

Université du Québec à Montréal

INF5130 : Algorithmique

Devoir 2

Hiver 2023

Nom : Oueyeya Gaëtan

Code permanent : UEG82330306

Exercise 1 (25 points)

k	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0,21	0,01	0,05	0,12	0,18	0,03	0,4

$$\begin{aligned}
 C[1; 1] &= p_1 = 0,21 & C[2; 2] &= p_2 = 0,01 & C[3; 3] &= p_3 = 0,05 \\
 C[4; 4] &= p_4 = 0,12 & C[5; 5] &= p_5 = 0,18 & C[6; 6] &= p_6 = 0,03 \\
 & & C[7; 7] &= p_7 = 0,4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[1; 2] &= \min(\mathbf{0} + \mathbf{0.1}; 0.21 + 0) + 0.21 + 0.01 = 0.23 \\
 C[2; 3] &= \min(0 + 0.5; \mathbf{0.01} + \mathbf{0}) + 0.01 + 0.05 = 0.07 \\
 C[3; 4] &= \min(0 + 0.12; \mathbf{0.05} + \mathbf{0}) + 0.05 + 0.12 = 0.22 \\
 C[4; 5] &= \min(0 + 0.18; \mathbf{0.12} + \mathbf{0}) + 0.12 + 0.18 = 0.42 \\
 C[5; 6] &= \min(\mathbf{0} + \mathbf{0.03}; 0.18 + 0) + 0.18 + 0.03 = 0.24 \\
 C[6; 7] &= \min(0 + 0.4; \mathbf{0.03} + \mathbf{0}) + 0.4 + 0.03 = 0.46
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[1; 3] &= \min(\mathbf{0} + \mathbf{0.07}; 0.21 + 0.05; 0.23 + 0) + 0.21 + 0.01 + 0.05 = 0.34 \\
 C[2; 4] &= \min(0 + 0.22; 0.1 + 0.12; \mathbf{0.07} + \mathbf{0}) + 0.01 + 0.05 + 0.12 = 0.25 \\
 C[3; 5] &= \min(0 + 0.42; 0.05 + 0.18; \mathbf{0.22} + \mathbf{0}) + 0.05 + 0.12 + 0.18 = 0.57 \\
 C[4; 6] &= \min(0 + 0.24; \mathbf{0.12} + \mathbf{0.03}; 0.42 + 0) + 0.12 + 0.18 + 0.03 = 0.48 \\
 C[5; 7] &= \min(0 + 0.46; 0.18 + 0.4; \mathbf{0.24} + \mathbf{0}) + 0.18 + 0.03 + 0.4 = 0.85
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[1; 4] &= \min(\mathbf{0} + \mathbf{0.25}; 0.21 + 0.22; 0.23 + 0.12; 0.34 + 0) + 0.21 + 0.01 + 0.05 + 0.12 = 0.64 \\
 C[2; 5] &= \min(0 + 0.57; 0.01 + 0.42; \mathbf{0.07} + \mathbf{0.18}; \mathbf{0.25} + \mathbf{0}) + 0.01 + 0.05 + 0.12 + 0.18 = 0.61 \\
 C[3; 6] &= \min(0 + 0.42; 0.05 + 0.24; \mathbf{0.22} + \mathbf{0.03}; 0.57 + 0) + 0.05 + 0.12 + 0.18 + 0.03 = 0.63 \\
 C[4; 7] &= \min(0 + 0.85; 0.12 + 0.46; 0.42 + 0.4; \mathbf{0.48} + \mathbf{0}) + 0.12 + 0.18 + 0.03 + 0.4 = 1.21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[1; 5] &= \min(0 + 0.61; 0.21 + 0.57; 0.23 + 0.42; \mathbf{0.34} + \mathbf{0.18}; 0.64 + 0) + 0.21 + 0.01 + 0.05 + 0.12 + 0.18 = 1.09 \\
 C[2; 6] &= \min(0 + 0.63; 0.01 + 0.48; 0.07 + 0.24; \mathbf{0.25} + \mathbf{0.03}; 0.61 + 0) + 0.01 + 0.05 + 0.12 + 0.18 + 0.03 = 0.67 \\
 C[3; 7] &= \min(0 + 1.21; 0.05 + 0.85; 0.22 + 0.45; 0.57 + 0.4; \mathbf{0.63} + \mathbf{0}) + 0.05 + 0.12 + 0.18 + 0.03 + 0.4 = 1.41
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[1; 6] &= \min(0 + 0.67; 0.21 + 0.63; 0.23 + 0.48; \mathbf{0.34} + \mathbf{0.24}; 0.64 + 0.03; 1.09 + 0) + 0.21 + 0.01 + 0.05 + 0.12 + 0.18 + 0.03 = 1.18 \\
 C[2; 7] &= \min(0 + 1.41; 0.01 + 1.21; 0.07 + 0.85; 0.25 + 0.46; 0.61 + 0.4; \mathbf{0.67} + \mathbf{0}) + 0.01 + 0.05 + 0.12 + 0.18 + 0.03 + 0.4 = 1.46
 \end{aligned}$$

