$ si

a) A et B sont disjoints
b) $|A \cap B| = 3$
c) $|A \cap B| = 10$

1.22 **Principe d'inclusion-exclusion pour 2 ensembles**

Soit A et B deux ensembles finis. Déterminer une formule permettant de calculer $|A \cup B|$ à partir de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.

1.23 **Principe d'inclusion-exclusion pour 3 ensembles**
Généraliser le résultat de l'exercice 1.22 au calcul du cardinal de l'union de trois ensembles finis A, B et C.

1.24 Soit A et B deux ensembles finis. Déterminer une formule permettant de calculer $|A \triangle B|$ à partir de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.

1.25 Généraliser le résultat de l'exercice 1.24 au calcul du cardinal de la différence symétrique de trois ensembles finis A, B et C.

1.5 Ensemble des parties

Ensemble des parties

La collection de tous les sous-ensembles d'un ensemble A définit l'**ensemble des parties** de A et est notée $\mathscr{P}(A)$:

$$\mathscr{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Exemple

L'ensemble des parties de l'ensemble $\{\text{Oui}, \text{Non}\}$ est

$$\mathscr{P}(\{\text{Oui}, \text{Non}\}) = \{\varnothing, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}.$$

Théorème

Pour un ensemble fini A on a

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

1.26 Déterminer l'ensemble des parties de chacun des ensembles suivants :

a) $\{0\}$ b) $\{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}$ c) $\varnothing$ d) $\mathscr{P}(\{0\})$

1.27 Combien de sous-ensembles propres et non vides possède un ensemble de cardinal n ($n > 1$) ?

1.28 Dans une classe d'un collège, on compte 17 élèves dont 7 garçons. Combien de groupes non vides et formés uniquement de filles de la classe peut-on définir ?

1.29 Un club de passionnés de sports aériens compte 25 membres possédant tous une licence de deltaplane, de parapente ou de parachutisme (au moins une parmi les trois). Au total on dénombre 45 licences dans le club pour ces trois sports. On sait également que 8 membres ont au moins leurs licences de deltaplane et de parapente, 10 ont au moins celles de parapente et de parachutisme alors que 7 ont au moins celles de deltaplane et de parachutisme.

Combien existe-t-il de groupes formés d'au moins deux membres du club mais composés uniquement de personnes possédant les 3 licences ?

1.30 Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{-1, 1\}$, calculer

a) $\mathscr{P}(A)$

b) $\mathscr{P}(B)$

c) $\mathscr{P}(A \cup B)$

d) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

e) $\mathscr{P}(A \cap B)$

f) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

1.31 Pour deux ensembles quelconques A et B, comparer (y-a-t'il égalité ? inclusion ?)

a) $\mathscr{P}(A \cup B)$ et $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

b) $\mathscr{P}(A \cap B)$ et $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

1.32 Soit A et B deux ensembles finis. Sous quelle condition (la plus générale possible) a-t-on

$$\mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \setminus B).$$

1.6 Produit cartésien et n-uples

n-uple

Un ***n*-uple** est une liste *ordonnée* de n éléments. On note un n-uple en entourant la liste de ses **composantes** par des parenthèses : $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

La **taille** d'un n-uple est égale au nombre n de ses composantes.

Couple et triplet

Un **couple** est un 2-uple, c'est-à-dire une paire ordonnée de deux éléments, alors qu'un **triplet** est un 3-uple.

Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble de *tous* les couples (a, b) où la première composante est un élément de A alors que la seconde est un élément de B :

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Théorème

Si A et B sont deux ensembles finis, on a

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Le produit cartésien $A \times B \times C$ de trois ensembles est l'ensemble de tous les triplets (a, b, c) avec $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$. Plus généralement, le produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Puissance d'un ensemble

Pour tout entier positif n, le produit cartésien de l'ensemble A avec lui-même n fois définit la **n^{e} puissance** de A :

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

1.33 Pour les ensembles $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ et $C = \{0, 1\}$ calculer

a) $A \times B$ c) $A \times B \times C$ e) $C \times \varnothing$

b) $B \times A$ d) C^3 f) $C \times \{\varnothing\}$

1.34 On considère la droite réelle $\mathbb{R}$ et les intervalles fermés $I = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ et $J = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$. Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, les ensembles

a) $I \times J$ b) $I \times \mathbb{R}$ c) $I^2 \setminus J^2$

1.35 Soit $A = \{1, 3, 4, 6\}$ et $B = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, les ensembles

a) $A \times B$ b) $\mathbb{Z} \times A$ c) $B \times \mathbb{Z}$

1.36 Soit les ensembles

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
2) $B = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$,
3) $C =]1, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$,
4) $D = \{2, 3, 4\}$,
5) $E = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$,
6) $F =]2, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

À l'aide de ces ensembles, **et uniquement de ceux-là**, exprimer chacun des ensembles de la figure 1.2.

