Chapitre 3

Fonctions

Fonction

Une **fonction de l'ensemble A dans l'ensemble B** est une affectation d'un *unique* élément de B à chaque élément de A. L'ensemble de départ A est appelé le **domaine (de définition)** de la fonction alors que l'ensemble d'arrivée B est appelé le **codomaine.**

Classiquement, les fonctions sont notées à l'aide de lettres minuscules (f, g, ...) et, si f est une fonction de A dans B, on note

$$f: \ A \longrightarrow B.$$

3.1 Images et préimages

Images et préimages

Si f est une fonction de A dans B et si a est un élément de A, l'unique élément de B affecté à a est noté $\boldsymbol{f(a)}$ et est appelé l'**image de a par f** ou la **valeur de f en a.**

Réciproquement, si $b = f(a)$, l'élément a est appelé une **préimage** ou un **antécédent de b par f.** Notons qu'un élément b du codomaine peut avoir zéro, une ou plusieurs préimages selon les cas.

L'ensemble de toutes les images forme un sous-ensemble de B appelé l'**image** ou la **portée de la fonction f** et est noté $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$ ou $\boldsymbol{f(A)}$.

Plus généralement, pour tout sous-ensemble S de A, l'**image de S par f**, notée $\boldsymbol{f(S)}$, est le sous-ensemble de B formé de toutes les images des éléments de S :

$$f(S) := \{f(s) \mid s \in S\}.$$

Réciproquement, pour tout sous-ensemble T de B, l'**image réciproque de T par f**, notée $\boldsymbol{f^{-1}(T)}$, est le sous-ensemble de A formé de toutes les préimages des éléments de T :

$$f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Une fonction peut être définie de diverses manières. Dans les cas les plus simples (par exemple lorsque les ensembles A et B sont finis et petits), il suffit de donner explicitement la valeur prise par chaque élément de A. Il est également fréquent en mathématiques appliquées et en informatique de spécifier une fonction à l'aide d'un algorithme ou d'un programme. Le cas le plus courant correspond

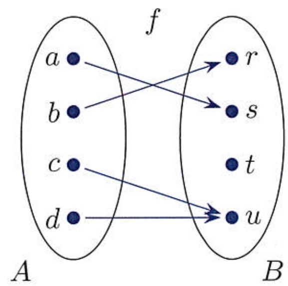

Figure 3.1 – Représentation d'une fonction entre deux ensembles finis à l'aide d'un graphe biparti.

cependant aux situations où la valeur d'un élément est donnée par une expression mathématique ou logique. Ainsi, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à chaque nombre réel son carré peut être décrite par

$$f(x) = x^2 \qquad \text{ou} \qquad x \longmapsto f(x) = x^2 \qquad \text{ou} \qquad y = x^2.$$

Dans ces expressions, f est le symbole désignant la fonction, x est la *variable indépendante* et y est la *variable dépendante* représentant la valeur de la fonction en x.

Exemple

La fonction f de $A = \{a, b, c, d\}$ dans $B = \{r, s, t, u\}$ définie par l'affectation

$$f(a) = s, \qquad f(b) = r, \qquad f(c) = u, \qquad f(d) = u$$

est illustrée graphiquement en figure 3.1. L'image de f est l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{r, s, u\}$. L'élément t du codomaine B n'appartient pas à cette image car il ne possède aucune préimage. L'élément u possède, lui, deux préimages : c et d.

3.1 Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

a) $f(x) = x + |x|$ b) $g(x) = 1$ c) $h(x) = 2^{-x}$ d) $m(x) = x^3 - 3x$

calculer

1) l'image des ensembles $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $F =]-1, 3[$ et $G = \mathbb{R}_+$,
2) l'image de la fonction,
3) l'image réciproque des ensembles $S = \{2\}$, $T = [0, 2]$ et $U = \mathbb{R}_+$.

