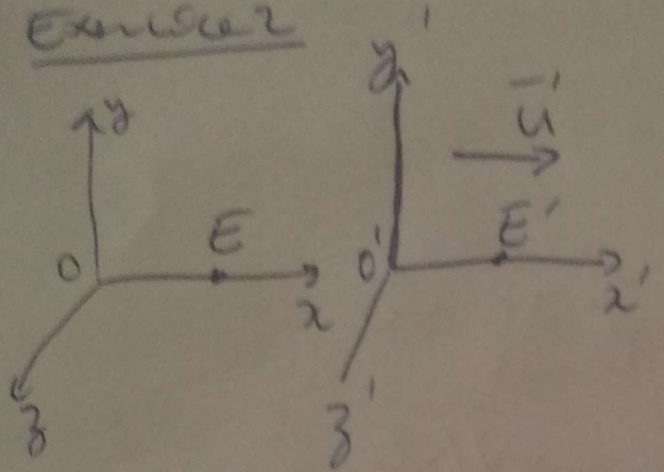
RR - 2021-2022 (1)

PC 2

Exercice 2



1a - Montrons que il existe un plan (P) parallèle à (OYZ)

D'après la transformation de Lorentz ~~de~~ de (R') par rapport à (R), on a

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

Puisque les horloges donnent la même la même heure, alors

$ct' = ct$

Donc

$ct = \gamma(ct - \beta x)$

$\Rightarrow ct(1 - \gamma) = -\gamma\beta x$

$\Rightarrow ct(\gamma - 1) = \gamma\beta x$

$\Rightarrow x = \dfrac{ct(\gamma - 1)}{\gamma\beta}$

or $\beta = \dfrac{u}{c}$ | $\gamma^2 = \dfrac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \dfrac{1}{1 - \beta^2}$

Scanned by CamScanner

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}$$

Donc

$$x = \frac{ct(\gamma-1)}{\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+1)}}$$

$$= ct\sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+1)}}$$

$x = ct\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ alors il existe un plan (P)

b) Calculons x_p dans (R) et x'_p dans (R')

on a

$$x_p = ct_p\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

$$\cancel{x'_p = t_p}$$

$$x'_p = \gamma\left(ct_p\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - \beta ct_p\right)$$

$$= \gamma\left(ct_p\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}ct_p\right)$$

$$= ct_p\left(\gamma\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - \sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

$$x'_p = -ct_p\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

c) Montrons que la vitesse de ce plan dans le référentiel (R) est donnée par $V = c\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}$

Par définition

$$V = \frac{dx_p}{dt_p}$$

$$\Rightarrow V = \frac{d\left(ct_p\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right)}{dt}$$

$$= c\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

2) Vérifions si le plan se trouve au milieu du segment [OO']

a- Pour un observateur du référentiel (R) on a :

$x_p = -x'_p$ alors l'observateur ne peut pas voir le plan au milieu du segment [OO'] b./ Pour un observateur du referentiel à (R')

on a

$x_p = -x'_p$ donc l'observateur ne peut pas voir le flash au milieu du segment $[OO']$

c- Pour un observateur du referentiel lié au plan (P) :

Puisque l'observateur est dans le plan (P), alors il voit le flash au milieu du segment $[OO']$

3a- Calculons l'intervalle de temp T qui separent les deux evenements dans le referentiel (R).

D'après la dilatation du temp,

on a $T = \gamma' \tau$,

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

on a

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}}$$

$$T = \frac{\tau\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2}}$$

b.)

on a

$$T = \frac{\tau\sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{2}}$$

$$T = \tau t', \quad t' = \frac{\sqrt{2(\gamma+1)}}{2}$$

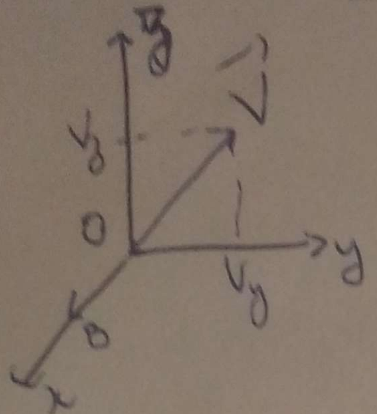
or $t' > 1$

alors $T > \tau$

donc il y a un lien de causalité entre les deux evenements.

