동락 02 - Chapter 2, Vector Space

2015년 9월 25일

차 례

제 2 장

벡터공간

1 벡터공간과 부분공간

정의 1) 실수 집합 $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ 은 실수의 집합이다.

예시 2)

$1 \in \mathbb{R}$ 이고, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ 이며, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ 이다. 하지만 $1 + i \notin \mathbb{R}$ 이다.

정의 3) n 차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$

(1) $\mathbb{R}^2$ 은 실수들의 순서쌍(=ordered pair)을 원소로 가지는 집합이다. 즉

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

이다. 따라서 $\mathbb{R}^2$ 은 xy-평면과 동일시될 수 있다. 비슷한 의미에서 $\mathbb{R}$ 은 수직선과 동일시될 수 있다. 이러한 $\mathbb{R}^2$ 를 **2차원 유클리드 공간** 이라고 부른다.

(2) $\mathbb{R}^3$ 는 실수들의 ordered triple을 원소로 가지는 집합이다. 즉

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

따라서 $\mathbb{R}^3$ 은 삼차원의 공간과 동일시될 수 있다. 이러한 $\mathbb{R}^3$ 은 **3차원 유클리드 공간** 이라고 부른다.

(3) 일반적으로 $\mathbb{R}^4$ 는 실수들의 n-tuple을 원소로 가지는 집합이다. 즉

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

이다. 이러한 $\mathbb{R}^n$ 을 **n차원 유클리드 공간**이라고 부른다.

참고 4)

$\mathbb{R}^n$ 의 원소는 **벡터**라고 불린다. 이는 «기하와 벡터» 에서 점 $A = (1,2)$ 가 그 방향벡터 $\overrightarrow{OA} = (1,2)$ 와 동일시되는 것과 비슷한 맥락이다.

정의 5) 벡터의 상등

두 벡터 $u = (a_1, \cdots, a_n)$, $v = (b_1, \cdots, b_n)$ 에 대해서, $a_1 = b_1$, $\cdots$, $a_n = b_n$ 이면 '두 벡터가 같다' 고 말하고 $u = v$ 라고 쓴다.

정의 6) 벡터의 덧셈과 실수배

두 벡터 $u = (a_1, \cdots, a_n)$, $v = (b_1, \cdots, b_n)$ 와 실수 k 에 대해서

(1) $u + v = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$ 이다.

(2) $ku = (ka_1, \cdots, ka_n)$ 이다.

참고 7)

모든 i 에 대해 $a_i + b_i \in \mathbb{R}$ 이므로 $u + v \in \mathbb{R}^n$ 이다. 모든 i 에 대해 $ka_i \in \mathbb{R}$ 이므로 $ku \in \mathbb{R}^n$ 이다. 즉 두 벡터를 더해도 여전히 벡터이고 또 어떤 벡터에 실수배를 해도 여전히 벡터이다. 이것을 '$\mathbb{R}^n$ 은 덧셈과 실수배에 대해 닫혀있다.' 라고도 말한다.

정리 8)

벡터의 덧셈과 실수배에 대해 다음과 같은 성질들이 성립한다 ; $\boldsymbol{u} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{v} = (b_1, \cdots, b_n)$, $\boldsymbol{w} = (c_1, \cdots, c_n)$ 이고 k, l 이 실수이면

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ 이다.

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ 이다.

(3) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + w = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ 이다.

(4) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 를 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{0}$ 이 존재한다.

(5) 임의의 $\boldsymbol{u}$ 에 대해 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 를 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{x}$ 이 존재한다.

(6) $k\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ 이다.

(7) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 이다.

(8) $(kl)\boldsymbol{u} = k(l\boldsymbol{u})$ 이다.

(9) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ 이다.

(10) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$ 이다.

