Aimene Gouasmi

aimene.gouasmi@univ-pau.fr   aimene.gouasmi@univ-perp.fr   +33 (0) 7 51 90 67 77
30 Bis Impasse Grande la Real, 66000 Perpignan   Aimene-Gouasmi   agouasmi

Profil

Je suis chercheur en analyse numérique des équations aux dérivées partielles. J'ai obtenu la qualification aux fonctions de maître de conférences (session 2025) dans la section 26 du CNU (Mathématiques appliquées). Depuis Décembre 2024, je suis titulaire d'un doctorat à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. Je suis actuellement ATER à l'Université de Perpignan Via Domitia.

Situation actuelle et parcours antérieur

ATER — Depuis 1er Sept 2024

Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche, Université de Perpignan

Doctorat en Mathématiques Appliquées — Oct 2021 - Déc 2024

Thèse au Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Pau (LMAP), Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)

- Titre : Reconstruction de flux conservatif pour un problème d'interface et application à l'analyse d'erreur a posteriori.
- Directrice de thèse : Daniela Capatina
- Date de soutenance : 05 décembre 2024
- Membres de jury :

Roland Becker, UPPA	Examinateur
Daniela Capatina, UPPA	Directrice de thèse
Gilles Carbou, UPPA	Examinateur
Emmanuel Creuse, Université Polytechnique Hauts-de-France	Reporteur
Patrick Hild, Université Paul Sabatier (Toulouse 3)	Examinateur
Alexei Lozinski, Université de Franche-Comté	Reporteur

Co-financé : par EDENE, programme Recherche et Innovation Horizon H2020 de l'Union européenne dans le cadre de la convention de subvention **Marie Curie n° 945416** et le conseil régional Nouvelle-Aquitaine.

Master 2 en Mathématiques, Modélisation et Simulation, UPPA — Sept 2021

- Double diplôme entre l'École Normale Supérieure de Kouba, Algérie (ENSK) et l'UPPA
- Bourse E2S "Académie des Talents" pour la mobilité à Pau (une année) Book e2s-2020
- Mention Bien

Diplôme de professeur d'enseignement secondaires en mathématiques, ENSK — Sept 2020

- Équivalent à Master 2 en mathématiques
- Mention Bien

Formations suivies

Calcul Haute Performance (HPC) 3 mois

Cours de Master 2 en Calcul Haute Performance (36h)
Méthodes : OMP, MPI, C

École d'été CEMRACS 2023 : Scientific Machine Learning 1 semaine

- Schémas Linéaires et Non Linéaires pour la Réduction de Modèles Directs et les Problèmes Inverses
- Méthode des Neurones Finis et Apprentissage des Opérateurs
- Représentations Latentes Basées sur les Données pour les Problèmes Dépendant du Temps
- Vers une CFD de haute fidélité basée sur les données

Méthodes : Machin Learning, Neural Networks

Outils de simulation numérique : Environnement HPC Pyrene 2 jours

Méthodes : Pyrene, Cluster, Terminal

2025 – Cours en ligne sur Coursera en cours

Initialiation à la programmation (en C++)– École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL)

Enseignement

ATER - temps plein (Université de Perpignan , France) Sep 2024 - Août 2025

192 heures équivalent TD réparties sur :

- Base de raisonnement, L1 Informatique.
- Base d'analyse, L1 Mathématiques & Informatique
- Base d'algèbre linéaire, L1 Mathématiques & L2 Informatique
- Intégrations et séries numériques, L1 Mathématiques & L2 Informatique
- Géométrie, L3 Mathématiques
- Base d'algèbre linéaire, L1 Mathématiques & Informatique

Enseignant vacataire (UPPA, collège STEE, France) Sep 2022 - Août 2024

62.5 heures équivalent TD réparties sur :

- Algorithmes Mathématiques et Python 1, L1 Mathématiques (TP)
- Probabilités pour l'Année préparatoire d'insertion dans les licences scientifiques (TD)
- Calcul Scientifique, L2 Informatique (Langage C) (TP)
- Probabilités et Statistiques, L2 Informatique (TD + TP Logiciel R)

Pour tous ces enseignements, j'ai également participé à toutes les tâches annexes attendues : Surveillance des examens, Correction des copies et mise à disposition des corrigés aux étudiants, Proposition et réalisation d'exercices, de projets et d'examens.

Stage d'enseignements en mathématiques Oct 2019 - Mars 2020

Lycée Kerfa Mohamed, Algérie

Compétences

Langages : Python, C, C++(en cours d'apprentissage), R (notions)
Librairies numériques : FEniCS, NumPy, matplotlib
HPC & clusters : Pyrene, notions MPI/OMP
Éditeurs & systèmes : LaTeX, Git, Linux/Ubuntu

Expériences de recherche

Projet de thèse LMAP, UPPA — Oct 2021 - Déc 2024

Mots clés : éléments finis, traitement numérique d'interface, flux conservatif, analyse d'erreur a posteriori, raffinement adaptatif de maillage, CutFEM, Galerkin Discontinue, simulation numérique.

Objective :

- La reconstruction locale de flux numériques conservatifs à partir d'une solution discrète obtenue par une méthode d'éléments finis conformes et non-conformes.
- Problèmes elliptiques caractérisés par la présence de frontières ou d'interfaces qui ne sont pas nécessairement alignées avec les maillages
- L'application à l'analyse d'erreur a posteriori

Résultats obtenus :

Problème elliptique avec coefficients discontinus sur un maillage qui suit les interfaces

- Étude des méthodes d'éléments finis conformes, mais aussi non-conformes d'ordre arbitraire
- traitement faible la condition aux limites de Dirichlet via la méthode de Nitsche
- Méthode de reconstruction de flux basée sur une formulation mixte, dont la solution principale coincide avec la solution primale et dont le multiplicateur permet de définir un flux conservatif
- Application du flux reconstruit à l'estimation d'erreur a posteriori, avec preuve de sa fiabilité et de son efficacité robuste pour les éléments finit conformes
- Implémentation et validation numérique à l'aide de la librairie de calcul FEniCS

Problème elliptique d'interface sur des maillages non aligné avec l'interface

- Généralisation de la méthode introduite dans la première partie au maillage non adapté
- Utilisation des méthodes NXFEM et CutFEM afin de traiter l'interface
- Proposition de trois flux différents : d'abord dans l'espace produit de Raviart-Thomas, ensuite dans l'espace global de Raviart-Thomas et enfin dans l'espace de Raviart-Thomas immergé
- Discussion de la propriété de conservation et de l'application à l'analyse d'erreur a posteriori de chacun de ces flux
- Réalisation des simulations numériques pour les deux derniers flux proposés, en validant les résultats obtenus théoriquement

Espace de Raviart-Thomas immergé d'ordre 1 (en cours d'élaboration)

- Proposition de deux extensions de l'espace de Raviart-Thomas immergé d'ordre 0 et d'une reconstruction du flux définie dans ces espaces proposés

Stage de Master 2 LMAP, UPPA, France — 6 mois

Titre : Méthode d'identification des paramètres pour un modèle de Liga
Directeur : Guy Vallet
Objectifs:

- Modélisation du problème de *"Liga"*
- Étude mathématique du problème : Existence et unicité de la solution, Identification des paramètres

Projet de fin d'études LTPFA, ENSK — 6 mois

Titre : Le principe de contraction de Banach et ses généralisations

Publications

Journaux internationaux (avec une comité de lecture)

- D. Capatina, **A. Gouasmi**, and C. He. "*Elliptic interface problems: Part 1 - Conservative flux recovery and numerical validations* (en préparation)
- D. Capatina, **A. Gouasmi**. "*Elliptic interface problems: Part 2 - A posteriori error analysis* (en préparation)
- D. Capatina, **A. Gouasmi**, and C. He. "*Robust flux reconstruction and a posteriori error analysis for an elliptic problem with discontinuous coefficients*". J. Sci. Comput. 98(1), 28 (2024)
- D. Capatina, **A. Gouasmi**. "*Flux-equilibrated based a posteriori error analysis for an interface problem with CutFEM*". Monografias Matematica (accepté en 2025)
- D. Capatina, **A. Gouasmi**. "*Conservative flux reconstruction for an elliptic interface problem using CutFEM*" . Lecture Notes in Comput. Sci. Eng. (accepté en 2025)

Conférences & séminaires

Conférences internationales

- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *A posteriori error analysis based on equilibrated fluxes for interface problem with CutFEM*, 17^{th} International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications, Jaca, Espagne. (4–6 Septembre 2024)
- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *Local flux recovery for an elliptic interface problem using CutFEM* **(mini-symposium)**,(ENUMATH), Lisbonne, Portugal. (4-8 Septembre 2023)
- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *Robust flux reconstruction and a posteriori error analysis for elliptic problems*, ECCOMAS, Modern Finite Element Technologies, Mülheim-an-der Ruhr, Allemagne. (20-23 Août 23)
- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *Robust local flux reconstruction for diffusion problems with discontinuous coefficients* (Poster), 16^{th} International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications, Jaca, Espagne. (7–9 Septembre 2022)

