수학 : 02 이차방정식

2018년 8월 28일

차 례

차 례 1
1 복소수 2
1.1 허수와 복소수 2
1.2 복소수의 연산 6
1.3 제곱근과 루트 9
2 일차방정식 10
2.1 방정식 10
2.2 $ax + b = 0$의 풀이 12
3 이차방정식 13
3.1 $x^2 = k$의 풀이 13
3.2 $ax^2 + bx + c = 0$의 풀이 14
3.3 판별식 20
3.4 근과 계수와의 관계 22
4 이차함수와 이차방정식 24
4.1 이차함수의 그래프 24
4.2 그래프의 위치관계 27
*** 답 29**

1 복소수

1.1 허수와 복소수

예시 1)

(1) 이차방정식 $x^2 = 4$의 근은 $x = 2$, $x = -2$이다.

(2) 이차방정식 $x^2 = 0$의 근은 $x = 0$이다.

(3) 이차방정식 $x^2 = -1$의 근은 실수 중에서는 없다. x가 실수이면 $x^2 \geq 0$이기 때문이다. 이런 형식의 이차방정식의 근을 이야기하기 위해 실수가 아닌 새로운 수 i를 도입한다.

정의 2)
제곱해서 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 기호 i로 나타낸다. 즉

$$i^2 = -1$$

이다.

따라서 i는 방정식 $x^2 = -1$의 근이 된다. 한편 $-i$도 $(-i)^2 = i^2 = -1$로 계산한다고 생각하여, $-i$도 근이 된다. 즉 이차방정식 $x^2 = -1$의 근은 $\pm i$이다.

예시 3)

(1) 이차방정식 $x^2 = -4$을 변형하면

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -1$$

이다. 따라서 $\frac{x}{2} = \pm i$이고 $x = \pm 2i$이다.

(2) 이차방정식 $x^2 - 2x + 2 = 0$을 변형하면

$$(x-1)^2 = -1$$

이다. 따라서 $x - 1 = \pm i$이고 $x = 1 \pm i$이다.

문제 4) 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2 = -3$

(2) $4x^2 = -1$

(3) $x^2 + 6x + 10 = 0$

예시 3의 (2)와 문제 4의 (3)에서의 답처럼 $a + bi$형식의 수를 **복소수**라고 한다.

> **정의 5) 복소수**
> a, b가 실수일 때, $a + bi$로 표현되는 수를 **복소수**라고 한다. 이때 a를 실수부분, b를 허수부분이라고 한다.

예시 6) $z = a + bi$라고 할 때,

(1) $b = 0$이면 $z = a$이 되어 z는 실수이다.

(2) $b \neq 0$이면 z는 실수가 아니다. 이처럼 실수가 아닌 복소수를 **허수**라고 한다.

(3) $a = 0$, $b \neq 0$이면 $z = bi$이다. 이처럼 실수부분이 없는 허수를 **순허수**라고 한다.

문제 7)
다음 복소수들 중 실수의 개수를 x, 허수의 개수를 y, 순허수의 개수를 z라고 할 때, x, y, z의 값을 각각 구하여라.

$$2 + \sqrt{2}i, \qquad \sqrt{3} - i, \qquad 5i, \qquad -\pi$$

문제 8) 다음 중 옳지 않은 것은?

① 허수는 복소수이다.

② $2-\sqrt{5}i$의 실수부분은 2, 허수부분은 $-\sqrt{5}$이다.

③ 2의 허수부분은 0이다.

④ 0은 허수이다.

⑤ $-3i$는 순허수이다.

정의 9) 두 복소수가 서로 같을 조건
두 복소수가 서로 같으려면 실수부분과 허수부분이 각각 같아야 한다.

$$a+bi=c+di \iff a=c, \quad b=d.$$

예시 10)

(1) $x+yi=2-i$이면 $x=2$, $y=-1$이다.