$$C[1;6] = \min(0 + 0.67; 0.21 + 1.41; 0.23 + 1.21; 0.34 + 0.85; \mathbf{0.64+0.46}; 1.09 + 0.4; 1.18 + 0) + 0.21 + 0.01 + 0.05 + 0.12 + 0.18 + 0.03 + 0.4 = 2.1$$

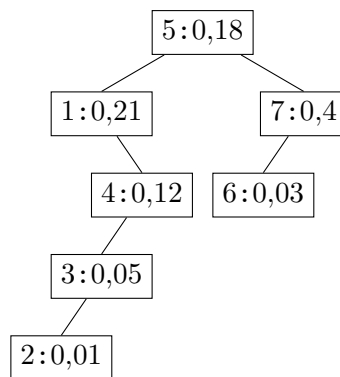
Matrice C :

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.21	0.23	0.34	0.64	1.09	1.18	2.1
2		0	0.01	0.07	0.25	0.61	0.67	1.46
3			0	0.05	0.22	0.57	0.63	1.41
4				0	0.12	0.42	0.48	1.21
5					0	0.18	0.24	0.85
6						0	0.03	0.46
7							0	0.4
8								0

Matrice racine:

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	4	4	5
2		0	2	3	4	4/5	5	7
3			0	3	4	5	5	7
4				0	4	5	5	7
5					0	5	5	7
6						0	6	7
7							0	7
8								0

Arbre de recherche optimal :



Espérance du temps de recherche : 2,1.

Exercice 2 (25 points)

Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
Pénalité	95	85	55	60	50	45	40	30	20	10

	1									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

	2 1									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2

	3 2 1									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	3	3	3	3	3	3	3

	3 4 2 1									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	3	3	3	3	3	3	3

	3 4 2 1 5									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	4	4	4	4	4	4	4

	3 4 2 1 5 6									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	4	5	5	5	5	5	5

	3 4 7 2 1 5 6									
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	4	5	5	5	5	5	5

		3	4		8					
	7	2	1	5	6					
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	4	5	5	5	5	5	5

		3	4		8					
	7	2	1	5	6	9				
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	4	5	6	6	6	6	6

		3	4		8					
	7	2	1	5	6	9		10		
Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
$N_i(F)$	0	2	3	4	5	6	6	7	7	7

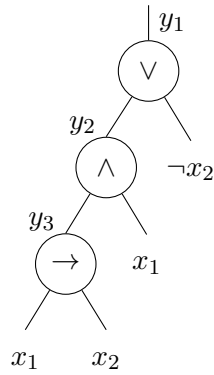
Ordonnancement optimal : 3 2 1 5 6 9 10 7 4 8

Pénalité : $60 + 40 + 30 = 130$

Exercice 3 (25 points)

$$((x_1 \rightarrow x_2) \wedge x_1) \vee \neg x_2.$$

Étape 1 :



$$\begin{aligned}\phi'_1 &= y_1 \\ \phi'_2 &= y_1 \leftrightarrow (y_2 \vee \neg x_2) \\ \phi'_3 &= y_2 \leftrightarrow (y_3 \wedge x_1) \\ \phi'_4 &= y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)\end{aligned}$$

$$\phi' = y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (y_2 \vee \neg x_2)) \wedge (y_2 \leftrightarrow (y_3 \wedge x_1)) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2))$$

$$\phi' = \phi'_1 \wedge \phi'_2 = y_1 \wedge \phi'_3 = y_1 \wedge \phi'_4 = y_1$$

