Exercices sur les chapitres 3 et 4

Exercice 1 On considère l'équation de récurrence

$$T(n) = 4T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^3 \text{ pour } n \geq 2,\ T(1) = 1.$$

Résoudre cette équation de récurrence :

a) Avec la méthode de substitution
b) Avec la méthode générale

Exercice 2 Pour chacune des formules suivantes, trouver la fonction **la plus simple possible** qu'on peut mettre à l'intérieur des parenthèses pour que l'égalité soit vérifiée.

a) $\frac{3n^2\lg(n^3) + 2n\lg^5(n^7)}{5n + 3\sqrt{n}\lg^3(n)} = \Theta(??)$

b) $9^{2\log_3(n)}\lg(5\sqrt{n}) = \Theta(??)$

Exercice 3 Utiliser, **si possible**, la méthode générale pour résoudre les récurrences suivantes :

a) $T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + \log^3(n)$
b) $T(n) = 2T\left(\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil\right) + \sqrt{n}\lg(n)$
c) $T(n) = 9T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + n^2$
d) $T(n) = 4T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2\log^5(n)$

Exercice 4 On considère l'équation de récurrence

$$T(n) = 2nT(n-1) \text{ pour } n \geq 2,\ T(1) = 1.$$

Démontrer par récurrence la formule $T(n) = 2^{n-1}n!$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 5 Démontrer par récurrence les 3 formules suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Exercices 6, 7 et 8 du devoir 1 de l'automne 2021
Exercices 5 et 6 du devoir 1 de l'hiver 2022
Exercices 5, 6 et 8 du devoir 1 de l'automne 2022
Exercices 1, 2abcd et 3 du devoir 1 de l'automne 2019

Solutions

Exercice 1

a) Avec la méthode de substitution

On veut vérifier que $T(n) = \Omega(n^3)$.
On doit donc trouver une constante $c > 0$ telle que $T(n) \geq cn^3$

- **Récurrence** : on suppose $T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \geq c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^3$. Si on remplace (substitution) dans la relation de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} T(n) = 4T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^3 &\geq 4c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^3 + n^3 \\ &\geq \frac{c}{2}n^3 + n^3 \\ &\geq \left(\frac{1}{2}c + 1\right)n^3 \\ &\geq cn^3, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie pour toute constante $c \leq 2$.

- **Initialisation** : Si on prend $c = 1$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

On montre que $T(n) = O(n^3)$ de la même manière, en utilisant la règle de l'harmonie.

b) Avec la méthode générale

$a = 4, b = 2$ et donc $\log_b(a) = 2$.

$f(n) = n^3 = \Omega(n^{2+1})$, donc le cas 3 s'applique avec $\varepsilon = 1 > 0$.

On doit vérifier la deuxième hypothèse :

$af\left(\frac{n}{b}\right) = 4\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}n^3 \leq cf(n)$ avec $c = \frac{1}{2} < 1$.

Conclusion : $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$.

Exercice 2

a) $n\lg(n)$
b) $n^4\lg(n)$

Exercice 3

a) $T(n) = 3T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + \log^3(n)$

$a = 3,\ b = 5, \log_5(3) \approx 0{,}682$.
$f(n) = \log^3(n) = O(\sqrt{n})$ par exemple, le cas 1 s'applique donc en prenant $\varepsilon = \log_5(3) - \frac{1}{2} > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta(n^{\log_5(3)})$.

b) $T(n) = 2T\left(\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil\right) + \sqrt{n}\lg(n)$

$a = 2,\ b = 8, \log_8(2) = \frac{1}{3}$.
$f(n) = \sqrt{n}\lg(n) = \Omega(\sqrt{n})$ par exemple, le cas 3 s'applique donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta(\sqrt{n}\lg(n))$.

On doit vérifier la deuxième hypothèse :

$af\left(\frac{n}{b}\right) = 2\sqrt{\frac{n}{8}}\lg\left(\frac{n}{8}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}(\lg(n) - \lg(8)) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\lg(n)$, donc $c = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

c) $T(n) = 9T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + n^2$

$a = 9,\ b = 3, \log_3(9) = 2$.
$f(n) = n^2 = \Theta(n^2)$, donc le cas 2 s'applique, et on obtient ainsi
$T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}\lg(n)) = \Theta(n^2\lg(n))$.

d) $T(n) = 4T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2\log^5(n)$

$a = 4,\ b = 2, \log_2(4) = 2$. $f(n)$ croît **plus vite** que $n^{\log_b(a)}$ mais pas « polynomialement » plus vite. On ne peut pas appliquer la méthode générale.

Exercice 4

Initialisation : $n = 1 : T(1) = 1$ et $2^{1-1}1! = 1 * 1 = 1$.

Récurrence : On suppose la propriété vraie au rang $k = n \geq 1$. On a alors :

$$T(n+1) = 2(n+1)T(n) = 2(n+1) * 2^{n-1}n! = 2^n(n+1)! = 2^{n+1-1}(n+1)!$$

La propriété est donc vraie au rang $k = n + 1$.

Exercice 5a)

Initialisation : $n = 1 : \sum_{i=1}^{1} i = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Récurrence : On suppose la propriété vraie au rang $k = n \geq 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{2+n}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k = n + 1$.

Les questions b) et c) pourront être corrigées pendant les ateliers.