Chapitre 2

Les relations

Relation d'un ensemble vers un autre

Une **relation de l'ensemble A vers l'ensemble B** est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$.

- Si R est une relation de A vers B et si le couple (a, b) appartient à la relation, on dit que **a est en relation avec b** ou que **a est lié à b** et on note $(a, b) \in R$ ou $a \, R \, b$.
- Réciproquement, si le couple (a, b) n'est pas dans la relation R, on dit que **a n'est pas en relation avec b** et on note $(a, b) \notin R$ ou $a \not R \, b$.
- EXEMPLE 1. A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école et B l'ensemble des cours dispensés ce semestre. L'ensemble

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant-e } a \text{ suit actuellement le cours } b\}$$

est une relation de A vers B.

Relation (suite des exemples)

- EXEMPLE 2. Pour l'ensemble A des couleurs et l'ensemble B des pays, on peut définir une relation R de A vers B qui met la couleur a en correspondance avec le pays b si a apparaît dans le drapeau national de b. On aura, entre autre,

$$(\text{rouge}, \text{Suisse}) \in R \qquad \text{mais} \qquad (\text{vert}, \text{France}) \notin R.$$

- EXEMPLE 3. Si A et B sont tous deux égaux à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, on peut définir une relation de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ formée de tous les couples d'entiers (x, y) où x est inférieur ou égal à y. Si x est en relation avec y on note, classiquement, $x \leq y$, dans le cas contraire on note $x \not\leq y$:

$$3 \leq 7 \qquad -2 \not\leq -10.$$

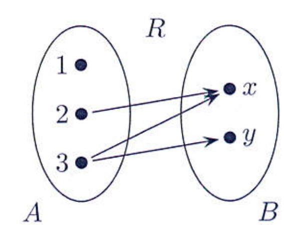
Graphe d'une relation de A vers B

- Si les ensembles A et B sont finis, on peut représenter une relation de A vers B par un **graphe** (biparti) :
  - Les éléments de A et de B sont chacun représentés par un point distinct (ce sont les sommets du graphe).
  - Chaque couple (a, b) de R est représenté par une flèche reliant le sommet correspondant à a à celui correspondant à b (ce sont les arcs du graphe).
- EXEMPLE.

$A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{x, y\}$,

$R = \{(2, x), (3, x), (3, y)\}$.



Matrice d'une relation de A vers B

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

- Si les ensembles A et B sont finis, on peut également représenter une relation de A vers B par une **matrice $M(R)$** (un tableau à deux dimensions) :
  - Chaque élément de A est associé à une ligne de la matrice.
  - Chaque élément de B est associé à une colonne.
  - L'entrée à l'intersection de la ligne associée à l'élément $a \in A$ et de la colonne associée à l'élément $b \in B$ est égale à 1 si $(a, b) \in R$ et est égale à 0 sinon.
- EXEMPLE.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$,

$R = \{(2, x), (3, x), (3, y)\}$.

R	x	y
1	0	0
2	1	0
3	1	1

$$\boxed{M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Relation sur un ensemble

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

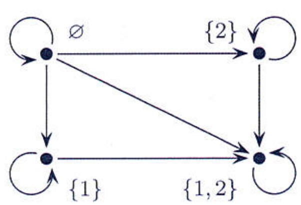
Une **relation sur l'ensemble A** est une relation de A vers A, c'est-à-dire un sous-ensemble du produit $A^2 = A \times A$.

