Exercices sur le chapitre 3

<u>Exercice 1</u> Démontrer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

a) $f_1(n) = \Theta(g_1(n))$ et $f_2(n) = \Theta(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n)f_2(n) = \Theta(g_1(n)g_2(n))$
b) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 3^{f(n)} = O(3^{g(n)})$

<u>Exercice 2</u> Classer dans l'ordre croissant de complexité les fonctions suivantes (aucune justification requise) :

$$2^n\,,\ \lg^3(n)\,,\ 3^{3\log_9(n)}\,, \frac{n}{\lg(n)}\,, \sqrt{n}\,, n^2\lg(n)\,, \lg(n^3)\,, \frac{3n^3+5n}{n+1}$$

<u>Exercice 3</u> Démontrer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses **à l'aide des définitions formelles** :

a) $n! = \Theta((n+1)!)$
b) $3n^3 + 5n^2 + 7 = O(n^3)$
c) $\log_3(n) = \Theta(\log_4(n))$
d) $n! = \Omega(n^2)$

<u>Exercice 4</u> Pour chacune des formules suivantes, donner **tous** les symboles parmi $o, O, \Theta, \omega, \Omega$ qui peuvent remplacer le point d'interrogation (**aucune justification requise**) :

a) $\frac{n^5+5}{5n+1} = ?\,(n^3)$
b) $\log_5(n) = ?\,(\lg(n^3))$
c) $n = ?\,(n!)$

<u>Exercice 5</u> Classer dans l'ordre croissant de complexité les fonctions suivantes (**aucune justification requise**) :

$$n^{\frac{5}{3}}\,,\ 2^{4\log_4(n)}, n\sqrt{n}\lg(n), \lg(n2^n)\,, \frac{7n^5+5n}{n^2+1}$$

<u>Exercice 6</u> Démontrer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses **à l'aide des définitions formelles** :

a) $7n^4 + 2n^2 + 9n + 3 = O(n^5)$
b) $\lg(n) = \Theta(n\lg(n))$

Exercices 3, 4 et 5 du devoir 1 de l'automne 2021
Exercices 3, 4 et 7 du devoir 1 de l'hiver 2022
Exercices 3, 4 et 7 du devoir 1 de l'automne 2022

Solutions

<u>Exercice 1</u>

a) $f_1(n) = \Theta(g_1(n))$ et $f_2(n) = \Theta(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n)f_2(n) = \Theta(g_1(n)g_2(n))$
Il existe $c_1, c_2, c_3, c_4 \in]0; +\infty[$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$c_1g_1(n) \le f_1(n) \le c_2g_1(n) \text{ pour tout entier } n \ge n_1$$
$$c_3g_2(n) \le f_2(n) \le c_4g_2(n) \text{ pour tout entier } n \ge n_2$$

Puisque nos fonctions sont positives, on peut multiplier ces deux inégalités.
Si on pose $N = \max(n_1, n_2)$, $c_5 = c_1c_3$ et $c_6 = c_2c_4$, on a alors :

$$c_5g_1(n)g_2(n) \le f_1(n)f_2(n) \le c_6g_1(n)g_2(n) \text{ pour tout entier } n \ge N$$

et donc $f_1(n)f_2(n) = \Theta(g_1(n)g_2(n))$.

b) $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 3^{f(n)} = O(3^{g(n)})$
Cette propriété est fausse comme le montre le contre-exemple suivant.
On pose $f(n) = 2n$ et $g(n) = n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 2 \in [0; +\infty[$, on a bien

$$f(n) = O(g(n)).$$

Cependant $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{f(n)}}{3^{g(n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et donc

$$3^{f(n)} \ne O(3^{g(n)}).$$

<u>Exercice 2</u> L'ordre croissant de complexité des fonctions est le suivant :

$$\lg(n^3) = 3\lg(n)\,, \lg^3(n)\,, \sqrt{n}, \frac{n}{\lg(n)}\,,\ 3^{3\log_9(n)} = n\sqrt{n}\,, \frac{3n^3+5n}{n+1} = \Theta(n^2), n^2\lg(n)\,, 2^n$$

<u>Exercice 3</u>

a) $n! = \Theta((n+1)!)$
Cette propriété est fausse. En effet, si elle était vraie, il existerait $c_1, c_2 \in]0; +\infty[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que

$$c_1(n+1)! \le n! \le c_2(n+1)! \text{ pour tout entier } n \ge n_0.$$

Si on divise par $(n+1)!$ on obtient

$$c_1 \le \frac{1}{n+1} \le c_2 \text{ pour tout entier } n \ge n_0,$$

ce qui entraine $c_1 = 0$, ce qui n'est pas possible.

b) $3n^3 + 5n^2 + 7 = O(n^3)$
Cette propriété est vraie. On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$f(n) = 3n^3 + 5n^2 + 7 \le cn^3$ pour tout entier $n \ge n_0$. On a en fait :
$3n^3 + 5n^2 + 7 \le 3n^3 + 5n^3 + 7n^3$ pour tout entier $n \ge 1$.
L'affirmation est donc vérifiée pour $c = 15$ et $n_0 = 1$.

c) $\log_3(n) = \Theta(\log_4(n))$
Cette propriété est vraie car $\log_3(n) = \frac{1}{\log_4(3)}\log_4(n)$. On a donc

$$\frac{1}{\log_4(3)}\log_4(n) \le \log_3(n) \le \frac{1}{\log_4(3)}\log_4(n) \text{ pour tout entier } n \ge 1.$$

d) $n! = \Omega(n^2)$
Cette propriété est vraie car, par exemple, $n! \ge n^2$ pour tout $n \ge 4$.

<u>Exercice 4</u>

a) $\frac{n^5+5}{5n+1} = ?\,(n^3)$ $\quad\boldsymbol{\omega, \Omega}$
b) $\log_5(n) = ?\,(\lg(n^3))$ $\quad\boldsymbol{O, \Theta, \Omega}$
c) $n = ?\,(n!)$ $\quad\boldsymbol{o, O}$

<u>Exercice 5</u> L'ordre croissant de complexité des fonctions est le suivant :

$$\lg(n2^n), n\sqrt{n}\lg(n), n^{\frac{5}{3}}\,,\ 2^{4\log_4(n)} = n^2\,, \frac{7n^5+5n}{n^2+1}$$

<u>Exercice 6</u>

a) $7n^4 + 2n^2 + 9n + 3 = O(n^5)$
Cette propriété est vraie. On doit trouver $c > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$f(n) = 7n^4 + 2n^2 + 9n + 3 \le cn^5$ pour tout entier $n \ge n_0$. On a en fait :
$7n^4 + 2n^2 + 9n + 3 \le 7n^5 + 2n^5 + 9n^5 + 3n^5$ pour tout entier $n \ge 1$.
L'affirmation est donc vérifiée pour $c = 21$ et $n_0 = 1$.

b) $\lg(n) = \Theta(n\lg(n))$
Cette propriété est fausse. En effet, si elle était vraie, il existerait $c_1, c_2 \in]0; +\infty[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que

$$c_1n\lg(n) \le \lg(n) \le c_2n\lg(n) \text{ pour tout entier } n \ge n_0.$$

Si on divise par $n\lg(n)$ on obtient

$$c_1 \le \frac{1}{n} \le c_2 \text{ pour tout entier } n \ge n_0,$$

ce qui entraine $c_1 = 0$, ce qui n'est pas possible.