Université du Québec à Montréal

INF5130 : Algorithmique

Devoir 1

Hiver 2023

Nom : <u>OUEYEYA</u> Code permanent : <u>OUEG82330306</u>

Nom : <u>Gaëtan</u> Code permanent : <u>OUEG82330306</u>

Exercice 1

I. $Tab = $ | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 2 | 0 |

$NZ(Tab) = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4$

II. Le pire cas de cet algorithme correspond à un tableau Tab contenant uniquement des éléments non nuls, car les conditions des si sont toujours vérifiées. Ainsi, la valeur de $NZ(Tab)$ dans le pire cas est $\frac{n(n+1)}{2}$, où n est la taille du tableau.

III. Le meilleur cas de cet algorithme correspond à un tableau Tab ne contenant que des zéros, car les conditions du si ne sont jamais vérifiées. Ainsi, la valeur de $NZ(Tab)$ dans le meilleur cas est 0.

IV. a)

$$T(n) = c_1 + c_9 + c_2(n+1) + \sum_{i=1}^{n} \left(c_3(i+1) + (c_4 + c_8)i \sum_{j=1}^{i} (i-j+1)c_5 + (i-j)(c_6+c_7) \right)$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) + (c_4 + c_8) \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(i(i+1)c_5 - \frac{i(i+1)}{2} c_5 - i^2(c_6+c_7) - \frac{i(i+1)}{2}(c_6+c_7) \right)$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 n + (c_3 + c_4 + c_8) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n} i^2(c_5+c_6+c_7) + c_5 i - \frac{i(i+1)}{2}(c_5+c_6+c_7)$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 n + (c_3 + c_4 + c_8) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + (c_5+c_6+c_7) \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + c_5 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{c_5+c_6+c_7}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \frac{c_5+c_6+c_7}{2}$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 n + (c_3 + c_4 + c_8) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{(c_5+c_6+c_7)}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \frac{(c_5-c_6-c_7)}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 n + \left(c_3 + c_4 + c_8 + \frac{(c_5-c_6-c_7)}{4} \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{(c_5+c_6+c_7)}{2} \left(\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 n + \left(\frac{c_3 + c_4 + c_8}{2} + \frac{(c_5 - c_6 - c_7)}{8}\right)(n^2 n) + \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{12}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= c_1 + c_9 + c_2(n+1) + c_3 n + \left(\frac{4c_3 + 4c_4 + 4c_8 + c_5 - c_6 - c_7}{8}\right)(n^2 n) + \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{12}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{6} n3 + \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{12} n^2 + \left(\frac{4c_3 + 4c_4 + 4c_8 + c_5 - c_6 - c_7}{8}\right) n^2 + \left(\frac{4c_3 + 4c_4 + 4c_8 + c_5 - c_6 - c_7}{8}\right) n + \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{12} n + c_3 n + c_2 n + c_2 + c_1 + c_9$$

$$= \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{6} n3 + \frac{(12c_3 + 12c_4 + 12c_8 + 5c_5 - c_6 - c_7)}{24} n^2 + + \left(\frac{4c_3 + 4c_4 + 4c_8 + c_5 - c_6 - c_7}{8}\right) n + \frac{(12c_3 + 12c_2 + c_5 + c_6 + c_7)}{12} n + + c_2 + c_1 + c_9$$

$$= \frac{(c_5 + c_6 + c_7)}{6} n3 + \frac{(12c_3 + 12c_4 + 12c_8 + 5c_5 - c_6 - c_7)}{24} n^2 + + \left(\frac{36c_3 + 24c_2 + 12c_4 + 12c_8 + 5c_5 - c_6 - c_7}{24}\right) n + c_2 + c_1 + c_9$$

b) On doit supprimer c_7 donc :

$$= \frac{(c_5 + c_6)}{6} n3 + \frac{(12c_3 + 12c_4 + 12c_8 + 5c_5 - c_6)}{24} n^2 + + \left(\frac{36c_3 + 24c_2 + 12c_4 + 12c_8 + 5c_5 - c_6}{24}\right) n + c_2 + c_1 + c_9$$