(2) $(x+2)+(y-3)i=0$이면 $x=-2$, $y=3$이다.

t **문제 11)** 다음 등식을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $(a+b)+4i=-2+2bi$

(2) $(3a+b)+(a-b)i=5-i$

정의 12) 켤레복소수
복소수 $z = a + bi$에 대해서 $a - bi$를 z의 켤레복소수라고 하고 기호로 $\bar{z}$로 표현한다.

예시 13)

(1) $z = -3 + 4i$이면 $\bar{z} = -3 - 4i$이다. 이것을

$$\overline{-3 + 4i} = -3 - 4i$$

로 표현할 수도 있다.

(2) $z = 5 - i$이면 $\bar{z} = 5 + i$이다.

(3) $z = 2i$이면 $\bar{z} = -2i$이다.

(4) $z = 3$이면 $\bar{z} = 3$이다.

문제 14) 다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

(1) $3 + 2i$

(2) $4 - i$

(3) -8

(4) $15i$

문제 15) $z = a + bi(a, b$는 실수)에 대하여
다음 등식을 만족하기 위한 a, b의 조건을 구하여라.

(1) $z = \bar{z}$

(2) $z = -\bar{z}$

1.2 복소수의 연산

복소수를 계산할 때에는 i를 문자처럼 취급하여 계산한다. 실수의 계산에서 쓰였던 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙. 지수법칙, 곱셈공식을 모두 사용할 수 있다. $i^2 = -1$임을 기억하면서 계산한다.

예시 16)

(1) $(2+i)+(5+4i) = 2+i+5+4i = 7+5i$

(2) $(3+2i)-(8+2i) = 3+2i-8-2i = -5$

(3) $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$

(4) $(4+i)(1+4i) = 4+16i+i+4i^2 = 4+16i+i-4 = 17i$

(5) $i^3 = i^2 \times i = (-1)i = -i$

(6) $(3i)^4 = 3^4 i^4 = 81(i^2)^2 = 81(-1)^2 = 81$

문제 17) 다음을 계산하여라.

(1) $(-1+3i)+(2-i)$

(2) $(3+\sqrt{2}i)-(3-\sqrt{2}i)$

(3) $2i(3-2i)$

(4) $(2+i)(1-5i)$

(5) $(1+4i)(1-4i)$

(6) $(-i)^4$

(7) i^{10}

(8) $(3i)^3$

예시 18) 분모의 유리화 / 분모의 실수화

(1) 분모에 루트가 포함된 무리수가 있는 경우에 분모를 유리수로 만들 수 있다 ;

$$\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{4+2\sqrt{2}}{4-2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}.$$

(2) 마찬가지로, 분모에 i가 포함된 허수가 있는 경우에도 분모를 실수로 만들 수 있다 ;

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

따라서 $\frac{1}{1+2i}$ 의 실수부분은 $\frac{1}{5}$ 이고, 허수부분은 $-\frac{2}{5}$ 이다.

문제 19) 다음 복소수들의 실수부분과 허수부분을 각각 구하여라.

(1) $\frac{1}{1+i}$

(2) $\frac{1}{i}$

(3) $\frac{3+2i}{3-2i}$

이상을 종합하여 복소수의 사칙연산을 정리하면 다음과 같다.

정의 20)

$$
\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)\times(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
(a+bi)\div(c+di) &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\
&= ac+adi+bci-bd \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i
\end{aligned}
$$

이고

$$
\begin{aligned}
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\
&= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2} \\
&= \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2-d^2i^2} \\
&= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i
\end{aligned}
$$

이기 때문이다.

1.3 제곱근과 루트

예시 21)

(1) 3의 제곱근이란, 제곱해서 3이 되는 수, $x^2 = 3$를 만족하는 수이다. 따라서 $\pm\sqrt{3}$을 뜻한다.

(2) -3의 제곱근이란, 제곱해서 -3이 되는 수, $x^2 = -3$를 만족하는 수이다. 이때, $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = -1$, $\frac{x}{\sqrt{3}} = \pm i$이므로 $x = \pm\sqrt{3}i$이다.

(3) $\sqrt{3}$이란, 3의 제곱근 중 양수인 값을 의미한다.
마찬가지로 $\sqrt{-3}$이란, -3의 제곱근 중 '+'인 값을 뜻한다. 따라서

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$$

이다.