Étape 2:

y_2	y_3	x_1	$y_1 \leftrightarrow (y_2 \vee \neg x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned}\neg \phi''_2 &= (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_2) \\ \phi''_2 &= (y_1 \vee y_2 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee x_2)\end{aligned}$$

y_1	y_2	x_1	$y_2 \leftrightarrow (y_3 \wedge x_1)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\neg\phi_3'' = (\neg y_2 \wedge \neg y_3 \wedge x_1) \vee (y_2 \wedge \neg y_3 \wedge \neg x_1) \vee (y_2 \wedge \neg y_3 \wedge x_1) \vee (y_2 \wedge y_3 \wedge \neg x_1)$$

$$\phi_3'' = (y_2 \vee y_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_2 \vee y_3 \vee x_1) \wedge (\neg y_2 \vee y_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_2 \vee \neg y_3 \vee x_1)$$

y_3	x_1	x_2	$\phi_4' = y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\neg\phi_4'' = (\neg y_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_1) \vee (\neg y_3 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg y_3 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (y_3 \wedge x_1 \wedge \neg x_2)$$

$$\phi_4'' = (y_3 \vee \neg x_1 \vee x_1) \wedge (y_3 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (y_3 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_3 \vee \neg x_1 \vee x_2)$$

Etape 3:

$$\phi_1 = \phi_1 = (y_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee z_1 \vee \neg z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee \neg z_2)$$

$$\phi_2''' = \phi_2''$$

$$\phi_3''' = \phi_3''$$

$$\phi_4''' = \phi_4''$$

Exercice 4 (25 points)

I. Ligne 1 :

$SM[1][2]$:

pour $k = 0$, $SM[1][2] = [1][1] + S[0][2] = 15 + 0 = 15$

pour $k = 1$, $SM[1][2] = [0][1] + S[1][2] = 0 + 20 = \underline{20}$

$SM[1][3]$:

pour $k = 0$, $SM[1][3] = [1][2] + S[0][3] = 20 + 0 = \underline{20}$

pour $k = 1$, $SM[1][3] = [0][2] + S[1][3] = 0 + 18 = 18$

$SM[1][4]$:

pour $k = 0$, $SM[1][4] = [1][3] + S[0][4] = 20 + 0 = 15$

pour $k = 1$, $SM[1][4] = [0][3] + S[1][4] = 0 + 25 = \underline{25}$

Ligne 2 :

$SM[2][2]$:

pour $k = 0$, $SM[2][2] = [2][1] + S[0][2] = 30 + 0 = 30$

pour $k = 1$, $SM[2][2] = [1][1] + S[1][2] = 15 + 20 = 35$

pour $k = 2$, $SM[2][2] = [0][1] + S[2][2] = 0 + 40 = \underline{40}$

$SM[2][3]$:

pour $k = 0$, $SM[2][3] = [2][2] + S[0][3] = 40 + 0 = \underline{40}$

pour $k = 1$, $SM[2][3] = [1][2] + S[1][3] = 20 + 18 = 38$

pour $k = 2$, $SM[2][3] = [0][2] + S[2][3] = 0 + 38 = 38$

$SM[2][4]$:

pour $k = 0$, $SM[2][4] = [2][3] + S[0][4] = 40 + 0 = 40$

pour $k = 1$, $SM[2][4] = [1][3] + S[1][4] = 20 + 25 = \underline{45}$

pour $k = 2$, $SM[2][4] = [0][3] + S[2][4] = 0 + 35 = 35$

Ligne 3 :

$SM[3][2]$:

pour $k = 0$, $SM[3][2] = [3][1] + S[0][2] = 45 + 0 = 45$

pour $k = 1$, $SM[3][2] = [2][1] + S[1][2] = 30 + 20 = 50$

pour $k = 2$, $SM[3][2] = [1][1] + S[2][2] = 15 + 40 = \underline{55}$

pour $k = 3$, $SM[3][2] = [0][1] + S[3][2] = 0 + 54 = 54$

$SM[3][3]$:

pour $k = 0$, $SM[3][3] = [3][2] + S[0][3] = 55 + 0 = \underline{55}$

pour $k = 1$, $SM[3][3] = [2][2] + S[1][3] = 40 + 18 = 58$

pour $k = 2$, $SM[3][3] = [1][2] + S[2][3] = 20 + 38 = 58$
pour $k = 3$, $SM[3][3] = [0][2] + S[3][3] = 0 + 59 = \underline{59}$

$SM[3][4]$:

pour $k = 0$, $SM[3][4] = [3][3] + S[0][4] = 59 + 0 = 59$
pour $k = 1$, $SM[3][4] = [2][3] + S[1][4] = 40 + 25 = \underline{65}$
pour $k = 2$, $SM[3][4] = [1][3] + S[2][4] = 20 + 35 = 55$
pour $k = 3$, $SM[3][4] = [0][3] + S[3][4] = 0 + 47 = 47$

