

Université du Québec à Montréal
INF5130 : Algorithmique
Devoir 2
Hiver 2022

Vous devez remettre vos solutions sur Moodle **avant le vendredi 22 avril 2022 à 23h55 sous la forme d'un unique fichier pdf**. Un retard de 24 heures au maximum sera accepté : pénalité de $\frac{m}{144}$ points, où m est le nombre de minutes de retard. **La note 0 sera attribuée au-delà d'un retard de 24 heures**. Le nombre total de points pour ce devoir est 100. Le devoir peut être fait en équipes de deux étudiant-e-s au maximum. Il doit être **intégralement** rédigé avec L^AT_EX.

Exercice 3 (25 points)

Dans quel ordre effectuer les tâches pour minimiser la somme des pénalités des tâches en retard ? On suppose que les tâches ont une durée de 1 et que les échéances et les pénalités sont données dans le tableau suivant.

Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	4	2	1	4	3	7	6	6	5	9
Pénalité	90	80	70	60	55	50	45	30	20	10

Vous devez donner toute la séquence des insertions des tâches comme dans l'exemple 1 (pages 36 à 42) du chapitre sur les algorithmes gloutons.

Exercice 4 (25 points)

Convertissez l'instance suivante du problème SAT en une instance du problème 3-FNC-SAT :

$$\neg x_1 \wedge (x_1 \vee (x_2 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)))$$

Utilisez la méthode présentée dans le chapitre sur la NP-complétude. Ne simplifiez pas l'expression initiale. Vous devez donner tous les détails des trois étapes de votre transformation.

Exercice 1 (25 points)

Utiliser l'approche dynamique présentée dans le chapitre 6 pour trouver un arbre binaire de recherche qui minimise le nombre moyen de comparaisons lors d'une recherche fructueuse parmi 6 clés ayant des probabilités de recherche données dans le tableau ci-dessous. **Vous devez déterminer les matrices C et $racine$ ainsi que l'arbre binaire associé et l'espérance du temps de recherche. Vous devez donner tous les détails de vos calculs.**

k	1	2	3	4	5	6
p_k	0,1	0,25	0,05	0,12	0,18	0,3

Exercice 2 (25 points)

On considère des séquences d'ADN : 4 caractères possibles : A, T, C et G. On suppose un coût de 3 pour une insertion ou une délétion et la matrice de coût suivante.

	A	T	C	G
A	0	1	5	7
T	1	0	1	2
C	5	1	0	8
G	7	2	8	0

Trouvez un alignement optimal ainsi que son coût entre la séquence $X = \text{GACGGAGCT}$ et la séquence $Y = \text{ATGATGCTGA}$. **Vous devez déterminer les matrices D (des coûts) et V (des flèches) définies dans le chapitre sur la programmation dynamique (Distance de Levenshtein, pages 52 à 60).**

Exercice 1 (25 points)

k	1	2	3	4	5	6
p _k	0,1	0,25	0,05	0,12	0,18	0,3

$$\begin{aligned} C[1;1] &= p_1 = 0,1 & C[2;2] &= p_2 = 0,25 & C[3;3] &= p_3 = 0,05 \\ C[4;4] &= p_4 = 0,12 & C[5;5] &= p_5 = 0,18 & C[6;6] &= p_6 = 0,3 \end{aligned}$$

$$C[1;2] = \min(0 + 0,25; 0,1 + 0) + 0,1 + 0,25 = 0,45$$

$$C[2;3] = \min(0 + 0,05; 0,25 + 0) + 0,25 + 0,05 = 0,35$$

$$C[3;4] = \min(0 + 0,12; 0,05 + 0) + 0,05 + 0,12 = 0,22$$

$$C[4;5] = \min(0 + 0,18; 0,12 + 0) + 0,12 + 0,18 = 0,42$$

$$C[5;6] = \min(0 + 0,3; 0,18 + 0) + 0,18 + 0,3 = 0,66$$

$$C[1;3] = \min(0 + 0,35; 0,1 + 0,05; 0,45 + 0) + 0,1 + 0,25 + 0,05 = 0,55$$

$$C[2;4] = \min(0 + 0,22; 0,25 + 0,12; 0,35 + 0) + 0,25 + 0,05 + 0,12 = 0,64$$

$$C[3;5] = \min(0 + 0,42; 0,05 + 0,18; 0,22 + 0) + 0,05 + 0,12 + 0,18 = 0,57$$

$$C[4;6] = \min(0 + 0,66; 0,12 + 0,3; 0,42 + 0) + 0,12 + 0,18 + 0,3 = 1,02$$

$$C[1;4] = \min(0 + 0,64; 0,1 + 0,22; 0,45 + 0,12; 0,55 + 0) + 0,1 + 0,25 + 0,05 + 0,12 = 0,84$$