3.2 Fonctions et relations

Plutôt que de recourir à la notion d'affectation pour définir une fonction, on peut aussi adopter un point de vue basé sur la notion de relation d'un ensemble vers un autre. En effet, toute fonction f de A dans B donne lieu à une relation de A vers B, appelée le **graphe de f**, composée de tous les couples (a, b) où a est un élément de A et b est l'image de a par f :

$$\boxed{\text{Graphe de } f := \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b = f(a)\}.}$$

En tant que sous-ensemble de $A \times B$, le graphe de f définit bien une relation de A vers B. Cette relation possède cependant la propriété que chaque élément a de A appartient à *un et un seul* couple (a, b) de la relation. Réciproquement toute relation f de A vers B possédant cette propriété donne lieu à une fonction $f : A \to B$ où $f(a) = b$ si et seulement si le couple (a, b) appartient à f. Cette approche aboutit à la définition suivante d'une fonction, en tout point équivalente à celle donnée en début de chapitre.

Fontion

Une **fonction f de l'ensemble A dans l'ensemble B** est une relation f de A vers B (c.-à-d. un sous-ensemble de $A \times B$) où chaque élément de A appartient à un et un seul couple de la relation.

Exemple

Parmi les trois relations de $A = \{a, b, c, d\}$ vers $B = \{x, y, z\}$ illustrées graphiquement dans la figure 3.2 et données par les ensembles de couples

$$\begin{aligned} f &= \{(a, x), (b, y), (c, x), (c, z), (d, y)\}, \\ g &= \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, z)\}, \\ h &= \{(a, z), (c, x), (d, z)\}, \end{aligned}$$

seule la deuxième définit une fonction de A dans B. En effet, la première relation n'est pas une fonction car l'élément c est en relation avec x et z. Quant à la troisième, elle n'est pas une fonction car l'élément b n'appartient à aucun couple de la relation.

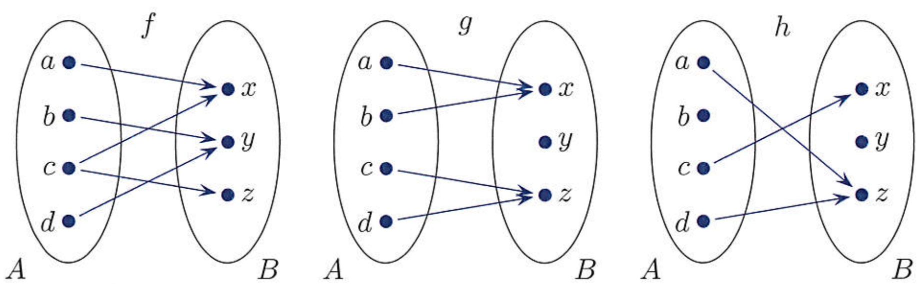

Figure 3.2 – Représentation de trois relations de $A = \{a, b, c, d\}$ vers $B = \{x, y, z\}$. Seule la relation g correspond à une fonction de A dans B.

3.2 Dans chacun des cas suivants, expliquer pourquoi l'expression proposée ne définit pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^{3/2}$ b) $f(x) = \tan(x)$ c) $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$

3.3 Parmi les relations suivantes de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$, lesquelles sont des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$?

a) $a\,R\,b \iff a + b < 4$
b) $a\,R\,b \iff a + b = 6$
c) $a\,R\,b \iff a^2 = b$
d) $a\,R\,b \iff a = b^2$
e) $a\,R\,b \iff a^3 = b$
f) $a\,R\,b \iff a = b^3$
g) $a\,R\,b \iff b = 3$
h) $a\,R\,b \iff |a| = |b|$

3.2.1 Représentation graphique d'une fonction

Vue comme une relation, une fonction n'est pas distinguable de son graphe, c'est-à-dire de l'ensemble des couples la définissant. Cet ensemble étant une relation, il peut être illustré graphiquement en utilisant les mêmes conventions que celles introduites au chapitre 2 (et déjà utilisées dans les exemples qui précèdent), cette **représentation graphique** étant souvent appelée, elle aussi, le *graphe de la fonction.*

Un cas particulièrement fréquent apparaît lorsque le domaine et le codomaine d'une fonction f sont tous deux égaux à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On parle alors d'une fonction *réelle* (car prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$) *d'une variable réelle* (car définie sur $\mathbb{R}$). Le graphe d'une telle fonction (de cardinalité infinie) est représenté en interprétant les différents couples (a, b) le formant comme les coordonnées d'autant de points du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien Oxy (voir figure 3.3). La condition à la base de la définition d'une fonction, exigeant que chaque élément du domaine de définition appartienne à exactement un couple du graphe de la fonction, correspond alors à la condition géométrique demandant que chaque droite verticale intersecte le graphe de la fonction en un et un seul point.

