영석 : 03 중간고사(1학년 1학기) 대비 개념 요약

April 18, 2015

Contents

1 다항식의 연산

1.1 다항식

정의 1) 다항식

$2x^2 + 3x - 1,\ x + 1,\ x^3,\ x^2 + 2xy + 2y^2$ 등의 형태의 식을 **다항식**이라고 한다. 특히 항의 개수가 한 개인 다항식을 **단항식**이라고 한다. 예를 들어 x^3는 단항식이지만 $2x^2 + 3x - 1$, $x + 1$는 단항식이 아니다.

다항식

$$2x^2 + 3x - 1 \tag{1}$$

에서 $2x^2$, $3x$, -1를 **항**이라고 한다.

각 항의 문자 앞에 붙는 숫자를 **계수**라고 한다. $2x^2$의 계수는 2이고 $3x$의 계수는 3이다. 숫자로만 되어있는 항을 **상수항**이라고 한다. 각 항들에 대해 문자가 곱해진 개수를 **차수**라고 한다. $2x^2$의 차수는 2차이고, $3x$의 차수는 1차이다. 다항식의 차수는 각 항들 중 가장 높은 항의 차수를 말한다. $2x^2+3x-1$의 차수는 2차이다.

(1)에서처럼 다항식을 차수가 높은 항부터 나열하는 방식을 **내림차순**이라고 한다. 반대로 (2)와 같이 차수가 낮은 항부터 나열하는 방식을 **오름차순**이라고 한다.

$$-1 + 3x + 2x^2 \tag{2}$$

1.2 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식을 더하고 뺄 때에는 동류항을 묶어서 계산하면 된다. 실수와 마찬가지로 덧셈과 곱셈에 대해 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

정리 2) 다항식의 연산법칙

A, B, C가 다항식이면

$$A + B = B + A, \quad AB = BA \qquad \text{(교환법칙)}$$
$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC) \qquad \text{(결합법칙)}$$
$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{(분배법칙)}$$

이 성립한다.

예시 3)

예를 들어 $2x^2+3x+2$ 와 x^2-2x+1 을 더하면

$$\begin{aligned}(2x^2+3x+2)+(x^2-2x+1) &= (2x^2+x^2)+(3x-2x)+(2+1)\\ &= 3x^2+x+3\end{aligned}$$

이다.

또 x^2+y^2 과 $2x^2+2xy-4y^2$ 을 빼면

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)-(2x^2+2xy-4y^2) &= (x^2-2x^2)-2xy+(y^2-(-4y^2))\\ &= -x^2-2xy+5y^2\end{aligned}$$

이다.

1.3 다항식의 곱셈

다항식을 곱할 때에는 분배법칙을 잘 적용해 곱하면 된다. 또한 다음 공식들을 사용할 수 있다.

정리 4) 곱셈공식

(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

(3) $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

(4) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(5) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(6) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

(8) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

예시 5)

(1) 예를 들어 $(2x+1)^2$을 전개하려면 정리 4의 (1)에 $a = 2x$, $b = 1$을 대입하여

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

을 얻을 수 있다.

(2) $(x-2)^3$을 전개하려면 정리 4의 (6)에 $a = x$, $b = 2$를 대입하여

$$(x-2)^3 = x^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 27$$

을 얻을 수 있다.

1.4 다항식의 나눗셈

예시 6)

만약 $2x^3 + 7x^2 + 3$을 $x^2 + 2x + 2$로 나누려면 다음과 같은 계산을 한다.

$$\begin{array}{r|l}
 & \;2x\;+3 \\ \hline
x^2+2x+2 & 2x^3+7x^2\;\;+3 \\
 & 2x^3+4x^2+\;4x \\ \cline{2-2}
 & \;3x^2-\;4x+3 \\
 & \;3x^2+\;6x+6 \\ \cline{2-2}
 & -10x-3
\end{array}$$

따라서 몫이 $2x+3$이고 나머지가 $-10x-3$이다. 이 나눗셈 결과를 다음과 같이 표현한다.

$$2x^3 + 7x + 3 = (x^2 + 2x + 2)(2x + 3) + (-10x - 3)$$

이다.