$$C[2;5] = \min(0 + 0,57; 0,25 + 0,42; 0,35 + 0,18; 0,64 + 0) + 0,25 + 0,05 + 0,12 + 0,18 = 1,13$$

$$C[3;6] = \min(0 + 1,02; 0,05 + 0,66; 0,22 + 0,3; 0,57 + 0) + 0,05 + 0,12 + 0,18 + 0,3 = 1,17$$

$$C[1;5] = \min(0 + 1,13; 0,1 + 0,57; 0,45 + 0,42; 0,55 + 0,18; 0,84 + 0) + 0,1 + 0,25 + 0,05 + 0,12 + 0,18 = 1,37$$

$$C[2;6] = \min(0 + 1,17; 0,25 + 1,02; 0,35 + 0,66; 0,64 + 0,3; 1,13 + 0) + 0,25 + 0,05 + 0,12 + 0,18 + 0,3 = 1,84$$

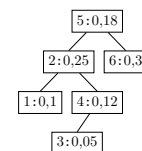
$$C[1;6] = \min(0 + 1,84; 0,1 + 1,17; 0,45 + 1,02; 0,55 + 0,66; 0,84 + 0,3; 1,37 + 0) + 0,1 + 0,25 + 0,05 + 0,12 + 0,18 + 0,3 = 2,14$$

Matrice C :

	0	1	2	3	4	5	6
1	0	0,1	0,45	0,55	0,84	1,37	2,14
2		0	0,25	0,35	0,64	1,13	1,84
3			0	0,05	0,22	0,57	1,17
4				0	0,12	0,42	1,02
5					0	0,18	0,66
6						0	0,3
7							0

Matrice *racine* :

	0	1	2	3	4	5	6
1		1	2	2	2	2	5
2			2	2	2	4	5
3				3	4	5	5
4					4	5	5/6
5						5	6
6							6
7							



Espérance du temps de recherche : 2,14.

Barème :

- 5 points pour la matrice C (1 point en moins par erreur)
- 5 points pour la matrice *racine* (1 point en moins par erreur, un seul chiffre suffit pour le résultat situé à la ligne 4 et à la colonne 6)
- 6 points pour le détail des calculs des coefficients de la matrice C
- 6 points pour l'arbre binaire de recherche optimal
- 3 points pour l'espérance du temps de recherche

Ne pas pénaliser plusieurs fois pour une erreur qui se propage.

2

Exercice 2 (25 points)

X \ Y	G	A	C	G	G	A	G	C	T
A	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T	3	6	3	6	9	12	15	18	21
G	6	5	6	4	7	10	13	16	19
A	9	6	9	7	4	7	10	13	16
T	12	9	6	9	7	10	7	10	13
G	15	12	9	7	10	9	10	9	11
C	18	15	12	10	7	10	13	10	13
T	21	18	15	12	10	13	15	13	10
A	24	21	18	15	13	12	14	16	13
G	27	24	21	18	15	13	16	14	16
T	30	27	24	21	18	16	13	16	19

X \ Y	G	A	C	G	G	A	G	C	T
A	↑,↖	↖	↖	↖	↖	↖,↖	↖	↖	↖
T	↖	↑	↖	↖	↖	↖,↖	↖	↖,↖	↖
G	↖	↑,↖	↑	↖	↖,↖	↖	↖,↖	↖	↖
A	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
T	↑	↑	↑	↑,↖	↑,↖	↑	↑	↑	↑
G	↑	↑	↑	↑	↑,↖	↑	↑	↑	↑
C	↑	↑	↑,↖	↑	↑	↑	↑	↑	↑
T	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	↑,↖	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
A	↑	↑,↖	↑	↑	↑	↑	↑	↑,↖	↑

Alignement optimal :

X || G A C G G A G C T
Y || A A T G A T G C T G A

Coût : 16

Barème :

- 9 points pour la matrice de coût (1 point en moins par erreur)
- 9 points pour la matrice des flèches (1 point en moins par erreur, une seule flèche suffit pour les cases pouvant contenir plusieurs flèches)
- 5 points pour l'alignement
- 2 points pour son coût

Les matrices transposées (échange de X et Y) sont acceptées.

Le G (troisième caractère de Y) peut être en face du quatrième ou du cinquième caractère de X.

Ne pas pénaliser plusieurs fois pour une erreur qui se propage.

