Université du Québec à Montréal

INF5130 : Algorithmique

Devoir 1

Hiver 2022

SOLUTIONS

Exercice 1

I. a) $\text{SG}(Tab) = 0+0+1+0+0+0+0+1+1 = 3$ (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour le détail de la somme**).

b) $\text{SG}(Tab) = 0+1+1+1+1+1+1+0+0 = 5$ (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour le détail de la somme**).

II. Le pire cas correspond aux tableaux dont tous les éléments sont égaux entre eux, car les conditions des **si** sont toujours vérifiées. La valeur de $\text{SG}(Tab)$ est alors égale à $n-1$ (**3 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour la justification, 1 point pour la valeur**).

III. Le meilleur cas correspond aux tableaux dont les éléments sont tous différents, car les conditions des **si** ne sont jamais vérifiées. La valeur de $\text{SG}(Tab)$ est alors égale à 0 (**3 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour la justification, 1 point pour la valeur**).

IV. a) On obtient la somme suivante (**4 points : un point pour chacun des quatre termes**) :

$$T(n) = (c_1+c_9) + c_2 n + (c_3+c_7+c_8)(n-1) + \sum_{i=2}^{n} \left(c_4 i + (c_5+c_6)(i-1)\right). \tag{1}$$

On calcule la somme (**3 points : un point pour chaque ligne**) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} \left(c_4 i + (c_5+c_6)(i-1)\right) &= \sum_{i=2}^{n} (c_4+c_5+c_6)i - \sum_{i=2}^{n} (c_5+c_6)\\ &= (c_4+c_5+c_6)\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) - (c_5+c_6)(n-1)\\ &= \frac{c_4+c_5+c_6}{2}n^2 + \frac{c_4-c_5-c_6}{2}n - c_4.\end{aligned}$$

On remplace dans l'équation 1 et on simplifie (**1 point**) :

$$T(n) = \frac{c_4+c_5+c_6}{2}n^2 + \frac{2c_2+2c_3+c_4-c_5-c_6+2c_7+2c_8}{2}n + c_1 - c_3 - c_4 - c_7 - c_8 + c_9.$$

b) On doit supprimer c_6 et c_8, et on obtient (**2 points**) :

$$T(n) = \frac{c_4+c_5}{2}n^2 + \frac{2c_2+2c_3+c_4-c_5+2c_7}{2}n + c_1 - c_3 - c_4 - c_7 + c_9.$$

Exercice 2

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$:

$$\sum_{k=4}^{n+1} \left(9k^2 - 3kn + 7\right) = 9\sum_{k=4}^{n+1} k^2 - 3n\sum_{k=4}^{n+1} k + 7\sum_{k=4}^{n+1} 1. \tag{2}$$

On calcule chacune des trois sommes du terme de droite :

$$\sum_{k=4}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{3} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - (1+4+9) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n - 13.$$

$$\sum_{k=4}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=1}^{3} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (1+2+3) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 5.$$

$$\sum_{k=4}^{n+1} 1 = n+1-4+1 = n-2.$$

Si on remplace les trois sommes ci-dessus dans l'équation 2, on obtient après simplification :

$$\sum_{k=4}^{n+1} \left(9k^2 - 3kn + 7\right) = 3n^3 + \frac{27}{2}n^2 + \frac{39}{2}n - 117 - \frac{3}{2}n^3 - \frac{9}{2}n^2 + 15n + 7n - 14 = \frac{3}{2}n^3 + 9n^2 + \frac{83}{2}n - 131.$$

Barème : 7 points : 1 point pour la séparation des sommes, 2 points pour chacune des deux premières sommes, 1 point pour la troisième somme, 1 point pour la réponse finale simplifiée.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j} 2^k &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \frac{2^{j+1}-1}{2-1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 2^{j+1} - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 1\\ &= 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 2^j - \sum_{i=0}^{n} (i+1) = 2\sum_{i=0}^{n} \frac{2^{i+1}-1}{2-1} - \sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} 1 = 2\sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} i - 3\sum_{i=0}^{n} 1\\ &= 4\sum_{i=0}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} i - 3(n+1) = 4\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - \frac{n(n+1)}{2} - 3(n+1)\\ &= 2^{n+3} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{2}n - 7\end{aligned}$$

Barème : 8 points : 2 points pour chaque ligne. Différentes étapes peuvent mener à la bonne réponse mais il doit y avoir assez de détails.

Exercice 3

On suppose que $f_1(n) = \Theta(g_1(n))$ et $f_2(n) = \Theta(g_2(n))$. Il existe donc quatre constantes réelles $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ et $c_4 > 0$ et deux nombres entiers $n_1 > 0$ et $n_2 > 0$ tels que :

pour tout entier $n \geq n_1, 0 \leq c_1 g_1(n) \leq f_1(n) \leq c_2 g_1(n)$ (**0,5 point**)

pour tout entier $n \geq n_2, 0 \leq c_3 g_2(n) \leq f_2(n) \leq c_4 g_2(n)$ (**0,5 point**)

Si on pose $N = \max(n_1, n_2)$ (**1 point**), $C_1 = \min\left(\frac{c_1}{4}, 3c_3\right)$ (**2 points**) et $C_2 = \max\left(\frac{c_2}{4}, 3c_4\right)$ (**2 points**), on a pour tout entier $n \geq N$:

$$0 \leq \frac{c_1}{4}\left(4g_1(n)\right) \leq f_1(n) \leq \frac{c_2}{4}\left(4g_1(n)\right) \qquad \textbf{(1 point)}$$

$$0 \leq 3c_3 g_2(n) \leq 3f_2(n) \leq 3c_4 g_2(n) \qquad \textbf{(1 point)}$$

Si on additionne ces inégalités, on obtient alors :

$$0 \leq C_1\left(4g_1(n) + g_2(n)\right) \leq f_1(n) + 3f_2(n) \leq C_2\left(4g_1(n) + g_2(n)\right). \qquad \textbf{(1 point)}$$

