Métodos de Monte Carlo

Entrega 3

(Unidad 2, Sesión 6) Ejercicio 6.1

Integrantes

Nombre	CI	Correo
Germán Ouviña	4.823.566-1	german.ouvina@fing.edu.uy

Índice

1. Problema

Entrega 3: Ejercicio 6.2 (INDIVIDUAL):

Se idealiza una montaña como un cono inscrito en una región cuadrada de lado 1 km. La base de la montaña es circular, con centro en (0.5, 0.5) y radio $r = 0{,}4km$, y la altura es $H = 8km$. La altura de cada punto (x, y) de la montaña está dada por la función $f(x, y) = H - H/r \times \sqrt{(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2}$, en la zona definida por el círculo, y 0 fuera del círculo. El volumen total de la montaña (en km cúbicos) puede verse como la integral de la función altura en la región.

1. Escribir un programa para calcular el volumen por Monte Carlo. Realizar 10^6 replicaciones y estimar el valor de ζ y el error cometido (con nivel de confianza 0.95), utilizando como criterio la aproximación normal.
2. En base al valor estimado en la parte a, calcular el número de replicaciones necesario para obtener un error menor a 10^{-3} (con nivel de confianza 0,95).
3. Realizar esa cantidad de replicaciones y estimar ζ y su intervalo de confianza.

2. Solución

2.1. Descripción

Para resolver este ejercicio se plantearon las dimensiones de la montaña como una función, concretamente la función de altura, y se trató el calculo de su volúmen como el problema de calcular la integral de dicha función.

En la sección 2.2 se entra en mayor detalle sobre las características del código. En la sección 3.2 se detallan los resultados obtenidos para las partes a, b y c.

2.2. Pseudocódigo

Procedimiento EstimacionMonteCarloIntegral (int n, funcion f, real δ, real ϵ)
Parámetros de entrada:

- n - tamaño de la muestra
- f - función a calcular su integral
- δ - nivel de confianza
- ϵ - error máximo

Parámetros de salida:

- $\hat{X}$ - estimador de la integral
- $\hat{V_f}$ - estimador de la varianza de la función f
- $\hat{V_X}$ - estimador de la varianza del estimador puntual $\hat{X}$
- ω_1, ω_2 - intervalo de confianza para $(1-\delta)$
- n_N - cantidad óptima de replicaciones que garantiza un error máximo de ϵ con un nivel de confianza de $1-\delta$

Pseudocódigo:

1. $X, \hat{X}, \hat{V_f}, \hat{V_X} = 0$
2. For $i = 1, ..., n+1$ do
   a) Sortear coordenadas de un punto p siguiendo la distribución $U(0,1)$ por coordenada
   b) Evaluar $f(p)$
   c) Acumular $X = X + f(p)$
   d) Si $i > 1 \rightarrow \hat{V_f} = \hat{V_f} + (1 - \frac{1}{i})(f(p) - \frac{X}{i-1})^2$
3. $\hat{X} = X/n$
4. $\hat{V_f} = \hat{V_f}/(n-1)$
5. $\sqrt{\hat{V_X}} = \sqrt{\hat{V_f}/n}$
6. $\omega_1, \omega_2 = I_1(\hat{X}, \sqrt{\hat{V_X}}, \delta), I_2(\hat{X}, \hat{V_X}, \delta)$
7. $n_N = n_N(\epsilon, \delta, \sqrt{\hat{V_f}})$

El anterior pseudocódigo bosqueja un método de monte carlo para el cálculo de la integral de una función, siguiendo las pautas del pseudocódigo presentado en clase. Como cambio básico, se evalúan los puntos sorteados en la función objetivo f y se acumula dicho valor en lugar de acumular 1 por cada punto sorteado que pertenece a la región (como se hacía al calcular un volúmen). A su vez, se modifica el cálculo de la varianza y se distingue entre dos valores: $\hat{V_f}$ para la varianza de la función y $\hat{V_X}$ para la varianza del estimador en sí. Esto se debe a que ambos valores son útiles para distintos datos de interés que se calculan al final, concretamente el intervalo de confianza (ω_1, ω_2) y la cantidad óptima de replicaciones n_N, ambos métodos siguiendo la aproximación normal que emplean las varianzas $\hat{V_X}$ y $\hat{V_f}$ respectivamente. Cabe destacar que el cálculo del intervalo de confianza en esta instancia si utiliza el valor del estimador $\hat{X}$ en lugar del acumulador X.

2.3. Código

El código para solucionar el problema se encuentra adjunto en un archivo *.zip* junto al informe, y se encuentra disponible en el repositorio `https://github.com/gouvina-fing/fing-mmc2025`.

