Université du Québec à Montréal
INF5130 : Algorithmique
Devoir 2
Hiver 2023

Vous devez remettre vos solutions sur Moodle **avant le vendredi 21 avril 2023 à 23h55 sous la forme d'un unique fichier pdf**. Un retard de 24 heures au maximum sera accepté : pénalité de $\frac{m}{144}$ points, où m est le nombre de minutes de retard. **La note 0 sera attribuée au-delà d'un retard de 24 heures**. Le nombre total de points pour ce devoir est 100. Le devoir peut être fait en équipes de deux étudiant-e-s au maximum. Il doit être **intégralement** rédigé avec LaTeX.

Exercice 1 **(25 points)**
Utiliser l'approche dynamique présentée dans le chapitre 6 pour trouver un arbre binaire de recherche qui minimise le nombre moyen de comparaisons lors d'une recherche fructueuse parmi 7 clés ayant des probabilités de recherche données dans le tableau ci-dessous. **Vous devez déterminer les matrices C et *racine* ainsi que l'arbre binaire associé et l'espérance du temps de recherche. Vous devez donner tous les détails de vos calculs.**

k	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0,21	0,01	0,05	0,12	0,18	0,03	0,4

Exercice 2 **(25 points)**
Dans quel ordre effectuer les tâches pour minimiser la somme des pénalités des tâches en retard ? On suppose que les tâches ont une durée de 1 et que les échéances et les pénalités sont données dans le tableau suivant :

Tâche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Échéance	3	2	2	3	4	5	1	5	6	8
Pénalité	95	85	55	60	50	45	40	30	20	10

Vous devez utiliser l'algorithme présenté dans le chapitre sur les algorithmes gloutons. Vous devez donner toute la séquence des insertions des tâches.

Exercice 3 **(25 points)**
Convertissez l'instance suivante du problème SAT en une instance du problème 3-FNC-SAT :

$$((x_1 \to x_2) \land x_1) \lor \neg x_2.$$

Utilisez la méthode présentée dans le chapitre sur la NP-complétude. Ne simplifiez pas l'expression initiale. Vous devez donner tous les détails des trois étapes de votre transformation.

Exercice 4 **(25 points)**
Un étudiant veut travailler m heures par semaine en dehors de ses heures de cours pour financer ses études. Il peut travailler dans n entreprises différentes numérotées de 1 à n. **Les salaires qui lui sont offerts par ces entreprises ne sont pas proportionnels aux nombres d'heures de travail**. On note $S[i][j]$ le salaire offert par l'entreprise j ($1 \le j \le n$) pour i heures de travail ($0 \le i \le m$). Le but de l'exercice est de trouver le revenu maximal possible pour l'étudiant. Pour résoudre ce problème,

nous allons utiliser un algorithme de programmation dynamique en calculant les matrices SM et NH, où $SM[i][j]$ est égal au revenu maximal pour i heures de travail avec les entreprises numérotées de 1 à j, et où $NH[i][j]$ est égal au nombre d'heures travaillées dans l'entreprise j pour obtenir le revenu maximal $SM[i][j]$.

Par exemple pour $m = 3$ et $n = 3$, si nous avons en entrée la matrice de salaire $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & 20 & 23 \\ 40 & 35 & 45 \\ 62 & 50 & 55 \end{pmatrix}$, cela signifie que l'entreprise 1 paye 62 \$ pour 3 heures et que l'entreprise 3 paye 45 \$ pour 2 heures. On peut dans ce cas calculer assez facilement les matrices SM et NH en considérant toutes les combinaisons possibles et on obtient :

$$SM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & 20 & 23 \\ 40 & 40 & 45 \\ 62 & 62 & 65 \end{pmatrix} \qquad NH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le revenu maximal est ainsi de 65 \$ pour 2 heures de travail dans l'entreprise 3 et 1 heure de travail dans l'entreprise 2. De manière plus générale, les matrices SM et NH peuvent être calculées selon le schéma dynamique suivant.

Initialisation : Pour tout entier $1 \leq j \leq n$, $SM[0][j] = NH[0][j] = 0$.
Pour tout entier $1 \leq i \leq m$, $SM[i][1] = S[i][1]$ et $NH[i][1] = i$.

Schéma récursif : Pour tout entier $1 \leq i \leq m$ et pour tout entier $2 \leq j \leq n$, on a :
$SM[i][j] = \max_{0 \leq k \leq i} (SM[i-k][j-1] + S[k][j])$,
$NH[i][j]$ est égal à l'indice k qui donne la valeur maximale dans la formule ci-dessus.

Le coefficient $SM[m][n]$ est alors égal au revenu maximal, et le coefficient $NH[m][n]$ est égal au nombre d'heures qu'il faut travailler dans l'entreprise n pour obtenir ce revenu maximal.

Questions :

I. Déterminer les matrices SM et NH **en utilisant les formules ci-dessus**, si on a en entrée la matrice suivante (pour $m = 5$ heures de travail et $n = 4$ entreprises):

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 20 & 18 & 25 \\ 30 & 40 & 38 & 35 \\ 45 & 54 & 59 & 47 \\ 60 & 65 & 68 & 69 \\ 75 & 70 & 78 & 80 \end{pmatrix}.$$

Vous devez expliciter tous les détails de vos calculs.

II. En déduire le revenu maximal et le nombre d'heures qu'il faut travailler dans chacune des entreprises pour obtenir ce revenu maximal.

Vous devez notamment expliquer comment vous obtenez le nombre d'heures travaillées dans chaque entreprise à partir de la matrice NH.