(4) 마찬가지로 $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$, $\sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ 등이 성립한다.

문제 22) 다음을 계산하여라

(1) $\sqrt{-4} + \sqrt{-9}$

(2) $\sqrt{-8} - \sqrt{-2}$

(3) $\left(\sqrt{-1}\right)^3$

문제 23) 다음 중 옳은 것을 고르시오.

① -9의 제곱근은 ± 3이다.

② -2의 제곱근 중 실수는 2개이다.

③ 2의 제곱근 중 복소수는 2개이다.

④ $\sqrt{-2}$는 순허수가 아니다.

⑤ $\sqrt{-9} = 3$이다.

2 일차방정식

2.1 방정식

예시 24)

(1) $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$은 항등식이다. x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하기 때문이다.

(2) 반면 $x^2 + 1 = 5$는 방정식이다. $x = 2$를 대입하면 성립한다. 하지만 $x = 3$을 대입하면 성립하지 않는다. 이처럼 x에 어떤 값을 대입하느냐에 따라 성립하기도 하고 성립하지 않기도 하는 등식을 방정식이라고 한다.

정의 25) 항등식과 방정식

항등식 : 모든 수 x에 대해서 성립하는 등식
방정식 : 몇 개의 수 x에 대해서만 성립하는 등식

방정식을 만족시키는 x의 값을 해 또는 근 이라고 한다.

예시 26)
방정식 $x^2 + 1 = 5$을 정리해보면

$$x^2 + 1 = 5$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = -2 \quad \text{또는} \quad x = 2$$

에서 방정식 $x^2 + 1 = 5$를 만족시키는 x의 값은 -2와 2이다. 따라서 이 방정식의 근은 $x = -2,\ 2$이다.

예시 27)

(1) $2x-7=0$과 같은 방정식은 일차방정식이라고 부른다.
$x^2-3x+1=0$와 같은 방정식은 이차방정식이라고 부른다.
$2x^3-3x+4x-3=0$와 같은 방정식은 삼차방정식이라고 부른다.

(2) $x^2+1=5$와 같은 방정식은 양변에 공통적으로 5를 빼서(이항) $x^2-4=0$으로 만들 수 있다. 이 방정식도 이차방정식이라고 말한다.

(3) $x+\frac{1}{x}=3$은 양변에 공통적으로 x를 곱하여 $x^2+1=3x$로 만들고, 다시 이항하여 $x^2-3x+1=0$로 만들 수 있다. 하지만 이 방정식은 이차방정식이라고 말하지는 않는다.

정의 28) 일차방정식, 이차방정식, 삼차방정식, $\cdots$
방정식을 이항해 $f(x)=0$의 형태로 만들었을 때
$f(x)$가 일차식이면 일차방정식
$f(x)$가 이차식이면 이차방정식
$f(x)$가 삼차식이면 삼차방정식
이라고 말한다.

문제 29) 다음 중 옳지 않은 것은?

① $x^2-2x-3=0$은 이차방정식이다.

② $x+5=-2x+8$은 일차방정식이다.

③ $x^3+3x+7=x^3-x^2+4$은 삼차방정식이다.

④ 4는 방정식 $x^3-5x^2+3x+4=0$의 근이다.

⑤ $|x-1|=4$는 일차방정식이 아니다.

2.2 $ax+b=0$의 풀이

예시 30)

(1) $a=2,\ b=3$이면

$$\begin{aligned} 2x+3&=0 \\ 2x&=-3 \\ x&=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(2) $a=0,\ b=4$이면

$$0\cdot x+4=0$$

에서 x에 어떤 수를 대입하건 상관없이

$$4=0$$

이 되어 성립하지 않는다. 따라서 이 방정식의 근은 없다.

