Université du Québec à Montréal
INF5130 : Algorithmique
Devoir 2

Automne 2021

Vous devez remettre vos solutions sur Moodle **avant le vendredi 17 décembre 2021 à 23h55 sous la forme d'un unique fichier pdf**. Un retard de 24 heures au maximum sera accepté : pénalité de $\frac{m}{144}$ points, où m est le nombre de minutes de retard. **La note 0 sera attribuée au-delà d'un retard de 24 heures**. Le nombre total de points pour ce devoir est 100. Le devoir peut être fait en équipes de deux étudiant-e-s au maximum. Il doit être **intégralement** rédigé avec LaTeX.

Exercice 1 **(25 points)**

Un fichier est constitué de lettres dont les fréquences (multipliées par 100) sont données dans le tableau suivant.

Lettre	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Fréquence	27	20	17	11	10	5	4	3	2	1

I. Construisez un code de longueur fixe minimale pour ces lettres et donnez sa longueur moyenne.

II. Construisez un code de Huffman pour ces lettres et donnez sa longueur moyenne. **Vous devez représenter un arbre semblable à celui de la page 26 du chapitre sur les algorithmes gloutons.**

Exercice 2 **(25 points)**

On considère des séquences d'ADN : 4 caractères possibles : A, T, C et G. On suppose un coût de 2 pour une insertion ou une délétion et la matrice de coût suivante.

	A	T	C	G
A	0	1	3	4
T	1	0	5	4
C	3	5	0	2
G	4	4	2	0

Trouvez un alignement optimal ainsi que son son coût entre la séquence X = CTTGACGC et la séquence Y = ATGATGCT. **Vous devez déterminer les matrices D (des coûts) et V (des flèches) définies dans le chapitre sur la programmation dynamique (Distance de Levenshtein, pages 52 à 60).**

Exercice 3 **(25 points)**

Utilisez l'algorithme présenté dans le chapitre sur la programmation dynamique pour déterminer le parenthésage optimal pour le produit matriciel $A_{1(12\times5)}A_{2(5\times7)}A_{3(7\times20)}A_{4(20\times50)}$. **Vous devez expliciter tous les détails de vos calculs.**

Exercice 4 **(25 points)**

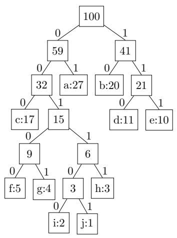
Convertissez l'instance suivante du problème SAT en une instance du problème 3-FNC-SAT :

$$\neg(x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_3 \wedge x_1).$$

Utilisez la méthode présentée dans le chapitre sur la NP-complétude. Ne simplifiez pas l'expression initiale. Vous devez donner tous les détails des trois étapes de votre transformation.

Exercice 1 **(25 points)**

Lettre	Fréquence	Code de longueur fixe	Code de Huffmann
a	27	0000	01
b	20	0001	10
c	17	0010	000
d	11	0011	110
e	10	0100	111
f	5	0101	00100
g	4	0110	00101
h	3	0111	00111
i	2	1000	001100
j	1	1001	001101
Longueur moyenne		**4**	**2,86**



Barème :

- 5 points pour un code de longueur fixe (n'importe lequel de longueur 4)
- 2 points pour sa moyenne
- 10 points pour l'arbre
- 6 points pour un code de Huffmann
- 2 points pour sa moyenne

Toutes les solutions obtenues en échangeant deux branches voisines et en inversant les 0 et les 1 sont acceptées.

Exercice 2 **(25 points)**

Y \ X		C	T	T	G	A	C	G	C
	0	2	4	6	8	10	12	14	16
A	2	3	3	5	7	8	10	12	14
T	4	5	3	3	5	7	9	11	13
G	6	6	5	5	3	5	7	9	11
A	8	8	7	6	5	3	5	7	9
T	10	10	8	7	7	5	7	9	11
G	12	12	10	9	7	7	7	7	9
C	14	12	12	11	9	9	7	9	7
T	16	14	12	12	11	10	9	11	9

Y \ X	C	T	T	G	A	C	G	C
A	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow,\nwarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
T	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
G	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow,\nwarrow$	$\leftarrow$
A	$\uparrow$	$\uparrow,\nwarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
T	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow,\uparrow$	$\leftarrow,\uparrow,\nwarrow$	$\leftarrow,\uparrow$
G	$\uparrow,\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$
C	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow,\uparrow,\nwarrow$	$\nwarrow$
T	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\leftarrow,\uparrow,\nwarrow$	$\uparrow$

Alignement :

```
C T T G A C   G C
  A T G A   T G C T
```

Coût : 9

Barème :

- 9 points pour la matrice de coût (1 point en moins par erreur)
- 9 points pour la matrice des flèches (1 point en moins par erreur, une seule flèche suffit pour les cases pouvant contenir plusieurs flèches)
- 5 points pour l'alignement
- 2 points pour son coût

Les matrices transposées (échange de X et Y) sont acceptées.
Le C (sixième caractère de X) et le T (cinquième cacactère de Y) peuvent être permutés dans l'alignement.
Ne pas pénaliser plusieurs fois pour une erreur qui se propage.

