Exercice 1

I. DF$(Tab_1, Tab_2) = 2+2+0+0+1+1+1+1+0 = 7$ (**3 points : 2 points pour la réponse, 1 point pour le détail de la somme**).

II. Le pire cas correspond aux tableaux dont tous les éléments sont égaux à un seul et même nombre, car les conditions des **si** sont toujours vérifiées. La valeur de DF(Tab_1, Tab_2) est alors égale à

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(**4 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour la justification, 2 points pour la valeur**).

III. On peut par exemple prendre :

$Tab_1 =$

1	2	3	1	2

$Tab_2 =$

4	5	5	4	6

La valeur de DF(Tab_1, Tab_2) est alors égale à 0 (**2 points : 1 point pour la réponse, 1 point pour la valeur**).

Toutes les tailles de tableaux sont acceptées. Les tableaux choisis doivent vérifier $Tab_1[i] \neq Tab_2[j]$ **pour** $j \geq i$.

IV. a) On obtient la somme suivante (**4 points : un point pour chacun des quatre termes**) :

$$T(n) = (c_1 + c_6) + c_2(n+1) + \sum_{i=1}^{n} \left(c_3(n-i+2) + (c_4+c_5)(n-i+1)\right). \tag{1}$$

On calcule la somme (**3 points : un point pour chaque ligne**) :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_3(n-i+2) + (c_4+c_5)(n-i+1)\right) = \sum_{i=1}^{n} ((c_3+c_4+c_5)n + 2c_3 + c_4 + c_5) - \sum_{i=1}^{n} (c_3+c_4+c_5)i$$

$$= (c_3+c_4+c_5)n^2 + (2c_3+c_4+c_5)n - (c_3+c_4+c_5)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{c_3+c_4+c_5}{2}n^2 + \frac{3c_3+c_4+c_5}{2}n.$$

On remplace dans l'équation 1 et on simplifie (**2 points**) :

$$T(n) = \frac{c_3+c_4+c_5}{2}n^2 + \frac{2c_2+3c_3+c_4+c_5}{2}n + c_1 + c_2 + c_6.$$

b) On doit supprimer c_5 et on obtient (**2 points**) :

$$T(n) = \frac{c_3+c_4}{2}n^2 + \frac{2c_2+3c_3+c_4}{2}n + c_1 + c_2 + c_6.$$

Exercice 2

$$\sum_{i=33}^{n+2} \sum_{j=30}^{i+1} \sum_{k=15}^{j} 24i = \sum_{i=33}^{n+2} 24i \sum_{j=30}^{i+1} \sum_{k=15}^{j} 1 = \sum_{i=33}^{n+2} 24i \sum_{j=30}^{i+1} (j-14) = \sum_{i=33}^{n+2} 24i \sum_{l=16}^{i-13} l$$

$$= \sum_{i=33}^{n+2} 24i \left(\sum_{l=1}^{i-13} l - \sum_{l=1}^{15} l\right) = \sum_{i=33}^{n+2} 24i \left(\frac{(i-13)(i-12)}{2} - \frac{(15)(16)}{2}\right)$$

$$= 12 \sum_{i=33}^{n+2} \left(i^3 - 25i^2 - 84i\right) = 12 \sum_{i=1}^{n+2} \left(i^3 - 25i^2 - 84i\right) - 12 \sum_{i=1}^{32} \left(i^3 - 25i^2 - 84i\right)$$

$$= 12 \left(\frac{(n+2)^2(n+3)^2}{4} - 25\frac{(n+2)(n+3)(2(n+2)+1)}{6} - 84\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right)$$

$$-12 \left(\frac{(32)^2(33)^2}{4} - 25\frac{(32)(33)(2(32)+1)}{6} - 84\frac{(32)(33)}{2}\right)$$

$$= 12 \left(\frac{1}{4}n^4 - \frac{35}{6}n^3 - \frac{381}{4}n^2 - \frac{2095}{6}n - 368\right) + 12(51568)$$

$$= 3n^4 - 70n^3 - 1143n^2 - 4190n + 614400$$

Barème : 12 points : enlever 1 point pour chaque étape qui manque de détails et 1 point pour chaque erreur de calcul. Différentes étapes peuvent mener à la bonne réponse mais il doit y avoir assez de détails. Ne pas pénaliser plusieurs fois pour une erreur qui se propage.

Exercice 3 On suppose que $f(n) = O(g(n))$. Il existe donc deux constantes strictement positives c et n_0 telles que :

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq cg(n)$ (**2 points**)

On élève au carré puis on multiplie par 2 ces inégalités :

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq 2\,(f(n))^2 \leq 2c^2\,(g(n))^2$ (**3 points**)

On ajoute $3\,(g(n))^2$ des deux côtés :

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq 2\,(f(n))^2 + 3\,(g(n))^2 \leq \left(2c^2+3\right)(g(n))^2$ (**2 points**)

En posant $C = 2c^2 + 3 > 0$ (**1 point pour la valeur et 1 point pour préciser que ce nombre est bien strictement positif**), on a alors :

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq 2\,(f(n))^2 + 3\,(g(n))^2 \leq C\,(g(n))^2$, (**2 points**)

ce qui démontre que $2\,(f(n))^2 + 3\,(g(n))^2 = O\left((g(n))^2\right)$. (**1 point**)

Exercice 4

a) $n^3 = \omega\,(100n)$

Soit une constante $c > 0$ (**1 point**). On doit trouver une constante $n_0 > 0$ (**1 point**) telle que

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq c(100n) < n^3$, (**2 points**)

ce qui est équivalent à

pour tout entier $n \geq n_0, 0 \leq 100c < n^2$.