증명*).* (1), (6) 은 참고 7과 정확히 같다. (2) 와 (3) 은 실수의 덧셈에 대한 교환법칙 $(*)$ 과 결합법칙$(**)$ 으로부터 얻을 수 있다;

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n) \overset{(*)}{=} (b_1 + a_1, \cdots, b_n + a_n) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.$$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} &= (a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)+(c_1,\cdots,c_n)\\
&= ((a_1+b_1)+c_1,\cdots,(a_n+b_n)+c_n)\\
&\overset{(**)}{=} (a_1+(b_1+c_1),\cdots,a_n+(b_n+c_n))\\
&= (a_1,\cdots,a_n)+(b_1+c_1,\cdots,b_n+c_n)\\
&= \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}).
\end{aligned}
$$

(4) $0=(0,\cdots,0)$ 이라고 하면

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}+\mathbf{0} &= (a_1,\cdots,a_n)+(0,\cdots,0)\\
&= (a_1+0,\cdots,a_n+0)=(a_1,\cdots,a_n)\\
&= \boldsymbol{u}\\
&= (a_1,\cdots,a_n)=(0+a_1,\cdots,0+a_n)\\
&= (0,\cdots,0)+(a_1,\cdots,a_n)\\
&= \mathbf{0}+\boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

(5) $\boldsymbol{x}=(-a_1,\cdots,a_n)$ 이라고 하면

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x} &= (a_1,\cdots,a_n)+(-a_1,\cdots,-a_n)\\
&= (a_1+(-a_1),\cdots,a_n+(-a_n))=(0,\cdots,0)\\
&= \mathbf{0}\\
&= (0,\cdots,0)=((-a_1)+a_1,\cdots,(-a_n)+a_n)\\
&= (-a_1,\cdots,-a_n)+(a_1,\cdots,a_n)\\
&= \boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

(7) $1\cdot\boldsymbol{u}=1\cdot(a_1,\cdots,a_n)=(1\cdot a_1,\cdots,1\cdot a_n)=(a_1,\cdots,a_n)=\boldsymbol{u}.$
(8)은 실수의 곱셈에 대한 결합법칙으로($\star$)부터 성립한다;

$$
\begin{aligned}
(kl)\boldsymbol{u} &= (kl)(a_1, \cdots, a_n) = ((kl)a_1, \cdots, (kl)a_n) \\
&\overset{(\star)}{=} (k(la_1), \cdots, k(la_n)) = k(la_1, \cdots, la_n) \\
&= k(l\boldsymbol{u}).
\end{aligned}
$$

(9), (10) 은 실수의 분배법칙으로($\star\star$) 부터 성립한다;

$$
\begin{aligned}
k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= k(a_1+b_n, \cdots, a_n+b_n) = (k(a_1+b_1), \cdots, k(a_n+b_n) \\
&\overset{(\star\star)}{=} (ka_1+kb_1, \cdots, ka_n+kb_n) \\
&= (ka_1, \cdots, ka_n) + (kb_1, \cdots, kb_n) \\
&= k(a_1, \cdots, a_n) + k(b_1, \cdots, b_n) \\
&= k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}. \\
(k+l)\boldsymbol{u} &= ((k+l)a_1, \cdots, (k+l)a_n) \\
&\overset{(\star\star)}{=} (ka_1+la_1, \cdots, ka_n+la_n) \\
&= (ka_1, \cdots, ka_n) + (la_1, \cdots, la_n) \\
&= k(a_1, \cdots, a_n) + l(a_1, \cdots, a_n) \\
&= k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

참고 9)

정리 8의 (4) 를 만족시키는 벡터 $\mathbf{0}$ 을 **영벡터**라고 부른다. 이것은 덧셈에 대한 항등원이라고 볼 수 있다. 한 가지 중요한 사실은, 영벡터가 유일하다는 것이다; 만약 $\mathbf{0}$ 과 $\mathbf{0}'$ 이 모두 영벡터이면, 영벡터의 성질에 의해 $\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0}' = \mathbf{0}'$ 이기 때문이다. (첫 번째 등호는 $\mathbf{0}'$ 이 영벡터라는 사실을, 두 번째 등호는 $\mathbf{0}$ 이 영벡터라는 성질을 사용했다.)

정리 8의 (5) 를 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{x}$ 는 $\boldsymbol{u}$ 의 덧셈에 대한 역원이라고 볼 수 있다. 이러한 $\boldsymbol{x}$ 도 유일하다 ; 만약 $\boldsymbol{x}$ 와 $\boldsymbol{x}'$ 모두 $\boldsymbol{u}$ 의 덧셈에 대한 역원이면 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{x}' = \mathbf{0}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'$ 이기 때문이다.