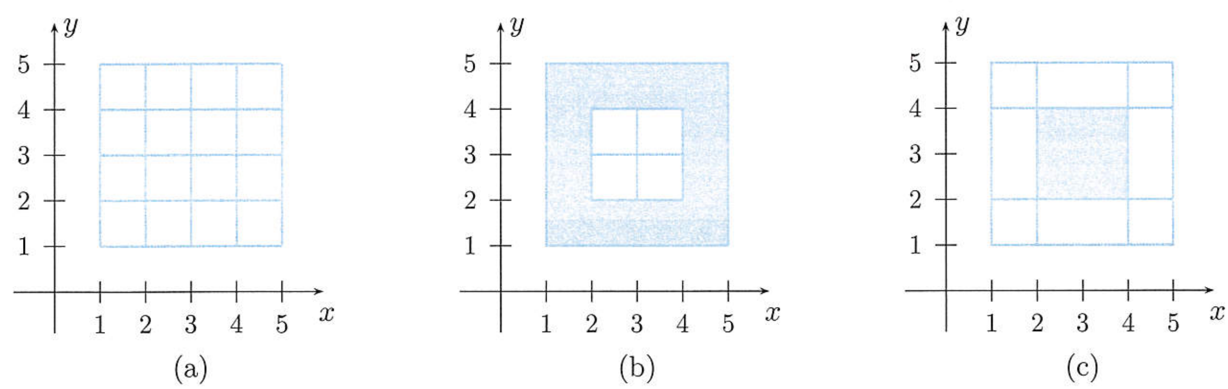

Figure 1.2 – Ensembles de l'exercice 1.36.

1.37 Soit $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{1\}$ et $U = \{2, 3\}$. Déterminer

a) $|T \times U|$ b) $|S^3|$ c) $|S \times \mathscr{P}(U)|$ d) $|\mathscr{P}(T) \times \mathscr{P}(U)|$

1.38 Sous quelles conditions sur les ensembles A et B a-t-on $A \times B = B \times A$?

1.7 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

1.39 Si $A = \{1, 2, 3\}$, déterminer tous les éléments de l'ensemble

$$S = \{X \subseteq A \mid 1 \in X\}.$$

1.40 Si $x \in y$ et $y \in z$, peut-on en déduire que $x \in z$?

1.41 Si $S \subseteq T$ et $T \subseteq U$, peut-on en déduire que $S \subseteq U$?

1.42 Si $S \subseteq T$, peut-on en déduire que $\mathscr{P}(S) \subseteq \mathscr{P}(T)$?

1.43 Décider – en justifiant votre réponse – si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints, alors $\mathscr{P}(A)$ et $\mathscr{P}(B)$ sont disjoints.

1.44 Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non.

a) $1 \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
b) $\{1, 2\} \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
c) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$
d) $\mathscr{P}(\{1\}) \subseteq \{1, 2, \{1, 2\}\}$
e) $\varnothing \in \mathscr{P}(\{1\})$
f) $\{\varnothing\} \subseteq \mathscr{P}(\{1\})$
g) $(\varnothing, \varnothing) \in \varnothing^2$
h) $\{0, 1\} \in \mathscr{P}(\{0, 1\})$
i) $\{0, 1\} \subseteq \mathscr{P}(\{0, 1\})$

1.45 Soit l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ des chiffres décimaux. Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non.

a) $\{3\} \in A$
b) $\{\{0, 2\}, \{4\}\} \in \mathscr{P}(A)$
c) $\{\varnothing\} \subseteq A$
d) $(1, 7) \in A^2$
e) $9 \in A$
f) $\{\varnothing\} \in \mathscr{P}(A)$
g) $(7, 7) \in A$
h) $\{(1, 7)\} \subseteq \mathscr{P}(A^2)$
i) $\{\{3, 9\}, \{3, 3\}\} \subseteq \mathscr{P}(A)$
j) $\{(5, 5)\} \subseteq A^2$
k) $(1, 5, 9) \in A^3$
l) $\{2, -1, 0\} \subseteq A$

1.46 Soit l'ensemble $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Parmi les ensembles A, A^2, $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A)^2$ et $\mathscr{P}(A^2)$,

a) lesquels admettent $\{4\}$ comme élément ?
b) lesquels admettent $\{(2, 6)\}$ comme sous-ensemble ?
c) lesquels admettent $(\{8\}, \{8\})$ comme élément ?
d) lesquels admettent $\varnothing$ comme sous-ensemble ?
e) lesquels admettent $\{\varnothing\}$ comme élément ?
f) lesquels admettent $\{\{0, 8\}\}$ comme sous-ensemble ?

1.47 Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Parmi les ensembles A, A^2, $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(A^2)$, $\mathscr{P}(A)^2$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$,

a) lesquels admettent $(3, 5)$ comme élément ?
b) lesquels admettent $\{\{4, 1\}\}$ comme sous-ensemble ?
c) lesquels admettent $\{\{3\}, \{5\}\}$ comme élément ?
d) lesquels admettent $\{(4, 2)\}$ comme sous-ensemble ?
e) lesquels admettent $\varnothing$ comme élément ?
f) lesquels admettent $\{1, 3\}$ comme sous-ensemble ?
g) lesquels admettent $(\{4, 3\}, \{\varnothing\})$ comme élément ?
h) lesquels admettent $\{\varnothing, \{5\}\}$ comme sous-ensemble ?