Il suffit de prendre $n_0 = \sqrt{100c}$. (**2 points**)

b) $5n^3 \lg(10^n) = \Theta\left(\sqrt{1024^{\log_4(n)}}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}}\right)$

On simplifie d'abord le plus possible ces deux fonctions :

$5n^3 \lg(10^n) = 5n^3 n \lg(10) = 5n^4 \lg(10)$ (**3 points**)

$\sqrt{1024^{\log_4(n)}}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n^{\log_4(1024)}}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n^5}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,n^2\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n^4$ (**3 points**)

On a donc $5n^3 \lg(10^n) = 5\lg(10)\sqrt{1024^{\log_4(n)}}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

On peut donc prendre $c_1 = c_2 = 5\lg(10)$ et $n_0 = 1$ (**2 points**). On a alors bien pour tout $n \geq n_0$:

$$c_1 \sqrt{1024^{\log_4(n)}}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}} \leq 5n^3 \lg(10^n) \leq c_2 \sqrt{1024^{\log_4(n)}}\ \frac{n^2}{\sqrt{n}}. \qquad (\textbf{1 point})$$

Toutes les constantes $0 < c_1 \leq 5\lg(10)$ **et** $c_2 \geq 5\lg(10)$ **sont acceptées**.

Exercice 5

a) $T(3) = 6*18 - 9*3 = 81 \quad T(4) = 6*81 - 9*18 = 324 \quad T(5) = 6*324 - 9*81 = 1215$

(**3 points : 1 point par calcul**)

b) **Initialisation** :

Pour $n = 1$: $T(1) = 3 = 1*3^1$. (**1 point**)

Pour $n = 2$: $T(2) = 18 = 2*3^2$. (**1 point**)

Récurrence : on suppose $T(n-1) = (n-1)3^{n-1}$ et $T(n-2) = (n-2)3^{n-2}$ pour $n \geq 2$. (**2 points**)

On a alors (**1 point**) :

$$\begin{aligned} T(n) &= \quad 6T(n-1) &&- \quad 9T(n-2) \\ T(n) &= \quad 6(n-1)3^{n-1} &&- \quad 9(n-2)3^{n-2} \end{aligned}$$

On met 3^{n-2} en facteur et on réduit (**3 points**) :

$T(n) = (6(n-1)*3 - 9(n-2))\,3^{n-2}$

$T(n) = (18n - 18 - 9n + 18)\,3^{n-2}$

$T(n) = (9n)\,3^{n-2}$

$T(n) = n3^n$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, $T(n) = n3^n$. (**1 point**)

Exercice 6

a) $T(n) = 27T\left(\lceil \frac{n}{9} \rceil\right) + 5n^3$

$a = 27, b = 9, \log_9(27) = \frac{3}{2}$. Or, $f(n) = 5n^3 = \Omega\left(n^3\right)$. Le cas 3 s'applique donc en prenant par exemple $\epsilon = \frac{3}{2} > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta(n^3)$.

On doit vérifier la deuxième hypothèse :

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 27*5\left(\frac{n}{9}\right)^3 = \frac{5n^3}{27}.$$

On peut donc prendre $c = \frac{1}{27} < 1$.

b) $T(n) = 2T\left(\lceil \frac{n}{4} \rceil\right) + \sqrt{n}\lg^3(n)$

$a = 2, b = 4, \log_4(2) = \frac{1}{2}$. Donc $f(n) = \sqrt{n}\lg^3(n)$ croît plus vite que $n^{\log_b(a)} = \sqrt{n}$ mais pas polynomialement plus vite. On ne peut pas appliquer la méthode générale.

c) $T(n) = 20T\left(\lceil \frac{n}{10} \rceil\right) + n\lg(n)$

$a = 20, b = 10, \log_{10}(20) \approx 1{,}3$. Comme $f(n) = n\lg(n) = O\left(n^{1{,}2}\right)$ par exemple, le cas 1 s'applique en prenant par exemple $\epsilon = \log_{10}(20) - 1{,}2 > 0$, et on obtient ainsi $T(n) = \Theta\left(n^{\log_{10}(20)}\right)$.

Barème : 7 points pour la question a), 4 points pour la question b), 5 points pour la question c), 1 point en moins au a) et au c) si ϵ **n'est pas clairement identifié, 2 points en moins au a) si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée**.

Exercice 7

a)

$$\frac{5n\lg\left(n^3\right)}{9\lg^3(n) + \sqrt{n}\lg(n)} = \Theta\left(\sqrt{n}\right)$$

b)

$$9^{2\log_3(n)} + 8^{3\log_4(n)} = \Theta\left(n^4\sqrt{n}\right)$$

Barème : 4 points par question, 1 point en moins pour chaque simplification manquante.

Exercice 8 (**5 points**)

Le nombre de feuilles est égal à $n^{\log_b(a)} = 4096^{\log_b(5)} = 5^{\log_b(4096)} = 15625$.

Comme $15625 = 5^6$, on obtient $\log_b(4096) = 6$, d'où $b = 4$ puisque $4^6 = 4096$.

Barème : 3 points pour la bonne réponse et 2 points pour une justification.

Remarque : On peut trouver b de manière plus formelle avec par exemple la formule

$$b = e^{\frac{\ln(4096)\ln(5)}{\ln(15625)}}.$$