

Thiago de Sousa Goveia

**Avaliação do método do gradiente conjugado  
precondicionado para a solução paralela de um modelo de  
elementos finitos**

Proposta de trabalho apresentada como requisito das disciplinas trabalho de conclusão de curso I e metodologia de pesquisa.

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Campus Timóteo

Graduação em Engenharia de Computação

Orientador: Márcio Matias

Timóteo

2017

# Sumário

<b>1</b>	<b>CONTEXTUALIZAÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>PROBLEMA</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Método Clássico</b>	<b>4</b>
2.1.1	Pré-processamento	4
2.1.2	Processamento	4
<b>2.2</b>	<b>Método EbE</b>	<b>4</b>
2.2.1	Pré-processamento	4
2.2.2	Processamento	5
<b>2.3</b>	<b>Pós-processamento</b>	<b>5</b>
<b>2.4</b>	<b>EbE em GPGPU</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>7</b>
<b>4.1</b>	<b>Objetivos Gerais</b>	<b>7</b>
<b>4.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS ESPERADOS</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>CRONOGRAMA</b>	<b>9</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>10</b>

# 1 Contextualização

Devido à popularização da computação de alto desempenho (HPC), trabalhos recentes têm retomado problemas tradicionais a fim de adequá-los aos novos paradigmas e arquiteturas de computação. De acordo com [Kiss et al. \(2012\)](#) a conformidade entre o problema a ser resolvido e a estrutura do ambiente de execução é capaz de ampliar a performance e reduzir a energia dispendida no processamento. Devido ao aumento da demanda por recursos computacionais, dispositivos que possibilitam a execução paralela acabaram se estabelecendo no mercado da informática. Por meio das arquiteturas *manycore* e *multicore*, é possível se executar paralela ou concorrentemente tanto tarefas corriqueiras como a exibição de vídeos e jogos até cálculos complexos da ciência e da engenharia. Podem ser citados como processadores *multicore* as linhas Core e Xeon da Intel, Opteron e Ryzen da AMD e a linha Power da IBM. Os dispositivos *manycore* por sua vez, têm como principais representantes as unidades de processamento gráfico (GPU) da qual fazem parte as placas GeForce, Quadro e Tesla da NVIDIA e Radeon e FirePro da AMD.

O método dos elementos finitos (FEM) é um método numérico para a resolução de problemas de valor de contorno (PVC) modelados por equações diferenciais e também de problemas associados à minimização de um funcional de energia ([SZABO; BABUŠKA, 2009](#), p. 110). O algoritmo clássico do FEM foi concebido em sua forma sequencial e consiste principalmente na solução de um sistema linear esparso. A tarefa de se resolver tal sistema é geralmente custosa em termos de memória quando adotados métodos diretos como a eliminação gaussiana e computacionalmente custosa quando adotados métodos iterativos como o método de Jacobi. O método dos gradientes conjugados (CG) e suas variantes pertencem à família dos métodos exatos/iterativos do subespaço de Krylov ([ANZT et al., 2016](#)) e tem sido adotados na literatura para a solução paralela de elementos finitos. Alguns trabalhos correlatos que utilizam a família CG são apresentados por [Yao et al. \(2015\)](#), [Ahamed e Magoulès \(2016\)](#) e [Iwashita et al. \(2017\)](#).

A fim de adequar o FEM às arquiteturas modernas será adotado neste trabalho a abordagem elemento a elemento (EbE-FEM) proposta por [Hughes, Levit e Winget \(1983\)](#). Esta técnica baseia-se no fato de que a matriz do sistema de elementos finitos é caracterizada como uma função parcialmente separável, resultado da soma das matrizes elementares ([DAYDE; L'EXCELLENT; GOULD, 1997](#)). Assim sendo, as operações da solução do sistema de elementos finitos podem ser realizadas a nível elementar, sem a necessidade de se montar a matriz global do sistema. Adicionalmente tem-se a vantagem de que elementos não adjacentes podem ser calculados simultaneamente por meio dos métodos CG ([WATHEN, 1989](#)). Esta última característica torna a técnica EbE-FEM propícia para a implementação paralela nas arquiteturas modernas.

