태희 : 2019학년도 수능 관련

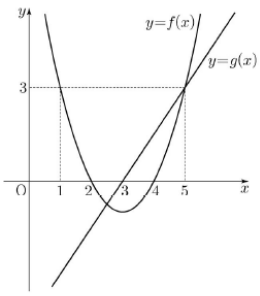
2018년 11월 19일

문제 1) 가형 14번

14. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

주어진 부등식을 간단히 하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$$

$$\iff f(x)g(x) \leq 3g(x)$$

$$\iff g(x)\big(f(x)-3\big) \leq 0$$

$$\iff \Big[\big(g(x)\geq 0\big) \wedge \big(f(x)\leq 3\big)\Big] \vee \Big[\big(g(x)\leq 0\big) \wedge \big(f(x)\geq 3\big)\Big]$$

$$\iff \Big[\big(x\geq 3\big) \wedge \big(1\leq x\leq 5\big)\Big] \vee \Big[\boxed{\quad\quad} \wedge \boxed{\quad\quad\quad\quad}\Big]$$

$$\iff \Big[1\leq x\leq 5\Big] \vee \Big[\boxed{\quad\quad\quad}\Big]$$

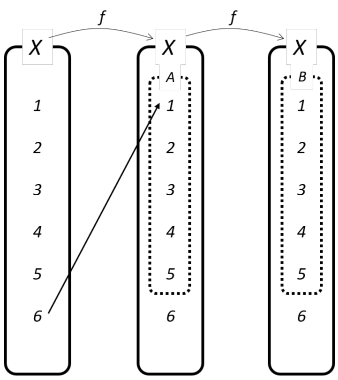
문제 2) 가형 17번(나형 19번)

17. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 함수 $f: X \to X$에 대하여 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> 함수 f와 함수 $f \circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
> $n(A)=6$이면 함수 f는 일대일 대응이고, 함수 $f \circ f$도 일대일 대응이므로 $n(B)=6$이다.
> 또한 $n(A) \le 4$이면 $B \subset A$이므로 $n(B) \le 4$이다.
> 그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.
>
> (i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.
> $n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (iii) (i)에서 선택한 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k) \in A$이며 $A=B$이므로
> $A=\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)\}$ ⋯ (*)
> 이다. (*)을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
> $\boxed{(가)} \times \boxed{(나)} \times \boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 131 ② 136 ③ 141 ④ 146 ⑤ 151



(가) : X의 부분집합 중에서 원소의 개수가 5개인 것은

$$\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\},$$
$$\{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}$$

의 6가지이다. 이것은 ${}_6C_5$를 계산하여 구할 수도 있다.

(나) : 일반성을 잃지 않고 $A=\{1,2,3,4,5\}$라고 가정하자. 따라서 $k=6$이다. 이때, $f(6)$의 값으로 가능한 것은

$$f(6)=1, \quad f(6)=2, \quad f(6)=3,$$
$$f(6)=4, \quad f(6)=5$$

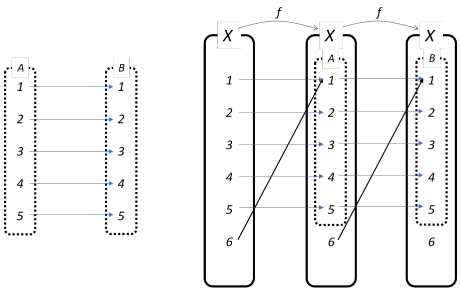
의 5가지이다.

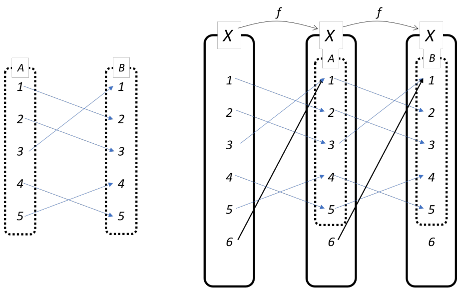
(다) : 일반성을 잃지 않고 $f(6)=1$이라고 가정하자. 이제 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 정하면 함수는 완성된다. 이 값들은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 결국 $A=\{1,2,3,4,5\}$에서 $B(=A)$로 가는 함수 $g: A \to B$를 생각하면 된다.

만약 g가 일대일 대응이 아니면 g의 치역은 B의 진부분집합이다. 따라서 $f \circ f$의 치역도 B가 아니게 된다. 만약 g가 일대일 대응이면 $f \circ f$의 치역이 B가 된다. 따라서 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

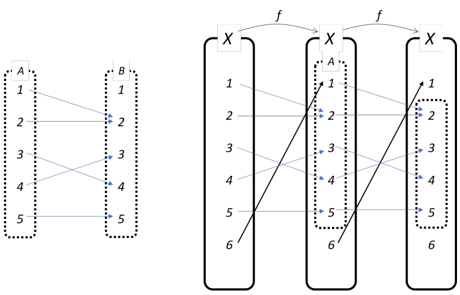
A에서 B로 가는 일대일 대응 g의 개수는 ${}_{\square}P_{\square} = \square! = \boxed{}$가지이다.

$g : A \to B$가 일대일 대응이면 그로부터 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f를 만들 수 있다.