Conférences nationales

- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *Analyse d'erreur a posteriori basée sur un flux équilibré pour un problème d'interface sur un maillage non conforme* **(accepté)**, (SMAI 2025), Carcans Maubuisson. (2-6 Juin 2025)
- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *Reconstructions de flux conservatifs et analyse d'erreur a posteriori pour un problème d'interface discrétisé avec CutFEM* **(mini-symposium)**, (CANUM), Le-Bois-Plage-en-Ré. (27-31 Mai 2024)
- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina*Robust flux reconstruction for interface problems and application to a posteriori error analysis*, MARGAUx PhD Days, Poitiers. (22–24 Mai 2023)
- Aimene Gouasmi, Daniela Capatina. *Robust local flux reconstruction for diffusion problems with discontinuous coefficient* (Poster), (CANUM), Evian-les Bains. (13-17 Juin 2022)

Séminaires

- Aimene Gouasmi. *Reconstruction de flux pour un problème d'interface et application à l'analyse d'erreur a posteriori*, Séminaire à l'Université de Perpignan. (20 février 2025)
- Aimene Gouasmi. *Robust flux reconstruction and a posteriori error analysis for elliptic interface problem*, Séminaire à l'Université de Pau. (08 Décembre 2023)

.

Langues

- Français, Anglais et Arabe : Courant (lu, parlé, écrit).

Engagement scientifique et académique

- Évènement des 24h de l'Innovation au Centre de la Terre
- Organisation des séminaires des doctorants au LMAP
- Animation à la fête des sciences (village de science), organisé par L'UPPA
- Animation au campus des enfants, organisé par L'UPPA
- Animation au congrès maths en jeans 2025 organisé par L'Université de Perpignan

Références

Daniela Capatina
Maître de Conférence (HDR) à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Bâtiment IPRA - Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Avenue de l'Université - BP 1155, 64013 PAU CEDEX

E-mail daniela.capatina@univ-pau.fr

Cuiyu He
Lecturer and Research Faculty at Department of Mathematics, University of Georgia

Department of Mathematics, University of Georgia
1023 D.W. Brooks Dr., Athens, GA, 30605

E-mail Cuiyu.He@uga.edu

Gilles Carbou
Professeur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Bâtiment IPRA - Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Avenue de l'Université - BP 1155, 64013 PAU CEDEX

E-mail gilles.carbou@univ-pau.fr

Aimene Gouasmi

agouasmi@univ-pau.fr
aimene.gouasmi@univ-perp.fr
+33 (0) 7 51 90 67 77
30 bis Impasse Grande la Réal, 64000 France

Domaines de recherche

Je m'intéresse principalement à deux axes de recherche complémentaires : l'analyse a posteriori et la reconstruction de flux :

- **Analyse d'erreur a posteriori** : Mon travail se concentre sur l'application des flux reconstruits à l'analyse d'erreur a posteriori et au raffinement adaptatif des maillages. Cette approche vise à fournir des estimations précises et robustes des erreurs dans les simulations numériques, permettant ainsi d'adapter les maillages pour une meilleure précision.
- **Reconstruction de flux** : Je développe des méthodes pour reconstruire localement des flux numériques conservatifs à partir de solutions discrètes obtenues par des méthodes d'éléments finis conformes et non conformes. Ces travaux se focalisent sur des problèmes elliptiques caractérisés par des interfaces complexes et des coefficients de diffusion variés, avec une attention particulière à la robustesse des solutions.

Le lien entre ces deux axes réside dans l'objectif commun de fournir des outils fiables pour améliorer la précision et l'efficacité des méthodes numériques appliquées aux systèmes complexes.

Travaux de recherche de thèse

Titre : Reconstruction de flux conservatif pour un problème d'interface et application à l'analyse d'erreur a posteriori.

Pendant mon doctorat, j'ai travaillé au sein de l'équipe des fluides complexes du laboratoire LMAP. Ma recherche en analyse numérique des équations aux dérivées partielles concerne d'une part, la reconstruction locale de flux numériques conservatifs à partir d'une solution discrète obtenue par une méthode d'éléments finis conformes et non-conformes. Les problèmes elliptiques considérés sont caractérisés par la présence de frontières ou d'interfaces qui ne sont pas nécessairement alignées avec les maillages, et nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la robustesse de la reconstruction par rapport aux coefficients de diffusion. D'autre part, nous avons également étudié l'application de ces flux à l'analyse d'erreur a posteriori du problème et au raffinement adaptatif de maillage.

Dans cette étude, nous adoptons une méthodologie de reconstruction de flux similaire à celle introduite dans [1] pour le problème de Poisson, basée sur une formulation mixte unifiée équivalente aux méthodes primales d'éléments finis conformes et non conformes. L'idée est d'utiliser un multiplicateur de Lagrange, défini sur les faces du maillage, comme correction des degrés de liberté du flux. Il est à noter que cette approche fournit des relations entre les méthodes d'éléments finis précédemment citées et celles de Galerkin discontinues, et de plus, aucune résolution de problème mixte n'est nécessaire pour la reconstruction.

Pour la prise en compte numérique de l'interface dans la formulation mathématique, on propose d'utiliser la méthode CutFEM cf. [3], qui est une méthode de type Nitsche [9] rendue robuste par rapport à la géométrie via des termes de stabilisation supplémentaires.

L'extension de l'approche de [1] aux problèmes elliptiques avec des coefficients (fortement) discontinus, dus à la présence d'interfaces physiques, soulève plusieurs questions, comme par exemple :

- L'obtention d'une formulation mixte hybride bien-posée, équivalente à la formulation discrète de départ ; un soin particulier devra être apporté lors de l'analyse à la dépendance de différentes constantes par rapport aux coefficients de diffusion, à la géométrie de l'interface et au paramètre de discrétisation. Ceci est essentiel pour garantir la stabilité et la convergence des méthodes numériques.

- La reconstruction locale de flux conservatifs, qui soient robustes par rapport aux coefficients et au maillage ; la notion de conservation discrète sur les mailles coupées par l'interface est aussi à définir.
- L'analyse de l'erreur a posteriori à l'aide des flux équilibrés, en prenant en compte les variations des coefficients de diffusion et la position de l'interface ; nous cherchons d'une part, à borner l'erreur par l'estimateur a posteriori avec une constante égale à 1, ce qui assure la fiabilité de l'estimateur, et d'autre part, de garantir l'efficacité locale et la robustesse de l'estimateur.
- L'implémentation et la validation numérique de la reconstruction de flux, ainsi que des estimateurs d'erreur a posteriori et la mise en œuvre d'une stratégie de raffinement adaptatif de maillage.

Dans un premier temps, j'ai considéré un problème de diffusion en présence d'interfaces physiques alignées avec le maillage, ce qui conduit à traiter des coefficients de diffusion (fortement) discontinus. Dans un second temps, je me suis intéressé au cas où l'interface ne suit pas le maillage, ce qui conduit à traiter des mailles coupées ; pour ce faire, j'ai utilisé la méthode CutFEM.

Problème elliptique avec coefficients discontinus sur un maillage qui suit les interfaces [6]

Nous étudions ici un problème de diffusion en présence d'interfaces physiques alignées avec le maillage. L'une des contributions majeures est l'analyse de la robustesse par rapport aux coefficients de diffusion, grâce à une conception algorithmique soignée. Contrairement aux résultats existants, une dépendance explicite des constantes par rapport aux coefficients est fournie dans l'analyse mathématique. De plus, l'approche est étendue à une famille d'éléments finis non conformes de degré $k \geq 1$, englobant à la fois les degrés pairs et impairs, ce qui, à notre connaissance, est une nouveauté.

Dans ce travail, l'étude est réalisée sur des maillages triangulaires et la méthode de Nitsche est employée pour traiter les conditions aux limites de Dirichlet de manière faible.

Premièrement, nous considérons deux types d'espaces d'éléments finis non conformes. Le premier est l'espace standard de degré impair, qui peut être décrit à l'aide d'une base classique de Lagrange, tandis que le second est un espace non conforme non standard de degré polynomial arbitraire $k \in \mathbb{N}^*$, introduit par Matthies et Tobiska [8]. Pour l'espace non conforme standard de degré impair, la reconstruction locale et explicite des flux conservatifs est bien connue dans la littérature. Nous notons que notre méthode est capable de générer le même flux que dans littérature dans le même contexte. En revanche, pour un degré pair k, une base de type Lagrange n'existe plus. Notre méthode de reconstruction peut être facilement étendue à de tels cas. Les avantages des éléments finis proposés par Matthies et Tobiska sont qu'ils sont définis de manière uniforme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et qu'ils sont également stables pour le problème de Stokes, en combinaison avec une approximation discontinue P_{k-1} de la pression. Notre contribution consiste à étendre l'approche [1]. à ces espaces de manière totalement robuste vis-à-vis des coefficients de diffusion, dans un cadre unifié pour les deux types d'espaces. À notre connaissance, la reconstruction de flux pour ce type d'éléments finis non conformes est une nouveauté.

