# Comportement asymptotique

- Le temps d'exécution $T_A(n)$ d'un algorithme $A$, où $n$ est la taille du problème, est une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$
- Il existe cinq « familles » de fonctions :

| Famille | Concept intuitif | Appellation |
|---|---|---|
| $O$ | $\leq$ | Grand-$O$ |
| $\Theta$ | $=$ | Theta |
| $\Omega$ | $\geq$ | Grand-Omega |
| $o$ | $<$ | Petit-$o$ |
| $\omega$ | $>$ | Petit-omega |

- Ces familles permettent d'avoir une idée du **comportement asymptotique** du temps d'exécution, c'est-à-dire pour de « grandes » valeurs de $n$.



# Notations et interprétations

- $f(n) = O(g(n))$ $\big($ou $f(n) \in O(g(n))\big)$ : $f$ croît au même rythme ou moins vite que $g$.
- $f(n) = o(g(n))$ $\big($ou $f(n) \in o(g(n))\big)$ : $f$ croît strictement moins vite que $g$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ $\big($ou $f(n) \in \Omega\,(g(n))\big)$ : $f$ croît au même rythme ou plus vite que $g$.
- $f(n) = \omega(g(n))$ $\big($ou $f(n) \in \omega(g(n))\big)$ : $f$ croît strictement plus vite que $g$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ $\big($ou $f(n) \in \Theta\,(g(n))\big)$ : $f$ et $g$ croissent au même rythme.

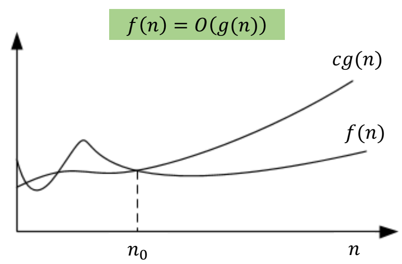


# Définitions formelles

- $O(g(n)) = \left\{\begin{matrix} f(n) : \text{il existe des constantes strictement positives } c \text{ et } n_0 \text{ telles que} \\ 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{matrix}\right\}$
- $\Omega(g(n)) = \left\{\begin{matrix} f(n) : \text{il existe des constantes strictement positives } c \text{ et } n_0 \text{ telles que} \\ 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{matrix}\right\}$
- $\Theta(g(n)) = \left\{\begin{matrix} f(n) : \text{il existe des constantes strictement positives } c_1, c_2 \text{ et } n_0 \text{ telles que} \\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{matrix}\right\}$
- $o(g(n)) = \left\{\begin{matrix} f(n) : \text{pour toute constante strictement positive } c, \text{il existe } n_0 > 0 \text{ telle que} \\ 0 \leq f(n) < cg(n) \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{matrix}\right\}$
- $\omega(g(n)) = \left\{\begin{matrix} f(n) : \text{pour toute constante strictement positive } c, \text{il existe } n_0 > 0 \text{ telle que} \\ 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ pour tout } n \geq n_0 \end{matrix}\right\}$