- EXEMPLE 1. Si A est l'ensemble des pays, le sous-ensemble R de A^2 contenant tous les couples de pays limitrophes, c.-à-d. ayant une frontière commune, est une relation sur A. On a, entre autre, $(\text{Suisse}, \text{France}) \in R$ et $(\text{Espagne}, \text{Suisse}) \notin R$.
- EXEMPLE 2. Les trois ensembles suivants sont autant de relations sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs :
  1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2\}$
  2. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
  3. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \leq 3\}$

Graphe d'une relation sur un ensemble fini

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

- Plutôt que de recourir au graphe biparti associé à une relation entre deux ensemble finis, on préférera représenter une relation R sur un ensemble fini A par un **graphe orienté** dont les sommets correspondent aux éléments de A et où deux sommets a et b sont reliés par un arc de a vers b si $(a, b) \in R$.
- EXEMPLE. Soit l'ensemble $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ et la relation R sur A définie par $R = \{(S, T) \mid S \text{ est un sous-ensemble de } T\}$. Le graphe représentatif de R, qui n'est rien d'autre que la relation d'inclusion ($R = \subseteq$), est



Relations complémentaire et inverse

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

- La **relation complémentaire** d'une relation R de A vers B est la relation $\overline{R}$, elle aussi de A vers B, formée de tous les couples du produit cartésien $A \times B$ n'appartenant pas R :

$$\boxed{\overline{R} := \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \notin R\} = (A \times B) \setminus R}.$$

- La **relation inverse** d'une relation R de A vers B est la relation R^{-1}, de B vers A, obtenue en inversant l'ordre des composantes de chacun des couples de R :

$$\boxed{R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}}.$$

- EXEMPLE. Sur l'ensemble des personnes, la relation complémentaire de la relation « est le fils ou la fille de » est la relation « n'est pas l'enfant de » alors que la relation inverse est la relation « est le père ou la mère de ».

Composition de deux relations

- Soit R une relation de A vers B et S une relation de B vers C. La **composition** de R et S, notée $S \circ R$, est la relation de A vers C formée des couples $(a, c) \in A \times C$ pour lesquels il existe (au moins) un élément $b \in B$ avec $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in S$:

$$\boxed{\boldsymbol{S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B \text{ avec } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in S\}}}.$$

- EXEMPLE 1. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école, B l'ensemble des cours dispensés ce semestre et C l'ensemble des enseignants et enseignantes de l'école. Soit encore les relations

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant-e } a \text{ suit le cours } b\}$$

et

$$S = \{(b, c) \in B \times C \mid \text{le cours } b \text{ est donné par l'enseignant-e } c\}.$$

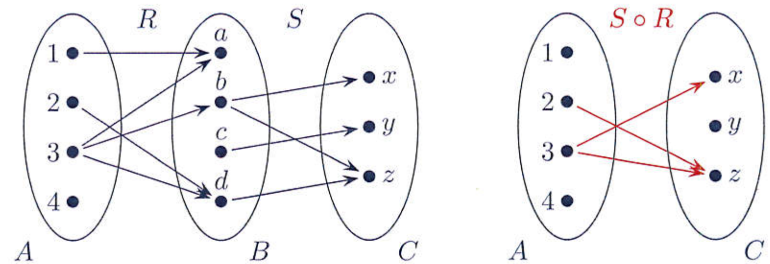
La composition $S \circ R$ est l'ensemble des couples (a, c) où l'étudiant-e a suit au moins un cours donné par l'enseignant-e c ce semestre.

Composition de deux relations (suite)

- EXEMPLE 2. Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ et $C = \{x, y, z\}$ et les relations

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\} \text{ et } S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}.$$

On peut calculer la relation $S \circ R$ à partir des graphes de R et S :



$$S \circ R = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}$$

Matrice d'une composition

- Si A, B et C sont trois ensembles finis et si R est une relation de A vers B et S une relation de B vers C, on peut calculer la matrice $\boldsymbol{M}(S \circ R)$ de la relation composée $S \circ R$ à partir du produit des matrices des deux relations R et S.
- Le **produit de deux matrices P et Q** (qui sera étudié en détails dans le cours MBT) s'obtient en appliquant la règle

« **ligne × colonne** »

- Selon cette règle :

> L'entrée (i, j) du produit $\boldsymbol{PQ}$ (l'élément en ligne i et colonne j) s'obtient en sommant les produits des éléments correspondants de la ligne i de $\boldsymbol{P}$ et de la colonne j de $\boldsymbol{Q}$.

