Université du Québec à Montréal

INF5130 : Algorithmique

Devoir 1

Automne 2021

SOLUTIONS

Exercice 1

I. a) $A = 2 + 2 + 3 + 2 + 0 = 9$ (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour le détail de la somme**).

b) $A = 0 + 0 + 2 + 0 + 0 = 2$ (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour le détail de la somme**).

II. Le meilleur cas correspond à la permutation $\pi(1) = 1, \pi(2) = 2, \ldots, \pi(n) = n$, car la condition du **si** n'est jamais vérifiée (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour la justification**).

III. Le pire cas correspond à la permutation $\pi(1) = n, \pi(2) = n-1, \ldots, \pi(1) = 1$, car la condition du **si** est toujours vérifiée (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour la justification**).

IV. a) On obtient la somme suivante (**5 points : un point pour chacun des cinq termes**) :

$$T(n) = c_1 + c_6 + c_2 n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_3(n-i+1) + (c_4+c_5)(n-i)\right). \tag{1}$$

On calcule la somme (**3 points : un point pour chaque ligne**) :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(c_3(n-i+1) + (c_4+c_5)(n-i)\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left((c_3+c_4+c_5)n + c_3 - (c_3+c_4+c_5)i\right)$$

$$= ((c_3+c_4+c_5)n+c_3)\sum_{i=1}^{n-1} 1 - (c_3+c_4+c_5)\sum_{i=1}^{n-1} i = ((c_3+c_4+c_5)n+c_3)(n-1) - (c_3+c_4+c_5)\frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{c_3+c_4+c_5}{2}n^2 + \frac{c_3-c_4-c_5}{2}n - c_3.$$

On remplace dans l'équation 1 et on simplifie (**2 points**) :

$$T(n) = \frac{c_3+c_4+c_5}{2}n^2 + \frac{2c_2+c_3-c_4-c_5}{2}n + c_1 - c_3 + c_6.$$

b) On doit remplacer $c_4 + c_5$ par c_4 et on obtient (**2 points**) :

$$T(n) = \frac{c_3+c_4}{2}n^2 + \frac{2c_2+c_3-c_4}{2}n + c_1 - c_3 + c_6.$$

Exercice 2

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 16$:

$$\sum_{k=15}^{n-1} \left(4k^3 - 6k^2 + 2k - 5\right) = 4\sum_{k=15}^{n-1} k^3 - 6\sum_{k=15}^{n-1} k^2 + 2\sum_{k=15}^{n-1} k - 5\sum_{k=15}^{n-1} 1. \tag{2}$$

On calcule chacune des quatre sommes du terme de droite :

$$\sum_{k=15}^{n-1} k^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 - \sum_{k=1}^{14} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} - \frac{14^2 \times 15^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 - 11025.$$

$$\sum_{k=15}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{14} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - \frac{14 \times 15 \times (2 \times 14 + 1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - 1015.$$

$$\sum_{k=15}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{14} k = \frac{(n-1)n}{2} - \frac{14 \times 15}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 105.$$

$$\sum_{k=15}^{n-1} 1 = n - 1 - 15 + 1 = n - 15.$$

Si on remplace les quatre sommes ci-dessus dans l'équation 2, on obtient après simplification :

$$\sum_{k=15}^{n-1} \left(4k^3 - 6k^2 + 2k - 5\right) = n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 7n - 38145.$$

<u>Barème</u> : 6 points : 1 point pour la séparation des sommes, 1 point pour chacune des quatre sommes, 1 point pour la réponse finale simplifiée.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 6j = \sum_{i=1}^{n} \left(6\sum_{j=1}^{n} j - 6\sum_{j=1}^{i-1} j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(6\frac{n(n+1)}{2} - 6\frac{(i-1)i}{2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(3n(n+1) - 3i^2 + 3i\right) = 3n(n+1)\sum_{i=1}^{n} 1 - 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 3n^2(n+1) - 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} = 2n^3 + 3n^2 + n.$$

<u>Barème</u> : 4 points : 1 point pour chacune des trois sommes, 1 point pour la réponse finale simplifiée.

Exercice 3

On suppose que $f_1(n) = \Omega(g_1(n))$ et $f_2(n) = \Omega(g_2(n))$. Il existe donc deux constantes réelles $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ et deux nombres entiers $n_1 > 0$ et $n_2 > 0$ tels que :

$$\text{pour tout entier } n \geq n_1, 0 \leq c_1 g_1(n) \leq f_1(n) \qquad \textbf{(1 point)}$$

$$\text{pour tout entier } n \geq n_2, 0 \leq c_2 g_2(n) \leq f_2(n) \qquad \textbf{(1 point)}$$

Si on pose $N = \max(n_1, n_2)$ (**2 points**) et $C = \min\left(c_1^2, \frac{c_2}{3}\right)$ (**2 points**), on a pour tout entier $n \geq N$:

$$0 \leq C g_1^2(n) \leq c_1^2 g_1^2(n) \leq f_1^2(n) \qquad \textbf{(1 point)}$$

$$0 \leq C\left(3g_2(n)\right) \leq \frac{c_2}{3}\left(3g_2(n)\right) \leq f_2(n) \qquad \textbf{(1 point)}$$

Si on additionne ces inégalités, on obtient alors :

$$0 \leq C\left(g_1^2(n) + 3g_2(n)\right) \leq f_1^2(n) + f_2(n). \qquad \textbf{(1 point)}$$

On a donc bien $f_1^2(n) + f_2(n) = \Omega\left(g_1^2(n) + 3g_2(n)\right)$ (**1 point**).