Scanned by CamScanner

Exercice 4



1 - Montrons que $\vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

$\vec{P} = \gamma m \vec{V}$ et $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

$$\vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = \gamma m \vec{V} \cdot (q\vec{V} \wedge \vec{B})$$
$$= \gamma m q \left[\vec{V} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{B})\right]$$
$$= 0 \text{ car } \vec{V} \perp (\vec{V} \wedge \vec{B})$$

Donc
$\vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

Déduisons que P et $\gamma(v)$ sont constant

$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ Comme la particule décrit une orbite circulaire, alors

$V = \text{cste}$ donc $\gamma(v) = \text{cst}$

On sait que $\vec{P} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$, alors $\vec{P}$ est un vecteur de norme constante d'où P est constant.

Scanned by CamScanner

Exercice 4 (Suite)

2./ Montrons que $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{\omega}$

D'après RFDR, on a

$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ or $\vec{P} = \gamma m \vec{V}$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

$\Rightarrow \gamma m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$

$= -q\vec{B} \wedge \vec{V}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{q}{\gamma m}\vec{B} \wedge \vec{V}$

Posons $\vec{\omega} = \frac{q}{\gamma m}\vec{B}$ | $\vec{\omega}\left(\frac{q}{\gamma m}B, 0, 0\right)$

Donc

$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\omega} \wedge \vec{V}$

$= \vec{V} \wedge \vec{\omega}$

d'où $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{\omega}$

3. Soit $\xi = y + iz$, $i^2 = -1$

a) Montrons que $\ddot{\xi} + i\omega\dot{\xi} = 0$

on a

$$\begin{cases} \xi = y + iz \\ \dot{\xi} = \dot{y} + i\dot{z} \quad (a) \\ \ddot{\xi} = \ddot{y} + i\ddot{z} \quad (b) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

D'après RFDR, on a

$\gamma m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

$\vec{v}\wedge\vec{B} = (\dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z)\wedge(B\vec{e}_x)$

$= -\dot{y}B\vec{e}_z + \dot{z}B\vec{e}_y$

Projetons la RFDR, sur les trois axes

$$\begin{cases} \gamma m\ddot{x} = 0 \\ \gamma m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ \gamma m\ddot{z} = -qB\dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{q}{\gamma m}B\dot{z} \\ \ddot{z} = -\frac{q}{\gamma m}B\dot{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \quad (1) \\ \ddot{y} = \omega\dot{z} \quad (2) \\ \ddot{z} = -\omega\dot{y} \quad (3) \end{cases}$$

(2) et (3) dans (b) donne

$\ddot{\varepsilon} = \omega\dot{z} - i\omega\dot{y}$

$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = -i\omega(\dot{y} + i\dot{z})$

$= -i\omega\dot{\varepsilon}$

$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + i\omega\varepsilon = 0$

Retrouvons les équations horaires $\varepsilon(t) = l(t)$, $y(t) = f(t)$ et $z(t) = g(t)$ du mouvement.

On a $\ddot{\varepsilon} + i\omega\varepsilon = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + i\omega r = 0$

Scanned by CamScanner

$\Delta = -w^2 \Rightarrow \Delta = (iw)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = iw$

$r_1 = \frac{-iw - wi}{2}$ | $r_2 = \frac{-wi + wi}{2}$

$r_1 = -iw$ | $r = 0$

La solution generale de cette équation est

$\mathcal{E}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \Rightarrow \mathcal{E}(t) = Ae^{-iwt} + B$

A $t=0$, on a $\mathcal{E}(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$

$\Rightarrow A = -B$

$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = A(e^{-iwt} - 1)$

$\Rightarrow \dot{\mathcal{E}}(t) = -Aiwe^{-iwt}$

$\dot{\mathcal{E}} = \dot{y} + i\dot{z} \Rightarrow |\dot{\mathcal{E}}| = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} = V$