정리 8의 (5) 의 증명에서 알 수 있듯, $\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{u}$ 이다. 따라서 $\boldsymbol{x}$ 를 $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{u}$ 라고도 쓴다.

정의 10) 벡터공간

공집합이 아닌 어떤 집합 V에 대해 V에서 덧셈과 실수배가 정의되어 있고 다음 열 가지 성질을 만족하면 V를 벡터공간이라고 부른다;

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$가 모두 V의 원소이고 k, l이 실수이면,

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$ 이다.
(2) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ 이다.
(3) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ 이다.
(4) $\boldsymbol{u}+0 = 0+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$를 만족시키는 벡터 0이 존재한다.
(5) 임의의 $\boldsymbol{u}$에 대해 $\boldsymbol{u}+x = x+\boldsymbol{u} = 0$를 만족시키는 벡터 x이 존재한다.
(6) $k\boldsymbol{u} \in V$ 이다.
(7) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 이다.
(8) $(kl)\boldsymbol{u} = k(l\boldsymbol{u})$ 이다.
(9) $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$ 이다.
(10) $(k+l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{u}$ 이다.

□

예시 11)

(1) 집합

$$\mathbb{R} = \{(a_1, a_2, a_3, \cdots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

을 생각하자. 이것은 유한차원의 유클리드공간을 일반화한 것이라고 볼 수 있다. 또한 $\mathbb{R}^\infty$의 원소는 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$꼴로서, 하나의 수열과 같다. 즉 $\mathbb{R}^\infty$는 수열들의 집합이다. 덧셈과 실수배를

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots) + (b_1, b_2, b_3, \cdots) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \cdots)$$
$$k(a_1, a_2, a_3, \cdots) = (ka_1, ka_2, ka_3, \cdots)$$

와 같이 정의하면 $\mathbb{R}^\infty$는 벡터공간을 이룬다.

(2) 집합 $\mathfrak{M}$을

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

로 정의하면 통상적인 행렬의 덧셈과 실수배에 대해서 $\mathfrak{M}$은 벡터공간을 이룬다.

(3) 집합 $\mathscr{F}$를

$$\mathscr{F} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\} \mid f\text{는 함수}\}$$

라고 하자. 두 함수 $f, g \in \mathscr{F}$의 합인 $f + g : [0,1] \to R$는

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

를 만족시키는 함수이고 두 함수 의 곱인 $f \cdot g : [0,1] \to R$는

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

를 만족시키는 함수라고 하자. 그러면 $\mathscr{F}$는 벡터공간을 이룬다.

(4) 집합 $\mathcal{P}_3$를 2차 이하의 다항식들의 집합

$$\mathcal{P}_3 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

이라고 하자. 통상적인 다항식의 덧셈과 실수배에 대해서 $\mathcal{P}_3$는 벡터공간을 이룬다.

정의 12) 부분공간

벡터공간 V의 부분집합 W에 대해 $W \neq \emptyset$이고, W가 그 자체로 벡터공간을 이루면 W를 V의 **부분공간**이라고 부른다.

이때, 기호로 '$W < V$' 라고 나타내기도 한다.

참고 13)

W가 벡터공간 V의 부분집합이고 $W \neq \emptyset$이라고 하자. 또, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$가 W의 원소이고 k, l이 실수라고 하자. 그러면 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$가 V의 원소이고 따라서,

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(3) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

(7) $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

(8) $(kl)\boldsymbol{u} = k(l\boldsymbol{u})$

(9) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$

(10) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$

이다.

정리 14)

벡터공간 V 의 부분집합 W 에 대해

(a) $W \neq \emptyset$
(b) W 임의의 원소 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 에 대해 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$
(c) W 임의의 원소 $\boldsymbol{u}$ 와 임의의 실수 k 에 대해 $k\boldsymbol{u} \in W$

이면 W 는 V 의 부분공간이다.