On a donc bien $f_1(n) + 3f_2(n) = \Theta(4g_1(n) + g_2(n))$. (**1 point**)

Exercice 4

a) $5n^2 = o\left(n^4\right)$

Soit une constante $c > 0$ (**1 point**). On doit trouver une constante $n_0 > 0$ (**1 point**) telle que

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq 5n^2 \leq cn^4$. (**2 points**)

Il suffit de prendre $n_0 = \sqrt{\frac{5}{c}}$. (**2 points**)

b) $n^2 \lg\left(\frac{n^3}{\sqrt{n}}\right) = \Theta\left(9^{\log_3(n)} \log_5(n)\right)$

On simplifie d'abord le plus possible ces deux fonctions :

$n^2 \lg\left(\frac{n^3}{\sqrt{n}}\right) = n^2 \lg\left(n^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}n^2 \lg(n)$ (**3 points**)

$9^{\log_3(n)} \log_5(n) = n^{\log_3(9)} \frac{\lg(n)}{\lg(5)} = \frac{1}{\lg(5)} n^2 \lg(n)$ (**3 points**)

On a donc $n^2 \lg\left(\frac{n^3}{\sqrt{n}}\right) = \frac{5\lg(5)}{2} 9^{\log_3(n)} \log_5(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

On peut donc prendre $c_1 = c_2 = \frac{5\lg(5)}{2}$ et $n_0 = 1$ (**2 points**). On a alors bien pour tout $n \geq n_0$:

$$c_1 9^{\log_3(n)} \log_5(n) \leq n^2 \lg\left(\frac{n^3}{\sqrt{n}}\right) \leq c_2 9^{\log_3(n)} \log_5(n). \qquad \textbf{(1 point)}$$

Toutes les constantes $0 < c_1 \leq \frac{5\lg(5)}{2}$ **et** $c_2 \geq \frac{5\lg(5)}{2}$ **sont acceptées.**

Exercice 5

a) $T(2) = T(1) + 4 + 5 = 16 + 4 + 5 = 25 \quad T(3) = T(2) + 6 + 5 = 25 + 6 + 5 = 36$
$T(4) = T(3) + 8 + 5 = 36 + 8 + 5 = 49 \quad T(5) = T(4) + 10 + 5 = 49 + 10 + 5 = 64$
(**2 points : 0,5 point par calcul**)

b) **Initialisation** : Pour $n = 1$: $T(1) = 16 = (1 + 3)^2$. (**2 points**)

Récurrence : on suppose $T(n - 1) = (n - 1 + 3)^2 = (n + 2)^2$ pour $n \geq 2$. (**1 point**)

On a alors (**1 point**) :

$$\begin{array}{lll} T(n) = & T(n-1) & + \quad 2n+5 \\ T(n) = & (n+2)^2 & + \quad 2n+5 \end{array}$$

On développe puis on refactorise (**3 points**) :

$T(n) = n^2 + 4n + 4 + 2n + 5 = n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$.

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, $T(n) = (n + 3)^2$. (**1 point**)

Exercice 6

a) $T(n) = 25T\left(\lceil \frac{n}{5} \rceil\right) + 3n\lg^2(n)$

$a = 25, b = 5, \log_5(25) = 2$. Comme $f(n) = 3n\lg^2(n) = O\left(n^{1,5}\right)$ par exemple, le cas 1 s'applique en prenant par exemple $\epsilon = 2 - 1,5 = 0,5 > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta\left(n^2\right)$.

b) $T(n) = 2T\left(\lceil \frac{n}{10} \rceil\right) + \sqrt{n}$

$a = 2, b = 10, \log_{10}(2) \simeq 0,3$. Or, $f(n) = \sqrt{n} = \Omega(\sqrt{n})$. Le cas 3 s'applique donc en prenant $\epsilon = 1/2 - \log_{10}(2) > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$.

On doit vérifier la deuxième hypothèse :

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 2\sqrt{\frac{n}{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}\sqrt{n}.$$

On peut donc prendre $c = \frac{2}{\sqrt{10}} < 1$.

c) $T(n) = T\left(\lceil \frac{n}{4} \rceil\right) + \lg^3(n)$

$a = 1, b = 4, \log_4(1) = 0$. Donc $f(n) = \lg^3(n)$ croît plus vite que $n^{\log_b(a)} = 1$ mais pas polynomialement plus vite. On ne peut pas appliquer la méthode générale.

d) $T(n) = 2T\left(\lceil \frac{n}{16} \rceil\right) + \sqrt[4]{n}$

$a = 2, b = 16, \log_{16}(2) = \frac{1}{4}$. Comme $f(n) = \sqrt[4]{n} = n^{\frac{1}{4}} = \Theta\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$, le cas 2 s'applique et on obtient $T(n) = \Theta(\sqrt[4]{n}\lg(n))$.

Barème : 5 points par question, 1 point en moins au a) et au b) si ϵ n'est pas clairement identifié, 1 point en moins au b) si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée.

Exercice 7

L'ordre croissant de complexité des fonctions est le suivant :

$$\frac{n^3}{n^2\lg(n) + n}, \frac{n^2}{n + \lg(n)}, n\lg\left(n^4\right), n\lg^2\left(\sqrt{n}\right), 5^{4\log_{25}(n)}, n^2\lg^3(n), 2^n, \frac{3^n}{n^5}$$

Barème : $10 - 2x$ où x est le nombre minimal de fonctions qu'il faut retirer pour que l'ordre soit correct (donc 0 pour $x \geq 5$).