Matrice d'une composition (suite)

- Pour les relations R et S du dernier exemple, on a

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Le produit matriciel $\boldsymbol{M}(R)\boldsymbol{M}(S)$ est

$$\boldsymbol{M}(R) \cdot \boldsymbol{M}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrice d'une composition (suite)

- L'élément $(3,1)$ du produit est obtenu en multipliant, terme à terme, ceux de la 3e ligne de $M(R)$ avec ceux de la 1re colonne de $M(S)$ et en sommant le tout :

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1.$$

- Pour obtenir la matrice de la relation composée $S \circ R$, il suffit de remplacer dans le produit $M(R)M(S)$ tous les éléments supérieurs à 1 par 1.
- Pour l'exemple, on obtient

$$M(R) \cdot M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies M(S \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Composition de plusieurs relations

- On peut composer plus de deux relations. Ainsi si R est une relation de A vers B, S une relation de B vers C et T une relation de C vers D, **la composition de R, S et T est la relation $T \circ S \circ R$ de A vers D** obtenue en calculant, indifféremment,

$$(T \circ S) \circ R \qquad \text{ou} \qquad T \circ (S \circ R)$$

car la composition de relations est associative !

- On peut composer une relation R sur l'ensemble A avec elle-même, on définit alors les **puissances de R** :

$$R^2 = R \circ R, \quad R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R = R \circ R^2$$

et plus généralement

$$\boxed{\boldsymbol{R^n = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots}}$$

Propriétés d'une relation sur un ensemble

On classifie les relations sur un ensemble à l'aide de quatre propriétés principales :

- la **réflexivité**,
- la **symétrie**,
- l'**antisymétrie**,
- la **transitivité**.

Ces quatre propriétés sont à la base des définitions de deux types particulièrement importants de relations : les **relations d'ordre** et les **relations d'équivalence**.

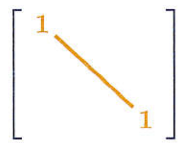
Réflexivité

> Une relation R sur un ensemble A est **réflexive** si et seulement si $(a,a) \in R$ pour tout élément $a \in A$.

- Dit autrement, une relation sur l'ensemble A est réflexive si et seulement si *chaque* élément de A est en relation avec lui-même.
- EXEMPLE 1. La relation d'inclusion (sur une collection d'ensembles) est réflexive car $S \subseteq S$ pour tout ensemble S.
- EXEMPLE 2. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) n'est pas réflexive car personne n'est le fils/la fille de lui/elle-même. (Une telle relation est dite irréflexive.)
- EXEMPLE 3. La relation $R = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 2y\}$ n'est pas réflexive car $(0,0) \notin R$ (même si $(x,x) \in R$ pour tout $x > 0$).

La relation R sur A est-elle réflexive ?

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est réflexive si et seulement si la diagonale principale de la matrice $M(R)$ de la relation ne contient que des 1 :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est réflexive si et seulement si une boucle relie chaque sommet du graphe à lui-même.

Symétrie

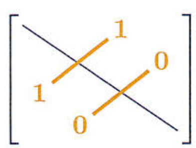
Une relation R sur un ensemble A est **symétrique** si et seulement si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b on a aussi (et obligatoirement) l'élément b en relation avec l'élément a :

$$(a,b) \in R \implies (b,a) \in R \quad \text{quels que soient } a \text{ et } b \text{ dans } A.$$

- EXEMPLE 1. La relation, sur l'ensemble des pays, formée de tous les couples de pays limitrophes est symétrique.
- EXEMPLE 2. La relation sur $\mathbb{Z}$ où x est en relation avec y si et seulement si x a la même parité que y (c.à-d. si et seulement si x et y ont la même parité) est symétrique.
- EXEMPLE 3. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) n'est pas symétrique.

