Propriétés

On suppose que les matrices sont de type adéquat pour effectuer les opérations considérées.

$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A+B=B+A$	$A+O=A$	$A+(-A)=O$

$1A=A$	$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$	$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$	$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

$A(BC)=(AB)C$	$A(B+C)=AB+AC$	$(A+B)C=AC+BC$

En général, AB est différent de BA.

${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$	${}^t(\lambda A)=\lambda\,{}^tA$	${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

Matrice carrée $n \times n$

La *matrice unité* est $I=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&1&&0&0\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&&1&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}$

Une matrice carrée A possède une *matrice inverse*, notée A^{-1}, si $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

La matrice inverse de A existe si et seulement si $\mathrm{Det}(A)\neq 0$.

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\,{}^t\big((-1)^{i+j}D_{ij}\big)}$$

D_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ que l'on obtient en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Si $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, alors $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}$ avec $\mathrm{Det}(A)=ad-bc$.

Propriétés

$AI=IA=A$	${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
$\mathrm{Det}(AB)=\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(B)$	$\mathrm{Det}(A^{-1})=\frac{1}{\mathrm{Det}(A)}$	$\mathrm{Det}({}^tA)=\mathrm{Det}(A)$

Application linéaire

On note E et F deux espaces vectoriels.
Une application f de E vers F est *linéaire* si, quels que soient les éléments u et v de E et le scalaire λ, on a

$$\begin{cases}f(u+v)=f(u)+f(v)\\f(\lambda u)=\lambda f(u)\end{cases}$$

Matrice associée à une application linéaire

Si on choisit une base de E et une base de F, les colonnes de la matrice M associée à f sont les composantes des images par f des vecteurs de la base de E.

On note X et Y les matrices-colonnes des composantes des vecteurs x et y.

$$\boxed{y=f(x)\Leftrightarrow Y=MX}$$

Transformation linéaire

Une *transformation linéaire* f est une application linéaire d'un espace vectoriel vers lui-même.

Matrice de changement de base

On note $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ et $B'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel et P la matrice de passage de B à B'.

Si $\begin{cases}e'_1&=&a_{11}e_1+a_{21}e_2+\dots+a_{n1}e_n\\e'_2&=&a_{12}e_1+a_{22}e_2+\dots+a_{n2}e_n\\\vdots\\e'_n&=&a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\dots+a_{nn}e_n\end{cases}$, on a $P=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$.

On note X et X' les matrices-colonnes des composantes d'un même vecteur dans les bases B et B'.

$X=PX'$	$X'=P^{-1}X$

Si M est la matrice associée à f relativement à la base B, alors la matrice associée à f relativement à la base B' est

$$\boxed{M'=P^{-1}MP}$$

Valeur et vecteur propre

Le scalaire λ est une *valeur propre* de f s'il existe un vecteur u non nul vérifiant $f(u)=\lambda u$.

On appelle *vecteur propre* de f associé à une valeur propre λ tout vecteur u vérifiant $f(u)=\lambda u$.

Les valeurs propres sont les solutions de l'*équation caractéristique* $\mathrm{Det}(M-\lambda I)=0$, M étant une matrice associée à f.