동락 03 - Chapter 1 문제들

2015년 9월 28일

문제 1) (1,2) #3 참조

Describe the intersection of the three planes $u+v+w+z=3$, $u+v=2$, $v+w=1$ (all in four-dimensional space). Is it a line or a point or an empty set? What is the intersection if the fourth plane $w=-1$ is included? Find a fourth equation that leaves us with no solution.

문제 2) (1,2) #3 참조

Describe the intersection of the three planes $u+2v+3w+4z=10$, $2u+3w=5$, $u-2v-4z=-5$ (all in four-dimensional space). Is it a line or a point or an empty set? What is the intersection if the fourth plane $w=4$ is included? Find a fourth equation that leaves us with no solution.

문제 3) (1,2) #3 참조

Describe the intersection of the three planes $u+v+w=1$, $u+v+z=2$, $u+w+z=3$ (all in four-dimensional space). Is it a line or a point or an empty set? What is the intersection if the fourth plane $v+w+z=4$ is included? Find a fourth equation that leaves us with no solution.

문제 4) (1,2) #11 참조

Describe the column picture for the system

$$\begin{aligned} u+ \quad\quad\quad w &= b_1 \\ 3u+2v+\ w &= b_2 \\ -u+\ v-2w &= b_3 \end{aligned}$$

Show that the three columns on the left lie in the same plane by expressing the third column as a combination of the first two. What all the solutions (u,v,w) if b is the zero vector $(0,0,0)$?

문제 5) (1,2) #8 참조

For which number a does elimination break down (a) permanently, and (b) temporarily?

$$\begin{aligned} ax-5y &= -10 \\ x+2y &= \ \ 5 \end{aligned}$$

문제 6) (1,3) #25 참조

Solve the system and find the pivots when

$$\begin{aligned} -3u + 2v \qquad\qquad &= 0 \\ u - 3v + 2w \qquad &= 0 \\ v - 3w + 2z &= 0 \\ w - 3z &= -31 \end{aligned}$$

You may carry the right-hand side as a fifth column (and omit writing u, v, w, z until the solution at the end).

문제 7) (1,3) #30 참조

For which three numbers a will elimination fail to give three pivots?

$$\begin{aligned} ax + 3y + 4z &= b_1 \\ ax + ay + z &= b_2 \\ ax + ay + az &= b_3 \end{aligned}$$

문제 8) (1,3) #30 참조

For which three numbers a will elimination fail to give three pivots?

$$\begin{aligned} ax + ay + az &= b_1 \\ ax + ay + 2z &= b_2 \\ ax + 3y + 1z &= b_3 \end{aligned}$$

문제 9) (1,3) #30 참조

For which three numbers a will elimination fail to give three pivots?

$$\begin{aligned} ax + 2y + z &= b_1 \\ 2ax + ay + 4z &= b_2 \\ 4ax + 2ay + 3az &= b_3 \end{aligned}$$

문제 10) (1,3) #32 참조

Use elimination to solve

$$\begin{aligned} 2u + \ \ v + \ \ 3w &= 1 \\ 2u + 6v + \ \ 8w &= 3 \\ 6u + 8v + 18w &= 5 \end{aligned}$$

답 : $(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, 0)$

문제 11) (1,3) #32 참조

Use elimination to solve

$$\begin{aligned} 2v + \ \ w &= -8 \\ u - 2v - 3w &= \ \ 0 \\ -u + \ \ v + 2w &= \ \ 3 \end{aligned}$$

답 : $(-4, -5, 2)$

문제 12) (1,3), # 32 참조

Use elimination to solve

$$\begin{aligned} u \qquad + 2w &= 3 \\ 4u + v + 3w &= 4 \\ 3u + v + \ \ w &= 5 \end{aligned}$$

답 : 해가없다.

문제 13) (1,3), # 32 참조

Use elimination to solve

$$\begin{aligned} u + \ \ v + \ \ w &= 0 \\ u - 2v + 2w &= 4 \\ v - 2w &= 2 \end{aligned}$$

답 : $(4, -2, -2)$

문제 14) (1,3), # 32 참조

Use elimination to solve

$$
\begin{aligned}
2u + 4v + w &= 1 \\
u + 2v + 2w &= 0 \\
3w &= -1
\end{aligned}
$$

답 : 해가 무한히 많다.

문제 15) (1,3), # 32 참조

Use elimination to solve

$$
\begin{aligned}
u - 2v + 3w &= 1 \\
-2u - 4v + 5w &= -4 \\
3u + 5v - 6w &= 6
\end{aligned}
$$

답 : $(1, 3, 2)$

문제 16) (1,3), # 32 참조

Use elimination to solve

$$
\begin{aligned}
v - 2w &= -8 \\
-u + 3w &= 11 \\
2u - 3v &= 2
\end{aligned}
$$

답 : $(-2, -2, 3)$

문제 17) (1,3), # 32 참조

Use elimination to solve

$$
\begin{aligned}
u + 3v + 2w &= 3 \\
3u - 2v + w &= 4 \\
5u - 7v &= 5
\end{aligned}
$$

답 : 해가 무한히 많다.