La relation R sur A est-elle symétrique ?

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est symétrique si et seulement si la matrice $M(R)$ de la relation est symétrique par rapport à sa diagonale principale :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est symétrique si et seulement si entre deux sommets distincts il y a soit un arc dans chaque direction soit aucun arc (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).
- PROPRIÉTÉ. Une relation R est symétrique si et seulement si $R^{-1} = R$.

Antisymétrie

Une relation R sur un ensemble A est **antisymétrique** si et seulement si la seule situation où il est possible d'avoir simultanément $(a,b) \in R$ et $(b,a) \in R$ arrive lorsque $a = b$:

$$(a,b) \in R \text{ et } (b,a) \in R \Longrightarrow a = b \qquad \forall a,b \in A.$$

- Dit autrement, la relation R est antisymétrique si et seulement si pour toute paire d'éléments a et b *distincts*, on a soit a en relation avec b, soit b en relation avec a, soit ni l'un ni l'autre mais en aucun cas les deux.
- EXEMPLE 1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est antisymétrique car la seule manière d'avoir simultanément $x \leq y$ et $y \leq x$ est d'avoir $x = y$.

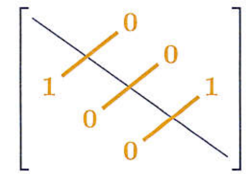
Antisymétrie (suite des exemples)

- EXEMPLE 2. La relation d'inclusion est antisymétrique car si deux ensembles A et B sont tels que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ on a forcément $A = B$.
- EXEMPLE 3. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) est antisymétrique car personne n'est en même temps le fils/la fille *et* le père/la mère de quelqu'un d'autre.
- EXEMPLE 4. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ n'est pas antisymétrique car 1 est en relation avec -1, -1 est en relation avec 1 mais $1 \neq -1$.
- EXEMPLE 5. Sur $\mathbb{N}$, la relation $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ est, elle, antisymétrique !

La relation R sur A est-elle antisymétrique ?

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est antisymétrique si et seulement si, dans la matrice $M(R)$ de la relation, il n'existe pas deux 1 en symétrie par rapport à la diagonale principale :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est antisymétrique si et seulement si il y a *au plus* un arc entre toute paire de sommets distincts (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).

Symétrie *vs* Antisymétrie

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

La symétrie et l'antisymétrie ne sont pas deux propriétés opposées ou exclusives l'une de l'autre !

Il existe en effet des relations

- à la fois symétrique et antisymétrique,
- ni symétrique, ni antisymétrique.

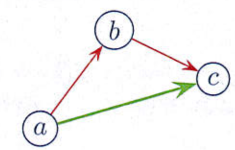
EXEMPLE 1. La relation d'égalité sur un ensemble A, c.-à-d. la relation formée de tous les couples $(a, b) \in A \times A$ vérifiant $a = b$, est à la fois symétrique et antisymétrique.

EXEMPLE 2. Les relations « est le frère de » et « est la sœur de » (sur l'ensemble des personnes) ne sont ni symétriques ni antisymétriques.

Transitivité

1. Les ensembles
2. Les relations
Relation
Graphe d'une relation
Matrice d'une relation
Complément et inverse
Composition
Propriétés
Réflexivité
Symétrie
Antisymétrie
Transitivité
Relation d'ordre
Diagrammes de Hasse
Relation d'équivalence
Classes d'équivalence
3. Les fonctions

Une relation R sur un ensemble A est **transitive** si et seulement si à chaque fois que l'on trouve deux couples (a, b) et (b, c) dans R on y trouve également le couple (a, c) :



$$(a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in R \implies (a, c) \in R \qquad \forall\, a, b, c \in A.$$

- EXEMPLE 1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est transitive car si les trois nombres réels x, y et z vérifient $x \leq y$ et $y \leq z$ on a aussi (et obligatoirement) $x \leq z$.
- EXEMPLE 2. La relation R, sur l'ensemble des pays, formée de tous les couples de pays limitrophes n'est pas transitive. On a, en effet,

$$(\text{France}, \text{Suisse}) \in R \quad \text{et} \quad (\text{Suisse}, \text{Autriche}) \in R$$

mais

$$(\text{France}, \text{Autriche}) \notin R.$$

La relation R sur A est-elle transitive ?

