Devoir 1

Vous devez remettre vos solutions sur Moodle **avant le vendredi 18 février 2022 à 23h55 sous la forme d'un unique fichier pdf**. Un retard de 24 heures au maximum sera accepté : pénalité de $\frac{m}{144}$ points, où m est le nombre de minutes de retard. **La note 0 sera attribuée au-delà d'un retard de 24 heures**. Le nombre total de points pour ce devoir est 100. Le devoir peut être fait en équipes de deux étudiant-e-s au maximum. Il doit être **intégralement** rédigé avec LaTeX.

Exercice 1 (**20 points**) On définit la fonction suivante :

fonction SG(Tab) **retourne** entier

- entrée : un tableau d'entiers Tab indicé de 1 à n
- sortie : un nombre entier x

début

$x \leftarrow 0$	c_1
pour $i \leftarrow 2$ **haut** n **faire**	c_2
$A \leftarrow Faux$	c_3
pour $j \leftarrow 1$ **haut** $i-1$ **faire**	c_4
si $Tab[i] = Tab[j]$ **faire**	c_5
$A \leftarrow Vrai$	c_6
fin si	
fin pour	
si $A = Vrai$ **faire**	c_7
$x \leftarrow x+1$	c_8
fin si	
fin pour	
retourner x	c_9

fin SG

I. Calculer la valeur de SG(Tab) pour les tableaux suivants :

a)

1	5	2	1	3	4	9	1	3

b)

3	2	3	3	2	3	3	7	1

II. Quels tableaux correspondent au pire cas de cet algorithme ? Quelle est alors la valeur de SG(Tab) ?

III. Quels tableaux correspondent au meilleur cas de cet algorithme ? Quelle est alors la valeur de SG(Tab) ?

IV. Déterminer la complexité temporelle exacte de cet algorithme en fonction des temps d'exécution c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 et c_9 :

a) Au pire cas,
b) Au meilleur cas.

INF5130 Algorithmique — Université du Québec à Montréal — Hiver 2022

Exercice 2 (**15 points**) Déterminer les sommes suivantes en utilisant les formules de sommations rappelées dans le chapitre 2 :

a)
$$\sum_{k=4}^{n+1} \left(9k^2 - 3kn + 7\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

b)
$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{j} 2^k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 3 (**10 points**) On suppose que $f_1(n) = \Theta(g_1(n))$ et $f_2(n) = \Theta(g_2(n))$.
Démontrer **à l'aide des définitions formelles** que $f_1(n) + 3f_2(n) = \Theta(4g_1(n) + g_2(n))$.

Exercice 4 (**15 points**) Démontrer **à l'aide des définitions formelles** les égalités suivantes :

a) $5n^2 = o\left(n^4\right)$

b) $n^2 \lg\left(\frac{n^3}{\sqrt{n}}\right) = \Theta\left(9^{\log_3(n)} \log_5(n)\right)$

Exercice 5 (**10 points**)
On considère l'équation de récurrence $T(n) = T(n-1) + 2n + 5$ pour tout entier $n \geq 2$, $T(1) = 16$.

a) Calculer $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$ à l'aide de l'équation de récurrence.

b) Démontrer **par récurrence** que $T(n) = (n+3)^2$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 6 (**20 points**)
Utiliser, **si possible**, la méthode générale pour résoudre les récurrences suivantes :

a) $T(n) = 25T\left(\lceil \frac{n}{5} \rceil\right) + 3n\lg^2(n)$

b) $T(n) = 2T\left(\lceil \frac{n}{10} \rceil\right) + \sqrt{n}$

c) $T(n) = T\left(\lceil \frac{n}{4} \rceil\right) + \lg^3(n)$

d) $T(n) = 2T\left(\lceil \frac{n}{16} \rceil\right) + \sqrt[4]{n}$

Exercice 7 (**10 points**) Classer dans l'ordre croissant de complexité les fonctions suivantes (**aucune justification requise**) :

$$\frac{3^n}{n^5}, n^2\lg^3(n), 5^{4\log_{25}(n)}, \frac{n^2}{n+\lg(n)}, n\lg^2\left(\sqrt{n}\right), \frac{n^3}{n^2\lg(n)+n}, n\lg\left(n^4\right), 2^n$$