(3) $a=0,\ b=0$이면

$$0\cdot x+0=0$$

에서 x에 어떤 수를 대입하건 상관없이

$$0=0$$

이 되어 성립한다. 따라서 이 방정식의 근은 모든 수이다. (항등식이다)

정리 31) 방정식 $ax+b=0$의 풀이

- $a\neq 0$이면 $x=-\frac{b}{a}$이다.
- $a=0,\ b\neq 0$이면 이 방정식의 근은 없다.(불능)
- $a=0,\ b=0$이면 이 방정식의 근은 모든 수이다.(부정)

3 이차방정식

3.1 $x^2 = k$의 풀이

예시 32)

(1) 방정식 $x^2 = 0$의 근은 $x = 0$이다.

(2) 방정식 $x^2 = 3$을 정리하면

$$x^2 - 3 = 0$$
$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$
$$x = -\sqrt{3} \quad \text{또는} \quad x = \sqrt{3}$$

따라서 근은 $x = \pm\sqrt{3}$이다.

(3) 방정식 $x^2 = -5$를 정리하면

$$x^2 + 5 = 0$$
$$(x + \sqrt{5}i)(x - \sqrt{5}i) = 0$$
$$x = -\sqrt{5}i \quad \text{또는} \quad x = \sqrt{5}i$$

따라서 근은 $x = \pm\sqrt{5}i$이다.

문제 33) 다음 이차방정식의 근을 구하여라.

(1) $x^2 = 25$

(2) $x^2 + 25 = 0$

(3) $4x^2 = -3$

3.2 $ax^2 + bx + c = 0$의 풀이

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$를 푸는 방법에는 크게 다음의 세 가지 방법이 있다.

(1) 인수분해를 이용한 풀이

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

(2)의 방법은 모든 이차방정식에 적용될 수 있지만, 풀이가 조금 복잡하다. 따라서 실제 문제를 풀 때 거의 쓰이지는 않는다. 하지만 (2)의 방법을 이용하면 근의 공식을 유도할 수 있다.

정리 34) 근의 공식

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 해는$(a \neq 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

이다. b가 짝수이면 $(b = 2b')$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

이다.

증명)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

예시 35) $x^2-2x-3=0$의 해를 구하여라.

(1) 인수분해를 이용한 풀이

$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$x=-1 \quad \text{또는} \quad x=3$$

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$$x^2-2x-3=0$$
$$x^2-2x=3$$
$$x^2-2x+1=3+1$$
$$(x-1)^2=4$$
$$x-1=\pm 2$$
$$x=1\pm 2$$

따라서 $x=-1, \quad 3$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

$a=1$, $b=-2$, $c=-3$에서

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}$$

따라서 $x=-1, \quad 3$

혹은 $b'=-1$를 사용하여

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-3)}}{1}=1\pm 2$$

따라서 $x=-1, \quad 3$

좌변이 인수분해가 되지 않는 경우에는 (1)의 방법을 쓸 수 없다.

예시 36) $2x^2 - 3x - 4 = 0$의 해를 구하여라.

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$$
\begin{gathered}
2x^2 - 3x - 4 = 0 \\
x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0 \\
x^2 - \frac{3}{2}x = 2 \\
x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 2 + \frac{9}{16} \\
\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{41}{16} \\
x - \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{41}{16}} = \pm\frac{\sqrt{41}}{4} \\
x = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}
\end{gathered}
$$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

$a = 2,\ b = -3,\ c = -4$에서

$$
x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}
$$

(2)의 풀이는 길고 복잡하다. 따라서 (3)의 방법을 사용하는 것이 더 나을 것이다.

예시 37) $x^2+4x+8=0$의 해를 구하여라.

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$$x^2+4x+8=0$$
$$x^2+4x=-8$$
$$x^2+4x+4=-8+4$$
$$(x+2)^2=-4$$
$$x+2=\pm 2i$$
$$x=-2\pm 2i$$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

$a=1,\ b'=2,\ c=8$에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 8}}{1} \\ &= -2\pm\sqrt{-4} = -2\pm\sqrt{4}i = 2\pm 2i \end{aligned}$$

이 경우에 방정식의 근들은 실수가 아닌 허수이다.