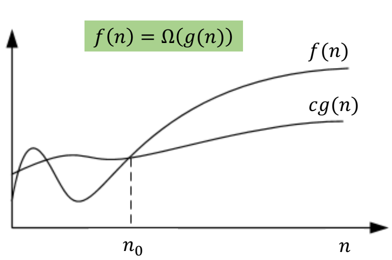


# Illustration : $O(g(n))$



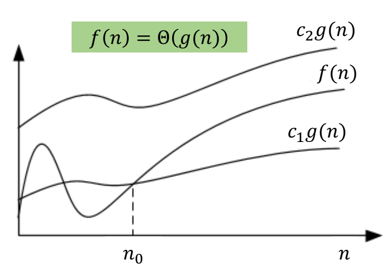



# Illustration : $\Omega(g(n))$

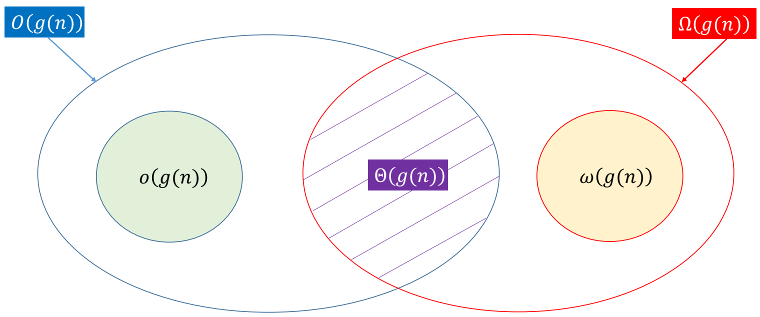





# Illustration : $\Theta(g(n))$



## Diagramme de Venn






## Limites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = c \in [0; +\infty[$, alors $f(n) = O(g(n))$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = c \in ]0; +\infty[$, alors $f(n) = \Theta(g(n))$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$, alors $f(n) = o(g(n))$ et $f(n) \notin \Theta(g(n))$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, alors $f(n) = \omega(g(n))$ et $f(n) \notin \Theta(g(n))$.



## Mise en garde I

Les réciproques des énoncés précédents ne sont pas toutes vraies.

Par exemple :

$$f(n) = (\sin(n) + 2)n = \Theta(n),$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n} = \text{n'existe pas},$$

car $(\sin(n) + 2)$ oscille entre 1 et 3.



## Mise en garde II

Quand on compare la complexité de deux algorithmes, il faut parfois faire attention aux « constantes ».

Exemples :

- $f(n) = 10^6 n = o(n\sqrt{n})$, mais $10^6 n < n\sqrt{n}$ seulement à partir de $n_0 = 10^{12}$ !!
- $f(n) = n^3 = o\left(n^{\ln(\ln(n))}\right)$, mais $n^3 < n^{\ln(\ln(n))}$ seulement à partir de $n_0 = 528491312$ !!



## Règle de l'Hospital pour les indéterminations $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

Hypothèses : Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; +\infty[$. On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a; +\infty[$

Conclusion :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**si cette dernière limite existe ou si elle est infinie.**

## Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{\text{RH}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc : $\ln(n) = o(n)$ et $\ln(n) \notin \Theta(n)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{\text{RH}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{\text{RH}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Donc : $e^n = \omega(n^2)$ et $e^n \notin \Theta(n^2)$.

## Transitivité

- $f(n) = \Theta(g(n))$ et $g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$
- $f(n) = o(g(n))$ et $g(n) = o(h(n)) \Rightarrow f(n) = o(h(n))$
- $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$
- $f(n) = \omega(g(n))$ et $g(n) = \omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$
- $f(n) = \Omega(g(n))$ et $g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$

## Autres propriétés

- <u>Reflexivité</u>
  - $f(n) = \Theta(f(n))$
  - $f(n) = O(f(n))$
  - $f(n) = \Omega(f(n))$
- <u>Symétrie</u>
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$
- <u>Symétrie transposée</u>
  - $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n))$
  - $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = o(f(n))$

## Règle du maximum

- <u>Principe</u> :
$O(f(n) + g(n)) = O\big(\max(f(n), g(n))\big)$
- <u>Formulation rigoureuse</u> :
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $g(n) \leq f(n)$ pour tout $n \geq n_0$,
alors $O(f(n) + g(n)) = O(f(n))$.
- <u>Exemples</u> :
  - $O(n^2 + n) = O(n^2)$, car $n \leq n^2$ pour tout $n \geq 0$.
  - $O(n + 4\ln(n)) = O(n)$, car $4\ln(n) \leq n$ pour tout $n \geq 9$.