## 2 Problema

O problema *benchmark* a ser modelado e resolvido como EbE-FEM refere-se à equação de Laplace originada do cálculo da distribuição de potencial e do campo elétrico de um capacitor de placas paralelas (BOYLESTAD, 2011, Exemplo 10.3).

### 2.1 Método Clássico

#### 2.1.1 Pré-processamento

A equação diferencial originada do PVC será resolvida em sua forma fraca, por meio da aproximação com polinômios lineares (JIN, 2002, p. 32). Em especial, será utilizado o método de Galerkin, cujas funções de base para os espaços de elementos finitos coincidem com as funções de aproximação (JIN, 2002, p. 22). Cada função de base é definida sobre o domínio de um elemento finito, o qual é obtido por meio da discretização do domínio do problema. Para favorecer a precisão dos resultados a discretização será feita na forma de triangulação de Delaunay. Após a geração do sistema de equações serão atribuídas a seus respectivos nós, as condições de contorno de Dirichlet prescritas no enunciado do problema.

#### 2.1.2 Processamento

O sistema de linear obtido na etapa de pré-processamento do método clássico será submetido ao solver do MATLAB® e a algoritmos diretos e iterativos do framework implementado por Barrett et al. (1995) a fim de se realizar uma análise quantitativa dos métodos sequenciais.

### 2.2 Método EbE

#### 2.2.1 Pré-processamento

O pré processamento do método EbE é similar ao do método clássico, exceto pelo fato de que a montagem do sistema global não é necessária. Adicionalmente, as condições de contorno também são atribuídas em nível elementar, utilizando-se um senso de média simples ou ponderada em cada nó, conforme apresentado nos trabalhos de Xu, Yin e Mao (2005) e Yan et al. (2017) respectivamente.

### 2.2.2 Processamento

O processamento elemento a elemento será realizado pelo método dos gradientes conjugados. Será feita uma análise comparativa do uso ou ausência de preconditionadores (Jacobi e Gauss-Seidel), conforme realizado no trabalho de [Yan et al. \(2017\)](#). A implementação EbE será executada sequencialmente e também concorrentemente por meio de as linguagens C++11, Scala e Erlang, de forma similar ao trabalho de [Boehmer et al. \(2012\)](#)

## 2.3 Pós-processamento

Na etapa de pós-processamento os resultados de ambos os métodos serão coletados, tabulados e apresentados graficamente. As métricas gerais para uma análise quantitativa de desempenho serão o tempo de execução, consumo de memória e precisão dos resultados. Para o processamento paralelo também será utilizado o *speedup* como métrica. Diferentes graus de refinamento da malha serão utilizados, de forma a verificar o limite de memória e a relação entre o tempo de processamento e o número de nós.

## 2.4 EbE em GPGPU

A segunda etapa deste trabalho (TCC II) tem como expectativa a implementação do EbE-FEM GPGPU (General Purpose Graphics Processing Unit) utilizando-se as mesmas métricas da programação *multithreading*. Espera-se que seja possível a implementação nas linguagens CUDA (Compute Unified Device Architecture) e OpenCL (Open Computing Language) a fim de uma nova análise quantitativa, conforme apresentado no trabalho de [Ahamed e Magoulès \(2016\)](#).