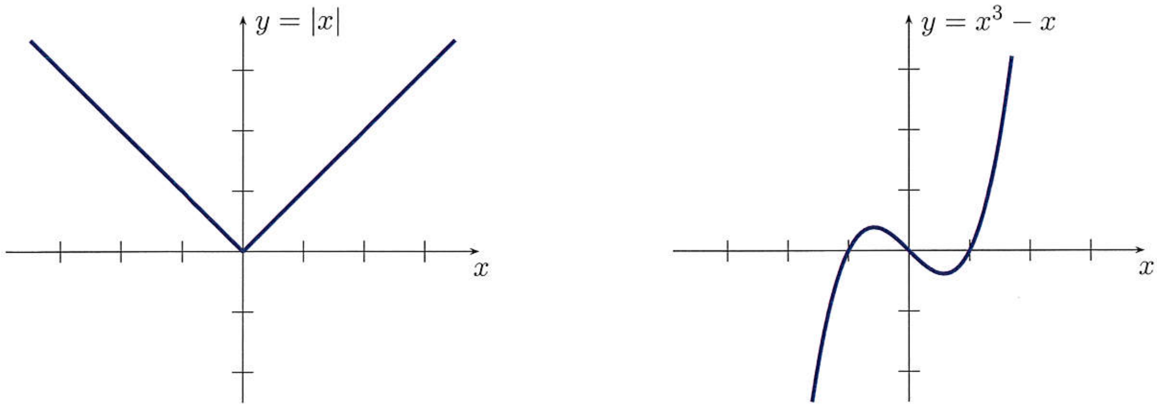

Figure 3.3 – Représentations graphiques de la fonction valeur absolue ($y = |x|$) et de la fonction $y = x^3 - x$.

Notons encore que la notion de fonction réelle s'étend à des fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (et même sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$). Il est alors d'usage, sauf mention contraire explicite, d'assumer que le domaine de la fonction est égal au plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans lequel la valeur de la fonction est bien définie. Ainsi la fonction réelle qui, à tout nombre, associe sa racine carrée doit être comprise comme une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ alors que celle associant, à tout nombre, son inverse doit être comprise comme une fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

3.4 Représenter le graphe et déterminer l'image de la fonction
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2}{x^2+2} \end{array}$$

3.5 Représenter le graphe et déterminer l'image de la fonction
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{|x|}{x} \end{array}$$

3.3 Compositions de fonctions

fonction composée

Soit f une fonction A dans B et g une fonction de B dans C, la **composition des fonctions** $\boldsymbol{f}$ **et** $\boldsymbol{g}$, notée $\boldsymbol{g \circ f}$, est la fonction de A dans C définie par

$$(g \circ f)(a) := g(f(a)) \qquad \forall\, a \in A.$$

Cette définition de la composition n'est pas différente de celle introduite en section 2.2 pour des relations générales. En particulier, elle peut être étendue à plus de deux fonctions donnant alors lieu à une opération associative (mais pas commutative). Notons cependant que la composition de deux fonctions ou plus fournit toujours une fonction, c'est-à-dire une affectation d'une seule valeur à chaque élément de l'ensemble de départ.

3.6 On considère les deux fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{-x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ & x & \longmapsto & g(x) = -x^2. \end{array}$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$. Préciser à chaque fois le domaine et le codomaine et donner une formule aussi simplifiée que possible.

3.4 Propriétés des fonctions

Les fonctions peuvent être classifiées à partir de deux propriétés de base : l'*injectivité* et la *surjectivité*. La vérification simultanée de ces deux propriétés aboutit à la notion de fonctions *bijectives* pour lesquelles il est possible de définir une fonction *inverse*, aussi appelée fonction *réciproque*.