## Polynômes

- <u>Définition</u> : Soit un entier $d \geq 0$, un polynôme en $n$ de degré $d$ est une fonction $p(n)$ de la forme $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$, où les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d$ sont les coefficients du polynôme et $a_d \neq 0$.
- <u>Exemples</u> :
  - $f(n) = 3n^3 - 2n^2 + 5$ degré 3
  - $f(n) = n^5 - n$ degré 5
  - $f(n) = n^{18}$ degré 18
- <u>Contre-exemples</u> :
  - $f(n) = \sqrt{n}$
  - $f(n) = 2n^2 + 3\ln(n)n$

## Théorème

- Si $f(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ est un polynôme de degré $d$, alors :
  - $f(n) = \Theta(n^d)$
  - $f(n) = o(n^k)$ pour tout entier $k > d$
  - $f(n) = \omega(n^k)$ pour tout entier $0 \leq k < d$
- <u>Exemple</u> : $f(n) = 3n^5 - 2n^2 + 3n + 5$
  - $f(n) = \Theta(n^5)$
  - $f(n) = o(n^7)$
  - $f(n) = \omega(n^3)$

## $f(n) = 2n^2 = O(n^2)$

- <u>Preuve avec la définition</u> :

On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$f(n) = 2n^2 \leq cn^2$ pour tout entier $n \geq n_0$.

L'affirmation est vérifiée pour $c = 2$ et $n_0 = 0$.

- <u>Preuve avec la limite</u> :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2 \in [0; +\infty[$$

Donc $f(n) = O(n^2)$

## $f(n) = 2n^2$ n'est pas dans $O(n)$

• Preuve avec la définition :

On doit montrer qu'il n'existe pas $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$f(n) = 2n^2 \leq cn$ pour tout entier $n \geq n_0$.

Si l'affirmation est vérifiée, en simplifiant par $n \geq 1$, on obtient :

$2n \leq c$ pour tout entier $n \geq \max(n_0, 1)$, ce qui ne peut pas être vrai, puisque $c$ est une constante.

• Preuve avec la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$$

Donc $f(n) = \omega(n)$ et donc $f(n)$ n'est pas dans $O(n)$.

## $f(n) = 2n^2 = O(n^3)$

• Preuve avec la définition :

On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$f(n) = 2n^2 \leq cn^3$ pour tout entier $n \geq n_0$.

L'affirmation est vérifiée pour $c = 2$ et $n_0 = 0$.

• Preuve avec la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \in [0; +\infty[$$

Donc $f(n) = O(n^3)$, et on a même $f(n) = o(n^3)$.

## $f(n) = 2n^2 = \Omega(n)$

• Preuve avec la définition :

On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$f(n) = 2n^2 \geq cn$ pour tout entier $n \geq n_0$.

L'affirmation est vérifiée pour $c = 2$ et $n_0 = 0$.

• Preuve avec la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$$

Donc $f(n) = \omega(n)$ et donc $f(n) = \Omega(n)$.

• Remarque : Il est équivalent de démontrer que $n = O(2n^2)$.

## $f(n) = 2n^2 = \Omega(n^2)$

• Preuve avec la définition :

On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$f(n) = 2n^2 \geq cn^2$ pour tout entier $n \geq n_0$.

L'affirmation est vérifiée pour $c = 2$ et $n_0 = 0$.

• Preuve avec la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2 \in ]0; +\infty[$$

Donc $f(n) = \Theta(n^2)$ et donc $f(n) = \Omega(n^2)$.

## $f(n) = 2n^2 + 5n + 15 = O(n^2)$

• Preuve avec la définition :

On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$f(n) = 2n^2 + 5n + 15 \leq cn^2$ pour tout entier $n \geq n_0$. On a en fait :

$2n^2 + 5n + 15 \leq 2n^2 + 5n^2 + 15n^2$ pour tout entier $n \geq 1$.

L'affirmation est donc vérifiée pour $c = 22$ et $n_0 = 1$.

• Preuve avec la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 + 5n + 15}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{5}{n} + \frac{15}{n^2}\right) = 2 \in [0; +\infty[$$

Donc $f(n) = O(n^2)$.

## $f_1(n) = O\big(g_1(n)\big)$ et $f_2(n) = O\big(g_2(n)\big)$ $\Rightarrow f_1(n) + f_2(n) = O\big(g_1(n) + g_2(n)\big)$

Preuve : Il existe $c_1 > 0, c_2 > 0$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

• $f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$ pour tout entier $n \geq n_1$

• $f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$ pour tout entier $n \geq n_2$

Si on pose $N = \max(n_1, n_2)$ et $C = \max(c_1, c_2) > 0$, on a alors :

• $f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \leq C g_1(n)$ pour tout entier $n \geq N \geq n_1$

• $f_2(n) \leq c_2 g_2(n) \leq C g_2(n)$ pour tout entier $n \geq N \geq n_2$

On a donc pour tout $n \geq N$ :

$f_1(n) + f_2(n) \leq C g_1(n) + C g_2(n) = C\big(g_1(n) + g_2(n)\big)$

et donc $f_1(n) + f_2(n) = O\big(g_1(n) + g_2(n)\big)$.