증명*).* 참고 13에 의해 정의 10의 (1), (4), (5), (6) 번만 증명하면 된다. (1), (6) 은 정확히 (b), (c) 과 같다. 첫 번째 가정 ($W \neq \emptyset$) 에 의해 W 의 원소 $\boldsymbol{u}$ 가 적어도 하나 존재한다. 그러면 (c) 에 의해 $0 \cdot \boldsymbol{u} \in W$ 인데

$$0 \cdot \boldsymbol{u} = (1 + (-1))\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$$

이므로 $\mathbf{0} \in W$ 이다. 따라서 (4) 번이 증명되었다. 마지막으로 $-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u} \in W$ 이므로 (5) 번도 증명되었다. □

정리 15)

벡터공간 V 의 부분집합 W 에 대해

(a) $W \neq \emptyset$
(b) W 임의의 원소 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 와 임의의 실수 k, l 에 대해 $k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{v} \in W$

이면 W 는 V 의 부분공간이다.

증명*).* (b) 에 $k = l = 1$ 을 대입하면 정확히 정리 14의 (b) 를 얻을 수 있다. 또 (b) 에 $l = 0$ 을 대입하면 정확히 정리 14의 (c) 를 얻을 수 있다. 그러면 정리 14의 가정들이 모두 성립하므로 W 는 V 의 부분공간이다. □

정의 16)

실수 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 와 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 에 대하여 벡터

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{u}_i$$

를 벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 의 **일차결합**이라고 부른다.

문제 17)

집합

$$\mathcal{P}_3 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

의 부분집합

$$\{a + bx + cx^2 \mid a + b + c = 0\}$$

이 $\mathcal{P}_3$ 의 부분공간임을 증명하시오.

문제 18)

다음 명제의 참/거짓을 판별하시오.(참인 경우 증명하고, 거짓인 경우 반례를 제시하시오.)

(1)

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

는 통상적인 행렬의 덧셈과 실수배에 대하여 벡터공간을 이룬다.

(2)

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| ad - bc \neq 0 \right\}$$

는 통상적인 행렬의 덧셈과 실수배에 대하여 벡터공간을 이룬다.

(3) V, W 가 벡터공간이면 $V \cap W$ 도 벡터공간을 이룬다.

(4) V, W 가 벡터공간이면 $V \cup W$ 도 벡터공간을 이룬다.

2 Solving $Ax = b$ and $Ax = b$

3 일차독립, 기저, 차원

정의 19)

벡터 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 에 대하여

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

를 만족하는 c_i 들이 존재하고 이 때 모든 c_i 가 동시에 0은 아닐 때($\sim (c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0)$), 이 벡터들을 **일차 종속**이라고 말한다.

한편,

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$$

를 만족하고 모든 c_i 가 동시에 0이 되지는 않는 c_i 들이 존재하지 않으면 이 벡터들을 **일차 독립**이라고 말한다.

참고 20)

다시 말해, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 들이 일차독립이기 위한 필요충분조건은

$$``c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \quad \text{이면} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0''$$

인 것이다.

정리 21)

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 들이 일차종속이면 어느 한 벡터가 나머지 벡터들의 일차결합으로 표현될 수 있다. 즉, $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i \neq j}^{n} k_i \boldsymbol{u}_i$ 인 j 가 존재한다. 또한 이 명제의 역도 성립한다.

증명). $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 들이 일차종속이면

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$$

를 만족하는 c_i 들이 존재하고 이 때 모든 c_i 가 동시에 0은 아니다. 즉, $c_j \neq 0$ 인 j 가 적어도 하나 존재한다. 식을 정리해 $c_j\boldsymbol{u}_j$ 에 관한 식으로 만들면

$$c_j\boldsymbol{u}_j = -c_1\boldsymbol{u}_1 - \cdots - c_{j-1}\boldsymbol{u}_{j-1} - c_{j+1}\boldsymbol{u}_{j+1} - \cdots - c_n\boldsymbol{u}_n = \sum_{i \neq j}^{n} (-c_i)\boldsymbol{u}_i$$

이고 이를 $c_j(\neq 0)$ 로 나누면

$$\boldsymbol{u}_j = -\frac{c_1}{c_j}\boldsymbol{u}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\boldsymbol{u}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\boldsymbol{u}_{j+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_j}\boldsymbol{u}_n = \sum_{i \neq j}^{n} \left(-\frac{c_i}{c_j}\right)\boldsymbol{u}_i$$

이다. 따라서 $\boldsymbol{u}_j$ 가 나머지 벡터들의 일차결합으로 나타났다.

