a) Calculer les fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$. Donner des expressions aussi simples que possible.

b) Quelles propriétés (injectivité, surjectivité, bijectivité) possèdent les fonctions f et g ? Argumenter brièvement.

REMARQUE. L'ensemble $\mathbb{Z}_n$ est l'ensemble des entiers modulo n, c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ de tous les restes possibles de la division par n dans lequel toutes les opréations se font modulo n.

3.32 On considère les deux fonctions

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & f(x) = \lfloor x/2 \rfloor \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & g(x) = 2x. \end{array}$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$. Donner des formules/expressions simplifiées, ne faisant plus intervenir de parties entières. Esquisser également les graphes des deux compositions pour x entre 0 et 5.

3.7 Solutions d'exercices choisis

3.1 a) 1) $f(E) = \{0, 2, 4, 6\}$, $f(F) = [0, 6[$, $f(G) = \mathbb{R}_+$

2) $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$

3) $f^{-1}(S) = \{1\}$, $f^{-1}(T) =]-\infty, 1]$, $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$

b) 1) $g(E) = g(F) = g(G) = \{1\}$

2) $\mathrm{Im}(g) = g(\mathbb{R}) = \{1\}$

3) $g^{-1}(S) = \varnothing$, $g^{-1}(T) = g^{-1}(U) = \mathbb{R}$

c) 1) $h(E) = \{1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$, $h(F) =]1/8, 2[$, $h(G) =]0, 1]$

2) $\mathrm{Im}(h) = h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

3) $h^{-1}(S) = \{-1\}$, $h^{-1}(T) = [-1, \infty[$, $h^{-1}(U) = \mathbb{R}$

d) 1) $m(E) = \{-2, 0, 2, 18\}$, $m(F) = [-2, 18[$, $m(G) = [-2, \infty[$

2) $\mathrm{Im}(m) = m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

3) $m^{-1}(S) = \{-1, 2\}$, $m^{-1}(T) = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, 2]$, $m^{-1}(U) = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty[$

3.2 a) Pour $x < 0$, la valeur de $x^{3/2}$ n'est pas définie (dans $\mathbb{R}$).

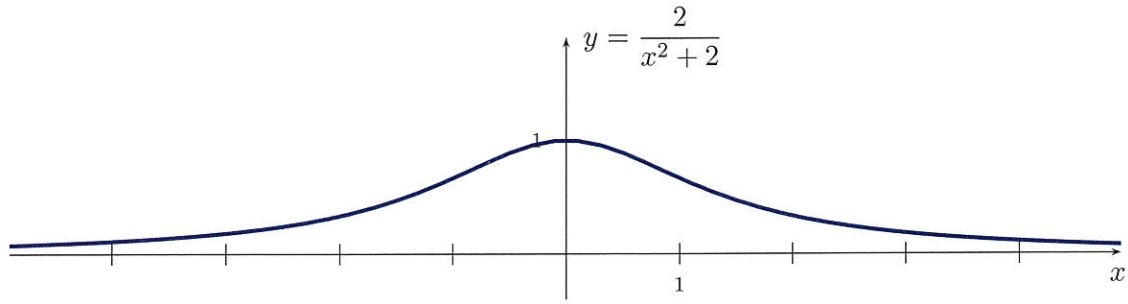
b) La fonction tangente n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Une fonction ne peut prendre (retourner) qu'une seule valeur.

3.3

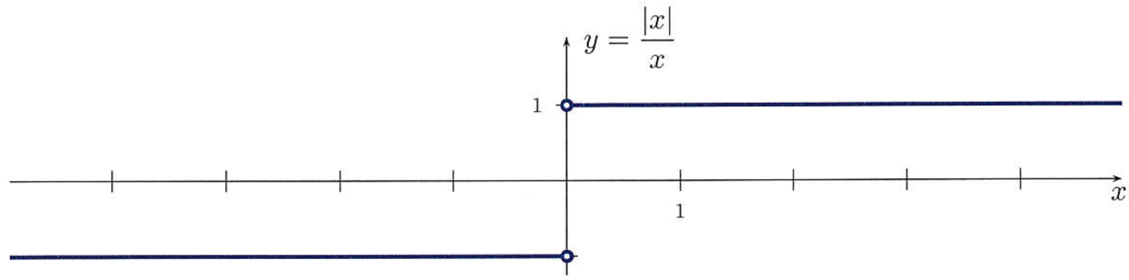
a) Non	c) Oui	e) Oui	g) Oui
b) Oui	d) Non	f) Non	h) Non

3.4 La représentation graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^2+2}$ est



et son image est $\mathrm{Im}(f) =]0, 1]$.

3.5 La représentation graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ est



et son image est $\mathrm{Im}(f) = \{-1, 1\}$.

3.7 a) On a $f(1) = f(-1) = 1$ et la fonction n'est pas injective (en fait on a $f(x) = f(-x)$ quel que soit x non nul car la fonction est paire).

b) On a $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*_+$ et la fonction est surjective.

c) f n'étant pas injective, elle n'est pas bijective.