A $t=0$ on a $\dot{\mathcal{E}}(0) = V \Rightarrow -Aiw = V$

$\Rightarrow A = \frac{iV}{w}$

$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = \frac{iV}{w}(e^{-iwt} - 1)$

$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = \frac{iV}{w}(\cos(wt) - i\sin(wt) - 1)$

donc $\mathcal{E}(t) = \frac{V}{w}\left[\sin(wt) + i(\cos(wt) - 1)\right]$

$\Rightarrow \ell(t) = \frac{V}{w}\left[\sin(wt) + i(\cos(wt) - 1)\right]$

Scanned by CamScanner

or $\mathcal{E} = y + iz$

$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = y(t) + iz(t)$

$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = Re(\mathcal{E}(t)) \\ z(t) = Im(\mathcal{E}(t)) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = \frac{V}{\omega}\sin(\omega t) \\ z(t) = \frac{V}{\omega}(\cos(\omega t) - 1) \end{cases}$

donc $f(t) = \frac{V}{\omega}\sin \omega t$

$g(t) = \frac{V}{\omega}(\cos \omega t - 1)$

b- Déterminons l'expression de V

$\begin{cases} y(t) = \frac{V}{\omega}\sin(\omega t) \\ z(t) = \frac{V}{\omega}(\cos(\omega t) - 1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = \frac{V}{\omega}\sin(\omega t) \\ z(t) + \frac{V}{\omega} = \frac{V}{\omega}\cos(\omega t) \end{cases}$

$\Rightarrow (y(t))^2 + \left(z(t) + \frac{V}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{V}{\omega}\right)^2$

la trajectoire est un cercle de centre $C(0, -\frac{V}{\omega})$ et

de rayon $R = \frac{V}{\omega}$

$R = \frac{V}{\omega} \Rightarrow \underline{\underline{V = R\omega}}$

Retrouvons B en fonction de q, m, ω, R et θ

$V = R\omega$ or $\omega = \frac{q}{\gamma m}B$

$\Rightarrow V = R\frac{q}{\gamma m}B$

$\Rightarrow V = \frac{RqB}{\gamma m}$

$\Rightarrow B = \frac{\gamma m V}{Rq}$

$$\underline{\underline{B = \frac{\gamma m V}{Rq}}}$$

OERR16022022DPFASTNATIUNSTIM

120 Minutes

NB : Dans tous les exercices, C désigne la vitesse de la lumière

Exercice 1

1- A partir des équations de Mawell en regime harmonique, retrouver l'equation de progation des ondes électromagnétiques et celle de continuité de la charge.
2- Définir onde électromagnétique et citer quelques domaines d'application.
3- A partir des relations constitutives, retrouver l'expression de la perméabilité et de la permitivité relative d'un milieu en fonction des susceptibilités.

Exercice 2

Un événement E sur l'axe (OX) est répéré par ses coordonnées (t, x) dans le référentiel $\mathcal{R}$ et par (t', x') dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
1-a) Montrer qu'à tout instant t, il existe un plan (P) parallèle à (OYZ) dans lequel les horloges liées à chacun des référentiels donnent la même heure.
b) Calculer l'abcisse x_p de ce plan dans le référentiel $\mathcal{R}$ et son abscisse x'_p dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
c) Montrer que la vitesse de ce plan dans le référentiel $\mathcal{R}$ est donnée par $V = C(\frac{1-\gamma}{1+\gamma})^{1/2}$.
2- Le plan se trouve-t-il au milieu du segment $[OO']$:
a) pour un observateur du référentiel $\mathcal{R}$?
b) pour un observateur du référentiel $\mathcal{R}'$?
c) pour un observateur du référentiel lié au plan (P) ?
3- Deux événements E_1 et E_2 se produisent dans le plan (P). Pour un observateur de ce plan, ils sont séparés d'une durée τ.
a) Calculer l'intervalle de temps T qui les sépare dans le référentiel $\mathcal{R}$?
b) Peut-il exister entre ces deux événements un lien de causalité ?