# Logarithmes

Soit $a, b, x, y, z, n \in \mathbb{R}$, tels que $a > 1, b > 1, x > 0, y > 0, n \neq 0$ :
Définition : $\log_a(x) = z \Leftrightarrow x = a^z$ (en particulier $\log_a(a) = 1$)
Propriétés :
- $a^{\log_a(x)} = x$ et $\log_a(a^z) = z$
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$ et $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ et $a^{\log_b(x)} = x^{\log_b(a)}$

Notations : $\log(x) = \log_{10}(x)$, $\lg(x) = \log_2(x)$ et $\ln(x) = \log_e(x)$, où $e \approx 2{,}71828 \ldots$



# Fonctions usuelles

- $g$ : polynôme en $n$ de degré $\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$. Exemple : $3n^3 - 2n^2 + 5$
- $h$ : fonction exponentielle $a^n, a > 1$. Exemple : $2^n$
- $f$ : fonction polylogarithme de degré $\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$ : ($\lg$ peut être remplacé par $\log_a$)

$$\sum_{i=0}^{d} a_i \lg^i(n) = a_d \lg^d(n) + a_{d-1}\lg^{d-1}(n) + \cdots + a_1 \lg(n) + a_0, \qquad a_d \neq 0$$

$\left(\text{Notation : } \lg^i(n) = \left(\lg(n)\right)^i\right)$. Exemple : $3\lg^4(n) + 5\lg^2(n) + 3$

Propriétés :
- $f(n) = o\left(g(n)\right)$ et $g(n) = o\left(h(n)\right)$
- $n^d = o\left(n^k\right)$ si $d < k$
- $a^n = o(b^n)$ si $1 < a < b$

# Ordres de grandeur usuels en ordre strictement croissant

| Fonction | Nom |
|---|---|
| $1$ | Constant |
| $\lg(n)$ | Logarithmique |
| $\lg^2(n)$ | Log-carré |
| $n$ | Linéaire |
| $n\lg(n)$ | |
| $n^2$ | Carré |
| $n^3$ | Cubique |
| $n^d, d > 3$ | Polynomial |
| $a^n, a > 1$ | Exponentiel |
| $n!$ | Factoriel |
| $n^n$ | |

Rappel : factorielle de $n$ :
- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Formule de Stirling : $n! = \Theta\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

# Deux séries importantes

Série géométrique : $r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + \cdots ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Série arithmétique : $a, b \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} (a + bk) = (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + nb) = an + b\frac{n(n+1)}{2}$$



# Plafond et plancher

- Plancher (partie entière par défaut) $\lfloor r \rfloor$ : le plus grand entier $\leq r$
- Exemples :
  - $\lfloor 2{,}7 \rfloor = 2$
  - $\lfloor \ln(5) \rfloor = 1$
  - $\left\lfloor -\frac{10}{3} \right\rfloor = -4$

- Plafond (partie entière par excès) $\lceil r \rceil$: le plus petit entier $\geq r$
- Exemples :
  - $\lceil 2{,}7 \rceil = 3$
  - $\lceil \ln(5) \rceil = 2$
  - $\left\lceil -\frac{10}{3} \right\rceil = -3$



# Propriétés pour $a, b, n \in \mathbb{N}^*$

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \qquad \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{27}{2} \right\rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{27}{6} \right\rfloor = 4$$

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil \qquad \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{27}{2} \right\rceil}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{27}{6} \right\rceil = 5$$

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad 27 = \left\lfloor \frac{27}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{27}{2} \right\rceil = 13 + 14$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad 14 = \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor + 1 \geq \left\lceil \frac{26}{2} \right\rceil = 13$$