Considérons une relation R sur un ensemble A.

- À chaque fois que l'on trouve trois éléments a, b et c de A vérifiant $(a,b) \in R$ et $(b,c) \in R$, on a $(a,c) \in R^2 = R \circ R$ par définition de la composition. Cependant si R est transitive on a aussi $(a,c) \in R$.
  Ainsi, si une relation R est transitive, tout élément de R^2 est déjà élément de R :
  $$\boldsymbol{R} \text{ transitive} \Longrightarrow \boldsymbol{R^2 \subseteq R}.$$
- Réciproquement, si la relation R n'est pas transitive, il existe trois éléments a, b et c dans A avec $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ mais $(a,c) \notin R$. Cependant (a,c) appartient à R^2 (par définition) et on a
  $$\boldsymbol{R} \text{ non transitive} \Longrightarrow \boldsymbol{R^2 \not\subseteq R}.$$

La relation R sur A est-elle transitive ? (suite)

En combinant les deux résultats précédents, on obtient

Théorème. *Une relation R sur un ensemble A est transitive si et seulement si*
$$R^2 \subseteq R.$$

- Exemple. Si $A = \{1,2,3,4\}$ et $R = \{(1,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$, on a

$$\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}(R)\boldsymbol{M}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}(R^2).$$

Ainsi $R^2 = \{(1,1),(3,1),(3,4)\} \subseteq R$ et R est transitive.

Relation d'ordre

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'ordre** si et seulement si elle est simultanément

- **réflexive** : $a\,R\,a$ pour tout $a \in A$,
- **antisymétrique** : si $a\,R\,b$ et $a \neq b$ alors $b \not R\, a$
- **transitive** : si $a\,R\,b$ et $b\,R\,c$ alors $a\,R\,c$.

- Exemple 1. La relation d'ordre la plus connue est la relation $\leq$ (« plus petit ou égal ») qu'elle soit définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, relatifs $\mathbb{Z}$ ou, plus généralement, sur un sous-ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- Exemple 2. La relation d'inclusion ($\subseteq$) est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties $\mathscr{P}(S)$ d'un ensemble S ou, plus généralement, sur toute collection $\mathcal{C}$ d'ensembles.

Éléments comparables et ordre partiel ou total

- Si R est une relation d'ordre sur A, deux éléments $a, b \in A$ sont dits **comparables** si on a $a\,R\,b$ ou $b\,R\,a$ (voire les deux dans le cas particulier où $a = b$).

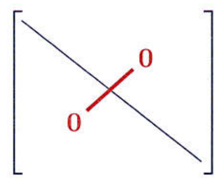
Une relation d'ordre R est
- un **ordre partiel** s'il existe au moins deux éléments a et b non comparables,
- un **ordre total** ou **linéaire** si chaque paire d'éléments de A est comparable.

- Exemple 1. La relation d'ordre $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$ (et, plus généralement, sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$) car si n et m sont deux entiers non négatifs, on a soit $n \leq m$, soit $m \leq n$ (voire les deux si n et m sont égaux).

Ordre partiel ou total (suite des exemples)

- EXEMPLE 2. La relation d'inclusion sur l'ensemble des parties $\mathscr{P}(S)$ d'un ensemble S (de cardinal ≥ 2) est un ordre partiel mais pas total, car il existe des sous-ensembles de S qui ne sont pas comparables. En effet, si A et B sont deux sous-ensembles non vides et disjoints de S $(A \cap B = \varnothing)$, on n'a ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. A et B ne sont donc pas comparables par la relation $\subseteq$.