Exercice 3

Un électron d'énergie $E \gg mC^2$ et un photon d'énergie W entre en collision.
1- Quelle est W', l'énergie du photon dans le référentiel de l'électron ?
2- Si $W' \ll mC^2$, le recul de l'électron peut être négligé et l'énergie du photon dans le référentiel de l'électron reste inchangée. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de l'énergie du photon diffusé dans le référentiel dE laboratoire ?

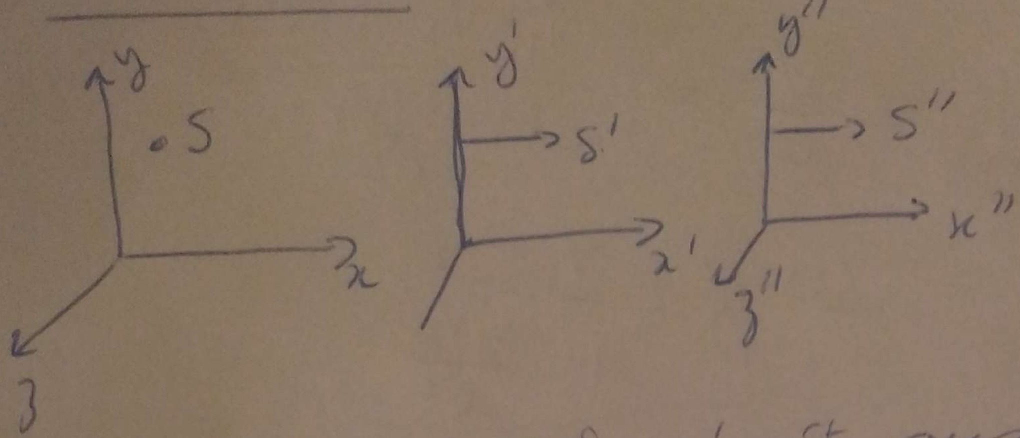
Exercice 4

Une particule de masse m et de charge q décrit une orbite circulaire de rayon R dans le plan (YOZ) en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$. $\vec{P}$ et $\vec{V}(0, \dot{y}, \dot{z})$ désignent respectivement l'impulsion et la vitesse de la particule.
1- Montrer que $\vec{P}.\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ puis en déduire que P et $\gamma(V)$ sont constants.
2- Montrer que $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{\omega}$ où $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire dont déterminera les composantes en fonction de q, B, m et γ.
3- On pose $\xi = y + iz$ avec $i^2 = -1$;
a-Montrer que $\dot{\xi} + i\omega\xi = 0$ puis retrouver les équations horaires $\xi(t) = l(t)$, $y(t) = f(t)$ et $z(t) = g(t)$ du mouvement.
b-Déterminer l'expression de V puis retrouver B en fonction de q, m, ω, R et γ.

Scanned by CamScanner

RR Session normale 2021 - 2022 . MI_2 ①

Exercice 2



1) Montrons qu'il s'agit aussi d'une transformation de Lorentz.

D'après TL, ~~de~~ de S' dans S, on a:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

et de S dans S', on a

$$x = \gamma(x' + \beta ct)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$

La transformation de Lorentz de S dans S' est une transformation inverse de la TL de S' dans S en remplaçant $\vec{u}$ par $-\vec{u}$ et β par $-\beta$ d'où la transformation de Lorentz est une transformation de Lorentz

D'après la TL de S' dans S

on a:

on a :

$$\begin{cases} x' = \gamma_1(x - \beta_1 ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma_1(ct - \beta_1 x) \end{cases} \quad \text{avec } \beta_1 = \frac{v_1}{c} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c}}}$$

et de S'' dans S', on a

$$\begin{cases} x'' = \gamma_2(x' - \beta_2 ct') \\ y'' = y' \\ z'' = z' \\ ct'' = \gamma_2(ct' - \beta_2 x') \end{cases} \quad \text{avec } \beta_2 = \frac{v_2}{c} \qquad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