### 3 Justificativa

A justificativa deste trabalho se baseia na contínua transformação dos paradigmas de programação e arquiteturas de hardware. Como coloca [Guo et al. \(2014\)](#), com aumento de núcleos de processamento, ocorre a redução da razão memória por núcleo, o que impõe uma forte demanda para que os algoritmos utilizem eficientemente todos os níveis de paralelismo disponíveis enquanto minimizam a movimentação de dados. Tal evolução não se limita ao cenários dos *clusters* e *grids* mas alcança inclusive os dispositivos móveis, que atualmente já possuem até oito núcleos. Pensando em um futuro próximo, com os avanços da computação ubíqua que introduz temas como internet das coisas, dispositivos "usáveis", realidade aumentada e realidade virtual, a necessidade de se aproveitar ao máximo todo o poder de processamento disponível se torna ainda mais evidente, uma vez que nessas tecnologias há alta demanda de processamento e/ou pouco espaço físico para comportar um processador adequado. A justificativa para a escolha das linguagens C++11, Scala e Erlang se dá devido à ausência de trabalhos acadêmicos relacionando tais tecnologias e seu desempenho. C/C++ é uma linguagem abrangente, robusta e atual, presente por trás de grande parte das aplicações *desktop* e *mobile*. Scala e Erlang (e/ou Elixir *bytecode*) são linguagens naturalmente concorrentes e que possuem crescente *market share*.

## 4 Objetivos

### 4.1 Objetivos Gerais

- Demonstrar o processo de mudança do paradigma sequencial para uma solução paralela do método do elementos finitos;
- Avaliar quantitativamente, segundo as métricas propostas (tempo de execução, uso de memória, precisão e *speedup*) o desempenho das soluções de um modelo de elementos finitos;
- Apresentar à comunidade resultados acadêmicos experimentais do desempenho das linguagens C++11, Scala e Erlang.

### 4.2 Objetivos Específicos

- Investigar a viabilidade da técnica EbE-FEM como alternativa dos *solvers* iterativos e do solver do MATLAB®;
- Desenvolver um material acessível e de fácil compreensão de introdução ao FEM para o nível da graduação;
- Investigar o quão otimizada é a convergência do EbE a partir do emprego de diferentes preconditionadores;
- Relacionar as métricas e conceitos de estatísticas necessários para a avaliação adequada de performance;
- Comparar conforme as métricas o desempenho das linguagens nativamente concorrentes na resolução do problema benchmark proposto neste trabalho.

## 5 Resultados Esperados

Espera-se com este trabalho iniciar no CEFET-MG campus Timóteo uma nova linha de pesquisa a ser continuada nos trabalhos futuros, voltada para a análise numérica de problemas de valor de contorno da física aplicada. De forma similar, espera-se o incentivo e a adoção por parte da universidade de paradigmas e linguagens emergentes, de forma a diversificar o currículo dos graduandos.



## 6 Cronograma

- **27/07** - Entrega do texto do Referencial teórico e revisão bibliográfica;
- **31/07** - Entrega dos resultados preliminares;
- **03/08** - Entrega do texto para a banca
- **17/08** - Apresentação

# Referências

AHAMED, A.-K. C.; MAGOULÈS, F. Conjugate gradient method with graphics processing unit acceleration: CUDA vs OpenCL. *Advances in Engineering Software*, v. 47, n. 1, p. 164–169, 2016. ISSN 0965-9978. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.advengsoft.2011.12.013>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 5.

ANZT, H. et al. Preconditioned Krylov solvers on GPUs. *Parallel Computing*, Elsevier B.V., v. 0, p. 1–13, 2016. ISSN 01678191. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.parco.2017.05.006>>. Citado na página 3.

BARRETT, R. et al. Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. *Mathematics of Computation*, v. 64, n. 211, p. 1349, 1995. ISSN 00255718. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2153507?origin=crossref>>. Citado na página 4.

BOEHMER, S. et al. Numerical simulation of electrical machines by means of a hybrid parallelisation using MPI and OpenMP for finite-element method. *IET Science, Measurement & Technology*, v. 6, n. 5, p. 339, 2012. ISSN 17518822. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-smt.2011.0126>>. Citado na página 5.

BOYLESTAD, R. L. *Análise de Circuitos*. [S.l.]: Pearson, 2011. ISBN 978-85-64574-20-5. Citado na página 4.