Deuxièmement, nous considérons la méthode des éléments finis conformes, qui est la plus difficile cas de la reconstruction de flux, nous proposons une formulation mixte équivalente bien posée, où la continuité de la solution et des fonctions tests à travers les arrêtes intérieurs du maillage est imposée de manière faible. Nous établissons une constante inf-sup ainsi que des bornes pour le multiplicateur et le flux qui dépendent explicitement des coefficients de diffusion. Dans le cas de coefficients quasi-monotones, nous retrouvons les résultats de robustesse existants pour d'autres reconstructions.

Nous réalisons également une analyse a posteriori de l'erreur pour le cas conforme, en suivant la dépendance des constantes impliquées dans les bornes d'erreur par rapport aux coefficients de diffusion. Nous établissons la fiabilité précise de l'indicateur d'erreur a posteriori ainsi que son efficacité locale robuste dans le cas de coefficients quasi-monotones. Enfin, nous présentons plusieurs expériences numériques illustrant les résultats théoriques pour une méthode continue linéaire par morceaux.

Problème elliptique avec coefficients discontinus sur un maillage non aligné interfaces [4, 5]

La deuxième partie de la thèse traite d'un problème elliptique avec une interface qui n'est pas alignée avec le maillage, caractérisé par des coefficients discontinus et des conditions de transmission standard à l'interface ; nous autorisons un saut dans le flux normal à l'interface. La méthode des éléments finis coupés (CutFEM) [3, 2] est utilisée pour gérer les maillages non adapté. L'objectif est de reconstruire localement des flux conservatifs dans un espace de Raviart-Thomas en généralisant la méthode précédemment développée pour les maillages qui suivent l'interface, et de réaliser une analyse a posteriori de l'erreur à l'aide d'estimateurs basés sur les flux.

Premièrement, nous présentons le traitement numérique du problème à l'aide de CutFEM. Ensuite, nous étudions une formulation mixte équivalente et montrons le calcul local des multiplicateurs (un par sous-domaine).

Une première méthode de reconstruction des flux est introduite dans les espaces produit de Raviart-Thomas, nécessitant une extension des données pour garantir la propriété de conservation. Bien que robuste vis-à-vis de la géométrie de l'interface et des coefficients de diffusion, cette méthode ne permet pas de prouver la fiabilité globale de l'estimateur d'erreur, en raison de la discontinuité du flux normal reconstruit et de la solution approchée à l'interface.

Pour surmonter cette difficulté, une deuxième reconstruction est proposée sur l'ensemble du domaine dans l'espace global de Raviart-Thomas, en supposant que le flux continu satisfait une condition de transmission de Neumann homogène à l'interface. Contrairement à la première approche, cette reconstruction assure la conservation locale sans aucune extension de données et garantit la continuité de la trace normale du flux à l'interface, ce qui nous permet d'établir la fiabilité globale de l'estimateur d'erreur. Un des points clés dans la démonstration de la fiabilité est que nous construisons une interpolation $I_h u_h \in H^1(\Omega)$ de la solution discrète u_h, qui est seulement une fonction H^1 par morceaux sur les cellules coupées, puis nous encadrons soigneusement l'erreur d'interpolation en fonction des coefficients et de la géométrie du maillage/de l'interface. Parallèlement, l'efficacité locale de l'estimateur d'erreur correspondant reste limitée. Malgré cette limitation, nous avons effectué des test numérique afin de comparé les résultats numériques avec celles prouvé théoriquement.

Pour remédier à cette limitation, nous proposons enfin une reconstruction dans l'espace de Raviart-Thomas immergé de degré 0 [7], dont les éléments respectent fortement la condition de transmission à l'interface et tiennent également compte de manière faible de la continuité de la solution. Nous prouvons la conservation du flux et établissons la fiabilité et l'efficacité locale du nouvel estimateur d'erreur, tout en garantissant la robustesse vis-à-vis des coefficients de diffusion. Enfin, on a réalisé des simulations numériques pour valider les résultats montrés théoriquement.

La fin de thèse a été focalisé sur extension de l'espace de Raviart-Thomas immergé au degré supérieur $m = 1$. Nous avons proposé deux espaces qui généralise l'espace de Raviart-Thomas immergé et avons reconstruit un flux dans ces deux espaces.

Implémentation et simulation numériques

Pendant ma thèse, j'ai développé et implémenté la méthode que j'ai proposée en Python, en utilisant le framework open source FEniCS pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP). De plus, j'ai eu l'opportunité d'utiliser un code spécifiquement conçu pour gérer les maillages non ajustés, développé par Susanne Claus et al. Ce travail a impliqué l'utilisation de Docker pour la gestion des environnements de développement, et a été réalisé en étroite collaboration avec Cuiyu He via GitHub.

Perspectives

Travail au court term

À court terme, je vais naturellement finaliser mon code pour améliorer sa fonctionnalité et sa robustesse. J'ai récemment réussi à implémenter le flux défini dans l'espace Raviart-Thomas immergé $\mathcal{IRT}^0$ et à réaliser quelques expériences numériques, mais bien sûr, je dois encore vérifier, améliorer et valider davantage le code. Je prévois d'inclure l'estimateur η_Γ défini sur les triangles coupés, ce qui permettra d'améliorer la précision dans la capture du comportement des solutions près des interfaces. Je prendrai également en compte plusieurs cas de test et enrichirai ainsi les tests numériques. De plus, je vais compléter les parties restantes de la généralisation à $\mathcal{IRT}^1$, qui n'est pas encore entièrement terminée.

En outre, j'aimerais envisager différentes conditions de transmission à l'interface, telles que celles résultant de la modélisation asymptotique des problèmes de couches minces. Ces conditions modélisent, par exemple, des fractures dans des milieux poreux.

Travail futur

Les méthodes développées dans cette thèse de doctorat peuvent être appliquées à une gamme de problèmes elliptiques complexes, y compris ceux impliquant des interfaces mobiles ou des changements de phase. De plus, ces méthodes peuvent être utilisées dans divers problèmes modèles, tels que l'équation de Stokes ou de Navier-Stokes, ainsi que l'élasticité linéaire.

Par exemple, les points clés de la reconstruction de flux pour l'élasticité linéaire, en particulier dans la conservation des contraintes et la gestion des discontinuités, concernent l'assurance que le tenseur de contrainte σ est correctement représenté à travers les frontières des éléments et est un tenseur symétrique. Dans le cas de milieux élastiques isotropes et homogènes, σ est donné par la loi de Hooke :

$$\sigma = \lambda(\operatorname{div} u)\tilde{I} + \mu(\nabla u + \nabla u^T),$$

où u est le vecteur de déplacement et λ et μ sont les coefficients de Lamé. Dans les méthodes numériques comme la FEM, la conservation des contraintes nécessite que le flux de contraintes soit continu ou prenne correctement en compte les sauts aux interfaces, ce qui est réalisé par la reconstruction du flux. Cette technique est particulièrement importante lorsqu'il s'agit de gérer des discontinuités telles que des fissures ou des hétérogénéités matérielles, où des ruptures naturelles de flux de contraintes se produisent. La reconstruction du flux aide à concilier ces discontinuités, garantissant que le comportement physique du matériau est correctement capturé.

À long terme, mon objectif est d'élargir le champ de mes recherches en considérant différents problèmes modèles, en particulier les problèmes de contact, qui peuvent être vus comme des problèmes aux frontières ou d'interface caractérisés par des conditions aux frontières non linéaires. En effet, lorsque deux corps sont en contact, des conditions spécifiques doivent être imposées à l'interface entre ces deux corps. Les conditions de contact peuvent être divisées en plusieurs catégories, par exemple, la condition de non-penetration, qui stipule que les corps ne doivent pas pénétrer les uns dans les autres et peut être exprimée mathématiquement comme suit :

$$u_1(x) - u_2(x) \leq 0 \quad et \quad \sigma_1 \cdot n \geq 0,$$

où u_1 et u_2 sont les déplacements aux points de contact des deux corps, et σ_1 est la contrainte dans le premier corps (exprimée par la loi de Hooke pour un corps élastique linéaire). D'autres conditions de contact peuvent être prises en compte, telles que les conditions de contact unilatéral sans frottement :

$$u \leq 0, \quad \sigma \cdot n \leq 0, \quad et \quad u\sigma \cdot n = 0.$$

Les problèmes de contact sont cruciaux dans de nombreuses applications en génie, y compris la mécanique des structures et la science des matériaux, où l'interaction entre les surfaces affecte considérablement le comportement global du système. La résolution de ces problèmes impliquera le développement de méthodes numériques robustes qui peuvent gérer efficacement les complexités introduites par la non-linéarité aux frontières.

