6.4 Solutions d'exercices choisis

6.1 $\overrightarrow{BS} = -\vec{u} + \vec{w}$, $\overrightarrow{DS} = -\vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$

6.2 $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \vec{0}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DC}$

6.3 $\vec{x} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$

6.4 $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

6.5 Par définition, le vecteur nul $\vec{e}$ est colinéaire à tous les vecteurs. Sinon, les paires de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{d}$, $\vec{b}$ et $\vec{h}$, $\vec{c}$ et $\vec{g}$ sont colinéaires.

6.6 a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ b) $G(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3})$ c) $G(3,1)$

6.7 $\vec{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

6.8 a) 5 b) $\sqrt{77}$ c) $6\sqrt{3}$

6.9 $\vec{e}_1 = \frac{1}{7}\vec{a}$ et $\vec{e}_2 = -\frac{1}{7}\vec{a}$

6.10 a) Non b) Oui

6.11 a) $C(1,1)$ b) $C(6,3,4)$

6.12 $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

6.13 $-\frac{1}{8}\vec{v}$

6.14 a) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 1{,}05$ rad $\approx 60{,}26°$ b) $\angle(\vec{a},\vec{b}) \approx 1{,}64$ rad $\approx 94{,}1°$

6.15 $-1/6$

6.18 $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$ et $\gamma = \pi/4$

6.19 a) $\vec{a}_{\vec{b}} = 3\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $||\vec{a}_{\vec{b}}|| = 9$ b) $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{23}{19}\vec{b} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 69 \\ -115 \\ -46 \end{bmatrix}$ et $||\vec{a}_{\vec{b}}|| = \frac{23\sqrt{38}}{19}$

6.20 $\vec{u} = \dfrac{13}{2}\vec{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 32.5 \end{bmatrix}$

6.21 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 13/8 \\ -13/4 \end{bmatrix}$

6.22 a) $\begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ c) $6(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{bmatrix} -72 \\ -24 \\ 48 \end{bmatrix}$ e) -44

f) $-2(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ -16 \end{bmatrix}$

b) 0 d) 44

6.23 7/2

6.24 22

6.25 7/2

6.26 Le produit mixte $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est nul.

6.27 Oui

6.28 a) sécantes
b) parallèles
c) sécantes
d) confondues
e) sécantes
f) perpendiculaires
g) parallèles
h) parallèles

6.29 a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 1 & + & \lambda \\ x_2 & = & 2 & + & 3\lambda \end{array}\right., \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) $(d) : x_1 + 3x_2 = 17$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 7/2 & + & 3\lambda \\ y & = & & - & 2\lambda \end{array}\right., \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

d) $(0, 11)$ et $(11/3, 0)$

6.30 a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) $(\Delta) : 5x_1 + 12x_2 = 37$

6.31 a) $(d) : x + 4y = 23$

b) $(d) : 3x + 7y = -23$

6.32 Elles sont parallèles et distinctes.

6.33 8/5

6.34 $4x - 3y = 23$ et $4x - 3y = -7$

6.35 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

6.36 $y = 1$ et $4x + 3y = 7$

6.37 $A'(-4, 0)$

6.38 $8x_1 - 15x_2 + 10 = 0$ et $8x_1 - 15x_2 + 112 = 0$

6.39 $\arccos(\frac{31}{\sqrt{986}}) \approx 0{,}16$ rad

6.40 $x + 5y = 14$ et $5x - y = 18$

6.41 a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) Non
c) Oui, en $(0, 19/5, 0)$
d) Oui, en $(19/2, 0, 19/4)$

6.42 $4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 = 0$

6.43 $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

6.44 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

6.45 $5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8$ et $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

6.46 Le produit scalaire entre le vecteur directeur de la droite et le vecteur normal du plan est nul :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} = 6 + 14 - 20 = 0$$

6.47 a) $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 29$ b) $4x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 2$ c) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$

6.48 a) 2

b) 8/7

c) Les deux plans n'étant pas parallèles, la distance les séparant n'est pas définie.

6.49 $x + y - 2z = 6$

6.50 $P'(\frac{19}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3})$

6.51 8/5

6.52 $\arccos(\frac{3}{2\sqrt{21}}) \approx 1{,}24 \text{ rad} \approx 70{,}89°$

6.53 a) $\arccos(\frac{3}{2\sqrt{21}}) \approx 1{,}24$ rad

b) $(d) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -7 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) $(\pi) : x + 2y - 3z = 3$

6.54 $25\sqrt{\frac{3}{278}}$

6.55 a) $(d) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\arccos(\sqrt{\frac{3}{11}}) \approx 1{,}02$ rad

c) $(\pi) : y - z + 1 = 0$