Polynômes

Polynôme du deuxième degré à coefficients réels

$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Les *zéros du polynôme* P sont les solutions de l'*équation du deuxième degré* $P(x) = 0$

Zéros et factorisation

L'expression $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ est le *discriminant* de P.

Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux zéros réels

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

et on a l'identité

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet un seul zéro réel

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$$

et on a l'identité

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'admet pas de zéro réel et n'est pas décomposable en un produit de polynômes du premier degré à coefficients réels.

P admet cependant deux zéros complexes conjugués $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Relations de Viète

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

Polynôme de degré n

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \quad (c_n \neq 0)$

Les *zéros du polynôme* P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$

Pour les polynômes de degré supérieur à 2, les zéros sont généralement estimés par des méthodes numériques (voir page 93).

Divisibilité de $P(x)$ par $x - a$

Pour tout nombre réel a, il existe un polynôme Q défini par l'identité $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$

$\boxed{P(x) \text{ est divisible par } x - a \quad \Leftrightarrow \quad P(a) = 0}$

Le *schéma de Horner* est un algorithme qui permet de déterminer les coefficients du polynôme Q et la valeur $P(a)$:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_2 & c_1 & c_0 \\ \underbrace{d_{n-1} & d_{n-2} & d_{n-3} & \ldots & d_1 & d_0}_{\text{coefficients de } Q} & P(a) \end{array}}$$

avec $\begin{cases} d_{n-1} = c_n \\ d_{i-1} = c_i + a d_i \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ P(a) = c_0 + a d_0 \end{cases}$

Relations de Viète

Si $P(x) = c_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les zéros de P et

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{c_{n-1}}{c_n}$	$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{c_0}{c_n}$

Nombres complexes

On note i un nombre tel que $i^2 = -1$.

Forme algébrique $\quad z = a + b\,i$ où $a, b \in \mathbb{R}$

a est la *partie réelle* de z, notée $\text{Re}(z)$

b est la *partie imaginaire* de z, notée $\text{Im}(z)$

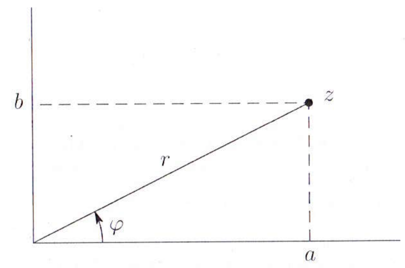
Forme trigonométrique $\quad z = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) = r\,\text{cis}(\varphi)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$

r est le *module* de z, noté $|z|$

φ est l'*argument* de z, noté $\arg(z)$

Forme exponentielle $\quad z = r\,e^{i\varphi}$

Relations entre formes algébrique, trigonométrique et exponentielle



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$
$\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$a = r\cos(\varphi)$	$b = r\sin(\varphi)$
Formule d'Euler	$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$