Arbre binaire de recherche optimal :

Exercice 3 (25 points)

Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	4	2	1	4	3	7	6	6	5	9
Pénalité	90	80	70	60	55	50	45	30	20	10

i	1
d _i	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
N _i (F)	0 0 0 1 1 1 1 1 1 1

i	2 1									
d_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_i(F)$	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2

i	3	2	1							
d_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_i(F)$	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3

i	4
d _i	3 2 1
N _i (F)	1 2 2 4 4 4 4 4 4 4

	4									
i	3	2	5	1						
d_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

	4									
i	3	2	5	1	6					
d_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

	4									
i	3	2	5	1		7	6			
d_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

				4	8			
i	3	2	5	1	9	7	6	10
	1	2	3	4	5	6	7	8

Ordonnancement optimal : 3 2 1 4 7 8 6 10 5 9

Pénalité : 55 + 20 = 75

Barème :

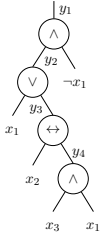
- 10 points pour les 10 tableaux
- 10 points pour l'ordonnancement optimal
- 5 points pour la pénalité

Ne pas pénaliser plusieurs fois pour une erreur qui se propage.

Exercice 4 (25 points)

$$\neg x_1 \wedge (x_1 \vee (x_2 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)))$$

Première étape (10 points)
5 points pour l'arbre
1 point pour chaque ϕ'_i



$$\phi'_1 = y_1$$

$$\phi'_2 = y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_1)$$

$$\phi'_3 = y_2 \leftrightarrow (x_1 \vee y_3)$$

$$\phi'_4 = y_3 \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow y_4)$$

$$\phi'_5 = y_4 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)$$

Deuxième étape (12 points)
1 point pour chaque table de vérité
1 point pour chaque $\neg\phi''_i$
1 point pour chaque ϕ''_i

y_1	y_2	x_1	$y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_1)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\phi''_2 = y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_1)$$

$$\neg\phi''_2 = (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge \neg x_1) \vee (y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg x_1) \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge x_1)$$

$$\phi''_2 = (y_1 \vee \neg y_2 \vee x_1) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee x_1) \wedge (\neg y_1 \vee y_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg x_1)$$

5

Troisième étape (3 points)
2 points pour ϕ'''_i
1 point pour les autres ϕ'''_i

$$\phi'''_1 = (y_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee z_1 \vee \neg z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee \neg z_2)$$

$$\phi'''_2 = \phi''_2$$

$$\phi'''_3 = \phi''_3$$

$$\phi'''_4 = \phi''_4$$

$$\phi'''_5 = \phi''_5$$

y_2	x_1	y_3	$y_2 \leftrightarrow (x_1 \vee y_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\phi'_3 = y_2 \leftrightarrow (x_1 \vee y_3)$$

$$\neg\phi'_3 = (\neg y_2 \wedge \neg x_1 \wedge y_3) \vee (\neg y_2 \wedge x_1 \wedge \neg y_3) \vee (y_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg y_3)$$

$$\phi'_3 = (y_2 \vee x_1 \vee \neg y_3) \wedge (y_2 \vee \neg x_1 \vee y_3) \wedge (y_2 \vee \neg x_1 \vee \neg y_3) \wedge (\neg y_2 \vee x_1 \vee y_3)$$

y_3	x_2	y_4	$y_3 \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow y_4)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi'_4 = y_3 \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow y_4)$$

$$\neg\phi'_4 = (\neg y_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg y_4) \vee (\neg y_3 \wedge x_2 \wedge y_4) \vee (y_3 \wedge \neg x_2 \wedge y_4) \vee (y_3 \wedge x_2 \wedge \neg y_4)$$

$$\phi'_4 = (y_3 \vee x_2 \vee y_4) \wedge (y_3 \vee \neg x_2 \vee \neg y_4) \wedge (\neg y_3 \vee x_2 \vee \neg y_4) \wedge (\neg y_3 \vee \neg x_2 \vee y_4)$$

y_4	x_3	x_1	$y_4 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi'_5 = y_4 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)$$

$$\neg\phi'_5 = (\neg y_4 \wedge x_3 \wedge x_1) \vee (y_4 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_1) \vee (y_4 \wedge \neg x_3 \wedge x_1) \vee (y_4 \wedge x_3 \wedge \neg x_1)$$

$$\phi'_5 = (y_4 \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_4 \vee x_3 \vee x_1) \wedge (\neg y_4 \vee x_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_4 \vee \neg x_3 \vee x_1)$$

6