일반적으로 A를 B로 나눈 몫이 Q이고 나머지가 R이면

$$A = BQ + R$$

이라고 쓴다. 여기서 A, B, Q, R은 모두 다항식이며, 각각 **피제수**, **제수**, **몫**, **나머지**라고 부른다. 또 R의 차수는 B보다 항상 작다. 위의 예에서도 나머지 $(=-10x-3)$의 차수가 제수$(=x^2+2x+2)$의 차수보다 낮다는 것을 확인할 수 있다.

2 항등식과 나머지 정리

2.1 항등식

정의 7) 항등식

항등식이란, 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식을 말한다. 항등식에서 아직 정해지지 않은 경우의 계수를 **미정계수**라고 부른다. 항등식이 아닌 등식을 **방정식**이라고 한다.

예시 8)

예를 들어 $x^2+2x = x^2+2x$는 x에 어떤 값을 대입하더라도 성립하기 때문에 항등식이다. 마찬가지로 $2x = 2x$, $x+1-x = 1$ 등도 항등식이다. 하지만 $2x+2=0$은 $x=-1$일 때는 성립하지만 $x \neq -1$일 때에는 성립하지 않으므로 항등식이 아니고 방정식이다.

정리 9) 항등식의 성질

(1) $ax+b=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$이다.

(2) $ax^2+bx+c=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

(3) $ax+by+c=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

(4) $ax+b=a'x+b'$가 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$이다.

(5) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

(6) $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

(1)–(6)의 역도 성립한다.

증명). (1)과 (4)만 증명하겠다.

(1) $ax+b=0$가 항등식이라고 하자. x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하더라도 성립한다. $x=0$을 대입하면 $a=0$을 얻는다. 이제 원래 식은 $b=0$이 되었고 이는 성립해야 한다. 따라서 $a=0$이고 $b=0$이다.

반대로 $a=0$, $b=0$이라고 하자. 그러면 본 식은 $0=0$이 되어 항등식이다.

(4) $ax+b=a'x+b'$가 항등식이라고 하자. 그러면 모든 항을 좌변으로 이항한 식인

$$(a-a')x+(b-b')=0$$

은 항등식이다. (1)에 의해 $a - a' = 0$이고 $b - b' = 0$이다.

반대로 $a = a'$, $b = b'$이라고 하자. 그러면 본 식은 $ax + b = ax + b$가 되어 x에 어떤 값을 넣더라도 항상 성립한다. 따라서 항등식이다.

□

예시 10)

(1) 항등식

$$(a-2)x + (b+3) = 0$$

에서 미정계수 a, b를 구해보자. 정리 9의 (1)에 의해 $a - 2 = 0$, $b + 3 = 0$이다. 따라서 $a = 2$, $b = -3$이다.

(2) 항등식

$$(a+1)x - by + (c+1) = 0$$

에서 미정계수 a, b, c를 구해보자. 정리 9의 (3)에 의해 $a + 1 = 0$, $-b = 0$, $c + 1 = 0$이다. 따라서 $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$이다.

(3) 항등식

$$-2x^2 - ax + 3 = bx^2 + 5x - c + 1$$

에서 미정계수 a, b, c를 구해보자. 정리 9의 (5)에 의해 $-2 = b, -a = 5, 3 = -c+1$이다. 따라서 $b = -2$, $a = -5$, $c = -2$이다.

예시 11)

(1) 항등식

$$a(x+1) + b(x-1) = 3x + 1$$

의 미정계수 a, b를 구할 때에는 좌변을 전개하여

$$(a+b)x + (a-b) = 3x + 1$$

를 얻고, 정리 9의 (4)를 이용해 연립방정식

$$a + b = 3$$
$$a - b = 1$$

을 풀어 $a = 2$, $b = 1$이라는 결과를 얻을 수도 있으나 이 경우에는 다른 방법을 사용하는 것이 더 간편할 수 있다.

원래 식인

$$a(x+1)+b(x-1)=3x+1$$

에 $x=1$을 넣으면 $2a=4$를 얻고 $x=-1$을 넣으면 $-2b=-2$를 얻으므로 한번에 $a=2$, $b=1$을 얻을 수 있기 때문이다.