3.10 a) Oui : $f^{-1}(y) = (4-y)/3$

b) Non, f n'est ni injective ni surjective

c) Non, f n'est ni injective ni surjective

d) Oui : $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

3.14 Arrondi par défaut de x : $\lceil x - 1/2 \rceil$, arrondi par excès de x : $\lfloor x + 1/2 \rfloor$.

3.17 a) $13 \bmod 3 = 1$

b) $-97 \bmod 11 = 2$

c) $155 \bmod 19 = 3$

d) $-221 \bmod 23 = 9$

e) $28 \bmod 6 = 4$

f) $-62 \bmod 9 = 1$

g) $-7 \bmod 1 = 0$

h) $422 \bmod 50 = 22$

3.18 Les deux règles de calcul valides sont

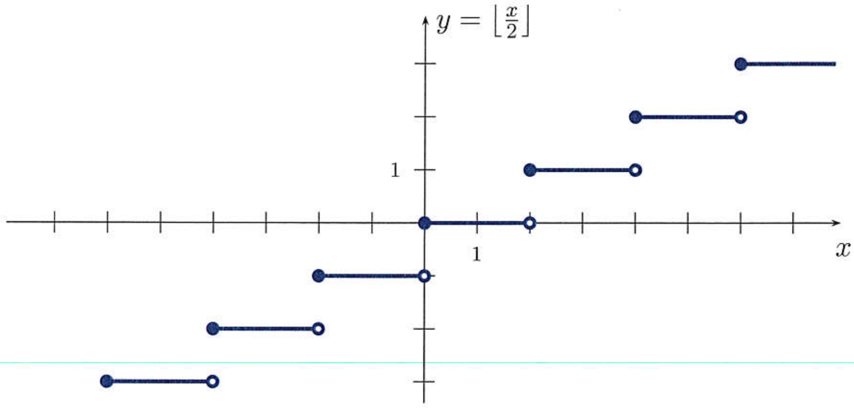
a) $(a+b) \bmod m = \big[(a \bmod m) + (b \bmod m)\big] \bmod m$

b) $(a \cdot b) \bmod m = \big[(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)\big] \bmod m$

3.19 $(n-1)^2$

3.21 $\mathrm{Im}(f) =]-1, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

3.24 La représentation graphique de la fonction $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ est



a) L'ensemble des préimages de 1 est $f^{-1}(\{1\}) = [2,4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\}$.

b) L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}$ (équivalent à $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$).

c) Du point a) on a qu'il existe une infinité de nombres réels ayant 1 pour image, ainsi f prend plusieurs fois la même valeur et n'est pas injective.

d) Du point b) on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$ et f n'est pas surjective.

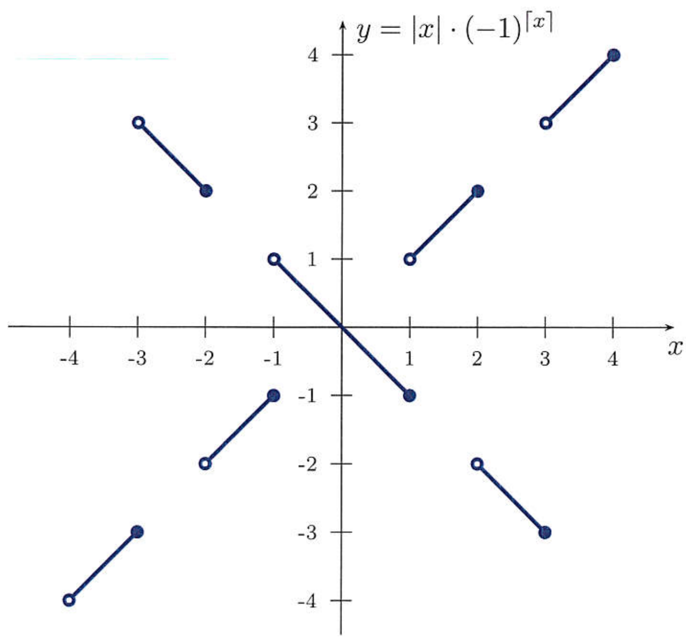
3.25 a) $f(A) = \{0,1\}$

b) $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$

c) Non ($f(0) = f(1) = 0$)

d) Non ($f(\mathbb{R}) = \{0,1\} \neq \mathbb{R}$)

3.27 a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = x| \cdot (-1)^{\lceil x \rceil}$ pour x entre -4 et 4 est



b) L'image de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$ est $f(I) = [-1, -1/2] \cup]1, 3/2]$.