Injectivité

Une fonction f de A dans B est dite **injective** si et seulement si elle ne prend jamais deux fois la même valeur. Une fonction injective est appelée une **injection**.

Dit autrement, une fonction f de A dans B est injective si et seulement si des éléments distincts de A ont toujours des images distinctes :

$$\forall\, x, y \in A, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Passant à la contraposée, on a aussi qu'une fonction f de A dans B est injective si et seulement si tout élément de B a *au plus* une préimage :

$$\forall\, x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Surjectivité

Une fonction f de A dans B est dite **surjective** si et seulement si chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A, c'est-à-dire si et seulement si chaque élément de B a *au moins* une préimage. Une fonction surjective est appelée une **surjection**.

Propriété

Une fonction f de A dans B est surjective si et seulement si l'image de f est égal au codomaine tout entier :

$$f \text{ est surjective} \iff \operatorname{Im}(f) = B.$$

Bijectivité

Une fonction f de A dans B est dite **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective. Une fonction bijective est appelée une **bijection**.

Fonction inverse

Si f est une bijection de A dans B, chaque élément de B possède *une et une seule* préimage. On peut alors définir la **fonction inverse** ou **réciproque de f**, notée $\boldsymbol{f^{-1}}$, comme la fonction de B dans A qui associe à chaque élément de B son unique préimage :

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a).$$

Propriété

Pour une bijection f de A dans B on a

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A$$

et

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in B.$$

Exemple

Les trois fonctions, dont les graphes sont présentés en figure 3.4, ont les propriétés suivantes.

a) La fonction f est bijective car chaque élément de B est l'image d'exactement un élément de A. Sa fonction inverse de B dans A est

$$f^{-1} = \{(r,a),(s,d),(t,b),(u,c)\}.$$

b) La fonction g est surjective car $g(A) = C$ (chaque élément de C est l'image d'au moins un élément de A) mais elle n'est pas injective car z est l'image de deux éléments distincts de A : c et d.

c) La fonction h est injective car les trois éléments de C ont des images différentes mais n'est pas surjective car $h(C) = \{r,t,u\} \neq B$ (l'élément s ne possède pas de préimage).

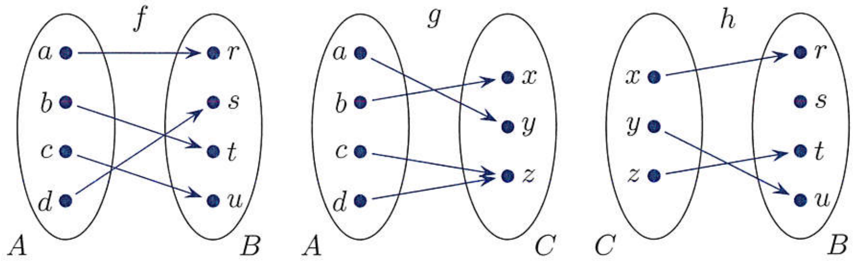

Figure 3.4 – Représentations graphiques de trois fonctions : la fonction f est bijective et possède une fonction inverse, la fonction g est surjective mais pas injective alors que la fonction h est injective mais pas surjective.

Remarques.

1) Seules les fonctions bijectives possèdent une fonction inverse. Or, lors de la définition d'une fonction f, le choix du domaine de définition A et du codomaine B influencent les propriétés de f. Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x, associe son carré $y = x^2$ n'est ni injective (la fonction est paire et on a, par exemple, $f(2) = f(-2) = 4$) ni surjective (le carré d'un nombre étant non négatif, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$). La fonction f n'est donc pas bijective et ne possède pas de fonction inverse. En revanche, la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui associe à tout nombre réel non négatif x son carré $y = x^2$ est, elle, injective et surjective. Elle possède donc une fonction inverse $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ associant à tout nombre réel non négatif y sa racine carrée $x = \sqrt{y}$.

