미적분 1 : 03 함수의 극한

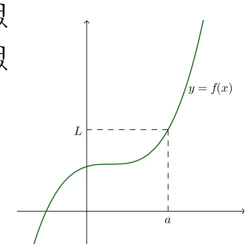
2022년 2월 25일

차 례

1 함수의 극한

정의 1) $x \to a$일 때의 함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x의 값이 $x \neq a$을 만족시키면서 한없이 a에 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면



x가 a에 가까워질 때, $f(x)$는 L에 수렴한다.

라고 말하고 기호로

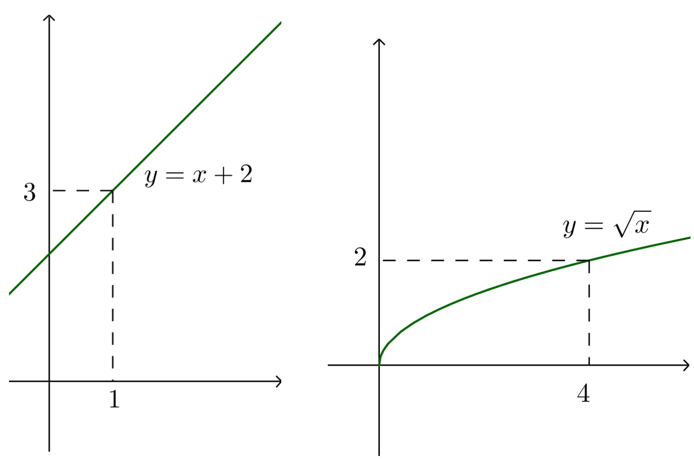
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타낸다. 이때 L을 $f(x)$의 극한값이라고 부른다.

예시 2)

$f(x) = x + 2$이면 함수의 그래프는 아래 왼쪽 그림과 같다. 따라서 x가 1에 한없이 가까워질수록 $f(x)$는 3에 가까워진다.

$$\lim_{x \to 1} (x + 2) = 3$$



예시 3)

$f(x) = \sqrt{x}$이면 함수의 그래프는 위의 오른쪽 그림과 같다. 따라서 x가 4에 한없이 가까워질수록 $f(x)$는 2에 가까워진다.

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

예시 5)

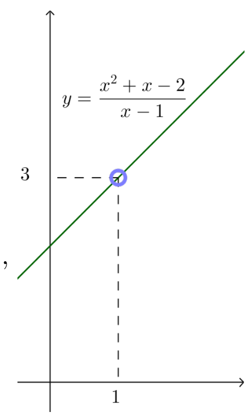
$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$이면, $x \neq 1$일 때

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x + 2$$

이다. 따라서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때, 함숫값 $f(1)$은 존재하지 않지만 극한값

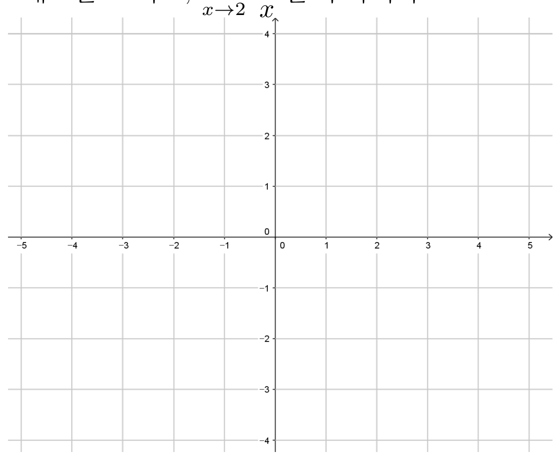
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$$

은 존재한다.