Ligne 4 :

$SM[4][2]$:

pour $k = 0$, $SM[4][2] = [4][1] + S[0][2] = 60 + 0 = 60$
pour $k = 1$, $SM[4][2] = [3][1] + S[1][2] = 45 + 20 = 65$
pour $k = 2$, $SM[4][2] = [2][1] + S[2][2] = 30 + 40 = \underline{70}$
pour $k = 3$, $SM[4][2] = [1][1] + S[3][2] = 15 + 54 = 69$
pour $k = 4$, $SM[4][2] = [0][1] + S[4][2] = 0 + 65 = 65$

$SM[4][3]$:

pour $k = 0$, $SM[4][3] = [4][2] + S[0][3] = 70 + 0 = 70$
pour $k = 1$, $SM[4][3] = [3][2] + S[1][3] = 55 + 18 = 73$
pour $k = 2$, $SM[4][3] = [2][2] + S[2][3] = 40 + 38 = 78$
pour $k = 3$, $SM[4][3] = [1][2] + S[3][3] = 20 + 59 = \underline{79}$
pour $k = 4$, $SM[4][3] = [0][2] + S[4][3] = 0 + 68 = 68$

$SM[4][4]$:

pour $k = 0$, $SM[4][4] = [4][3] + S[0][4] = 79 + 0 = 59$
pour $k = 1$, $SM[4][4] = [3][3] + S[1][4] = 59 + 25 = \underline{84}$
pour $k = 2$, $SM[4][4] = [2][3] + S[2][4] = 40 + 35 = 75$
pour $k = 3$, $SM[4][4] = [1][3] + S[3][4] = 20 + 47 = 67$
pour $k = 4$, $SM[4][4] = [0][3] + S[4][4] = 0 + 69 = 69$

Ligne 5 :

$SM[5][2]$:

pour $k = 0$, $SM[5][2] = [5][1] + S[0][2] = 75 + 0 = 75$
pour $k = 1$, $SM[5][2] = [4][1] + S[1][2] = 60 + 20 = 80$
pour $k = 2$, $SM[5][2] = [3][1] + S[2][2] = 45 + 40 = \underline{85}$
pour $k = 3$, $SM[5][2] = [2][1] + S[3][2] = 30 + 54 = 84$
pour $k = 4$, $SM[5][2] = [1][1] + S[4][2] = 15 + 55 = 80$
pour $k = 5$, $SM[5][2] = [0][1] + S[5][2] = 0 + 70 = 70$

$SM[5][3]$:

pour $k = 0$, $SM[5][3] = [5][2] + S[0][3] = 85 + 0 = 85$

pour $k = 1$, $SM[5][3] = [4][2] + S[1][3] = 70 + 18 = 88$
 pour $k = 2$, $SM[5][3] = [3][2] + S[2][3] = 55 + 38 = 83$
 pour $k = 3$, $SM[5][3] = [2][2] + S[3][3] = 40 + 59 = \underline{99}$
 pour $k = 4$, $SM[5][3] = [1][2] + S[4][3] = 20 + 68 = 88$
 pour $k = 5$, $SM[5][3] = [0][2] + S[5][3] = 0 + 78 = 78$

$SM[5][4]$:

pour $k = 0$, $SM[5][4] = [5][3] + S[0][4] = 99 + 0 = 99$
 pour $k = 1$, $SM[5][4] = [4][3] + S[1][4] = 79 + 25 = \underline{104}$
 pour $k = 2$, $SM[5][4] = [3][3] + S[2][4] = 59 + 35 = 94$
 pour $k = 3$, $SM[5][4] = [2][3] + S[3][4] = 40 + 47 = 87$
 pour $k = 4$, $SM[5][4] = [1][3] + S[4][4] = 20 + 69 = 89$
 pour $k = 5$, $SM[5][4] = [0][3] + S[5][4] = 0 + 80 = 80$

$$SM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 20 & 20 & 25 \\ 30 & 40 & 40 & 45 \\ 45 & 55 & 59 & 65 \\ 60 & 70 & 79 & 84 \\ 75 & 85 & 99 & 104 \end{pmatrix} \quad NH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- II. Le revenu maximal est de 104\$ pour 1 heure de travail dans l'entreprise 4, 3 heures dans l'entreprise 3 et 2 dans l'entreprise 2. Selon la matrice NH , on doit regarder les dernières non nulles de chaque colonne. Cela correspond au nombre d'heures que l'étudiant doit travailler dans chaque entreprise pour un revenu maximal.