Exercice 3 **(25 points)**

$$A_{1(12\times5)}A_{2(5\times7)}A_{3(7\times20)}A_{4(20\times50)}$$

$m[1;2] = 12\times5\times7 = 420$, $m[2;3] = 5\times7\times20 = 700$, $m[3;4] = 7\times20\times50 = 7000$

$m[1;3] = \min(700 + 12\times5\times20, 420 + 12\times7\times20) = 1900$
$m[2;4] = \min(7000 + 5\times7\times50, 700 + 5\times20\times50) = 5700$

$m[1;4] = \min(5700 + 12\times5\times50, 420 + 7000 + 12\times7\times50, 1900 + 12\times20\times50) = 8700$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & 420 & 1900 & 8700 \\ & 0 & 700 & 5700 \\ & & 0 & 7000 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad frontiere = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

Parenthésage optimal :

$$A_1\left(\left(A_2A_3\right)A_4\right)$$

Barème :

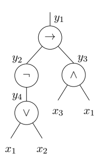
- 6 points pour la matrice m (1 point en moins par erreur)
- 6 points pour la matrice $frontiere$ (1 point en moins par erreur)
- 8 points pour le détail des calculs des coefficients de la matrice m.
- 5 points pour le parenthésage optimal

Ne pas pénaliser plusieurs fois pour une erreur qui se propage.

Exercice 4 **(25 points)**

$$\neg(x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_3 \wedge x_1).$$

Première étape (10 points)
5 points pour l'arbre
1 point pour chaque ϕ_i'



$$\phi_1' = y_1$$

$$\phi_2' = y_1 \leftrightarrow (y_2 \rightarrow y_3)$$

$$\phi_3' = y_2 \leftrightarrow \neg y_4$$

$$\phi_4' = y_3 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)$$

$$\phi_5' = y_4 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)$$

Deuxième étape (12 points)
1 point pour chaque table de vérité
1 point pour chaque $\neg\phi_i''$
1 point pour chaque ϕ_i''

y_1	y_2	y_3	$y_1 \leftrightarrow (y_2 \rightarrow y_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi_2' = y_1 \leftrightarrow (y_2 \rightarrow y_3)$$
$$\neg\phi_2'' = (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge \neg y_3) \vee (\neg y_1 \wedge \neg y_2 \wedge y_3) \vee (\neg y_1 \wedge y_2 \wedge y_3) \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge \neg y_3)$$
$$\phi_2'' = (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee \neg y_3) \wedge (y_1 \vee \neg y_2 \vee \neg y_3) \wedge (\neg y_1 \vee \neg y_2 \vee y_3)$$

y_2	y_4	$y_2 \leftrightarrow \neg y_4$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\phi_3' = y_2 \leftrightarrow \neg y_4$$
$$\neg\phi_3'' = (\neg y_2 \wedge \neg y_4) \vee (y_2 \wedge y_4)$$
$$\phi_3'' = (y_2 \vee y_4) \wedge (\neg y_2 \vee \neg y_4)$$

y_3	x_3	x_1	$y_3 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\phi_4' = y_3 \leftrightarrow (x_3 \wedge x_1)$$
$$\neg\phi_4'' = (\neg y_3 \wedge x_3 \wedge x_1) \vee (y_3 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_1) \vee (y_3 \wedge \neg x_3 \wedge x_1) \vee (y_3 \wedge x_3 \wedge \neg x_1)$$
$$\phi_4'' = (y_3 \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_3 \vee x_3 \vee x_1) \wedge (\neg y_3 \vee x_3 \vee \neg x_1) \wedge (\neg y_3 \vee \neg x_3 \vee x_1)$$

y_4	x_1	x_2	$y_4 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\phi_5' = y_4 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2)$$
$$\neg\phi_5'' = (\neg y_4 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg y_4 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg y_4 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (y_4 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2)$$
$$\phi_5'' = (y_4 \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (y_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (y_4 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg y_4 \vee x_1 \vee x_2)$$

Troisième étape (3 points)
1 point pour ϕ_1'''
1 point pour ϕ_3'''
1 point pour les autres ϕ_i'''
Pas de points en moins si z_1 et/ou z_2 sont réutilisés pour ϕ_3''' à la place de z_3 et z_4

$$\phi_1''' = (y_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee z_2) \wedge (y_1 \vee z_1 \vee \neg z_2) \wedge (y_1 \vee \neg z_1 \vee \neg z_2)$$

$$\phi_3''' = (y_2 \vee y_4 \vee z_3) \wedge (y_2 \vee y_4 \vee \neg z_3) \wedge (\neg y_2 \vee \neg y_4 \vee z_4) \wedge (\neg y_2 \vee \neg y_4 \vee \neg z_4)$$

$$\phi_2''' = \phi_2''$$
$$\phi_4''' = \phi_4''$$
$$\phi_5''' = \phi_5''$$