2) Rappelons que quelles que soient les propriétés d'une fonction $f : A \to B$, il est toujours calculer l'ensemble des préimages d'un sous-ensemble T de B. Cet ensemble, appelé *image réciproque de* T, est noté $f^{-1}(T)$ et est défini par

$$\boxed{f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}.}$$

Ainsi, pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y = x^2$ on a $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$ alors que $f^{-1}(4)$ n'existe pas car f n'est pas bijective.

3.7 On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^*_+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{|x|} \end{array}$$

Esquisser le graphe de f puis déterminer si la fonction est (a) injective, (b) surjective. En déduire si f est bijective et, dans l'affirmative, donner une expression pour son inverse.

3.8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que peut-on dire de l'injectivité de f si f est (a) paire, (b) impaire.

3.9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que peut-on dire de la surjectivité de f si f est (a) paire, (b) impaire.

3.10 Déterminer si les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont bijectives. Dans l'affirmative donner une expression pour la fonction inverse f^{-1}.

a) $f(x) = -3x + 4$

b) $f(x) = -3x^2 + 4$

c) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

d) $f(x) = x^3$

3.11 Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés demandées.

a) La fonction n'est ni injective ni surjective.

b) La fonction est injective mais pas surjective.

c) La fonction est surjective mais pas injective.

d) La fonction est surjective et injective, c.-à-d. bijective (mais différente de la fonction identité).

3.12 Soit f une fonction de A dans B et g une fonction de B dans C.

a) Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

b) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

3.5 Quelques fonctions particulières

À côté des fonctions classiques (puissances, exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques, ...) il existe également quelques fonctions plus spécialement utiles en mathématiques discrètes. Celles présentées ci-dessous apparaissent dans la modélisation de nombreux problèmes ainsi que dans l'étude de certains algorithmes.

Partie entière inférieure

Soit x un nombre réel, la **partie entière inférieure de x** (« *floor function* » en anglais), notée $\lfloor x \rfloor$, est égale au plus grand entier plus petit ou égal à x.

Partie entière supérieure

De manière similaire, on définit la **partie entière supérieure de x** (« *ceiling function* » en anglais), notée $\lceil x \rceil$, comme le plus petit entier plus grand ou égal à x.

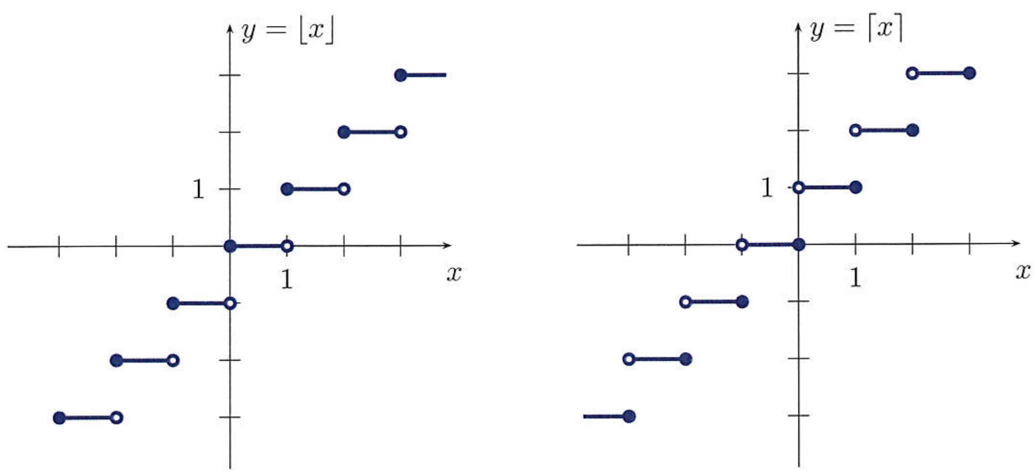

Figure 3.5 – Graphes des fonctions $y = \lfloor x \rfloor$ (partie entière inférieure) et $y = \lceil x \rceil$ (partie entière supérieure).

3.13 Représenter graphiquement la fonction « partie fractionnaire » $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \lfloor x \rfloor. \end{array}$

REMARQUE. Chez certains auteurs et dans certains ouvrages, la partie fractionnaire de x est notée à l'aide d'accolades :

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor.$$

3.14 On veut arrondir un nombre réel à l'entier le plus proche. Comment exprimer cette opération à l'aide des fonctions « parties entières » ? Considérer les arrondis par défaut (la demie est arrondie vers le bas) et par excès (la demie est arrondie vers le haut).