Exercice 2

a)

$$\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=3}^{i+3} \left(36j^2 + 24j + 18i\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[\sum_{j=3}^{i+3} \left(36j^2 + 24j + 18i\right) \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[\sum_{j=3}^{i+3} \left(36j^2\right) + \sum_{j=3}^{i+3} (24j) + \sum_{j=3}^{i+3} (18i) \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[36 \sum_{j=3}^{i+3} j^2 + 24 \sum_{j=3}^{i+3} j + 18i \sum_{j=3}^{i+3} 1 \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[36 \left(\sum_{j=1}^{i+3} j^2 - (2^2 + 2^1) \right) + 24 \left(\sum_{j=1}^{i+3} j - (2+1) \right) + 18i(i+3-3+1) \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[36 \left(\frac{(i+3)(i+4)(2(i+3)+1)}{6} - 5 \right) + 24 \left(\frac{(i+3)(i+4)}{2} - 3 \right) + 18i^2 + 18i \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[36 \left(\frac{(i^2+7i+12)(2i+7)}{6} - 5 \right) + 24 \left(\frac{(i^2+7i+12)}{2} - 3 \right) + 18i^2 + 18i \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[36 \left(\frac{2i^3+21i^2+73i}{6} + 9 \right) + 24 \left(\frac{i^2+7i}{2} + 3 \right) + 18i^2 + 18i \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[6\left(2i^3+21i^2+73i\right) + 9 \times 36 + 12\left(i^2+7i\right) + 3 \times 24 + 18i^2 + 18i \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} \left[12i^3 + 126i^2 + 438i + 324 + 12i^2 + 84i + 72 + 18i^2 + 18i \right]$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} 12i^3 + 156i^2 + 540i + 396$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} 12i^3 + \sum_{i=2}^{n-1} 156i^2 + \sum_{i=2}^{n-1} 540i + \sum_{i=2}^{n-1} 396$$
$$= 12 \sum_{i=2}^{n-1} i^3 + 156 \sum_{i=2}^{n-1} i^2 + 540 \sum_{i=2}^{n-1} i + 396(n-1-2+1)$$
$$= 12 \sum_{i=2}^{n-1} i^3 + 156 \sum_{i=2}^{n-1} i^2 + 540 \sum_{i=2}^{n-1} i + 396(n-1-2+1)$$
$$= 12 \sum_{i=2}^{n-1} (i^3 - 1) + 156 \sum_{i=2}^{n-1} (i^2 - 1) + 540 \sum_{i=2}^{n-1} (i-1) + 396n - 792$$
$$= 12 \left(\frac{(n-1)^2(n)}{4} \right) - 12 + 156 \left(\frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6} \right) - 156 + 540 \left(\frac{(n-1)(n)}{2} \right) - 540 + 396n - 792$$
$$= 3(n^2 - 2n + 1)n^2) - 12 + 26((n^2 - n)(2n-1)) - 156 + 270n^2 - 270n - 540 + 396 - 792$$
$$= 3n^4 - 6n^3 + 3n^2 - 12 + 52n^3 - 26n^2 - 52n^2 + 270n^2 + 26n - 156 + 270n - 270n - 540 + 396n - 792$$
$$= 3n^4 + 46n^3 + 195n^2 - 152n - 1500$$

b)

$$\sum_{i=5}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j} 3^k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=5}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{3^{j+1}-1}{3-1} \\
&= \sum_{i=5}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{2}\left(3^j+1\right) \\
&= \sum_{i=5}^{n} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i} 3^j + 1 \\
&= \sum_{i=5}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{3^{i+2}-1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(i+1\right) \\
&= \sum_{i=5}^{n} \frac{1}{4}\left(3^{i+2}-2i-5\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3^{n+3}-1}{2}\right) - \frac{1}{4}(3^2+3^3+3^4+3^5+3^6) - \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{10}{2} - \frac{5}{4}(n-4) \\
&= \frac{1}{3}\left(3^{n+3}-1\right) - \frac{1}{4}(1089) - \frac{1}{4}(n^2+n) + 5 - \frac{5n}{4} + 5 \\
&= \frac{1}{8}\left(3^{n+3} - 1 - 2178 - 2n^2 - 2n + 40 - 10n + 40\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(3^{n+3} - 2n^2 - 12n - 2099\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3

On suppose que $f(n) = \omega\left(g(n)\right)$.