문제 38) $x^2 + 2x + 8 = 0$의 해를 구하여라.

(1) 인수분해를 이용한 풀이

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

문제 39) $3x^2 + 5x + 1 = 0$의 해를 구하여라.

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

문제 40) $x^2 - 6x + 18 = 0$의 해를 구하여라.

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

3.3 판별식

예시 41)

(1) $x^2-4x+3=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=2\pm1=1,\ 3$$

이 방정식의 근은 두 개이며 모두 실수이다.

(2) $x^2-4x+4=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=2$$

이 방정식의 근은 한 개이며 실수이다.

(3) $x^2-4x+5=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=2\pm i=2+i,\ 2-i$$

이 방정식의 근은 두 개이며 모두 허수이다.

(1)과 (2)와 (3)을 구분짓는 것은 b^2-4ac의 부호이다. 이 식을 판별식이라고 부르며, 기호로 D라고 쓴다.

$$\boxed{D=b^2-4ac, \qquad\qquad D/4=b'^2-ac}$$

정리 42) 이차방정식의 근의 개수

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 판별식 $D = b^2 - 4ac$에 대해

- $D > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ 두 실근(서로 다른 두 실근)
- $D = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ 한 실근(서로 같은 두 실근, 중근)
- $D < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ 두 허근(서로 다른 두 허근)

예시 43) 다음 이차방정식의 근의 개수를 판별하여라.

(1) $x^2 + 3x - 5 = 0$

(2) $x^2 + 2x + 3 = 0$

(1) $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 29 > 0$
$\Longrightarrow$ 서로 다른 두 실근

(2) $D/4 = 1^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$
$\Longrightarrow$ 서로 다른 두 허근

문제 44) 다음 이차방정식의 근의 개수를 판별하여라.

(1) $x^2 - 3x = 0$

(2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

(3) $2x^2 - 3x + 3 = 0$

(4) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

3.4 근과 계수와의 관계

이차방정식

$$ax^2 + bx + c = 0$$

의 두 근이 α, β이면 위의 식은

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

으로 인수분해 될 수 있어야 한다. 즉

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

가 항등식이다. 이 식의 계수를 비교하면

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta$$

이고

$$b = -a(\alpha+\beta), \qquad c = a\alpha\beta$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

> **정리 45) 이차방정식의 근과 계수와의 관계**
> 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근이 α, β이면
>
> $$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

예시 46)

(1) 이차방정식 $x^2 - 3x - 4 = 0$의 두 근의 합은

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$$

이고 두 근의 곱은

$$\alpha\beta = \frac{-4}{1} = -4$$

이다. 실제로 이 이차방정식은 $(x+1)(x-4) = 0$로 정리되어 두 근이 -1과 4이므로 $(-1) + 4 = 3$이고 $(-1) \times 4 = -4$이다.

(2) 이차방정식 $3x^2+4x+1=0$의 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$$

이고 두 근의 곱은

$$\alpha\beta=\frac{1}{3}$$

이다. 실제로 이 이차방정식은 $(x+1)(3x+1)=0, \quad 3(x+1)(x+\frac{1}{3})=0$로 정리되어 두 근이 -1과 $-\frac{1}{3}$이므로 $(-1)+(-\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}$이고 $(-1)\times(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$이다.

문제 47) 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 각각 구하여라.

(1) $x^2-x+3=0$

(2) $x^2-3x=0$

(3) $2x^2-2x-5=0$

문제 48)

(1) 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 3, 5일 때, p, q의 값을 각각 구하여라.

(2) 이차방정식 $6x^2+px+q=0$의 두 근이 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$일 때, p, q의 값을 각각 구하여라.

(3) 이차방정식 $px^2+4x+q=0$의 두 근이 1, -3일 때, p, q의 값을 각각 구하여라.

4 이차함수와 이차방정식

4.1 이차함수의 그래프

정리 49)

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$의 그래프는

(1) $a > 0$이면 아래로 볼록이고, $a < 0$이면 위로 볼록이다.

(2) 꼭짓점은 (p, q)이다.

(3) 대칭축은 $x = p$이다.