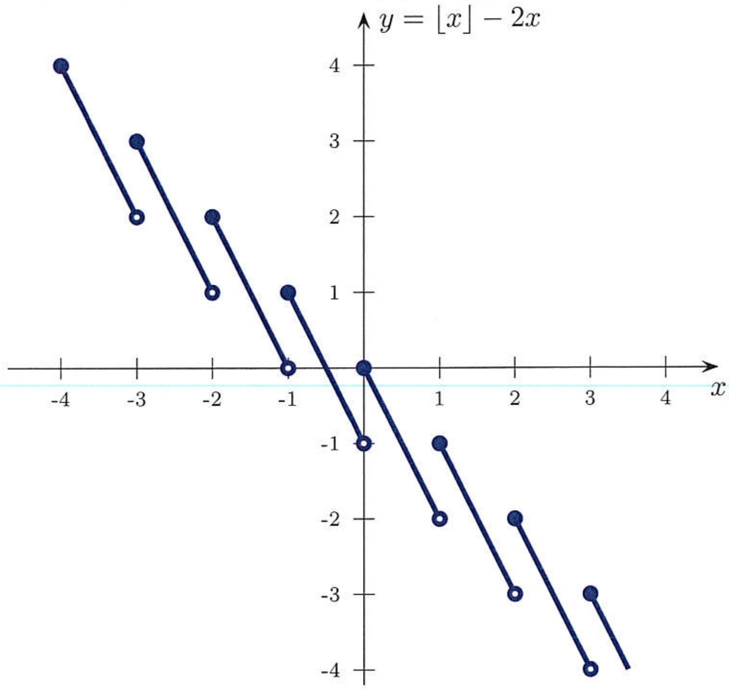
c) L'image réciproque de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$ est $f^{-1}(I) =]-1, -1/2] \cup]1, 3/2]$.

d) La fonction f n'est pas injective car 1 et -1 ont la même image ($f(1) = f(-1) = -1$) et, plus généralement, tout entier a la même image que son opposé.

e) La fonction f n'est pas surjective car 1 n'a pas de préimages et, plus généralement, tous les positifs impairs et tous les négatifs pairs n'ont pas de préimages.

f) La fonction n'est pas bijective car elle n'est ni injective ni surjective.

3.28 a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor - 2x$ pour x entre -4 et 4 est



b) L'image de la fonction f est $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ (ou $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).

c) L'image de l'intervalle $I = [0\,;\,2]$ est $f(I) =]-3\,;\,0]$.

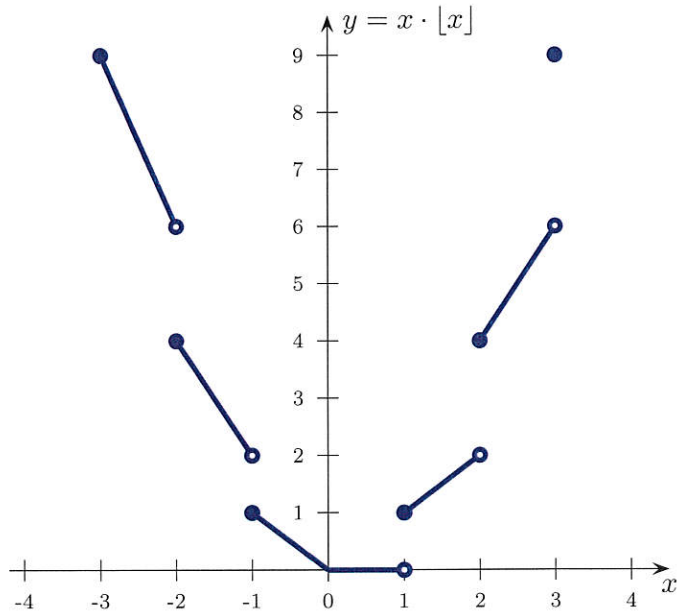
d) L'image réciproque de l'intervalle $J = [-1/2\,;\,3/2]$ est

$$f^{-1}(J) = [-9/4\,;\,-2[\cup[-7/4\,;\,-1/4] \cup [0\,;\,1/4].$$

e) La fonction f n'est pas injective car, par exemple, $f(-1/2) = f(0) = 0$. On a donc deux éléments différents du domaine de définition possédant la même image. Plus généralement, tout élément du codomaine possède deux préimages par la fonction f.

f) La fonction f est surjective car l'image de la fonction est égale à son codomaine tout entier : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ (voir point a)

3.30 a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$ pour x entre -3 et 3 est



b) La fonction f n'est pas injective car, par exemple, $f(-1) = f(1) = 1$. Certains éléments du codomaine ont donc plus d'une préimage.

c) La fonction f n'est pas surjective car, par exemple, 2 n'a aucune préimage. L'image de la fonction n'est donc pas égale au codomaine tout entier.

3.31 a) On a d'une part

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g((13x + 40) \bmod 110)\\ &= (17(13x + 40) + 90) \bmod 110 = (221x + 680 + 90) \bmod 110\\ &= (221x + 770) \bmod 110 = x\end{aligned}$$

car $221 = 2 \cdot 110 + 1$ et $770 = 7 \cdot 110$ et d'autre part

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f((17x + 90) \bmod 110)\\ &= (13(17x + 90) + 40) \bmod 110 = (221x + 1170 + 40) \bmod 110\\ &= (221x + 1210) \bmod 110 = x\end{aligned}$$

car $1210 = 11 \cdot 110$.

b) Les fonctions f et g sont des fonctions inverses l'une de l'autre car $g \circ f$ et $f \circ g$ sont égales à l'identité. Les fonctions f et g sont donc toutes les deux bijectives et, *a fortiori*, injectives et surjectives.