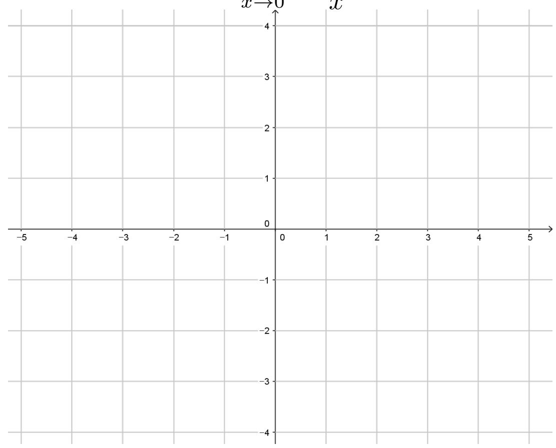
문제 6)

(1) $y = \frac{4}{x}$의 그래프를 그리고, $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x}$ 를 구하여라.



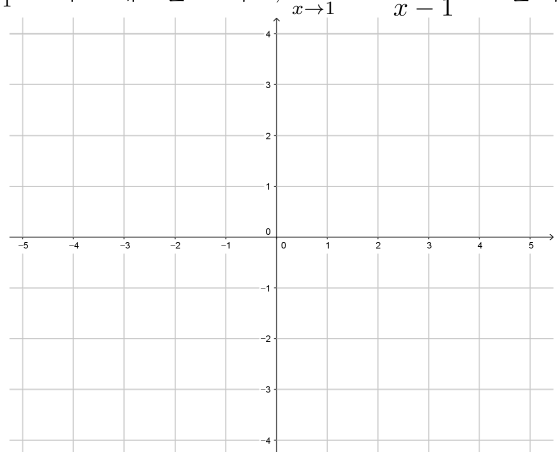
답 : $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x} = \square$.

(2) $y = \frac{x^2+2x}{x}$의 그래프를 그리고, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2+2x}{x}$를 구하여라.



답 : $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2+2x}{x} = \square$.

(3) $y = \frac{x^3-5x^2+4x}{x-1}$의 그래프를 그리고, $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-5x^2+4x}{x-1}$를 구하여라.



답 : $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-5x^2+4x}{x-1} = \square$.

정의 6) $x \to \pm\infty$일 때의 함수의 수렴

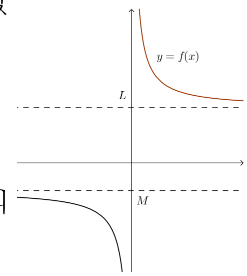
함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

로 나타낸다. 또, x의 값이 한없이 작아질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

로 나타낸다.

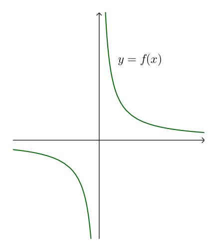


예시 7)

$f(x) = \frac{1}{x}$이면 함수의 그래프는 아래 그림과 같다. 따라서

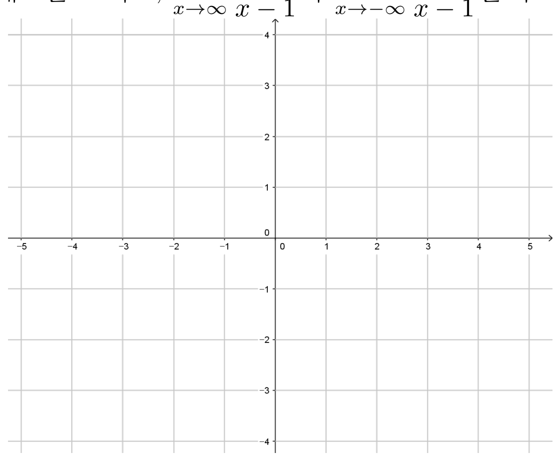
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



문제 8)

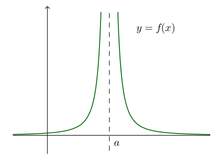
$y = \frac{x}{x-1}$의 그래프를 그리고, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1}$와 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x-1}$를 구하여라.



답 : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1} = \square$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x-1} = \square$.