- PROPRIÉTÉ. Si R est une relation d'ordre sur un ensemble A fini, R est un ordre total si et seulement si la matrice $M(R)$ ne contient pas deux 0 en symétrie par rapport à sa diagonale principale car cette disposition correspondrait à deux éléments non comparables.



Diagrammes de Hasse

Le **diagramme de Hasse** d'un ordre, partiel ou total, est une simplification du graphe de la relation.

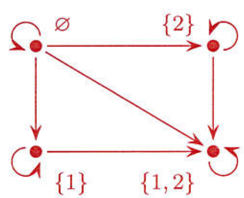
- Les boucles ne sont pas représentées (leur présence se déduisant de la réflexivité de la relation).

- Les arcs se déduisant par transitivité ne sont pas représentés.

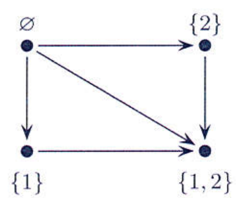
- On oublie l'orientation des arcs en adoptant la convention : si $a\,R\,b$ alors a est placé en dessous de b dans le dessin (tous les arcs sont dirigés vers le haut).

Exemple

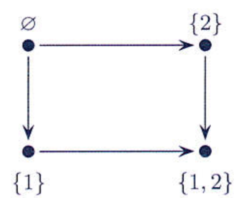
Pour la relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ on a la suite de graphes :



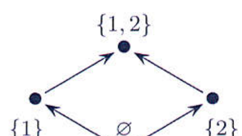
1. Graphe de R



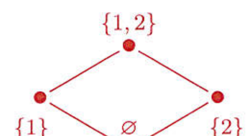
2. Suppression des boucles



3. Suppression des arcs transitifs



4. Orientation des arcs vers le haut



5. Diagramme de Hasse de R

Relation d'équivalence

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'équivalence** si et seulement si elle est simultanément
- **réflexive** : $a\,R\,a$ pour tout $a \in A$,
- **symétrique** : si $a\,R\,b$ alors $b\,R\,a$,
- **transitive** : si $a\,R\,b$ et $b\,R\,c$ alors $a\,R\,c$.

- Deux éléments $a, b \in A$ liés par une telle relation (on a forcément $a\,R\,b$ et $b\,R\,a$ par symétrie) sont dits **équivalents**.

- EXEMPLE 1. Si A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école, l'ensemble des couples d'étudiant.e.s du même département définit une relation d'équivalence sur A.

Relations d'équivalence (suite des exemples)

- EXEMPLE 2. Si A est l'ensemble des mots de la langue française, l'ensemble des couples de mots ayant le même nombre de lettres définit une relation d'équivalence sur A.
- EXEMPLE 3. La relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y \text{ ou } x = -y\}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour cette relation, qui s'écrit aussi $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = |y|\}$, les entiers 2 et -2 sont équivalents car $|2| = |-2|$.
- EXEMPLE 4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'ensemble formé de tous les couples de points $(X(x_1, x_2), Y(y_1, y_2))$ pour lesquels

$$\max(x_1, x_2) = \max(y_1, y_2)$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

Relations d'équivalence (suite des exemples)

- Quel que soit le point $X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il est en relation avec lui-même car on a (trivialement)

$$\max(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2).$$

La relation est donc réflexive.

- Quels que soient les points $X(x_1, x_2)$ et $Y(y_1, y_2)$, si le premier est en relation avec le second alors le second l'est avec le premier car l'égalité est symétrique :

$$\max(x_1, x_2) = \max(y_1, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \max(y_1, y_2) = \max(x_1, x_2).$$

La relation est donc symétrique.

- La transitivité de la relation découle, elle aussi de celle de l'égalité :

$$\left.\begin{array}{c} \max(x_1, x_2) = \max(y_1, y_2) \\ \text{et} \\ \max(y_1, y_2) = \max(z_1, z_2) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \max(x_1, x_2) = \max(z_1, z_2)$$

quels que soient les points $X(x_1, x_2)$, $Y(y_1, y_2)$ et $Z(z_1, z_2)$ du plan.