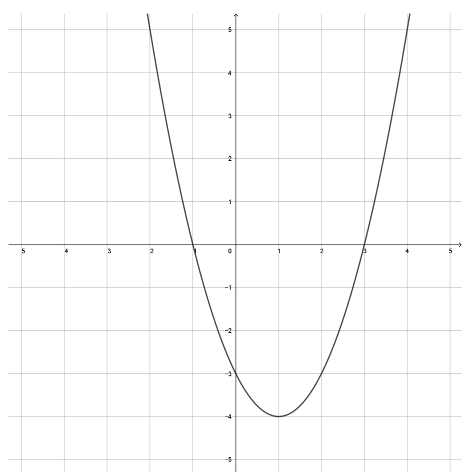
예시 50) 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$의 그래프를 그리고
①꼭짓점, ②대칭축, ③ y절편, ④ x절편을 각각 구하여라.

① $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서 꼭짓점 $= (1, -4)$이다.

② 대칭축은 $x = 1$이다.

③ $x = 0$을 대입하면 $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$이므로 y절편은 -3이다..

④ $y = 0$을 대입하면 $0 = x^2 - 2x - 3, \quad (x+1)(x-3) = 0, \quad x = -1, 3$
에서 x절편은 -1, 3이다.



예시 51) 이차함수 $y = x^2 + 3x + 3$의 그래프를 그리고
①꼭짓점, ②대칭축, ③ y절편, ④ x절편을 각각 구하여라.

①

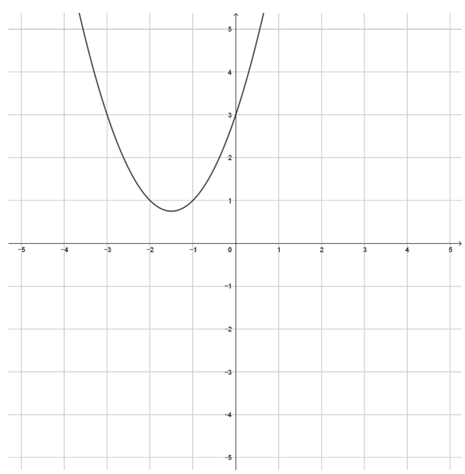
$$\begin{aligned} y =& x^2 + 3x + 3 \\ =& x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 3 \\ =& \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

에서 꼭짓점 $= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$이다.

② 대칭축은 $x = -\frac{3}{2}$이다.

③ $x = 0$을 대입하면 $y = 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 = 3$이므로 y절편은 3이다..

④ $y = 0$을 대입하면 $0 = x^2 + 3x + 3$에서 $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$ 이므로 x절편은 없다.



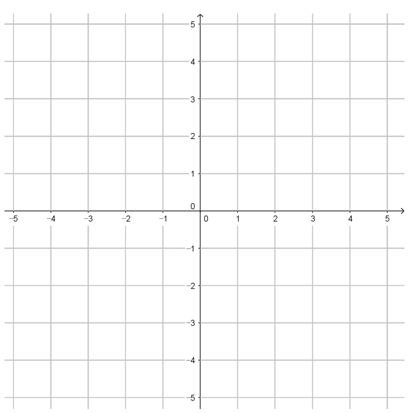
문제 52) 다음 이차함수들의 그래프를 그리고
①꼭짓점, ②대칭축, ③ y절편, ④ x절편을 각각 구하여라.

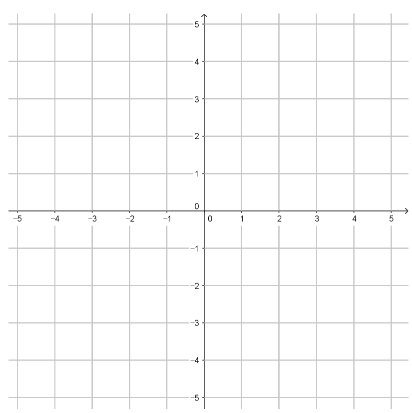
(1) $y = -x^2 + 4x$

(2) $y = 2x^2 - 2x + 1$

(1)