Les résultats obtenus dans ce projet ouvriront aussi de nouvelles perspectives dans des domaines appliqués, notamment en santé, médecine et biologie. En particulier, les méthodes développées pour la reconstruction de flux conservatifs et l'analyse d'erreur a posteriori peuvent être étendues à des problèmes complexes dans ces secteurs, tels que la modélisation des flux biologiques, la diffusion de médicaments et de nanoparticules, et la simulation de l'interaction entre tissus biologiques et implants médicaux.

Le raffinement adaptatif du maillage, couplé à une gestion robuste des interfaces complexes, permettra d'obtenir des résultats plus précis tout en réduisant les coûts computationnels, rendant ainsi les simulations plus efficaces pour les applications pratiques.

Projet d'Intégration

Titre : Applications des Méthodes Numériques dans les Domaines Médical et Biologique

Contexte et Objectif :

Le travail de recherche effectué dans le cadre de mes études en analyse numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) et en méthodes d'éléments finis (FEM) se concentre principalement sur la reconstruction de flux conservatifs et l'analyse d'erreur a posteriori. Ces méthodes permettent de simuler de manière précise des phénomènes physiques complexes, notamment dans des contextes où des interfaces sont présentes, telles que celles rencontrées en biologie, en médecine et en santé.

Les problématiques liées à la modélisation des interfaces complexes entre différents tissus biologiques, entre un organe et une prothèse, ou encore au sein de l'écoulement sanguin, sont des défis cruciaux dans ces domaines. Mon projet d'intégration vise à explorer l'application de ces méthodes numériques à ces problématiques, avec un focus particulier sur l'adaptation de maillage, la reconstruction de flux et l'analyse d'erreur à posteriori pour des simulations plus précises.

Applications Potentielles :

1. **Modélisation du Comportement des Globules Rouges sous Écoulement** :

   Le sang humain, constitué de nombreux globules rouges, subit des écoulements complexes dans les vaisseaux sanguins, notamment dans les capillaires. Chaque globule rouge peut être modélisé comme un fluide viscoélastique, avec une membrane fine traitée comme un fluide (par exemple, un polymère ou un fluide newtonien). Cependant, la grande quantité de globules dans le sang et leur interaction avec l'écoulement compliquent cette modélisation.

   Utiliser des méthodes d'éléments finis pour modéliser chaque globule et son interaction avec l'écoulement sanguin. La méthode CutFEM (Coupe-FEM) permet de gérer les interfaces entre les globules et le fluide sanguin, sans nécessiter un maillage spécifique pour chaque interface. Un raffinement adaptatif du maillage, fondé sur l'analyse d'erreur a posteriori, permet de concentrer la résolution numérique dans les zones les plus critiques, garantissant ainsi une meilleure précision.

2. **Écoulement Sanguin et Interaction Fluide-Structure** :

   Dans le cadre de l'écoulement sanguin à travers les vaisseaux, les parois vasculaires, souvent considérées comme des structures élastiques, interagissent avec le fluide sanguin. Cela représente un problème classique d'interaction fluide-structure, où l'élasticité de la paroi et les caractéristiques du fluide doivent être prises en compte pour simuler les comportements du système.

   Une simulation de l'interaction fluide-structure sera réalisée en utilisant les méthodes de reconstruction de flux et de Nitsche pour gérer les conditions aux interfaces entre le fluide et les parois élastiques. CutFEM permet de traiter des géométries complexes des vaisseaux, avec des maillages non alignés aux interfaces. La reconstruction de flux conservatifs permet de modéliser les échanges de masse et d'énergie, tandis que l'analyse d'erreur a posteriori assure la précision des simulations dans les zones critiques.

3. **Modélisation des Films Biologiques** :

   Dans le contexte de la diffusion de médicaments ou de nanoparticules, ainsi que de la propagation de pathogènes, les films biologiques jouent un rôle crucial. Par exemple, les interfaces entre des tissus sains et tumoraux, ou entre un organe et une prothèse, peuvent représenter des défis importants pour les simulations des flux biologiques.

Méthodes et Outils :

Les méthodes de Nitsche et CutFEM, associées à un raffinement adaptatif de maillage, sont particulièrement adaptées pour traiter des interfaces complexes. Ces méthodes permettent de simuler avec précision des phénomènes physiques dans des géométries non adaptées, comme celles rencontrées dans les systèmes biologiques et médicaux. Le raffinement adaptatif de maillage, basé sur une analyse d'erreur a posteriori, permet de focaliser la résolution numérique dans les zones critiques, comme les interfaces biologiques.

References

[1] R. Becker, D. Capatina, and R. Luce. "Local flux reconstructions for standard finite element methods on triangular meshes". In: *SIAM J. Numer. Anal.* 54.4 (2016), pp. 2684–2706.

[2] E. Burman and P. Hansbo. "Fictitious domain finite element methods using cut elements: II. A stabilized Nitsche method". In: *Appl. Numer. Math.* 62.4 (2012), pp. 328–341.

[3] E. Burman et al. "CutFEM: discretizing geometry and partial differential equations". In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 104.7 (2015), pp. 472–501.

[4] D. Capatin and A. Gouasmi. "Conservative Flux Reconstruction for an Elliptic Interface Problem Using CutFEM". In: *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2023* 1 (2025), pp. 377–386. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-031-86173-4_38.

[5] D. Capatin and A. Gouasmi. "Flux-equilibrated based a posteriori error analysis for an interface problem with CutFEM". In: *Monografias Matematica* (accepté en 2025).

[6] D. Capatin, A. Gouasmi, and C. He. "Robust Flux Reconstruction and a Posteriori Error Analysis for an Elliptic Problem with Discontinuous Coefficients". In: *J. Sci. Comput.* 98.1 (2024), p. 28.

[7] J. Haifeng. "An immersed Raviart–Thomas mixed finite element method for elliptic interface problems on unfitted meshes". In: *J. Sci. Comput.* (2022).

[8] G. Matthies and L. Tobiska. "Inf-sup stable non-conforming finite elements of arbitrary order on triangles". In: *Numer. Math.* 102 (2005), pp. 293–309.

[9] J. Nitsche. "Uber ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind". In: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* (1971).

Aimene Gouasmi

aimene.gouasmi@univ-perp.fr
agouasmi@univ-pau.fr
+33 (0) 7 51 90 67 77
30 bis impasse Grande la Réal, 66000 Perpignan

Activités d'enseignement

Lieu d'enseignement: j'occupe un poste d'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (ATER) à l'Université de Perpignan Via Domitia (UPVD). Mon expérience d'enseignement en tant qu'ATER, décrite dans ce document, couvre la période de septembre 2024 à août 2025 (1 ans). Au total, mes activités d'enseignement s'élèvent à l'équivalent de 192 heures TD, soit environs 254 heures réelles. j'avais aussi l'opertenuté d'enseigner en tant que enseignant vacataire sur les deux dernières années de ma thèse.

Public concerné: j'ai enseigné à des étudiants de niveaux Licence 1 (L1), Licence 2 (L2) et Licence 3 (L3) en informatique, mathématiques, et mathématiques appliquées.

Nombre d'étudiants:

- Les TD se déroulaient en groupes d'environ 25 étudiants, tandis que les TP étaient organisés en groupes d'environ 20 étudiants.

Tâches effectuées: Pour tous ces enseignements, j'ai également participé à toutes les tâches annexes attendues :

- Surveillance des examens.
- Correction des copies et mise à disposition des corrigés aux étudiants.
- Proposition et réalisation d'exercices, de projets et d'examens.

Statut	Module	**CM**	**TD**	**TP**
ATER	Algèbre linéaire	0h	37.5h	0h
	Base d'analyse	0h	37.5h	0h
	Base de raisonnement	0h	21h	0h
	Algèbre linéaire 2	0h	19h	0h
	Calcule d'integration et des séries numériques	0h	48h	0h
	Géométrie	0h	30h	0h
Vacataire	Probabilité & Statistique + R	0h	7.5h	12h
	Calcule scientifique	0h	3h	16.5h
	Algorithmique Mathématique et Python	0h	0h	19h
	Probabilité pour APILS	0h	15h	0

Table 1: Répartition des enseignements selon le statut et le type

Les sections suivantes détaillent les travaux effectués, offrant un aperçu des tâches réalisées.

En tant que ATER :

1. *Base d'algèbre linéaire 1* : L1-informatique et L1-mathématique (3PE, LAS, classique), (37.5h TD)

Ce cours vise à fournir une compréhension approfondie des structures fondamentales de l'algèbre linéaire, en mettant l'accent sur les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, les applications linéaires et les matrices.