Exercice 4

L'ordre croissant de complexité des fonctions est le suivant :

$$\sqrt{n}\lg(n^5), \frac{n}{\lg(n)}, n\lg(\sqrt{n}), n\lg^7(n), n^2\sqrt{n}, \frac{5n^5+7n}{n^2+3}, 4^{8\log_{16}(n)}, 5^n$$

Barème : $10 - 2x$ **où** x **est le nombre minimal de fonctions qu'il faut retirer pour que l'ordre soit correct (donc** 0 **pour** $x \geq 5$**).**

Exercice 5

a) $1 = o(\sqrt{n})$ VRAI (**1 point**)

Soit une constante $c > 0$. On doit trouver une constante $n_0 > 0$ telle que

$$\text{pour tout entier } n \geq n_0, 0 \leq 1 \leq c\sqrt{n}. \qquad \textbf{(2 points)}$$

Il suffit de prendre $n_0 = \frac{1}{c^2}$ (**2 points**).

b) $6n^2 + 7n + 11 = \Theta(n^2)$ VRAI (**1 point**)

On doit trouver deux constantes réelles $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ et un nombre entier $n_0 > 0$ tels que :

$$\text{pour tout entier } n \geq n_0,\ \ c_1 n^2 \leq 6n^2 + 7n + 11 \leq c_2 n^2 \qquad \textbf{(1 point)}$$

Ces inégalités sont vérifiées pour $n_0 = 1$ (**1 point**), $c_1 = 6$ (**1 point**) et $c_2 = 24$ (**1 point**).

Exercice 6

$T(n) = T(n-1) + 6T(n-2)$ pour $n \geq 3$, $T(1) = 1, T(2) = 3$.

Initialisation : Pour $n = 1$: $T(1) = 1 = 3^{1-1}$ et pour $n = 2$: $T(2) = 3 = 3^{2-1}$ (**2 points**).

Récurrence : on suppose $T(n-2) = 3^{n-3}$ et $T(n-1) = 3^{n-2}$ (**2 points**).

On a alors (**2 points**) :

$$\begin{array}{lccc} T(n) = & T(n-1) & + & 6T(n-2) \\ T(n) = & 3^{n-2} & + & 6 \times 3^{n-3} \end{array}$$

On factorise 3^{n-3}(**3 points**) :

$$T(n) = 3^{n-2} + 6 \times 3^{n-3} = 3^{n-3} \times (3+6) = 3^{n-3} \times 9 = 3^{n-1}.$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, $T(n) = 3^{n-1}$ (**1 point**).

Exercice 7

$T(n) = 15T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + 7n^4$ pour $n \geq 2$, $T(1) = 2$.

On veut vérifier que $T(n) = \Omega(n^4)$.

On doit donc trouver une constante $c > 0$ telle que $T(n) \geq cn^4$ (**1 point**).

Récurrence : on suppose $T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) \geq c\lceil \frac{n}{2} \rceil^4$ (**1 point**). Si on remplace (substitution) dans la relation de récurrence, on obtient (**4 points : 1 point par ligne**) :

$$\begin{aligned} T(n) = 15T\left(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil\right) + 7n^4 \quad & \geq 15c\lceil \tfrac{n}{2} \rceil^4 + 7n^4 \\ & \geq 15c\left(\tfrac{n}{2}\right)^4 + 7n^4 \\ & \geq \left(\tfrac{15}{16}c + 7\right)n^4 \\ & \geq cn^4, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie pour toute constante $c \leq 112$ (**2 points**).

Initialisation : Si on prend $c = 2$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$ (**2 points**).

Exercice 8

a) $T(n) = 2T\left(\lceil \frac{n}{4} \rceil\right) + \frac{\sqrt{n}}{\lg(n)+2}$

   $a = 2, b = 4, \log_4(2) = \frac{1}{2}$. Donc $f(n)$ croît moins vite que $n^{\log_b(a)}$ mais pas polynomialement moins vite. On ne peut pas appliquer la méthode générale.

b) $T(n) = 81T\left(\lceil \frac{n}{27} \rceil\right) + n\sqrt{n}$

   $a = 81, b = 27, \log_{27}(81) = \frac{4}{3}$. Or, $f(n) = n\sqrt{n} = \Omega\left(n\sqrt{n}\right)$. Le cas 3 s'applique donc en prenant $\epsilon = 3/2 - 4/3 > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta(n\sqrt{n})$.

   On doit vérifier la deuxième hypothèse :

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 81\frac{n}{27}\sqrt{\frac{n}{27}} = \frac{1}{\sqrt{3}}n\sqrt{n}.$$

   On peut donc prendre $c = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$.

c) $T(n) = 16T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + 5n^4$

$a = 16, b = 2, \log_2(16) = 4$. Comme $f(n) = 5n^4 = \Theta\left(n^4\right)$, le cas 2 s'applique et on obtient $T(n) = \Theta(n^4 \lg(n))$.

d) $T(n) = 5T\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil\right) + n\lg(n)$

$a = 5, b = 3, \log_3(5) \simeq 1,46$. Comme $f(n) = n\lg(n) = O\left(n^{1,1}\right)$ par exemple, le cas 1 s'applique en prenant par exemple $\epsilon = \log_3(5) - 1,1 > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta\left(n^{\log_3(5)}\right)$.

<u>**Barème**</u> : **5 points par question, 1 point en moins au b) et au d) si ϵ n'est pas clairement identifié, 1 point en moins au b) si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée**.