on a

$$\begin{cases} x'' = \gamma_2\left[\gamma_1(x - \beta_1 ct) - \beta_2\gamma_1(ct - \beta_1 x)\right] \\ y'' = y \\ z'' = z \\ ct'' = \gamma_2\left[\gamma_1(ct - \beta_1 x) - \beta_2(\gamma_1(x - \beta_1 ct))\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \gamma_1\gamma_2\left[x - \beta_1 ct - \beta_2 ct + \beta_1\beta_2\right] \\ y'' = y \\ z'' = z \\ ct'' = \gamma_1\gamma_2\left[ct - \beta_1 x - \beta_2 x + \beta_1\beta_2 ct\right] \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \gamma_1\gamma_2[(1+\beta_1\beta_2)x - (\beta_1+\beta_2)ct] \\ y'' = y \\ z'' = z \\ ct'' = \gamma_1\gamma_2[(1+\beta_1\beta_2)ct - (\beta_1+\beta_2)x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)\left[x - \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)x\right] \\ y'' = y \\ z'' = z \\ ct'' = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)\left[ct - \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)x\right] \end{cases}$$

Posons $\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$ et $\beta = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$

alors

$$\begin{cases} x'' = \gamma(x - \beta ct) \\ y'' = y \\ z'' = z \\ ct'' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

La transformation ainsi obtenue est une TL, d'où la composée de deux transformation de Lorentz est une transformation de Lorentz.

2) Retrouvons la vitesse V de S'' par rapport à S.

D'après la question 1°/, on a

$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$ et $\beta = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$

avec $\beta_1 = \dfrac{V_1}{c}$, $\beta_2 = \dfrac{V_2}{c}$, $\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}}}$ et $\gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V_2^2}{c^2}}}$

Scanned by CamScanner

or $\beta = \frac{V}{c} \Rightarrow \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} = \frac{V}{c}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{V_1+V_2}{c}}{1+\frac{V_1V_2}{c^2}} = \frac{V}{c} \Rightarrow \frac{V_1+V_2}{c\left(1+\frac{V_1V_2}{c^2}\right)} = \frac{V}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{V_1+V_2}{1+\frac{V_1V_2}{c^2}}}$$

Autre méthode

D'après la loi des compositions des vitesse ~~pa~~ parallèles, on a

$$v' = \frac{v-V_1}{1-\frac{V_1 v}{c^2}}, \quad v'' = \frac{v'-V_2}{1-\frac{V_2 v'}{c^2}}$$

dans S'', la particule est au repos, alors $v''=0$

$v''=0 \Rightarrow v' = V_2$

alors $V_2 = \frac{v-V_1}{1-\frac{V_1 v}{c^2}}$

$$\Rightarrow v - V_1 = V_2\left(1-\frac{V_1 v}{c^2}\right)$$

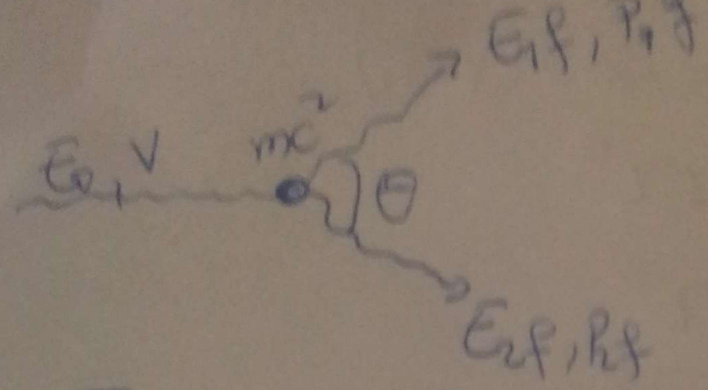
$$\Rightarrow v - V_1 = V_2 - \frac{V_1V_2 v}{c^2}$$

$$\Rightarrow v\left(1+\frac{V_1V_2}{c^2}\right) = V_1+V_2$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{V_1+V_2}{1+\frac{V_1V_2}{c^2}}}$$