3.15 Vérifier que, quels que soient les nombres réels x et y, on a toujours

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Parties positives et négatives

Soit x un nombre réel, on définit la **partie positive de x**, notée $[x]^+$, comme le maximum entre 0 et x :

$$[x]^+ := \max(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors que la **partie négative de x**, notée $[x]^-$, est définie comme le maximum entre 0 et $-x$:

$$[x]^- := \max(0, -x) = -\min(0, x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété

Pour tout nombre réel x on a $x = [x]^+ - [x]^-$.

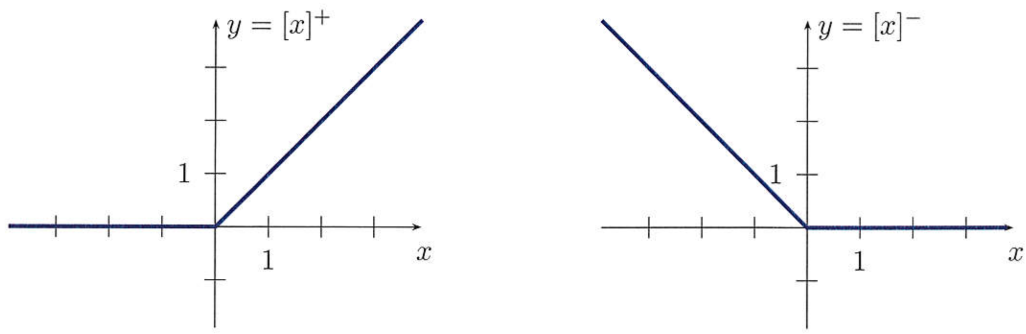

Figure 3.6 – Graphes des fonctions $y = [x]^+$ (partie positive) et $y = [x]^-$ (partie négative).

3.16 Représenter graphiquement la fonction réelle $f(x) = [x]^+ + [x]^-$. De quelle fonction s'agit-il ?

Modulo

Soit a un entier et m un entier strictement positif. On note $\boldsymbol{a}$ **mod** $\boldsymbol{m}$ (lu « a modulo m ») le reste de la division euclidienne de a par m.

Une manière équivalente (et qui se généralise aux nombres réels strictement positifs) de définir l'opération modulo est de poser

$$\boxed{a \bmod m := a - m\lfloor a/m \rfloor.}$$

3.17 Calculer

a) $13 \bmod 3$
b) $-97 \bmod 11$
c) $155 \bmod 19$
d) $-221 \bmod 23$
e) $28 \bmod 6$
f) $-62 \bmod 9$
g) $-7 \bmod 1$
h) $422 \bmod 50$

3.18 Soient a et b deux entiers et m un entier strictement positif, montrer à l'aide de contre-exemples que les « règles de calcul » suivantes sont fausses. Corriger ensuite les expressions à droite du signe égal afin d'obtenir des égalités valides dans tous les cas.

a) $(a+b) \bmod m = (a \bmod m) + (b \bmod m)$
b) $(a \cdot b) \bmod m = (a \bmod m) \cdot (b \bmod m)$

Factorielle

Soit n un entier positif, la **factorielle de** $\boldsymbol{n}$, notée $\boldsymbol{n!}$, est définie comme le produit de tous les entiers de 1 à n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Si n est nul, le produit précédent est vide et vaut, par convention, 1 : $0! = 1$.

3.19 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Simplifier l'expression

$$\frac{n! - (n-1)!}{(n-2)!}.$$

3.20 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer

a) $(n+1) \bmod n$
b) $n^2 \bmod (n+1)$
c) $(n!+1) \bmod n$
d) $(n+1)! \bmod n$
e) $(n^2-1) \bmod (n+1)$
f) $(n!-1) \bmod (n-1)$
g) $(n-1) \bmod (n+1)$
h) $(n+1) \bmod (n-1)$
i) $(n^3+1) \bmod (n+1)$

3.6 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

3.21 Déterminer l'image de la fonction réelle $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \lceil x \rceil \end{array}$

3.22 Pour les fonctions $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, dont les graphes sont donnés en figure 3.7,

a) déterminer lesquelles sont injectives,

b) déterminer lesquelles sont surjectives,

c) calculer la fonction composée $h \circ g \circ f$.