1.48 Soit $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ l'ensemble des chiffres impairs. Dans chacun des cas qui suivent, décider si le losange peut être remplacé par une appartenance, une inclusion, les deux ou aucune des deux.

a) $A \lozenge \mathscr{P}(A)$
b) $\{3, 9\} \lozenge A$
c) $A \lozenge \mathbb{N}$
d) $\varnothing \lozenge \mathscr{P}(A)$
e) $\mathbb{Z} \lozenge \mathbb{R}^2$
f) $\{\varnothing\} \lozenge \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$
g) $\{\{3, 5\}, \{1, 7, 9\}\} \lozenge \mathscr{P}(A)$
h) $\{(1, 3, 7)\} \lozenge A^2$

1.49 Une société de développement informatique a passé une annonce pour recruter un nouveau développeur. Afin d'aider le responsable des ressources humaines de la société, les noms des candidats ont été introduits dans une base de données et les trois listes suivantes ont été créées :

▷ une liste A contenant les noms des candidats ayant déjà fait du développement sous Linux,

▷ une liste B contenant les noms des candidats ayant déjà fait du développement sous MacOS,

▷ une liste C contenant les noms des candidats ayant déjà fait du développement sous Windows.

Formuler à l'aide du langage ensembliste (c.-à-d. à l'aide des opérations sur les ensembles) une requête permettant au responsable des ressources humaines de sélectionner tous les candidats qui n'ont de l'expérience de développement que sous un seul système d'exploitation.

1.50 Dans une classe, un sondage a montré que les trois activités sportives les plus pratiquées sont l'aïkido (pratiqué par un sous-ensemble A des étudiant.e.s), le *bare foot* (sous-ensemble B) et la chute libre (sous-ensemble C). En utilisant les opérations sur les ensembles, proposer une formule permettant de calculer, à partir des sous-ensembles A, B et C précédents, l'ensemble D des personnes pratiquant exactement deux de ces trois activités sportives.

1.51 Dans chacun des cas suivants, déterminer (et justifier) quelle condition, la plus générale possible, doivent satisfaire les ensembles A et B pour que l'égalité soit vérifiée :

a) $A \triangle B = \varnothing$ b) $A \setminus (A \setminus B) = B$ c) $|A \cup B| = |A| + |B|$

1.52 Déterminer les éléments de l'univers Ω et ceux de ses trois sous-ensembles A, B et C sachant que

▷ $\overline{A \cup B \cup C} = \{1, 8, 12\}$
▷ $B \cap C = \varnothing$
▷ $A \cap C = \{5\}$
▷ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
▷ $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}$
▷ $\overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$

Détailler clairement chaque étape de votre résolution.

1.53 Pour les ensembles $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, déterminer le cardinal des ensembles

a) $\mathscr{P}(A \cap B)$ b) $\mathscr{P}(A \cup B)$ c) $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ d) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$

INDICATION. Utiliser les résultats des exercices 1.22 et 1.31.

1.54 Soit A, B et C trois ensembles (dans un univers Ω), montrer que $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

a) à l'aide de diagrammes de Venn,

b) à l'aide d'une table d'appartenance,

c) en montrant que chaque côté de l'égalité est un sous-ensemble de l'autre.

1.55 Soit A, B et C trois ensembles (dans un univers Ω). Vérifier l'identité suivante à l'aide d'une table d'appartenance.

$$A \cup (B \triangle C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C).$$

1.56 Soit A et B deux ensembles (dans un univers Ω), vérifier l'identité suivante en utilisant les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes. Préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée et vérifier vos résultats à l'aide de diagrammes de Venn.

$$\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B.$$

1.57 Soit A et B deux ensembles vérifiant

$$|A| = 7, \quad |B| = 6 \quad \text{et} \quad |A \triangle B| = 5.$$

Déterminer, en précisant les étapes intermédiaires de calcul,

a) $|A \cap B|$, b) $|A^2 \times B|$, c) $|\mathscr{P}(B)|$, d) $|\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)|$.

1.58 Soit A et B deux ensembles vérifiant

$$|A| = 8, \quad |B| = 10 \quad \text{et} \quad |A \cup B| = 12.$$

Déterminer, en expliquant et en détaillant les étapes intermédiaires de calcul,

a) $|B \setminus A|$, b) $|A \times B|$, c) $|\mathscr{P}(A)|$, d) $|\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)|$.

1.59 Soit les ensembles $I = [0, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $J = [2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$ et $K = \{0, 2, 4\}$. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère les ensembles

a) $I \times K$ b) $K \times \mathbb{R}_+$ c) $I^2 \setminus (\mathbb{R} \times J)$

1.60 Soit les ensembles

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

2) $B = [1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$,

3) $C =]1, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$,

4) $D = \{2, 3\}$,

5) $E = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,

6) $F =]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$.

a) Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, les ensembles

i) $(C \setminus F) \times D$, ii) $(B \times E) \triangle (E \times B)$.

b) À l'aide des ensembles proposés, et uniquement de ceux-là, exprimer l'ensemble représenté ci-dessous.