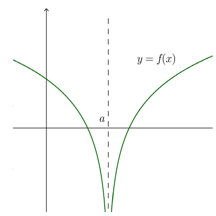
정의 9) $x \to a$일 때의 함수의 발산

함수 $f(x)$에서 x의 값이 $x \neq a$을 만족시키면서 한없이 a에 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면



$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

로 나타낸다. 또 x의 값이 한없이 a에 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 작아지면

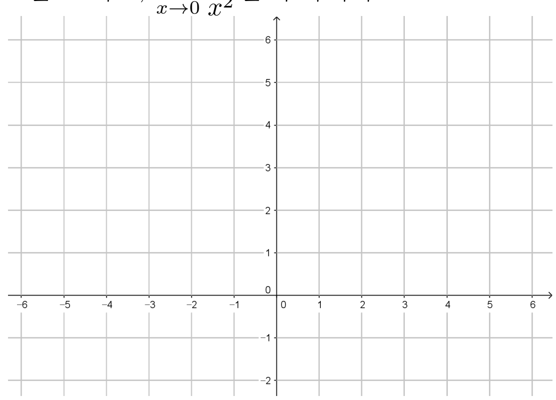


$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

로 나타낸다.

문제 10)

$y = \frac{1}{x^2}$의 그래프를 그리고, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$를 구하여라.



답 : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \square$.

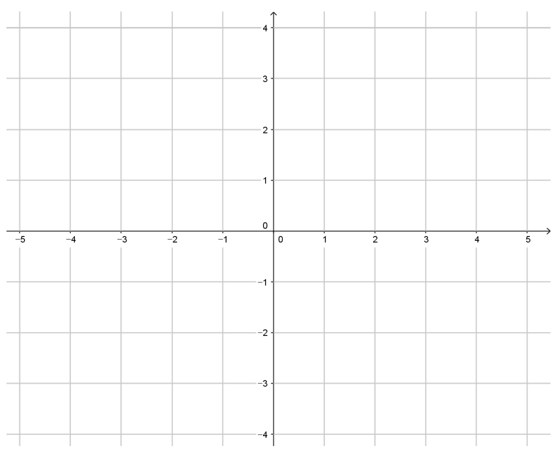
정의 11) $x \to \pm\infty$**일 때의 함수의 발산**

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 작아질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지거나 작아지면 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

문제 12)

$y = -\frac{1}{2}x + 1$의 그래프를 그리고, $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$와 $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$를 구하여라.



답 : $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = \square$, $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = \square$.

문제 13)

(1) $\lim_{x\to\infty} x^2 =$

(2) $\lim_{x\to-\infty} x^2 =$

2 좌극한과 우극한

정의 14) 좌극한과 우극한

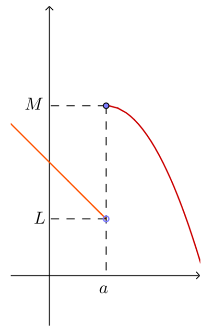
함수 $f(x)$에서 x의 값이 $x < a$를 만족시키면서 한없이 a에 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L$$

로 나타낸다. 또, x의 값이 $x > a$를 만족시키면서 한없이 a에 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 가까워지면

$$\lim_{x\to a+} f(x) = M$$

이때 L과 M을 각각 좌극한, 우극한이라고 부른다.



예시 15)

함수 $f(x)$가

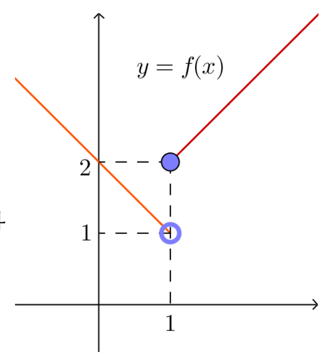
$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & (x<1) \\ x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

와 같이 주어지면 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때,

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$$

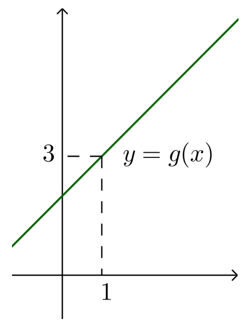
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$$

이다.



예시 16)

$g(x) = x + 2$이면 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때,

$$\lim_{x \to 1-} g(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 1+} g(x) = 3$$

이다.

