Ensembles de nombres

Nombres naturels	$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;...\}$
Naturels non nuls	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Nombres entiers	$\mathbb{Z} = \{...\,;-2\,;-1;0\,;1\,;2\,;...\}$
Nombres rationnels	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right\}$
Nombres réels	$\mathbb{R}$
Nombres irrationnels	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Nombres complexes	$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$
Réels non nuls	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Réels négatifs	$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0\}$
Réels positifs	$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$

On utilise des notations analogues pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Intervalles

On note a et b deux réels tels que $a < b$.

Intervalle fermé	$[a\,;b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Intervalle ouvert	$]a\,;b[$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
	$[a\,;+\infty[$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]-\infty\,;b]$	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Relation dans un ensemble

On note x, y et z trois éléments d'un ensemble et $x\,R\,y$ pour signifier que x est en relation avec y.
La relation R est

réflexive	si, pour tout x, $x\,R\,x$
symétrique	si, pour tout x, y, $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
transitive	si, pour tout x, y, z, $(x\,R\,y \text{ et } y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$
antisymétrique	si, pour tout x, y, $(x\,R\,y \text{ et } y\,R\,x) \Rightarrow x = y$
connexe	si, pour tout x, y, on a $x\,R\,y$ ou $y\,R\,x$

Une relation est appelée *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.
Une relation est appelée *relation d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
On appelle *relation d'ordre total* une relation d'ordre qui est connexe.

Application d'un ensemble vers un ensemble

Une *application* f d'un ensemble A vers un ensemble B est une relation qui, à tout élément x de l'ensemble de départ A, associe un et un seul élément $f(x)$ de l'ensemble d'arrivée B.
L'élément $f(x)$ est appelé *l'image* de x par f et on note $f(A)$ l'ensemble des images par f.

f est *injective*	si, pour tout x_1, x_2, on a $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
f est *surjective*	si $f(A) = B$
f est *bijective*	si f est injective et surjective

Si f est une bijection de A vers B, la *relation réciproque* de f est une application de B vers A, notée ${}^r\!f$, telle que $x = {}^r\!f(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

Analyse combinatoire

Factorielle

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$

$0! = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ \ldots \ \cdot 2n &= 2^n n! \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot (2n-1) &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned}}$$

Formule de Stirling

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n}\right) < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2}\right)$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{si } n \text{ est très grand}$$

Coefficients binomiaux

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \qquad$ où $n, k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$	$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ \ldots \ + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$