(2) 마찬가지로 항등식

$$ax(x+1)+bx(x-1)+c(x+1)(x-1)=2x^2-3x+3$$

의 미정계수 a, b, c를 구할 때에도 x에 값들을 대입하는 방법이 더 효율적이다. $x=0$을 대입하면 $-c=3$를 얻고, $x=1$을 대입하면 $2a=2$를 얻으며, $x=-1$를 대입하면 $2b=8$을 얻는다. 따라서 $c=-3$, $a=1$, $b=4$이다.

정의 12)

항등식에서 미정계수를 구할 때에 예시 10에서 사용한 방법을 **계수비교법**, 예시 11에서 사용한 방법을 **수치대입법**이라고 한다.

정리 13)

다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면,

$$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$$

가 성립하며 이 때의 등식은 항등식이다.

정의 14)

정리 13에서 $R(x)=0$이면 $f(x)$가 $g(x)$로 **나누어 떨어진다**고 말한다. 혹은 $g(x)$가 $f(x)$의 **인수**라고 말한다.

2.2 나머지 정리와 인수정리

정리 15) 나머지 정리

다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.

증명). $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라고 하고 나머지를 $R(x)$라고 하자. $R(x)$의 차수는 피제수인 $x-\alpha$의 차수보다 작으므로, $R(x)$는 상수항이다. 따라서 $R(x)=R$이라고 쓰자. 그러면

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

은 항등식이다. 이 항등식에 $x = \alpha$를 대입하면 $f(\alpha) = R$을 얻는다. 따라서 이 나눗셈의 나머지는 $f(\alpha)$이다. □

예시 16)

예시 6에서 이용한 방법을 사용해 $f(x) = x^2 + 1$을 $x + 1$로 나누면 $x^2 + 1 = (x+1)(x-1)+2$이다. 따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 정리 15를 사용해 $f(x)$를 $x + 1$로 나눈 나머지를 계산하려면 $x + 1 = x - (-1)$이므로 $\alpha = -1$이고, 따라서 나머지는 $f(-1)$이어야 한다. 실제로 $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$이다.

마찬가지로 $g(x) = x^2+2x+2$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $g(1) = 1^2+2\cdot1+2 = 5$이고 $h(x) = -x^2 + 3x + 1$을 $x - 2$로 나눈 나머지는 $h(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3$이다.

정리 17) 인수정리

다항식 $f(x)$가 $x - \alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha) = 0$이고, $f(\alpha) = 0$이면 $f(x)$가 $x - \alpha$로 나누어떨어진다.

증명). $f(x)$를 $x - \alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R이라고 하면 나머지 정리에 의해 $R = f(\alpha)$이다. $f(x)$가 $x - \alpha$로 나누어떨어지면 $R = 0$이다. 따라서 $f(\alpha) = 0$이다. 반대로 $f(\alpha) = 0$이면 $R = 0$이다. 따라서 $f(x)$는 $x - \alpha$로 나누어떨어진다. □

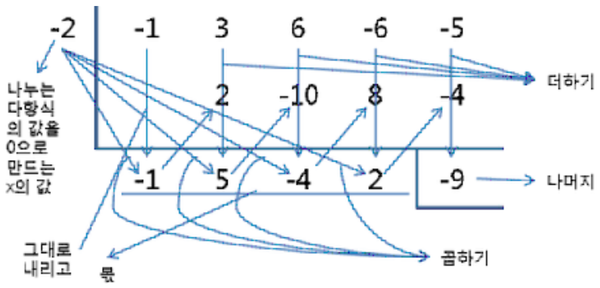
예시 18)

$f(x) = x^3 - 3x + 2$라고 하자. $x = 1$을 대입하면 $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$이므로 $x - 1$은 $f(x)$의 인수이다. $x = 2$를 대입하면 $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 \neq 0$이므로 $x - 2$는 $f(x)$의 인수가 아니다.

예시 19)

2.3 조립제법

다항식의 나눗셈에서 제수가 일차식이면 **조립제법**을 활용하면 쉽게 몫과 나머지를 구할 수 있다. 다음은 $-x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 6x - 5$를 $x + 2$로 나누는 과정을 나타낸 것이다.



이 나눗셈에서 몫은 $-x^3+5x^2-4x+2$ 이고, 나머지는 -9 이다. 따라서

$$-x^4+3x^3+6x^2-6x-5=(x+2)(-x^3+5x^2-4x+2)-9$$

이다.