- **Manipulation des vecteurs et matrices** : opérations de base et calculs dans $\mathbb{K}^n$
- **Analyse des sous-espaces vectoriels** : familles libres, bases et dimension
- **Applications linéaires** : noyau, image et représentation matricielle
- **Résolution de systèmes linéaires** : méthode du pivot de Gauss et inversion de matrices
- **Déterminants** : calcul, propriétés et application des formules de Cramer

2. *Base d'analyse* : L1-mathématique (3PE, LAS, classique), (37.5h TD)

   Ce cours d'analyse vise à maîtriser les concepts fondamentaux des nombres réels, des limites, de la continuité et des fonctions usuelles. Il combine une approche théorique rigoureuse avec des applications pratiques, en couvrant les propriétés de base des fonctions, leurs comportements asymptotiques, et les outils essentiels pour l'étude des fonctions continues et dérivables.

   - Manipuler avec aisance les expressions algébriques et fonctionnelles.
   - Raisonner de manière rigoureuse sur les propriétés des nombres réels.
   - Analyser le comportement local et global des fonctions.
   - Résoudre des problèmes concrets en utilisant les fonctions usuelles.

3. *Base de raisonnement* : L1 informatique, (21h TD)

   Ce cours de bases du raisonnement mathématique introduit les outils fondamentaux de la logique (connecteurs, quantificateurs), les méthodes de démonstration (implication, absurde, récurrence) et les concepts ensemblistes (opérations, applications, relations). Il vise à développer une pensée rigoureuse à travers l'étude des structures discrètes (dénombrement, relations binaires) et des propriétés des applications (injectivité, bijectivité). L'accent est mis sur la maîtrise du langage mathématique formel et des techniques de preuve pour préparer aux mathématiques avancées.

   - **Maîtriser les bases de la logique**: Connecteurs logiques, quantificateurs et méthodes de démonstration.
   - **Comprendre les ensembles et applications**: Opérations ensemblistes, propriétés des fonctions (injection, bijection) et relations (équivalence, ordre).
   - **Développer un raisonnement rigoureux**: Acquérir les outils fondamentaux pour aborder les mathématiques supérieures.

4. *Calcule d'integration & séries numériques* : L1-Mathématique et L2-informatique, (48h TD)

   Ce cours couvre deux axes fondamentaux. D'une part, les techniques d'intégration, telles que la simplification des fractions rationnelles en éléments simples, l'intégration par parties, le changement de variable, et les intégrales de Riemann/Lebesgue, ainsi que leurs applications, notamment la moyenne et la formule de Leibniz. D'autre part, il traite de l'étude des séries numériques, avec un focus sur les critères de convergence (Riemann, d'Alembert, Cauchy) et l'utilisation des développements de Taylor. L'objectif est de maîtriser ces outils analytiques essentiels pour le calcul avancé.

5. *Géométrie* : 3ème année L3 Mathématique , (28.5h TP)

   L'objectif de ce cours est d'étudier les fondements de la géométrie affine et euclidienne, en explorant les concepts d'espaces affines, de barycentres et d'applications affines. Il vise également à maîtriser les outils analytiques et vectoriels pour calculer distances, angles et étudier les isométries. Enfin, il aborde des théorèmes classiques (Thalès, Pythagore, Céva, etc.) pour appliquer ces concepts à des problèmes concrets.

- **Comprendre les espaces affines et leurs structures** : Étude des sous-espaces affines, repères affines, et applications affines pour formaliser géométriquement les notions de droites, plans et transformations.
- **Maîtriser les outils analytiques et vectoriels** : Utilisation des coordonnées barycentriques, calculs de distances, d'angles et analyse des isométries (rotations, translations, symétries) en géométrie euclidienne.
- **Appliquer les théorèmes fondamentaux** : Exploiter des résultats clés comme Thalès, Pythagore, Céva et Menelaüs pour résoudre des problèmes géométriques en lien avec l'alignement, le parallélisme et la convexité.
- **Relier géométrie affine et euclidienne** : Passer des propriétés purement affines (barycentres, convexité) à celles métriques (distances, angles)

En tant que vacataire :

1. *Algorithmique mathématique et Python 1* : L2-informatique , (19h TP)

   Ce cours est une introduction au langage Python et à la programmation. Il en présente les principes élémentaires comme la notion de variables, les instructions simples, répétitives ou conditionnelles qui permettent de construire un programme informatique.

   - Écrire de petits programmes simples en langage Python.
   - Mettre en place en Python des algorithmes itératifs en adaptant les critères d'arrêts.
   - Simuler des lois élémentaires de probabilité en langage Python.

2. *Probabilités* : Années préparatoires à l'insertion en licence scientifique (APILS), (15h TD)

   Ce cours couvre les principes fondamentaux du dénombrement, des espaces de probabilité et des variables aléatoires discrètes et continues. Il explore les lois classiques, les moments, ainsi que l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. L'objectif est d'initier à la modélisation et à l'analyse des phénomènes aléatoires. l'objectives de ce cours et d'être capable à

   - Modéliser des expériences aléatoires simples (jeu de pile ou face, poker, loto, durée de fonctionnement d'un appareil, . . .).
   - Calculer différentes quantités probabilistes associées à ces expériences (probabilité de gain et gain moyen dans un jeu ; durée moyenne de fonctionnement d'un appareil et probabilité qu'il soit encore en marche pendant une durée donnée).
   - Comprendre la notion d'intervalle de confiance pour un indicateur aléatoire (application à des techniques d'échantillonnage en contrôle de qualité ; interprétation des résultats d'un sondage à une élection).

3. *Calcule scientifique* : L2-informatique, (19.5h TP)

   Ce cours couvre l'approximation polynomiale (interpolation de Lagrange, intégration numérique), les systèmes linéaires (méthodes directes et itératives, matrices creuses), et la recherche de racines (bisection, interpolation, méthode de Newton). Il allie théorie mathématique et programmation numérique.

   - Comprendre des algorithmes issus de méthodes numériques
   - Analyser les résultats numériques (convergence, erreur d'approximation, ...)
   - Implémenter des méthodes numériques simples en langage C.

4. *Probabilités et Statistiques* : L2-informatique, (19.5h TD)

Ce cours introduit les outils probabilistes et statistiques appliqués à l'informatique, en abordant les probabilités discrètes, les variables aléatoires et les lois usuelles. Il inclut également la simulation sous R, la statistique descriptive, la régression et des études de cas pratiques.

- Savoir décrire et interpréter avec le logiciel R des données statistiques appliquées à l'informatique et à d'autres disciplines.
- Savoir calculer un intervalle de confiance pour une espérance,
- Savoir utiliser des modèles probabilistes simples avec applications à l'informatique (loi normale, exponentielle, géométrique, de Poisson)
- Savoir initier à la probabilité discrète et la statistique descriptive.

Integration Pédagogique

Fort de mon parcours en tant qu'ATER à l'Université de Perpignan et d'ensignant vacataire à l'UPPA, je suis convaincu que mes compétences me permettent d'intervenir dans divers parcours et matières en mathématiques et applications.

En fonction de mon expertise de thèse, je pourrais proposer des cours spécifiques comme l'analyse numérique des EDP avec méthodes des éléments finis (en mettant l'accent sur les méthodes conformes et non conformes, l'interpolation et les inégalités de trace), ainsi que des cours sur le calcul scientifique, incluant l'approximation polynomiale, l'intégration numérique, et les méthodes matricielles. Ces cours s'inscrivent parfaitement dans le cadre de parcours appliqués à des domaines tels que la santé numérique, permettant aux étudiants d'acquérir des compétences essentielles pour la simulation de phénomènes biologiques et médicaux complexes.

Analyse numérique des EDP avec méthodes des éléments finis

Le cours sur l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) avec méthodes des éléments finis vise à doter les étudiants des compétences nécessaires pour aborder des problématiques complexes en santé numérique. Ce domaine nécessite une maîtrise des méthodes numériques adaptées aux équations qui modélisent des phénomènes biologiques et médicaux, comme la diffusion de médicaments ou la propagation de maladies. En mettant l'accent sur les méthodes conformes et non conformes, ce cours permettra aux étudiants de comparer les approches traditionnelles, où la régularité des fonctions d'interpolation est respectée, avec les méthodes plus flexibles mais potentiellement moins précises. Les inégalités de trace joueront un rôle central en garantissant la stabilité et la précision des solutions obtenues par éléments finis. Enfin, ce cours intègre une dimension pratique avec des applications concrètes dans la modélisation de systèmes biomédicaux, offrant ainsi aux étudiants une solide compréhension théorique et numérique des méthodes utilisées dans le domaine de la santé numérique. Points initiaux potentiels :

- Introduction aux EDP et à leur rôle dans les applications de santé numérique.
- Rappel sur ls espace de Sobolev, et fonctions de trace.
- Méthodes d'element finit : simplex, degrés de libertés, univalence, fonction de base.
- Méthodes d'element finit Conforme et non-conforme, définition, inégalité de trace et de Poincaré, interpolation et l'erreur d'interpolation.
- Suddel point et Formulation mixed.
- Application pratique des méthodes numériques à des problèmes réels de santé, tels que la diffusion de médicaments et la modélisation des écoulements biologiques.
- introduction au raffinement adaptative, et amélioration de la précision de la solution.