DAYDE, M. J.; L'EXCELLENT, J.-Y.; GOULD, N. I. M. Element-by-Element Preconditioners for Large Partially Separable Optimization Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 18, n. 6, p. 1767–1787, 1997. ISSN 1064-8275. Citado na página 3.

ERLANG Market Share. <<https://w3techs.com/technologies/details/pl-erlang/all/all>>. Acesso em: 19/07/2017. Nenhuma citação no texto.

GUO, X. et al. Developing a scalable hybrid MPI/OpenMP unstructured finite element model. *Computers and Fluids*, Elsevier Ltd, v. 110, p. 227–234, 2014. ISSN 00457930. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.09.007>>. Citado na página 6.

HUGHES, T.; LEVIT, I.; WINGET, J. Element-by-element implicit algorithms for heat conduction. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 109, n. 2, p. 576–585, 1983. ISSN 07339399. Citado na página 3.

IWASHITA, T. et al. Software framework for parallel BEM analyses with H-matrices. *IEEE CEFC 2016 - 17th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation*, Elsevier B.V., v. 108, n. June, p. 2200–2209, 2017. ISSN 18770509. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.procs.2017.05.263>>. Citado na página 3.

JIN, J. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. [S.l.]: John Wiley & sons, 2002. ISBN 0471438189. Citado na página 4.

KISS, I. et al. High locality and increased intra-node parallelism for solving finite element models on GPUs by novel element-by-element implementation. In: *2012 IEEE Conference on High Performance Extreme Computing, HPEC 2012*. [S.l.: s.n.], 2012. ISBN 9781467315760. Citado na página 3.

PROCESSADOR Power9 da IBM. <<http://www.ibmssystemsmag.com/power/businessstrategy/competitiveadvantage/POWER9-Plans/>>. Acesso em: 19/07/2017. Nenhuma citação no texto.

PROCESSADORES Intel. <<https://www.intel.com/content/www/us/en/products/processors.html>>. Acesso em: 19/07/2017. Nenhuma citação no texto.

PRODUTOS AMD. <<http://www.amd.com/pt-br/products>>. Acesso em: 19/07/2017. Nenhuma citação no texto.

PRODUTOS NVIDIA. <<http://www.nvidia.com.br/page/products.html>>. Acesso em: 19/07/2017. Nenhuma citação no texto.

SCALA Market Share. <<https://w3techs.com/technologies/details/pl-scala/all/all>>. Acesso em: 19/07/2017. Nenhuma citação no texto.

SZABO, B.; BABUŠKA, I. *An Introduction to Finite Element Analysis - Ch4 Generalized Formulations*. [S.l.: s.n.], 2009. 109–144 p. ISBN 9780470977286. Citado na página 3.

WATHEN, A. J. An analysis of some element-by-element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 74, n. 3, p. 271–287, 1989. ISSN 00457825. Citado na página 3.

XU, J.; YIN, W. Y.; MAO, J. Capacitance extraction of high-density 3D interconnects using finite element method. *Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings, APMC*, v. 2, p. 3–5, 2005. Citado na página 4.

YAN, X. et al. Research on Preconditioned Conjugate Gradient Method Based on EBE-FEM and the Application in Electromagnetic Field Analysis. v. 53, n. 6, 2017. Disponível em: <[http://www.ieee.org/publications{\\\_}standards/publications/rights/index.h](http://www.ieee.org/publications{\_}standards/publications/rights/index.h)>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.

YAO, L. et al. Parallel implementation and performance comparison of BiCGStab for massive sparse linear system of equations on GPU libraries. *Proceedings - 2015 IEEE 12th International Conference on Ubiquitous Intelligence and Computing, 2015 IEEE 12th International Conference on Advanced and Trusted Computing, 2015 IEEE 15th International Conference on Scalable Computing and Communications, 20*, p. 603–608, 2015. Citado na página 3.