동락 : 01 선형대수 (1,1) #18

July 31, 2015

(1,3) #18, p 11

It is possible for a system of linear equations to have exactly two solutions.

Explain why

(a) If (x, y, z) and (X, Y, Z) are two solutions, what is another one?

(b) If 25 planes meet at two points, where else do they meet?

(1) 연립방정식

$$a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w = b_1 \tag{1}$$

$$a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w = b_2 \tag{2}$$

$$a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w = b_3 \tag{3}$$

의 해가 (x, y, z) 와 (X, Y, Z) 이면

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \tag{4}$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \tag{5}$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \tag{6}$$

이고,

$$a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = b_1 \tag{7}$$

$$a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = b_2 \tag{8}$$

$$a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z = b_3 \tag{9}$$

가 성립한다. [(4)+(7)]/2, [(5)+(8)]/2, [(6)+(9)]/2를 각각 하면

$$a_{11}\frac{x+X}{2}+a_{12}\frac{y+Y}{2}+a_{13}\frac{z+Z}{2}=b_1 \tag{10}$$
$$a_{21}\frac{x+X}{2}+a_{22}\frac{y+Y}{2}+a_{23}\frac{z+Z}{2}=b_2 \tag{11}$$
$$a_{31}\frac{x+X}{2}+a_{32}\frac{y+Y}{2}+a_{33}\frac{z+Z}{2}=b_3 \tag{12}$$

이므로 $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}, \frac{z+Z}{2}\right)$ 도 근이다.

일반적으로, (x, y, z) 와 (X, Y, Z) 가 이루는 직선 위의 점인 $\lambda(x, y, z) + (1 - \lambda)(X, Y, Z)$ 도 근이다.

$\lambda \times (4) + (1-\lambda) \times (7)$:

$$a_{11}[\lambda x + (1-\lambda)X] + a_{12}[\lambda y + (1-\lambda)Y] + a_{13}[\lambda z + (1-\lambda)Z] = b_1$$

$\lambda \times (5) + (1-\lambda) \times (8)$:

$$a_{11}[\lambda x + (1-\lambda)X] + a_{12}[\lambda y + (1-\lambda)Y] + a_{13}[\lambda z + (1-\lambda)Z] = b_1$$

$\lambda \times (6) + (1-\lambda) \times (9)$:

$$a_{11}[\lambda x + (1-\lambda)X] + a_{12}[\lambda y + (1-\lambda)Y] + a_{13}[\lambda z + (1-\lambda)Z] = b_1$$

이기 때문이다.

(2) 식이 25개이고 미지수도 25개인 경우를 포함해서 식이 n 개이고 미지수도 n 개인 경우도 마찬가지의 방법을 쓸 수 있다. 벡터 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 와 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 이 n 원 일차 연립방정식의 근이면 $\lambda u + (1-\lambda)v$ 도 근이다.

”Linear Algebra”, Gilbert Strang, 4ed, 2006.
- 1장 3절 #18, p 11