또, 만약 $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i \neq j}^{n} k_i \boldsymbol{u}_i$ 인 j 가 존재한다면, 즉

$$\boldsymbol{u}_j = k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{u}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{u}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n$$

이라면,

$$\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{u}_{j-1} - \boldsymbol{u}_j + k_{j+1}\boldsymbol{u}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

가 성립하고 따라서 일차독립이다. □

예시 22)

(1) $(1,2,-1)$, $(3,6,-3)$, $(3,9,3)$, $(2,5,0)$ 는 일차 종속이다. 왜냐하면

$$3(1,2,-1) - (3,6,-3) + 0(3,9,3) + 0(2,5,0) = (0,0,0)$$

이기 때문이다. ($c_1 = 3$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$)

혹은, $(1,2,-1)$ 이 $(3,6,-3)$, $(3,9,3)$, $(2,5,0)$ 들의 일차결합으로 표현될 수 있기 때문이다 ;

$$(1,2,-1) = \frac{1}{3} \cdot (3,6,-3) + 0 \cdot (3,9,3) + 0 \cdot (2,5,0)$$

(2) $(3,0,0)$, $(4,1,0)$, $(2,5,2)$ 는 일차 독립이다. 왜나햐면

$$c_1(3,0,0) + c_2(4,1,0) + c_3(2,5,2) = (0,0,0)$$

이 성립하려면

$$\begin{cases} 3c_1 + 4c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 5c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

이 성립해야 하는데 그러면 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 이 되어 c_i 들이 동시에 0이 되지는 않는 c_1, c_2, c_3 가 존재하지 않기 때문이다.

혹은, 참고 20에 의해

$$c_1(3,0,0) + c_2(4,1,0) + c_3(2,5,2) = (0,0,0)$$

를 가정하면 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 가 얻어지기 때문이다.

문제 23)

다음 벡터들 $(\in \mathbb{R}^3)$ 이 일차결합인지 일차종속인지 판단하시오.

(1) $(1,-3,5)$, $(2,2,4)$, $(4,-4,14)$

(2) $(1,7,7)$, $(2,7,7)$, $(3,7,7)$

(3) $(0,0,-1)$, $(1,0,4)$

(4) $(9,9,0)$, $(2,0,-1)$, $(3,5,-4)$, $(12,12,-1)$

문제 24)

다음 벡터들 $(\in \mathcal{P}_3)$ 이 일차결합인지 일차종속인지 판단하시오.

(1) $3-x+9x^2$, $5-6x+3x^2$, $1+1x-5x^2$

(2) $-x^2$, $1+4x^2$

(3) $2+x+7x^2$, $3-x+2x^2$, $4-3x^2$

(4) $8+3x+3x^2$, $x+2x^2$, $2+2x+2x^2$, $8-2x+5x^2$

문제 25)

다음 벡터들 $(\in \mathscr{F})$ 이 일차결합인지 일차종속인지 판단하시오. 이때,

$$\mathscr{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\text{는 함수}\}$$

(1) $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

(2) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$

(3) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

(5) $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(6) $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$

문제 26)

다음 명제의 참/거짓을 판별하시오.

(1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 가 일차 독립일 때, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ 도 일차 독립이다.

(2) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 가 일차 독립일 때, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 도 일차 독립이다.

(3) $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ 이면 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 가 일차종속이다.

(4) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 가 일차 독립일 때, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 도 일차독립이다.

정의 27)

$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ 들이 V 의 원소라고 가정하자. 임의의 $v \in V$ 에 대해 v 가 $\boldsymbol{w}_i$ 들의 일차결합으로 표현될 수 있으면 '**$\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{w}_n$ 들이 V 를 생성(span) 한다**'고 말한다.