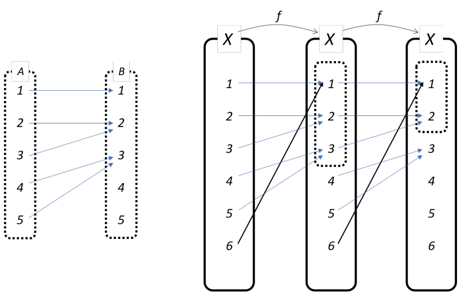




하지만 $g : A \to B$가 일대일 대응이 아닌 경우, f를 만들더라도 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 5보다 적다.



$f \circ f$의 치역 $= \{2, 3, 4, 5\}$



$f \circ f$의 치역 $= \{1, 2\}$

문제 3) 나형 14번

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

$5\log_n 2 = k$ 라고 두면

$$\log_n 2^5 = k$$

이므로

$$n^k = 2^5$$

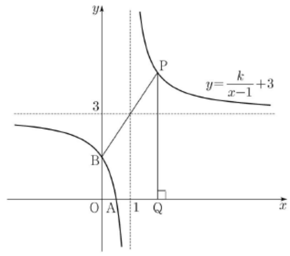
이고

$$n = 2^{\frac{5}{k}}$$

이다 (단, n, k는 자연수이고 $n \geq 2$). $2^{\frac{5}{k}}$ 의 값이 자연수이려면 k는 $\square$이거나 $\square$일 수밖에 없다. 이때 n의 값은 각각 $\square$이거나 $\square$이다.

문제 4) 나형 20번

20. 그림과 같이 함수 $y=\frac{k}{x-1}+3\ (0<k<3)$의 그래프와 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자.



이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(2, 4)$이다.

ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 직선 AB의 기울기와 직선 AP의 기울기의 합은 0이다.

ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수일 때, 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ : 이 유리함수의 그래프는 점 $(1,3)$에 대하여 대칭이다. 따라서 B와 P는 점 $(1,3)$에 대하여 대칭이다.

$k=1$일 때, 이 함수의 그래프에서 y절편은 $x=0$을 대입하여 얻어진다 ;

$$y=\frac{1}{0-1}+3=2$$

그러므로 $B=(0,2)$이다. $B(0,2)$와 $P(m,n)$의 중점이 $(1,3)$이므로

$$\frac{0+m}{2}=1,\quad \frac{2+n}{2}=3$$

$m=2$, $n=4$이고 $P=(2,4)$이다.

ㄴ : 일반적인 k에 대하여 각 점들의 좌표를 구해보자. x절편을 구하면

$$0=\frac{k}{x-1}+3$$

$$x=1-\frac{k}{3}$$

이므로 $A=(1-\frac{k}{3},0)$. y절편을 구하면

$$y=\frac{k}{0-1}+3=-k+3$$

이므로 $B=(0,-k+3)$. $P=(m,n)$으로 두면

$$\frac{0+m}{2}=1,\quad \frac{-k+3+n}{2}=3$$

따라서 $m=\boxed{\quad}$, $n=\boxed{\quad\quad}$이고 $P=(\boxed{\quad},\boxed{\quad\quad})$이다.

ㄷ. $\square PBAQ=\square PBOQ-\triangle OAB$이고 이때 $\square PBOQ=6$이고

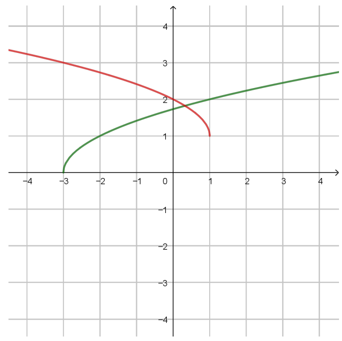
$$\begin{aligned}\triangle OAB&=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{k}{3}\right)\times(-k+3)\\&=\frac{1}{6}(-k+3)^2\end{aligned}$$

이다. 이때 $\triangle OAB<3$이므로 $\triangle OAB=1$이거나 $\triangle OAB=2$이다. 따라서 $k=\boxed{\quad\quad}$이거나 $k=\boxed{\quad\quad}$이며, $0<k<3$임을 고려하면 가능한 k의 값은 $k=\boxed{\quad\quad}$이다.

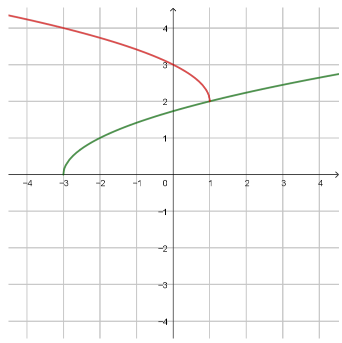
문제 5) 나형 26번

26. 함수 $y=\sqrt{x+3}$ 의 그래프와 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

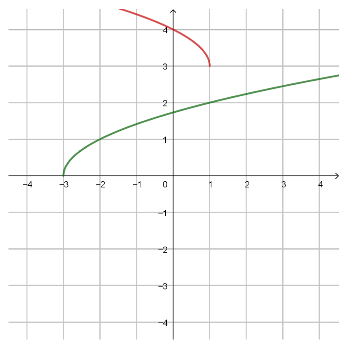
$y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 꼭짓점이 $(-3,0)$이고 오른쪽 위로 뻗는 그래프이다. $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프는 꼭짓점이 $(1,k)$이고 왼쪽 위로 뻗는 그래프이다. k의 값을 변화해가며 생각해보면 $k \le \square$이다.



$k=1$



$k=2$



$k=3$