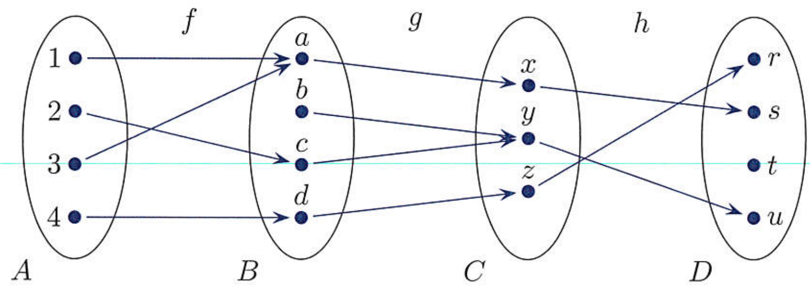

Figure 3.7 – Graphes des fonctions de l'exercice 3.22.

3.23 Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ vérifiant les propriétés demandées.

a) La fonction est surjective mais pas injective.

b) La fonction est injective mais pas surjective.

3.24 On considère la fonction réelle $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor . \end{array}$

a) Déterminer l'ensemble de toutes les préimages de 1.

b) Déterminer l'image de f.

c) La fonction f est-elle injective ? Justifier.

d) La fonction f est-elle surjective ? Justifier.

3.25 On considère la fonction réelle $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor . \end{array}$

a) Déterminer l'image par f de l'ensemble $A = \{-1, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 5\}$.

b) Déterminer l'image de f.

c) La fonction f est-elle injective ?

d) La fonction f est-elle surjective ?

3.26 On considère la fonction réelle

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x + (-1)^{\lceil x \rceil}. \end{array}$$

a) Représenter graphiquement la fonction f pour $x \in [-3, 3]$.

b) Donner l'image de la fonction f.

c) Donner l'image de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$:

d) Donner l'image réciproque de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.

e) La fonction f est-elle bijective ? Dans l'affirmative, quelle est la fonction inverse f^{-1} ? Dans la négative, quelles sont les propriétés qui ne sont pas vérifiées ?

3.27 On considère la fonction réelle

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = |x| \cdot (-1)^{\lceil x \rceil}. \end{array}$$

a) Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -4 et 4.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.

c) Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.

d) La fonction f est-elle injective ? Justifier brièvement.

e) La fonction f est-elle surjective ? Justifier brièvement.

f) La fonction f est-elle bijective ? Justifier brièvement. Dans l'affirmative, quelle est sa fonction inverse ?

3.28 On considère la fonction réelle

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \lfloor x \rfloor - 2x \end{array}$$

a) Représenter graphiquement la fonction f pour $x \in [-4, 4]$.

b) Déterminer l'image de la fonction f.

c) Déterminer l'image de l'intervalle $I = [0\,;\,2]$.

d) Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $J = [-1/2\,;\,3/2]$.

e) La fonction f est-elle injective ? (Justifier)

f) La fonction f est-elle surjective ? (Justifier)

3.29 On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \end{array}$$

Déterminer si f est (a) injective, (b) surjective. En déduire si f est (c) bijective. Dans l'affirmative donner une expression pour la fonction inverse f^{-1}.

3.30 Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor \end{array}$$

a) Représenter le graphe de f pour x entre -3 et 3 et pour $f(x)$ entre 0 et 9. Préciser clairement le comportement de la fonction aux points de discontinuité.

b) La fonction f est-elle injective ? (Justifier)

c) La fonction f est-elle surjective ? (Justifier)

3.31 On considère les deux fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Z}_{110} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{110} \\ & x & \longmapsto & f(x) = (13x + 40) \bmod 110 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{Z}_{110} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{110} \\ & x & \longmapsto & g(x) = (17x + 90) \bmod 110 \end{array}$$