3 인수분해

정의 20) 전개와 인수분해

$(x+1)(x+2)$ 를 전개하면 x^2+3x+2 이고 x^2+3x+2 를 인수분해하면 $(x+1)(x+2)$ 가 된다. 이처럼 **전개**란 곱셈으로 묶여있는 다항식을 푸는 과정을 뜻하며 **인수분해**란 풀어져 있는 다항식을 곱셈으로 묶는 과정을 뜻한다.

정리 21) 인수분해공식

정리 4의 곱셈공식의 좌변과 우변을 바꿔 다음과 같은 인수분해 공식들을 얻는다.

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(4) $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$

(5) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

(6) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(7) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(8) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

예시 22)

(1)

$$x^2 - 2x + 1$$

를 인수분해해보자. 정리 21의 (2) 에 $a = x$, $b = 1$ 를 넣으면

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

를 얻는다. 따라서 $x^2 - 2x + 1$ 를 인수분해하면 $(x-1)^2$ 이다.

(2)

$$x^2 - 9$$

을 인수분해해보자. $9 = 3^2$ 이므로 정리 21의 (3) 에 $a = x$, $b = 3$ 를 넣으면

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

를 얻는다. 따라서 $x^2 - 9$ 를 인수분해하면 $(x+3)(x-3)$ 이다.

(3)

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 27$$

을 인수분해해보자. 정리 21의 (5) 에 $a = x$, $b = 3$ 를 넣으면

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 27 = x^3 - 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 2^2 x + 3^3 = (x+3)^3$$

를 얻는다. 따라서 $x^3 + 6x^2 + 12x + 27$ 를 인수분해하면 $(x+3)^3$ 이다.

(4)

$$x^3 - 8$$

을 인수분해해보자. $8 = 2^3$ 이므로 정리 21의 (8) 에 $a = x$, $b = 2$ 를 넣으면

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

를 얻는다. 따라서 $x^3 - 8$ 를 인수분해하면 $(x-2)(x^2+2x+4)$ 이다.

예시 23) 조립제법을 이용한 인수분해

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

를 인수분해해보자. 예시 18에서 $f(1) = 0$ 이므로 $x - 1$ 이 $f(x)$ 의 인수임을 확인하였다. 따라서 $x^3 - 3x + 2$ 를 $x - 1$ 로 나누면 조립제법에 의해

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

를 얻는다. $x^2 + x - 2$ 는 더 인수분해될 수 있다. 즉 $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ 이다. 따라서

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x - 1) = (x - 1)^2(x + 2)$$

이다.

4 복소수

4.1 복소수

정의 24) 허수단위

제곱해서 -1 이 되는 수를 i 라고 쓴다. 따라서 $i^2 = -1$ 이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.

정의 25) 복소수

실수 a, b 에 대해 $a + bi$ 꼴로 이루어진 수를 **복소수**라고 한다. 예를 들어 $1 + i$, $2 - 3i$, $-2i$, 3 등은 모두 복소수이다. 이때 a 를 **실수부분**, b 를 **허수부분**이라고 부른다. 예를 들어 $2 - 3i$ 의 실수부분은 2 이고, 허수부분은 -3 이다.

복소수 중에서 $b \neq 0$ 인 수를 **허수**라고 한다. 예를 들어 $1 + i$, $2 - 3i$, $-2i$ 는 허수이다. 반면 3 은 실수이다. 허수 중에서 $a = 0$ 인 수를 **순허수**라고 한다. 예를 들어 $-2i$ 는 순허수이다. 반면 $1 + i$, $2 - 3i$ 는 순허수가 아닌 허수이다.

정의 26) 켤레복소수

복소수 $a+bi$에 대해서 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라고 한다. 예를 들어 $1+i$의 켤레복소수는 $1-i$이고 $2-3i$의 켤레복소수는 $2+3i$이다. 또 $-2i$의 켤레복소수는 $2i$이고 3의 켤레복소수는 3이다.

정의 27)

두 복소수 $a+bi$, $c+di$에 대해서 $a=c$, $b=d$이면

$$a+bi=c+di$$

이다.

예시 28)

(1)

$$x+yi=3+2i$$

가 성립하면 $x=3$, $y=2$이다.

(2)

$$2x+2i=-4+yi$$

가 성립하면 $2x=-4$, $2=y$이다. 따라서 $x=-2$, $y=2$이다.