Calcul Scientifique - Résumé du Cours Le cours de Calcul Scientifique est essentiel pour les étudiants souhaitant acquérir des compétences avancées en modélisation numérique et en résolution de problèmes complexes, notamment dans les domaines de la science et de la santé. À l'ère de la simulation numérique, comprendre et maîtriser les méthodes d'interpolation, d'intégration numérique et les calculs matriciels est crucial pour appliquer ces outils dans des contextes réels, tels que la modélisation des phénomènes biologiques, la diffusion de chaleur dans les tissus ou la propagation de fluides dans le corps humain. Ce cours permettra aux étudiants de développer des compétences pratiques et théoriques pour aborder des problèmes techniques tout en garantissant la précision et la fiabilité des résultats numériques. Points Principaux Possibles :

- Méthodes d'approximation : Interpolation numérique (la base de Lagrange, polynômes de Lagrange ...).
- Calcul d'intégrales : Méthodes numériques pour l'intégration (trapèze, Simpson, Gauss-Legendre, l'ordre de chaque méthode).
- Méthodes matricielles : Calcul de systèmes linéaires et matrices creuses, calcule les valeurs propre, applications dans les simulations.
- Applications pratiques

Aimene Gouasmi
30 Bis Impasse Grande la Real
66000 Perpignan, France
aimene.gouasmi@univ-pau.fr
+33 (0)7 51 90 67 77

À l'attention de Monsieur Karel Pravda-Starov
Directeur de l'UFR Mathématiques
Université de Rennes

Perpignan, le 24/04/2025

Objet : Candidature au poste d'enseignant · e-chercheur · e contractuel · le en mathématiques appliquées (CMA ReDHI)

Monsieur le Directeur,

Actuellement ATER à l'Université de Perpignan Via Domitia, qualifié aux fonctions de maître de conférences en section 26 (mathématiques appliquées), je vous adresse ma candidature pour le poste d'enseignant · chercheur contractuel en mathématiques appliquées au sein de l'UFR de Mathématiques de l'Université de Rennes, dans le cadre du projet CMA ReDHI.

Titulaire d'un doctorat obtenu à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour en décembre 2024, mes travaux de thèse ont porté sur la reconstruction de flux conservatifs pour des problèmes elliptiques avec interfaces, en particulier à l'aide de méthodes numériques avancées telles que CutFEM et les formulations mixtes hybrides. Cette recherche a été menée au sein du LMAP et financée par le programme Horizon H2020 (bourse Marie Curie), témoignant de son ancrage européen et de sa rigueur scientifique.

Ma production scientifique comprend plusieurs publications, dont une dans le Journal of Scientific Computing (2024) https ://doi.org/10.1007/s10915-023-02428-7, ainsi que des communications dans des conférences internationales comme ENUMATH et ECCOMAS. Ces travaux m'ont permis de développer une expertise robuste en analyse a posteriori, raffinement adaptatif, et simulation numérique sur maillages non adaptés.

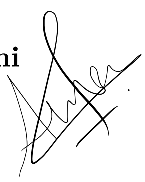
Sur le plan pédagogique, j'ai assuré plus de 250 heures d'enseignement réparties entre TD et TP, de la L1 à la L3, dans des domaines tels que l'analyse, l'algèbre, la géométrie, les probabilités et le calcul scientifique. J'ai également enseigné la programmation scientifique en Python et C, notamment pour la simulation et l'analyse de données. Cette polyvalence et mon implication dans l'encadrement de projets pédagogiques me permettraient de contribuer activement aux enseignements du master Mathématiques et Applications, parcours Simulation Numérique pour la Santé, en particulier dans les modules relevant du calcul scientifique et des EDP.

Intégrer l'Université de Rennes serait pour moi une opportunité de poursuivre mes recherches au sein de l'IRMAR, dans les équipes Analyse Numérique et Modélisation ou Statistique, en lien avec les enjeux du projet CMA ReDHI. Mon intérêt pour les applications en santé, illustré dans mes perspectives post-thèse, rejoint les orientations de ce projet structurant, notamment dans la modélisation de flux biologiques ou l'interaction fluide-structure.

Je me tiens à votre disposition pour un entretien, au cours duquel je pourrais vous exposer plus en détail mes travaux et ma motivation. Je vous remercie vivement pour l'attention portée à ma candidature.

Veuillez recevoir, Monsieur, l'expression de mes salutations distinguées.

Aimene Gouasmi



Alexei LOZINSKI
Professeur
Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Université de Franche-Comté

Phone 03 81 66 63 16
alexei.lozinski@univ-fcomte.fr

Besançon, le 22 novembre 2024

Rapport sur le manuscrit de thèse de
Aimene GOUASMI
sur
Flux reconstructions for interface problems and application to a posteriori error analysis

Le manuscrit de thèse d'Aimene GOUASMI porte sur l'approximation numérique par la méthode d'éléments finis du problème de diffusion en présence d'interfaces physiques, avec le contraste élevé entre les valeurs du coefficient du diffusion de deux côtés de l'interface. Ce problème avait déjà suscité une activité intense de plusieurs groupes de recherche qui ont proposé des méthodes efficaces en faisant attention à la robustesse par rapport au contraste. De telle méthodes sont disponibles à la fois dans le cas géométrique conforme (l'interface est résolu par le maillage) et non conforme (l'interface coupe les mailles de manière arbitraire). Pourtant, les estimations d'erreur *a posteriori* ne sont toujours pas suffisamment développées pour ces méthodes, malgré leur importance en pratique. Cela concerne surtout le cas des maillages non conformes, dans lequel l'élaboration et l'étude des estimations *a posteriori* est encore en phrase initial. La thèse d'Aimene, qui attaque justement cette question des estimations *a posteriori*, est une contribution capitale dans ce domaine de recherche très actuelle. Aimene construit notamment des estimations du type «flux équilibré» qui donnent une majoration d'erreur garantie (sans constantes à ajuster) dont l'éfficacité est robuste par rapport aux coefficients. Il considère l'approximations par les éléments finis conformes et non-conformes (dy type Crouzeix-Raviart) sur des maillages conformes et non-conformes en employant dans les 2 cas la méthode de Nitsche pour imposer les conditions aux limites sur le bord du domaine ou sur l'interface (dans le cas où cette dernière n'est pas résolue par le maillage).

La thèse comporte deux parties. Dans la première, Aimene considère le problème de diffusion dans la situation géométriquement conforme, c.a.d. en supposant que l'interface physique est alignée avec le maillage ou, plus généralement, que le coefficient de diffusion prend des valeurs variables, constantes par maille. Aimene propose alors un estimateur d'erreur *a posteriori* basé sur une reconstruction du flux par une méthode qui généralise et adapte la construction de l'article de R. Becker, D. Capatina et R. Luce (2016). Cette méthode exploite une réinterprétation du problème d'éléments finis comme un problème mixte, introduisant les multiplicateurs de Lagrange sur les arêtes du maillage, qui peuvent ensuite être utilisés pour reconstruire le flux dans l'espace $H(\mathrm{div})$-conforme de Raviart-Thomas. Un choix astucieux de l'espace des multiplicateurs aboutit à une construction locale et efficace.

Il se trouve que cette reconstruction, originalement proposée pour des éléments finis conformes, est particulièrement simple dans le cas des éléments finis non conformes, à la Crouzeix-Raviart. Ce cas (non étudié dans l'article original) est l'objet principal du Chapitre 3 du manuscrit. Aimène y considère deux familles d'éléments finis non conformes sur des maillages triangulaires : les éléments finis standards de Crouzeix-Raviart de degrés impaires, et la version enrichie, introduit par Matthies et Tobiska, de degré quelconque, pair ou impaire. La méthode de Nitsche est employée afin de traiter les conditions aux limites de Dirichlet. L'approche de Becker et al. est étendu à ces espaces de manière complètement robuste par rapport aux coefficients de diffusion, dans un cadre unifié pour les deux familles d'espaces, fournissant un estimateur d'erreur *a posteriori* garanti et efficace. En particulier, la dépendance explicite des constantes d'efficacité par rapport aux coefficients est fournie dans l'analyse mathématique.