예시 15의 경우 함수 $f(x)$는

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$$

이다. 한편, $\lim_{x \to 1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

예시 16의 경우 함수 $g(x)$는

$$\lim_{x \to 1-} g(x) = 3, \quad \lim_{x \to 1+} g(x) = 3$$

이다. 또한 $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$ 이다.

정리 17) 극한값이 존재하기 위한 조건

함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하기 위한 조건은

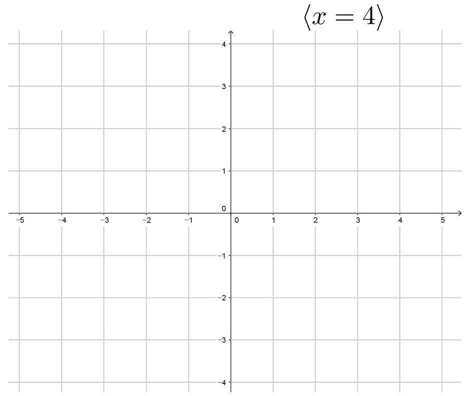
$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$$

이다.

문제 18)

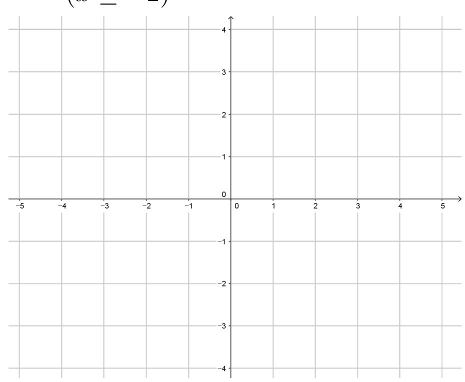
다음 함수들의 그래프를 그리고 주어진 점$\langle x = a \rangle$에서의 좌극한값, 우극한값, 극한값을 각각 구하여라. (극한값이 존재하지 않는 경우 ×로 표시하시오.)

(1) $f(x) = \sqrt{x}$, $\langle x = 4 \rangle$



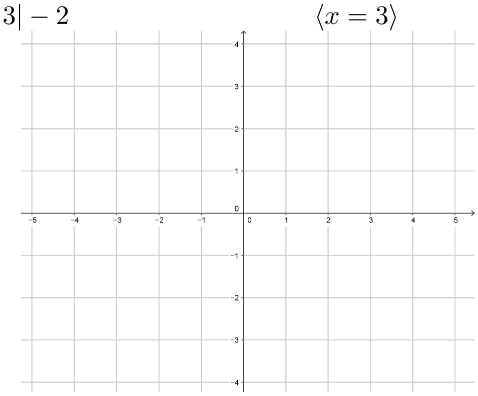
답 : $\lim_{x \to 4-} f(x) = \square$, $\lim_{x \to 4+} f(x) = \square$, $\lim_{x \to 4} f(x) = \square$.

(2) $g(x) = \begin{cases} -x-3 & (x < -2) \\ 2 & (x \geq -2) \end{cases}$ $\langle x = -2 \rangle$



답 : $\lim_{x \to -2-} g(x) = \square$, $\lim_{x \to -2+} g(x) = \square$, $\lim_{x \to -2} g(x) = \square$.

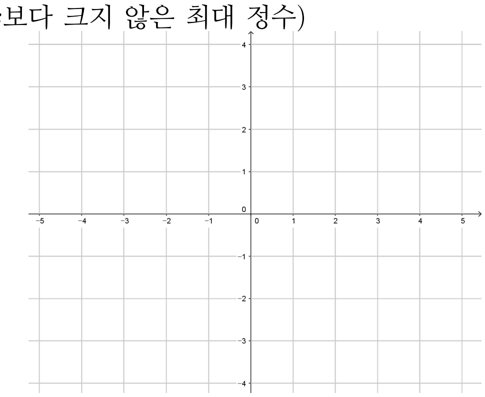
(3) $h(x) = |x-3| - 2$ $\langle x = 3 \rangle$



답 : $\lim_{x \to 3-} h(x) = \square$, $\lim_{x \to 3+} h(x) = \square$, $\lim_{x \to 3} h(x) = \square$.