(2)



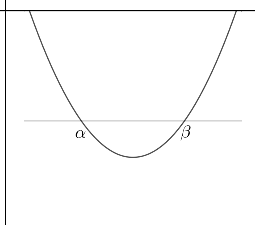
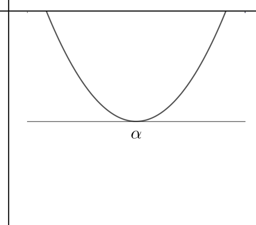
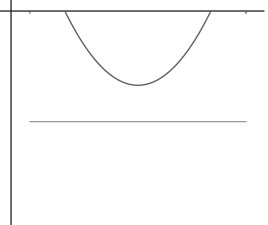
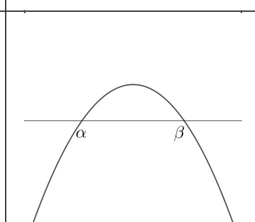
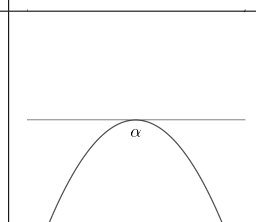
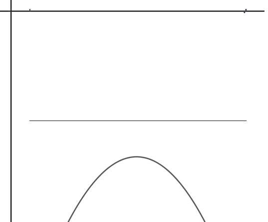


4.2 그래프의 위치관계

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 x절편을 구하려면 $y = 0$을 대입해

$$ax^2 + bx + c = 0$$

을 풀어서 얻는다. 따라서 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이 이차 방정식의 근의 개수와 관련이 있다.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
교점의 개수	2개	1개	0개

예시 53) 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y = x^2 - 3x + 1$ (2) $y = -2x^2 - 2x - 1$

(1) $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$이므로
이차함수의 그래프는 x축과 두 점에서 만난다.

(2) $D/4 = (-1)^2 - (-2)(-1) = -1 < 0$이므로
이차함수의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

예시 54)

두 함수 $y = x^2 - 4x + 2, \quad y = x - 2$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

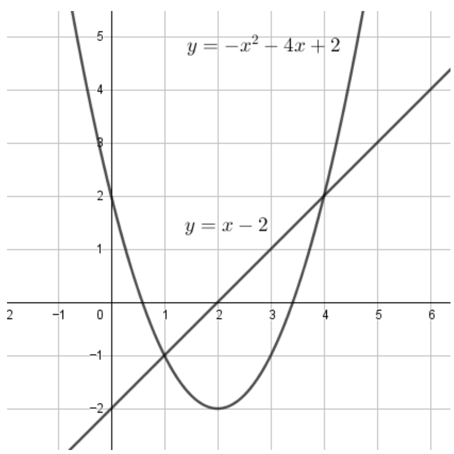
두 함수의 교점 (x, y)는 두 식을 모두 만족시킨다. 따라서 연립방정식

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

을 풀면 교점의 좌표를 얻을 수 있다. y를 소거해 x를 구하면

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-1)(x-4) = 0$$
$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

$x = 1$이면 $y = -1$이고 $x = 4$이면 $y = 2$이므로 두 그래프의 교점의 좌표는 $(1, -1)$과 $(4, 2)$이다.



문제 55) 다음 함수들의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

(1) $y = -x^2 + 3x, \quad y = -2x + 4$

(2) $y = x^2 + 2, \quad y = 2x + 1$

답

문제 4)

(1) $x = \pm\sqrt{3}i$

(2) $x = \pm\frac{1}{2}i$

(3) $x = -3 \pm i$

문제 7)

$x = 1$, $y = 3$, $z = 1$

문제 8)

④

문제 11)

(1) $a = -4$, $b = 2$

(2) $a = 1$, $b = 2$

문제 14)

(1) $3 - 2i$

(2) $4 + i$

(3) -8

(4) $-15i$

문제 15)

(1) $b = 0$

(2) $a = 0$

문제 17)