Pour toute constante strictement positive c_0, il existe $n_0 > 0$ telle que pour tout $n > n_0$, $0 \leq c_0 \cdot g(n) \leq f(n)$. Ainsi,

$0 \leq 6 \cdot c_0 \cdot g(n) \leq 6 \cdot f(n)$

$0 \leq \frac{6 \cdot c_0 \cdot g(n)}{2} \leq \frac{6}{2} \cdot f(n)$

$0 \leq \frac{2 \cdot 3 \cdot c_0}{2} \cdot g(n) \leq 3 \cdot f(n)$

$0 \leq \left(\frac{3 \cdot c_0}{2} + 5\right) \cdot 2g(n) \leq 3 \cdot f(n) + 5 \cdot f(n)$

En posant c $= \frac{2 \cdot 3 \cdot c0}{2} + 5$,

$$\text{pour tout } n > n_0,\ 0 \leq c \cdot 2g(n) \leq 3 \cdot f(n) + 5 \cdot f(n),$$

ce qui démontre que $f(n) = \omega\left(g(n)\right)$.

Exercice 4 On suppose que $f(n) = O\left(h(n)\right)$ et $g(n) = \Omega\left(1\right)$. Démontrer **à l'aide des définitions formelles** que $7f(n) = O\left(h(n)g(n)\right)$.

On suppose que $f(n) = O(h(n))$ et $g(n) = \Omega(1)$.
Si $f(n) = O(h(n))$ alors il existe deux constantes strictement positives c_1 et n_1 telles que

$$0 \leq f(n) \leq c_1 \cdot h(n), \text{ pour tout } n \geq n_1.$$
$$0 \leq 7 \cdot f(n) \leq 7 \cdot c_1 \cdot h(n)$$

Donc avec $7 \cdot c1 = d$, $0 \leq 7 \cdot f(n) \leq d \cdot h(n)$.

De plus, si $g(n) = \Omega(1)$, alors il existe deux constantes strictement positives c_2 et n_2 tel que
$0 \leq 1 \cdot c_2 \leq g(n)$ pour tout $n \geq n_2$.
$0 \leq c_2 \cdot h(n) \leq g(n) \cdot h(n)$

Ainsi, pour tout $n \geq max(n_1, n_2)$ et $c = min(d, c_2)$,
$0 \leq 7 \cdot f(n) \leq (h(n)g(n))$ et $7f(n) = O(h(n)g(n))$.
Donc $7f(n) = O(h(n)g(n))$.

Exercice 5

On considère l'équation de récurrence $T(n) = 4T(n-1) + 5T(n-2) + 1$ pour tout entier $n \geq 3$, $T(1) = 0$, $T(2) = 1$.

a) Calculer $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$ à l'aide de l'équation de récurrence.

$$T(3) = 4T(2) + 5T(1)$$
$$T(3) = 8$$

$$T(4) = 4T(3) + 5T(2)$$
$$T(4) = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1$$
$$T(4) = 37$$

$$T(5) = 4T(4) + 5T(3)$$
$$T(5) = 4 \cdot 37 + 5 \cdot 8$$
$$T(5) = 188$$

b) Démontrer **par récurrence** que $T(n) \geq 5^{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Initialisation :

Si $n = 2$, $T(2) = 1$ et $5^{2-2} \Leftrightarrow 5^0 \leq 1$.

Si $n = 3$, $T(3) = 8$ et $5^{3-2} \Leftrightarrow 5 \leq 8$.

L'initialisation est donc vérifiée.

Récurrence :

On suppose la proposition vraie au rang $k = n$: $T(n) \geq 5^{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $k = n + 1$:$T(n+1) \geq 5^{n-1}$.

On pose que $T(n) \geq 5^{n-2}$ et $T(n-1) \geq 5^{n-3}$.