Scanned by CamScanner

Exercice 3



1 - Trouvons θ en fonction de m et E_0

D'après la conservation du quadrivecteur Impulsion - énergie, on a

$\vec{P}_{av} = \underline{P}_{ap}$ avec $\begin{cases} \underline{P}_{av} = \left[\vec{P}, \frac{E_0 + mc^2}{c}\right] \\ \underline{P}_{ap} = \left[\vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}, \frac{2E_f}{c}\right] \end{cases}$

D'après le carré scalaire de la pseudo-norme, on a :

$$\left[\vec{P}, \frac{E_0 + mc^2}{c}\right]^2 = \left[\vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}, \frac{2E_f}{c}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_0 + mc^2}{c}\right)^2 - P^2 = \frac{4E_f^2}{c^2} - \left(\vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_0 + mc^2}{c}\right)^2 - P^2 = \frac{4E_f^2}{c^2} - \left(P_{1f}^2 + P_{2f}^2 + 2P_{1f}P_{2f}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{4E_f^2}{c^2} - \left(2P_f^2 + 2P_f^2\cos\theta\right) \text{ car } P_{1f} = P_{2f} = P_f$$

$$= \frac{4E_f^2}{c^2} - 2P_f(1 + \cos\theta) \text{ or } 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{4E_f^2}{c^2} - 4P_f^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

D'après la conservation de l'énergie totale

on a $E_0 + mc^2 = 2E_f \Rightarrow E_f = \frac{E_0 + mc^2}{2}$

Scanned by CamScanner

Donc

$$\left(\frac{E_0+mc^2}{c}\right)^2 - P^2 = \left(\frac{E_0+mc^2}{c}\right)^2 - 4P_f^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow P^2 = 4P_f^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow c^2P^2 = 4c^2P_f^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

D'après la conservation de l'énergie relativiste on a:

$$\begin{cases} E_0^2 = c^2P^2 + m^2c^4 \Rightarrow c^2P^2 = E_0^2 - m^2c^4 \\ E_f^2 = c^2P_f^2 + m^2c^4 \Rightarrow c^2P_f^2 = E_f^2 - m^2c^4 \end{cases}$$

Donc

$$E_0^2 - m^2c^4 = 4(E_f^2 - m^2c^4)\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$E_0^2 - m^2c^4 = 4\left[\frac{(E_0+mc^2)^2}{4} - m^2c^4\right]\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$E_0^2 - m^2c^4 = \left[(E_0+mc^2)^2 - 4m^2c^4\right]\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow E_0^2 - m^2c^4 = \left[(E_0+mc^2)^2 - (2mc^2)^2\right]\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow E_0^2 - (mc^2)^2 = \left[(E_0+mc^2-2mc^2)(E_0+mc^2+2mc^2)\right]\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow (E_0-mc^2)(E_0+mc^2) = \left((E_0+mc^2-2mc^2)(E_0+mc^2+2mc^2)\right)\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow (E_0-mc^2)(E_0+mc^2) = \left((E_0+mc^2-2mc^2)(E_0+mc^2+2mc^2)\right)\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow E_0+mc^2 = (E_0+3mc^2)\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{E_0+mc^2}{E_0+3mc^2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{E_0+3mc^2}{E_0+3mc^2}} \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{E_0+3mc^2}{E_0+3mc^2}}\right)$$

Scanned by CamScanner

ce type de film
rési...

2) Trouvons la valeur numérique de θ dans les limites :

2.1- limite des faibles énergie : $V << C$

L'énergie relativiste $E_0 = E_c + mc^2$

Donc

$$\theta = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{E_0 + mc^2 + mc^2}{E_0 + mc^2 + 3mc^2}}\right)$$

or $E_c = \frac{1}{2}mV^2$

Donc

$$\theta = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{mV^2 + 4mc^2}{mV^2 + 8mc^2}}\right)$$

$$= 2\arccos\left(\sqrt{\frac{V^2 + 4c^2}{V^2 + 8c^2}}\right)$$

$$= 2\arccos\left(\sqrt{\frac{\frac{V^2}{c^2} + 4}{\frac{V^2}{c^2} + 8}}\right)$$