문제 18) (1,4) 참조

피보나치 수열 $\{x_n\}$은 다음과 같이 정의된다.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots$$

(1)

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

를 이용하여 피보나치 수열의 점화식을 간단히 하시오.

(2)

$$X_n = A^{n-1}X_1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

이 성립함을 확인하시오.

문제 19) (1,4) 참조

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

일 때, $AB = BA$ 인 이차 정사각행렬 A 를 모두 구하시오.

문제 20) (1,4) 참조

다음 조건을 만족하는 이차 정사각행렬 A 를 모두 구하시오.

(1) $A^2 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ $(x, y > 0)$

(2) $A^2 = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$ $(x > 0)$

문제 21) (1,4) 참조

대각행렬은 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$ 인 행렬 $A = [a_{ij}]$ 를 말한다. 또 위삼각행렬은 $a_{ij} = 0 (i > j)$ 인 행렬 $A = [a_{ij}]$ 를 말한다. A, B 는 모두 정사각행렬일 때, 다음 명제의 참/거짓을 판별하시오.

(1) B 가 대각행렬이면 AB 도 대각행렬이다.

(2) AB 가 대각행렬이면 A 혹은 B 가 대각행렬이다.

(3) A 와 B 가 모두 위삼각 행렬이면 AB 도 위삼각행렬이다.

(4) AB 가 위삼각행렬이면 A 혹은 B 가 위삼각행렬이다.

(5) A 의 열들이 일차독립이면 AB 의 열들도 일차독립이다.

문제 22) (1,4) 참조

각각의 B 와 M 에 대해 $B = AM$ 이 성립할 때, A 를 구하시오.

(1)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

문제 23) (1,5) 참조

정사각행렬 A를 $A = LU$ 꼴로 분해하시오.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

문제 24) (1,5) 참조

정사각행렬이 아닌 다음 행렬 A를 $A = LU$ 꼴로 분해하시오.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

문제 25) (1,5) 참조

다음 행렬 A에 대해 $PA = LU$를 만족하는 P, L, U를 구하시오.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

문제 26) (1,5) 참조

다음 명제의 참/거짓을 판별하시오.

$L = [l_{ij}]_{n\times n}$ 이 아래삼각(=lower triangular) 이고 $i = j$ 이면 $l_{ij} \neq 0$ 일 때 L 이 가역행렬이며 L^{-1} 도 아래삼각이다.

문제 27) (1,6) 참조

다음 행렬들 중 가역행렬인 것을 고르시오.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -5 & 13 & 1 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 4 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

문제 28) (1,6) 참조

다음 가역행렬들의 역행렬을 구하시오.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(5)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(6)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

문제 29) (1,6) 참조

다음 가역행렬들의 역행렬을 구하시오.

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

문제 30) (1,6), #11 참조

대칭행렬 (symmetric matrix) 은 $A^T = A$ 인 행렬을 말한다. 교대대칭행렬 (skew-symmetric matrix) 은 $A^T = -A$ 인 행렬을 말한다. 이때, 다음 명제들의 참/거짓을 판별하시오

(1) A, B 가 대칭행렬이면 AB 도 대칭행렬이다.

(2) A, B 가 대칭행렬이면 $A + B$ 도 대칭행렬이다.

(3) A, B 가 교대대칭행렬이면 AB 도 대칭행렬이다.

(4) A, B 가 교대대칭행렬이면 $A + B$ 도 대칭행렬이다.

(5) A, B 가 대칭행렬이면 $AB = BA$ 이다.

(6) $A=[a_{ij}]$가 대칭행렬이면 $a_{ii}=a_{jj}$ 이다.(대각 성분들이 일정한 값을 가진다.)

(7) $A=[a_{ij}]$가 교대대칭행렬이면 $a_{ii}=a_{jj}$ 이다.

(8) $AA^T=\mathbf{0}$ 이면 $A=\mathbf{0}$ 이다.

(9) A가 대칭행렬이면 A^k 도 대칭행렬이다.(k는 자연수)

(10) A가 대칭행렬이고, A^{-1} 이 존재하면 A^{-1} 도 대칭행렬이다.

(11) A가 교대대칭행렬이고, A^{-1} 이 존재하면 A^{-1} 도 교대대칭행렬이다.

(12) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 이고 $a_{ik}=a_{ij}+a_{jk}$ 이면 A는 교대대칭행렬이다.

문제 31) (1,6) #11 참조

A가 정사각행렬이고 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 일 때 다음 물음에 답하시오.

(1) $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ 이고 $b_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$ 일 때 B는 무슨 행렬인가?

(2) $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ 이고 $b_{ij}=a_{ij}-a_{ji}$ 일 때 B는 무슨 행렬인가?

(각각의 경우에 B는 대칭행렬이거나 교대대칭행렬이다.)