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= 4 \cdot T(n) + 5 \cdot T(n-1) \\
&\geq 4 \cdot 5^{n-2} + 5 \cdot 5^{n-3} \\
&\geq 5^{n-1} \cdot (4 \times 5^{-1} + 5 \times 5^{-2}) \\
&\geq 5^{n-1} \cdot (4 \times 0.2 + 5 \times 0.04) \\
&\geq 5^{n-1} \cdot (0.8 + 0.2) \\
&\geq 5^{n-1}
\end{aligned}
$$

$T(n+1) \geq 5^{n-1}$ est donc vraie et la proposition est donc récurrente.

Conclusion :

La proposition est initialisée et récurrente donc pour tout $n \geq 2$, $T(n) = 5^{n-2}$.

Exercice 6

a) $T(n) = 8T\left(\lceil \frac{n}{4} \rceil\right) + 5n\sqrt{n}$

$a = 8$, $b = 4$ et $f(n) = 5n\sqrt{n} = 5n^{\frac{3}{2}} = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$

$\log_b(a) = \log_4(8) = \frac{3}{2}$.

Le cas 2 s'applique donc $T(n) = \left(n^{\log_4(8)} \cdot \lg(n)\right)$.

b) $T(n) = 9T\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil\right) + 7n^6$

$a = 9$, $b = 3$ et $f(n) = 7n^6$

$\log_b(a) = \log_3(9) = 2$ et $n^{\log_b(a)} = n^2$.

Le cas 3 s'applique donc si on prend $\epsilon = 4$, $f(n) = \Omega(n^{\log_3(9)+4}$ donc $T(n) = \Theta(f(n))$.

De plus, on vérifie l'hypothèse que $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right)$,

$$
\begin{aligned}
9 \cdot f\left(\frac{n}{3}\right) &= 9 \times 7\left(\frac{n}{3}\right)^6 \\
&= \frac{63n^6}{729} \\
&= \frac{7n^6}{81}
\end{aligned}
$$

On peut donc prendre $c = \frac{1}{81} < 1$.

c) $T(n) = 6T\left(\lceil \frac{n}{36} \rceil\right) + \sqrt[3]{n}\,\lg(n)$ $a = 6$, $b = 36$ et $f(n) = \sqrt[3]{n}\,\lg(n)$.

$\log_b(a) = \log_{36}(6) = \frac{1}{2} et n^{\log_b(a)} = n^{\frac{1}{2}}$.

Le cas 1 s'applique donc si on prend $\epsilon = \frac{1}{6}$, $f(n) = \Omega\left(n^{\log_{36}(6) - \frac{1}{6}}\right)$ donc $T(n) = \Theta\left(n^{\log_{36}(6)}\right)$.

Exercice 7

$$\frac{\sqrt{n}}{\lg(n)}, 2^{2\log_{16}(n)}, \sqrt{n^2 \lg^5\left(\sqrt{n}\right)}, n\lg^2(5n), n\lg(n^3), \sqrt[3]{n^7}, 5^{\lg(n)}, \frac{3n^5+5n}{2n^2+1}$$

Exercice 8

$$\begin{aligned}
T(n) = {} & n^2\, 32^{2\log_4(n)} \lg^3\left(\sqrt[3]{n}\right) \log_5\left(\frac{n^4}{\sqrt{n}}\right) \\
&= n^2 \cdot \left(32^{\log_4(n)}\right)^2 \cdot \left(\lg(\sqrt[3]{n})\right)^3 \cdot \left(\log_5(n^4) - \log_5(\sqrt{n})\right) \\
&= n^2 \cdot \left(n^{\log_4(32)}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\lg(n)\right)^3 \cdot \left(4\log_5(n) - \frac{1}{2}\log_5(n)\right) \\
&= n^2 \cdot \left(n^{5/2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\lg(n)\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2}\log_5(n)\right) \\
&= n^2 \cdot n^5 \cdot \frac{7}{27\times 2} \cdot \lg^3(n) \cdot \log_5(n) \\
&= \frac{7}{54} \cdot n^7 \cdot \lg^3(n) \cdot \frac{\lg(n)}{\log_5} \\
&= \frac{7}{54\times\log_5} \cdot n^7 \cdot \lg^4(n)
\end{aligned}$$

Ainsi, $T(n) = \frac{7}{54\times\log_5} \cdot n^7 \cdot \lg^4(n)$.