$V << C \Rightarrow \frac{V}{C} << 1$

$\Rightarrow \frac{V^2}{c^2} \simeq 0$

Bo

Donc

$$\theta = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\pi}{4} \Rightarrow \underline{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

Scanned by CamScanner

2.2. limite des grandes energie : $v \simeq c$

$$v^2 \simeq c \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{5}{9}}\right)$$

$$= 83,62^\circ$$

$$\theta = 83,62^\circ$$

Scanned by CamScanner

RR16022022DPFASTNATIUNSTIM

120 Minutes

NB : Dans tous les exercices, C désigne la vitesse de la lumière

Exercice 1

1- Un objet relativiste a pour vitesse $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ respectivement dans les référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Sachant que le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ et à la vitesse $\vec{u}$ suivant l'axe commun (OY), montrer que

$$1-\frac{V^2}{C^2}=\frac{1}{(1+\frac{uV_y'}{C^2})^2}\left(1-\frac{u^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{V'^2}{C^2}\right)$$

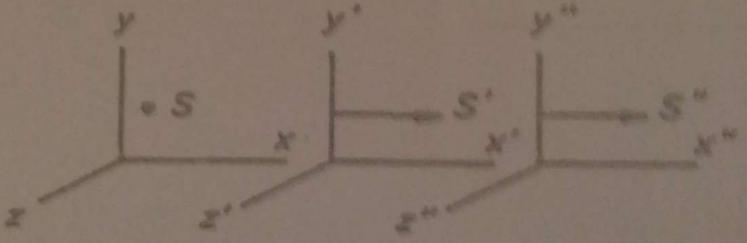
- Vérifier alors l'un des postulats de la relativité restreinte.
- Analyser le cas où $u \ll C$.

Exercice 2

On considère les transformations de Lorentz entre les référentiels $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ comme indiqués sur la figure ci-dessous où les axes (OX) sont parellèles avec $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ évoluant dans le sens des abscisses positives.

1- Montrer que pour une telle transformation, l'inverse d'une transformation de lorentz et la composée de deux transformations de lorentz sont des transformations de lorentz. On utilisera la représentation analytique de la transformation.

2- Si la vitesse de $\mathcal{S}'$ relativement à $\mathcal{S}$ est V_1 et celle de $\mathcal{S}''$ relativement à $\mathcal{S}'$ est V_2, retrouver



la vitesse V de $\mathcal{S}''$ relativement à $\mathcal{S}$.

Exercice 3

Une particule de masse m et d'énergie totale E_0 voyage à une vitesse constante V approchant celle de la lumière. Elle entre en collision avec une autre particule stationnaire de même masse m. Le choc est élastique et les deux particules évoluent avec les mêmes énergies cinétiques et suivant deux différentes directions faisant entre elles un angle θ.

1- Trouver θ en fonction de m et E_0.

2- Trouver la valeur numérique de θ dans les limites suivantes :

2-1- limite des faibles énergies : $V \ll C$;

2-2- limite des grandes énergies : $V \approx C$.

Scanned by CamScanner

Exercice 4

Une particule de masse m et de charge q décrit une orbite circulaire de rayon R dans le plan (XOY) en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. P et $V(\dot{x}, \dot{y}, 0)$ désignent respectivement l'impulsion et la vitesse de la particule.

1- Montrer que $\vec{P}.\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ puis en déduire que P et $\gamma(V)$ sont constants.

2- Montrer que $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{\omega}$ où $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire dont on déterminera les composantes en fonction de q, B, m et γ.

3- On pose $\xi = x + iy$ avec $i^2 = -1$;

a- Montrer que $\ddot{\xi} + i\omega\dot{\xi} = 0$ puis retrouver les équations horaires $\xi(t) = l(t)$, $x(t) = f(t)$ et $y(t) = g(t)$ du mouvement.

b-Déterminer l'expression de V puis retrouver B en fonction de q, m, ω, R et γ

Scanned by CamScanner