Chapitre 4 est consacré à l'approximations par les éléments finis conformes, où la reconstruction de flux est plus difficile de points de vue d'analyse mathématique et de l'implémentation pratique. Comme déjà dit, c'est le cadre de l'article original de Becker et al., mais Aimene y apporte 2 contributions majeures : une généralisation robuste aux coefficients variables (constantes par mailles) et l'adaptation à la méthode de Nitsche pour imposer les conditions aux limites de Dirichlet. Aimene fournit des bornes pour les multiplicateurs et le flux en fonction des coefficients de diffusion et montre leur robustesse dans le cas de coefficients quasi-monotones, ce qui couvre le cas du problème avec un interface (c.a.d. coefficients constants dans 2 sous-domaines). Ceci lui permet de construire, encore une fois, un estimateur d'erreur *a posteriori* garanti, efficace et robuste. L'analyse mathématique est confirmée par plusieurs expériences numériques en utilisant les éléments finis conformes P_1.

La deuxième partie de la thèse aborde un problème elliptique avec l'interface (la ligne de discontinuité des coefficients) non alignée avec le maillage, éventuellement avec un saut du flux normal imposé sur l'interface. La discrétisation est effectuée par la méthode des éléments finis coupés (CutFEM, aussi connue sous le nom NXFEM – Nitsche extended FEM dans ce contexte). L'idée est de redoubler les degrés de liberté sur les triangles coupés par l'interface, afin d'approcher de manière optimale la solution de deux côté d'interface. Les conditions sur le saut de la solution et de son flux sont alors imposées par la méthode de Nitsche, en ajoutant une stabilisation appropriée. L'objectif de cette partie de thèse est de proposer une reconstruction du flux équilibré par des calculs locaux, en adaptant l'approche développée dans la première partie pour le cas des maillages alignés, et d'utiliser ce flux pour l'estimation d'erreur *a posteriori*. Dans chapitre 6, Aimene explore 2 approches : premièrement, une méthode de reconstruction de flux dans les espaces de Raviart-Thomas séparément de 2 côtés de l'interface. Cette méthode n'assure malheureusement pas la continuité normale du flux reconstruit à travers l'interface et ne mène donc pas à une estimation d'erreur fiable. Cependant, Aimene est capable de montrer l'efficacité de l'estimateur de manière robuste en coefficients. Deuxièmement, il propose une reconstruction dans l'espace de Raviart-Thomas global (sur le domaine Ω tout entier), en supposant cette fois que les conditions sur l'interface sont telles que le flux exact est continu dans la direction normale. La fiabilité (avec consante 1) peut être alors établie, mais il semble impossible de montrer l'efficacité. Le chapitre est conclu par des expériences numériques qui sont prometteurs dans certains cas tests, mais montrent aussi les limitations des approches proposées.

Afin de pallier aux problèmes des estimations du Chapitre 6, Aimene propose dans Chapitre 7 une reconstruction alternative basée sur l'espace immergé de Raviart-Thomas, introduit dans un article récent de H. Ji. Le cadre est restreint ici aux éléments finis de plus bas degré, c.a.d. les éléments finis conformes P_1 pour la solution, et les éléments de Raviart-Thomas immergé de degré 0 pour le flux. Les fonctions de ce dernier espace respectent fortement la condition de transmission à l'interface, c.a.d. le saut de la composante normale du flux, et en plus, prennent faiblement en compte la continuité de la composante tangentielle. Ces propriétés permettent finalement à concevoir un estimateur d'erreur *a posteriori* ayant toutes les propriété recherchées : Aimene peut établir à la fois la fiabilité globale et l'efficacité locale, en mettant en évidence la dépendance de la constante d'efficacité aux coefficients et à la géométrie. Le chapitre se termine par des simulations numériques qui confirment les résultats théoriques. Les maillages obtenus par les algorithmes adaptatifs basés sur la reconstruction dans l'espace de Raviart-Thomas immergé sont effectivement de bien meilleur qualité que ceux obtenu avec les espaces de Raviart-Thomas standards.

Finalement, Chapitre 8 est consacré à une généralisation de l'espace de Raviart-Thomas immergé, qui était introduit dans la littérature seulement à l'ordre le plus bas, à l'ordre supérieur $m = 1$. Aimene y décrit la construction de cet espace et son application à une reconstruction du flux, sans détailler (faute de temps, certainement) les résultats sur les estimateurs d'erreur correspondants. Le manuscrit se termine par un court chapitre regroupant les principales conclusions, une présentation des travaux en cours, et quelques perspectives plus lointaines.

Le manuscrit de thèse de Aimene GOUASMI est un très bon exemple d'une thèse en analyse numérique. Aimene y attaque des questions difficiles et les traite avec une grande aisance. Les calculs, souvent très techniques, sont bien détaillés, expliquées, et motivés. Le manuscrit est par ailleurs bien rédigé et structuré. En conclusion, je trouve que le manuscrit de thèse de Aimene GOUASMI satisfait toutes les exigences nécessaires et je donne un avis favorable à la soutenance.

Je suis très favorable à la soutenance de la thèse.

.

■ 16 route de Gray F-25030 Besançon cedex ■ tél. +33 (0)3 81 66 63 40 ■ fax +33 (0)3 81 66 66 23
■ http://lmb.univ-fcomte.fr

Rapport sur la thèse de

Aimene Gouasmi

Flux reconstructions for interface problems and application to a posteriori error analysis

Le travail de thèse de Aimene Gouasmi a été effectué au Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications (LMAP) de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. Il porte sur des méthodes de reconstruction de flux pour des problèmes d'interface, et sur leur application dans le cadre de l'analyse *a posteriori* pour des méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles.

Le mémoire comporte 187 pages. Il est constitué d'une introduction (chapitre 1), de deux grandes parties - la première correspondant aux chapitres 2 à 4 et la seconde aux chapitres 5 à 8 -, et d'une conclusion avec des perspectives. Il est rédigé en anglais. Avant de rentrer dans le vif du sujet, je dois dire que Aimene Gouasmi parvient à donner une présentation progressive et pédagogique de ses résultats, ce qui est difficile pour ce type de sujet compte-tenu de sa grande technicité. Les nombreuses démonstrations qui émaillent l'ensemble des développements en analyse numérique sont menées avec rigueur et précision. L'ensemble est de ce fait très agréable à lire.

Le **chapitre 1** constitue une introduction générale. Après avoir indiqué dans quels contextes intervenaient les problèmes d'interfaces, Aimene Gouasmi précise en quoi consiste le coeur de son travail doctoral. Il s'agit d'une part de mettre au point des techniques de reconstruction de flux, y compris dans le cas où les maillages utilisés ne prennent pas en compte la localisation géométrique des interfaces physiques. Il s'agit d'autre part d'utiliser ces reconstructions pour mener une analyse d'erreur *a posteriori*, dans le cadre du développement d'estimateurs dits "équilibrés". Le travail va s'opérer sur un problème de diffusion dans un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, dont le tenseur peut être discontinu à travers l'interface, et avec la possibilité d'un saut du flux normal de la solution à l'interface. Les références bibliographiques, depuis les fondatrices jusqu'aux plus récentes, sont bien mentionnées, et les principaux éléments numériques sur lesquels s'appuie la thèse rapidement présentés. Le plan de la thèse et la présentation succincte de chaque chapitre sont alors rédigés. Il s'agit de mon point de vue d'une bonne entrée en matière, dans laquelle Aimene Gouasmi est parvenu à bien faire comprendre l'intérêt du sujet ainsi que la spécificité et l'originalité de son travail.

La première partie concerne la situation dans laquelle l'interface est alignée avec les segments du maillage. La nouveauté consiste essentiellement à généraliser le travail effectué par Becker, Capatina et Luce en 2016, qui portait sur l'équation de Laplace uniquement, adapté de plus à l'utilisation de la méthode de Nitsche pour l'imposition des conditions aux limites de Dirichlet. Le **chapitre 2** est une rapide introduction, qui précise en particulier les espaces discrets basés sur des maillages réguliers constitués de triangles, ainsi que les notations.

Dans le **chapitre 3**, Aimene Gouasmi traite du cas des méthodes d'éléments finis non conformes (éléments finis de type Crouzeix-Raviart de degré impair et de type Matthies et Tobiska). Les formulations primale et mixte du problème de diffusion sont données, ainsi que la formulation mixte hybride permettant d'imposer la continuité de la solution discrète par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. Cette dernière formulation constitue la clé de voûte de l'approche, car elle présente l'intérêt majeur de permettre la reconstruction des flux $H(div)$-conformes en postprocessing non seulement de façon locale, mais en évitant même d'avoir à résoudre des problèmes mixtes locaux. Une fois le caractère bien posé de toutes ces formulations établi pour les espaces discrets considérés, Aimene Gouasmi montre que les multiplicateurs de Lagrange peuvent être calculés localement, permettant ensuite le calcul explicite des flux.