(4) $k(x) = [x]$ $\langle x = 0 \rangle$

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)



답 : $\lim_{x \to 0-} k(x) = \square$, $\lim_{x \to 0+} k(x) = \square$, $\lim_{x \to 0} k(x) = \square$.

3 함수의 극한에 대한 성질

정리 19) 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 모두 존재할 때, 다음이 성립한다.

(a) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$

(b) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(c) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

(d) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

위의 성질은 $x \to a$를 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$로 바꾸어도 여전히 성립한다.

예시 20)

(1) $\lim_{x\to 2}(x^2 - 2x) = \lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 2x = \lim_{x\to 2} x^2 - 2\lim_{x\to 2} x = 4 - 2\times 2 = 0$

(2) $\lim_{x\to 2+} ([x] + |x-2|) = \lim_{x\to 2+} [x] + \lim_{x\to 2+} |x-2| = 2 + 0 = 2$

(3) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)\left(-\dfrac{3}{x} + 1\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2\right) \lim_{x\to\infty} \left(-\dfrac{3}{x} + 1\right) = 2\times 1 = 2$

(4) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{\lim_{x\to 2} x^2}{\lim_{x\to 2} x + 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

문제 21)

다음 극한값들을 계산하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2x+1}{x}\right)$

(2) $\lim_{x\to 1-}(x-[x])$

(3) $\lim_{x\to 4} 3x\sqrt{x}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$

문제 22)

$\lim_{x\to a} f(x) = 2$와 $\lim_{x\to a} g(x) = -5$일 때, 다음 값들을 계산하시오.

(1) $\lim_{x\to a} 5f(x)$

(2) $\lim_{x\to a}\{3+2g(x)\}$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$

(4) $\lim_{x\to a}\{3f(x)+4g(x)\}$

4 함수의 극한값과 대소관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x) \le g(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

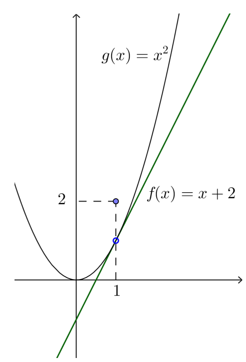
가 성립한다. 하지만,

$$f(x) < g(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$$

가 성립하지는 않는다.

예를 들어,

$$f(x) = 2x - 1, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \ne 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$



이면 $f(x) < g(x)$이지만,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x)$$

이다.

대신

$$f(x) < g(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

는 성립한다. 위의 성질도 마찬가지로 $x \to a$를 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$로 바꾸어도 여전히 성립한다.

예시 23)

함수 $f(x)$가 $x > 0$인 모든 실수 x에 대해

$$4 - x \le f(x) \le \frac{4}{x}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2} f(x)$를 구하여라.

$4 - x \le f(x) \le \frac{4}{x}$이므로

$$\lim_{x\to 2}(4-x) \le \lim_{x\to 2} f(x) \le \lim_{x\to 2} \frac{4}{x}$$

$$2 \le \lim_{x\to 2} f(x) \le 2$$

따라서

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

문제 24)

함수 $f(x)$가 $x \ne 1$, $x \ne 3$인 모든 실수 x에 대해

$$\frac{3x-4}{x-3} < f(x) < \frac{6x+3}{2x-2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} f(x)$를 구하여라.

답 : (**)**

답

문제 5)

(1) 2

(2) 2

(3) -3

문제 8)

1, 1

문제 10)

∞

문제 12)

$-\infty$, ∞

문제 13)

∞, ∞

문제 18)

(1) 2, 2, 2

(2) -1, 2, $\times$

(3) -2, -2, -2

(4) -1, 0, $\times$

문제 21)

(1) 2

(2) 1

(3) 24

(4) 3

문제 22)

(1) 10

(2) -7

(3) -3

(4) -14

문제 24)

3