El mismo fue desarrollado en *Python*, cuenta con instrucciones de como instalarlo y correrlo, y ofrece la posibilidad de generar tablas y gráficas comparativas siguiendo la consigna del ejercicio, automáticamente ejecutando el método para los distintos valores de n mencionados.

3. Experimentación

3.1. Especificaciones

A continuación, se desglosan las especificaciones técnicas utilizadas durante la ejecución:

- **Procesador:** 11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-11400F @ 2.60GHz
- **Memoria RAM:** 16.0 GB
- **Sistema Operativo:** Windows 10
- **Semilla:** 42
- **Tamaños de muestra:** 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 13725091

3.2. Resultados

La consigna de este ejercicio cuenta con tres partes en lo que refiere a la experimentación: en primera instancia, ejecutar el algoritmo para $n = 10^6$ y calcular un intervalo de confianza utilizando la aproximación normal. En segunda instancia, obtener una cantidad de replicaciones n para cierto margen de error con cierto nivel de confianza, y ejecutar el algoritmo para ese tamaño de muestra. En tercera instancia, volver a ejecutar el algoritmo pero para el tamaño de n obtenido según la aproximación normal.

Para las primeras dos partes, se ejecutó el algoritmo con $n = 10^6$ y se utilizó el criterio de aproximación normal para calcular n_N, con valores de error y nivel de confianza de $\epsilon = 1{,}0 \times 10^{-4} = 0{,}0001$ y $1 - \delta = 0{,}95$ respectivamente. La cantidad de replicaciones obtenida fue de $n = 13725091$, un valor en el orden de 10^7. Además de ejecutar el algoritmo para el valor de n_N obtenido se generaron valores para $n = 10^4, 10^5, 10^6$ y 10^7, con el objetivo de comparar los comportamientos tanto del estimador y de las varianzas, como de los intervalos de confianza generados. Se comenzó con $n = 10^4$ debido a que en el anterior experimento, valores de n menores no retornaron resultados relevantes.

A continuación, se adjunta la tabla comparativa marcando en rojo los valores de interés según la consigna:

N° de iteraciones	**Estimador ($\hat{X}$)**	**Varianza ($\hat{V_f}$)**	**Desviación ($\sqrt{\hat{V_X}}$)**	**IdeC (Normal)**	**Tiempo (s)**
10^4	1.3488419564	3.6198489995	0.0190259008	1.3115518761 1.3861320367	0.05
10^5	1.3429892360	3.5626099041	0.0059687603	1.3312906809 1.3546877912	0.56
10^6	1.3436475743	3.5728849520	0.0018902076	1.3399428354 1.3473523132	5.71
10^7	1.3411390342	3.5655552026	0.0005971227	1.3399686952 1.3423093732	54.70
13725091	1.3411390342	3.5658633275	0.0005097119	1.3400509804 1.3420490141	75.18

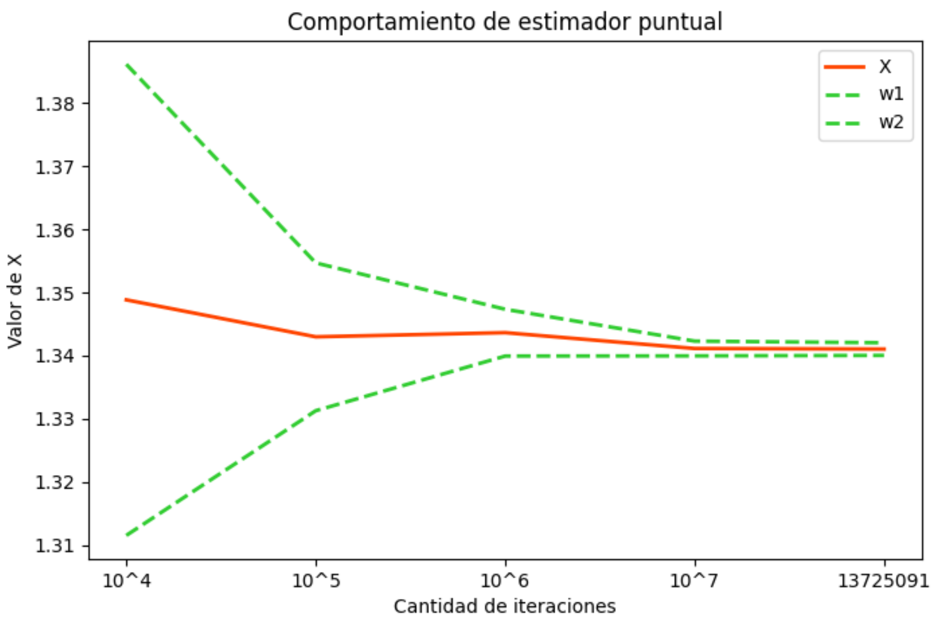

Figura 3.1: Comportamiento del estimador en cálculo de integral