Classes d'équivalence

Pour une relation d'équivalence R sur l'ensemble A, le sous-ensemble de A formé de tous les éléments équivalents à $a \in A$ s'appelle la **classe d'équivalence de a** et se note $[a]_R$ ou, simplement, $[a]$ (lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur R) :

$$[a]_R := \{s \in A \mid a\,R\,s\} = \{s \in A \mid (a, s) \in R\}.$$

- PROPRIÉTÉS.
  - *Si les éléments a et b sont équivalents pour la relation R (c.-à-d. si $(a, b) \in R$) alors $[a]_R = [b]_R$.*
  - *Si les éléments a et b ne sont pas équivalents pour la relation R (c.-à-d. si $(a, b) \notin R$) alors $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.*
- **Théorème.** *Deux classes d'équivalence $[a]$ et $[b]$ sont ou bien égales ou bien disjointes.*

Exemples

- EXEMPLE 1. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, la relation R où $x\,R\,y$ si et seulement si x et y ont la même parité est une relation d'équivalence. Elle possède deux classes d'équivalence, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs :

$$\begin{aligned} [1] &= \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} = [-1] = [3] = [-3] = \ldots \\ [2] &= \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = [0] = [-2] = [4] = \ldots \end{aligned}$$

- EXEMPLE 2. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école et R la relation d'équivalence formée de tous les couples d'étudiant-e-s d'un même département.
Les classes d'équivalence de R sont les listes d'étudiant-e-s des différents départements de l'école. Ces classes sont disjointes car chaque étudiant-e est inscrit-e dans un seul département.
- EXEMPLE 3. La relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$

$$R = \{(X(x_1, x_2), Y(y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \max(x_1, x_2) = \max(y_1, y_2)\}$$

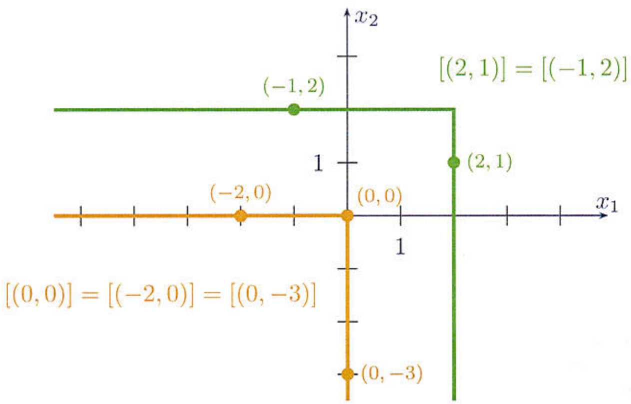
possède une infinité de classes d'équivalence.

Exemples (suite)

- La classe d'équivalence de l'origine est

$$[(0,0)] = \{(x_1,0) \mid x_1 \leq 0\} \cup \{(0,x_2) \mid x_2 \leq 0\}.$$

- Celle du point $(2,1)$ est $[(2,1)] = \{(x_1,2) \mid x_1 \leq 2\} \cup \{(2,x_2) \mid x_2 \leq 2\}$.



Partitions

Une **partition** d'un ensemble A est une décomposition de A en sous-ensembles disjoints.

- PROPRIÉTÉ. Si R est une relation d'équivalence sur A, l'ensemble des classes d'équivalence de R forme une partition de A.

- EXEMPLE. Sur l'ensemble $A = \{1,2,3,4\}$, la relation R de matrice

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possède 2 classes d'équivalence :

$$A_1 = [1] = [4] = \{1,4\} \quad \text{et} \quad A_2 = [2] = [3] = \{2,3\}.$$

Ces deux classes sont disjointes : $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ et leur union est égale à A tout entier : $A_1 \cup A_2 = A$, elles forment donc une partition de A.