(3)

$$(x+y)+(x-y)i=2+4i$$

가 성립하면 $x+y=2$, $x-y=4$이다. 따라서 $x=3$, $y=-1$이다.

4.2 복소수의 사칙연산

복소수를 더하거나 빼거나 곱하거나 나눌 때에는 실수에서와 똑같이 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙을 잘 적용해나가면서 $i^2=-1$를 주의하면서 계산하면 된다.

예시 29)

$2+i$와 $3+2i$에 대해 우선 덧셈과 뺄셈, 곱셈을 해보자.

$$\begin{aligned}
(2+i)+(3+2i) &= 2+i+3+2i = 5+3i \\
(2+i)-(3+2i) &= 2+i-3-2i = -1-i \\
(2+i)\times(3+2i) &= 6+4i+3i+2i^2 \\
&= 6+4i+3i-2 \\
&= 4+7i
\end{aligned}$$

이다.

나눗셈을 할 때에는, 분모를 실수로 만들어줘야 한다. 이를 위해 분모의 켤레 복소수를 분모와 분자에 각각 곱해줘야 한다. 이 과정을 **분모의 실수화**라고 한다.

$$\begin{aligned}(2+i) \div (3+2i) &= \frac{2+i}{3+2i} \\ &= \frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{6-4i+3i-2i^2}{9-6i+6i-4i^2} \\ &= \frac{6-4i+3i+2}{9-6i+6i+4} \\ &= \frac{8-i}{13} \\ &= \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i.\end{aligned}$$

정의 30) 음수의 제곱근

$a > 0$ 일 때,

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

이다.

예시 31)

(1) $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$.

(2) $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$.

(3) $\sqrt{-12} = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i$ 이다.

5 이차방정식

5.1 이차방정식

정의 32) 이차방정식

a, b, c 가 실수이고 $a \neq 0$ 일 때,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

꼴로 변형될 수 있는 방정식을 **이차방정식**이라고 한다.

예시 33)

(1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$ 이므로 이차방정식이다.

(2) $x^2 + 1 = 0$ 은 $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ 이므로 이차방정식이다.

(3) $x^2 = -x$ 는 $x^2 + x = 0$ 으로 변형될 수 있고 이 때 $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ 이므로 이차방정식이다.

(4) $2x + 1 = 0$ 은 $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ 이므로 이차방정식이 아니다.

(5) $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$ 은 $0 = 0$ 으로 변형될 수 있고 이때 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ 이므로 이차방정식이 아니다. 이 경우 이 식은 항등식이다.

(6) $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)^2$ 은 $2x + 1 = 0$ 으로 변형될 수 있고 이때 $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ 이므로 이차방정식이 아니다.

정의 34) 이차방정식의 근

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 x 의 값에 따라 등식

$$ax^2 + bx + c = 0$$

이 성립하기도 하고 성립하지 않기도 한다. 등식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 성립하도록 만드는 x 의 값을 이 **이차방정식의 근**(또는 해) 이라고 한다.

또 이차방정식의 근을 구하는 과정을 **이차방정식을 푼다**고 말한다.

예시 35)

이차방정식

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

에 $x = 0$ 을 넣으면 $0 - 0 + 1 \neq 0$ 이다. 따라서 0 은 이 이차방정식의 근이 아니다.

$x = 1$ 을 넣으면 $2 - 3 + 1 = 0$ 이다. 따라서 1 은 이 이차방정식의 근이다.

5.2 이차방정식의 풀이

정리 36) 이차방정식의 근의 공식

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

이다.

예시 37) 이차방정식의 풀이 (1)

이차방정식

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

을 풀어보자.

(1) 인수분해를 이용한 방법 : 좌변을 인수분해하면

$$(x+3)(x-1) = 0$$

이 된다. 따라서 $x+3=0$ 이거나 $x-1=0$ 이다. 그러므로 $x=-3$ 이거나 $x=1$ 이다.

(2) 완전제곱식을 이용한 방법 : $2px = 2x$ 이므로 $p = 1$ 이다.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

이므로 원래 식의 상수항을 우변으로 옮기고 정리하면

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 3 \\ x^2 + 2x + 1 &= 3 + 1 \\ (x+1)^2 &= 4 \\ x + 1 &= \pm\sqrt{4} \\ x + 1 &= \pm 2 \\ x &= -1 \pm 2 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x = -1 + 2 = 1$ 이거나 $x = -1 - 2 = -3$ 이다.