(1) $1 + 2i$

(2) $2\sqrt{2}i$

(3) $4 + 6i$

(4) $7 - 9i$

(5) 17

(6) 1

(7) -1

(8) $-27i$

문제 19)

(1) 실수부분 : $\frac{1}{2}$, 허수부분 : $-\frac{1}{2}$

(2) 실수부분 : 0, 허수부분 : -1

(3) 실수부분 : $\frac{5}{13}$, 허수부분 : $\frac{12}{13}$

문제 22)

(1) $5i$

(2) $\sqrt{2}i$

(3) $-i$

문제 23)

③

문제 29)

③

문제 33)

(1) $x = \pm 5$

(2) $x = \pm 5i$

(3) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

문제 38)

(1) 인수분해를 이용한 풀이

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x-4)(x+2) = 0$$
$$x = -2 \quad \text{또는} \quad x = 4$$

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 - 2x = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$$
$$(x-1)^2 = 9$$
$$x - 1 = \pm 3$$
$$x = 1 \pm 3$$

따라서 $x = -2, \quad 4$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

$a = 1,\ b = -2,\ c = -8$에서

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

따라서 $x = -2, \quad 4$

혹은 $b' = -1$를 사용하여

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-8)}}{1} = 1 \pm 3$$

따라서 $x = -2, \quad 4$

문제 39)

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$$
\begin{gathered}
3x^2 + 5x + 1 = 0 \\
x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \\
x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3} \\
x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{25}{36} - \frac{1}{3} \\
\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36} \\
x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6} \\
x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}
\end{gathered}
$$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

$a = 3,\ b = 5,\ c = 1$에서

$$
x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}
$$

문제 40)

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$$
\begin{gathered}
x^2 - 6x + 18 = 0 \\
x^2 - 6x + 9 = -9 \\
(x - 3)^2 = -9 \\
x - 3 = \pm 3i \\
x = 3 \pm 3i
\end{gathered}
$$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

$a = 1,\ b' = -3,\ c = 18$에서

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 18}}{1} = 3 \pm 3i$$

문제 44)

(1) 서로 다른 두 실근

(2) 서로 같은 두 실근(중근)

(3) 서로 다른 두 허근

(4) 서로 다른 두 허근

문제 47)

(1) 두 근의 합 : 1, 두 근의 곱 : 3

(2) 두 근의 합 : 3, 두 근의 곱 : 0

(3) 두 근의 합 : 1, 두 근의 곱 : $-\frac{5}{2}$

문제 48)

(1) $p = -8,\ q = 15$

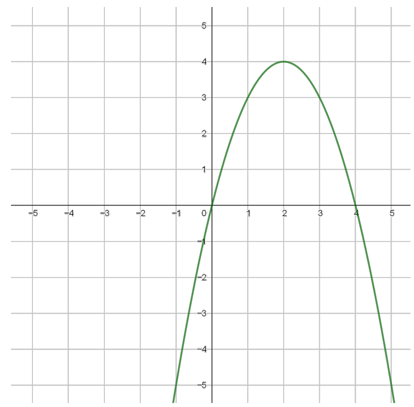
(2) $p = -7,\ q = 2$

(3) $p = 2,\ q = -6$

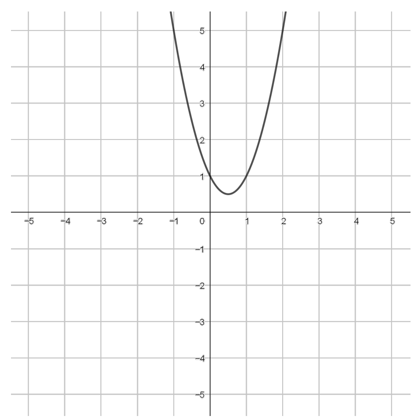
문제 52)

(1) ① $(2, 4)$, ② $x = 2$, ③ 0, ④ 0, 4

(2) ① $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ② $x = \frac{1}{2}$, ③ 1, ④ 없다.



(1)



(2)

문제 55)

(1) $(1, 2),\ (4, -4)$

(2) $(1, 3)$