Le **chapitre 4** est consacré au même travail, mais cette fois pour des espaces d'éléments finis conformes, pour lesquels la reconstruction des flux est connue pour être plus complexe. Le cheminement est le même que celui du chapitre précédent. On notera toutefois la nécessité d'ajouter l'hypothèse de quasi-monotonie du tenseur de diffusion K sur la triangulation, pour assurer le caractère bien posé de la formulation mixte hybride, de sorte que la constante inf-sup discrète soit bien uniforme en K, assurant ainsi la robustesse de l'approximation (Lemme 4.1.3). Enfin et comme attendu, cette reconstruction permet de définir un estimateur d'erreur *a posteriori*, d'en garantir la fiabilité qui soit asymptotiquement exacte, ainsi que l'efficacité locale. Cette partie se termine par plusieurs tests numériques opérés avec le logiciel FEniCS pour l'approximation P_1-conforme, pour illustrer les résultats théoriques dans plusieurs configurations. Ils sont de mon point de vue pertinents, en illustrant plusieurs configurations caractéristiques. Peut-être aurait-il pu être aussi intéressant de mettre en évidence les temps de calcul des différents éléments pour estimer le vrai coût numérique du calcul de l'estimateur.

Quoi qu'il en soit, cette première partie montre une grande maîtrise du sujet. Aimene Gouasmi parvient à généraliser les travaux antérieurs, ce qui est déjà clairement non trivial. Cette partie de la thèse a fait l'objet d'une publication dans *Journal of Scientific Computing* en 2024.

La seconde partie concerne la situation dans laquelle la conception du maillage est indépendante de la position de l'interface. La relaxation de cette contrainte ouvre en effet des perspectives très intéressantes, pour faciliter entre-autre les problématiques de remaillage. Aimene Gouasmi propose alors de reprendre l'étude par utilisation de la méthode CutFEM, qui considère en particulier le problème comme étant posé dans chacun des sous-domaines, avec des conditions à l'interface, comme l'explique brièvement le **chapitre 5**, qui précise l'ensemble des notations qui seront nécessaires.

Dans le **chapitre 6**, une première idée est de s'inspirer de la technique de Capatina et He (2021) pour reconstruire dans chacun des sous-domaines "augmentés", notés Ω_h^i, un flux reconstruit σ_h^i dans l'espace de Raviart-Thomas $\mathcal{RT}(\Omega_h^i)$. Même si le cheminement général suit de près celui du chapitre précédent, de nombreux détails techniques sont à traiter, comme notamment l'extension des fonctions sur certains triangles de l'interface non totalement inclus dans l'un des sous-domaines $\bar{\Omega}^i$. Une des conséquences est que le flux global ainsi reconstruit ne vérifie pas la condition de transmission à l'interface, empêchant de fait la fiabilité de l'estimateur *a posteriori* obtenu. J'ai particulièrement apprécié dans cette partie les trois tentatives menées pour résoudre le problème, qui poussent le raisonnement jusqu'à la limite de ce qui semble être raisonnable, et qui contribuent à bien faire comprendre la difficulté sous-jacente. La fin de ce chapitre propose une construction globale du flux $\sigma_h \in H(div, \Omega)$, qui permet d'obtenir la fiabilité de l'estimateur (Théorème 6.3.4), même si cette fois c'est l'efficacité locale qui se trouve en défaut. Pour parvenir à ce résultat, la construction d'un bon interpolant (non trivial) sur les triangles traversés par l'interface est complexe, et la ténacité nécessaire à la réalisation de cette partie du travail mérite d'être soulignée. Les tests numériques, menés avec la bibliothèque CutFEM toujours sous FEniCS, donnent des résultats convaincants.

Le **chapitre 7** permet, par l'utilisation de l'espace de Raviart-Thomas immergé $\mathcal{IRT}^0(\Omega)$, d'obtenir à la fois la fiabilité et l'efficacité locale de l'estimateur, ce qui est un très bel aboutissement de ce travail doctoral. Le principe, introduit par Haifeng en 2022, consiste à considérer pour un triangle T traversé par l'interface un espace d'approximation "$\mathcal{RT}^0(T)$par morceaux", qui permet de gérer la continuité de la composante tangente au niveau de l'interface, au prix de la perte de la régularité

$H(div,\Omega)$ globale. Néanmoins, une nouvelle technique de reconstruction d'un flux équilibré dans $\mathcal{IRT}^0(\Omega)$ est proposé. Si la fiabilité de l'estimateur obtenu s'obtient plutôt facilement, l'efficacité locale, robuste à la fois par rapport à K et à la géométrie de l'interface, est obtenue par une démonstration encore une fois technique et difficile, permettant d'aboutir aux Théorèmes 7.3.10 (fiabilité) et 7.3.12 (efficacité locale). Dans les deux cas, la dépendance des constantes en fonction des valeurs du tenseur de diffusion ainsi que des caractéristiques géométriques de l'interface est explicite. Des tests numériques sont proposés, avec quelques éléments explicatifs portant sur leur implémentation pratique. Encore une fois, leur choix et l'analyse des résultats sont pertinents, et la compétence de Aimene Gouasmi pour les implémenter est indéniable.

Le **chapitre 8** de la thèse propose de définir l'espace $\mathcal{IRT}^1(\Omega)$ comme une généralisation à l'ordre supérieur de $\mathcal{IRT}^0(\Omega)$ avec deux variantes, en expliquant comment reconstruire le flux équilibrés dans ces cas là. Enfin et pour finir, Aimene Gouasmi, dans sa conclusion, dessine plusieurs perspectives pour adapter son travail à d'autres modèles, méthodes numériques et types d'estimateurs *a posteriori*, ce qui en effet constitue des pistes prometteuses.

De mon point de vue, Aimene Gouasmi a proposé dans son travail de thèse une contribution originale et très significative en analyse numérique, pour la simulation de problèmes de diffusion en présence d'interfaces. Cet apport me paraît des plus pertinents, compte-tenu du besoin d'affiner et de certifier toujours mieux les résultats des simulations numériques dans de nombreux domaines scientifiques concernés par ce type de problèmes. Ses apports sont à la fois théoriques, avec des démonstrations en analyse numérique difficiles témoignant de sa grande dextérité à manier les objets mathématiques inhérents à la thématique, mais aussi numériques, avec des implémentations techniques. Aimene Gouasmi est également parvenu, malgré la grande technicité du sujet, à conduire le lecteur au fil de son cheminement de façon très pédagogique, permettant ainsi de justifier et de convaincre de la pertinence des choix successifs qu'il a opérés. Pour toutes ces raisons, je recommande avec un grand enthousiasme la soutenance de ce travail de thèse dans les plus brefs délais.

Valenciennes, le 17 novembre 2024
Emmanuel CREUSÉ
Professeur des Universités
CERAMATHS - Département Mathématiques
Université Polytechnique Hauts-de-France, Valenciennes

E. Creusé

GOUASMI Aimene

Année universitaire 2023-2024

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

RAPPORT DE SOUTENANCE

Si le rapport comporte plusieurs pages ou s'il est rédigé sur un document distinct, il devra être paraphé sur chaque page et signé par le Président du jury.

Nombre de pages du rapport : 2

Nom et prénom du doctorant : GOUASMI Aimene

Titre de la thèse : Reconstruction de flux pour un problème d'interface et application à l'analyse d'erreur a posteriori

École Doctorale : Sciences Exactes et leurs Applications

Date de la soutenance : 5 décembre 2024

Président du jury : G. CARBOU (À COMPLÉTER)

Membres du jury :

Nom	Signature	Nom	Signature
Daniela CAPATINA		**Emmanuel CREUSE**	
Alexei LOZINSKI		**Patrick HILD**	
Roland BECKER		**Gilles CARBOU**	

Les membres du jury attestent avoir pris connaissance de l'intégralité du rapport. La Direction de la thèse atteste ne pas avoir pris part à la décision.

Prestation du serment (À COCHER) : [x] Le Docteur a prononcé le serment devant ses pairs [ ] Le Docteur n'a pas prononcé le serment

M. Aimene Gouasmi a présenté ses travaux avec clarté et pédagogie, dans un français impeccable. Ceux ci portent sur la reconstruction de flux équilibrés dans le cadre de problèmes de diffusion avec interfaces et forts contrastes, et leurs applications dans l'analyse d'erreur à posteriori.

M. Gouasmi a travaillé sur différentes méthodes d'éléments finis, y compris les plus récentes. Il a montré qu'il dominait des concepts et des techniques élaborées, tout en sachant les exposer avec pédagogie. Le jury a aussi constaté que M. Gouasmi avait mené un travail important de simulation et d'implémentation aussi.

TSVP

Pour toutes ces raisons, le jury estime que M. Gouasmi a toutes les qualités requises pour être chercheur ou enseignant chercheur, et lui décerne le grade de docteur en mathématiques de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

G. Carbou
Président du jury