(3) 근의 공식을 이용한 방법 : $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ 이므로

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 4}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ 이거나 $x = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ 이다.

예시 38) 이차방정식의 풀이 (2)

이차방정식

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

을 풀어보자.

(1) 인수분해를 이용한 방법 : 좌변을 인수분해하면

$$(x+3)^2 = 0$$

이 된다. 따라서 $x+3=0$ 이다. 그러므로 $x=-3$ 이다.

(2) 완전제곱식을 이용한 방법 : $2px = 6x$ 이므로 $p=3$ 이다.

$$(x+3)^2 = x^2+6x+9$$

이므로 원래 식의 상수항을 우변으로 옮기고 정리하면

$$\begin{aligned} x^2+6x &= -9 \\ x^2+6x+9 &= -9+9 \\ (x+3)^2 &= 0 \\ x+3 &= \pm\sqrt{0} \\ x+3 &= \pm 0 \\ x+3 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

이다.

(3) 근의 공식을 이용한 방법 : $a=1$, $b=6$, $c=9$ 이므로

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-6\pm\sqrt{0}}{2} \\ &= \frac{-6\pm 0}{2} \\ &= \frac{-6}{2} \\ &= -3 \end{aligned}$$

이다.

예시 39) 이차방정식의 풀이 (3)

이차방정식

$$x^2-2x+3=0$$

을 풀어보자.

(1) 인수분해를 이용한 방법 : 인수분해가 쉽게 되지 않는다. 따라서 인수분해를 이용한 방법을 사용할 수 없다.

(2) 완전제곱식을 이용한 방법 : $2px = -2x$ 이므로 $p = -1$ 이다.

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

이므로 원래 식의 상수항을 우변으로 옮기고 정리하면

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= -3 \\ x^2 - 2x + 1 &= -3 + 1 \\ (x-1)^2 &= -2 \\ x - 1 &= \pm\sqrt{-2} \\ x - 1 &= \pm\sqrt{2}i \\ x &= 1 \pm \sqrt{2}i \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x = 1 + \sqrt{2}i$ 이거나 $x = 1 - \sqrt{2}i$ 이다.

(3) 근의 공식을 이용한 방법 : $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}i}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}i = 1 + \sqrt{2}i$ 이거나 $x = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2}i = 1 - \sqrt{2}i$ 이다.

이 경우 근은 실수가 아니라 허수이다. 이처럼 허수인 근을 **허근**이라고 하고, 반면에 예제 37, 38에서처럼 실수인 근을 **실근**이라고 한다.

5.3 판별식

예제 37, 38, 39에서 보듯, 이차방정식의 해는 실수가 될 수도 있고 허수가 될 수도 있다. 또 해의 갯수가 두 개 일 수도 있고 한 개일 수도 있다. 이런 차이가 발생하는 까닭은 근의 공식에서 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ 의 값이 0이 될 수도 있고 0이 아닌

실수가 될 수도 있고 허수가 될 수도 있기 때문이다. 따라서 판별식 D를 다음과 같이 정의하고 이차방정식의 실수인 근의 갯수를 판별하는 용도로 쓴다.

정의 40) 판별식

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에 대한 판별식은

$$D = b^2 - 4ac$$

이다.

정리 41) 이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서

(1) $D > 0$이면 이차방정식은 두 실근을 가진다(예제 37).

(2) $D = 0$이면 이차방정식은 한 실근을 가진다(예제 38).

(3) $D < 0$이면 이차방정식은 두 허근을 가진다(예제 39).

(1)의 경우 의미를 강조하기 위해 "서로 다른 두 실근을 가진다"라고 말하기도 한다. 또 (2)의 경우에는 '중복된 근'이라는 의미에서 "**중근**을 가진다"고 말하기도 한다.

예시 42)

예제 37에서 이차방정식 $x^2 + 2x - 3 = 0$은 두 실근 $1, -3$을 가졌다. 실제로 판별식을 계산해보면 $a = 1, b = 2, c = -3$ 이므로

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$

이다. 따라서 두 실근을 가지는 것이 맞다.

예제 38에서 이차방정식 $x^2 + 6x + 9 = 0$은 한 실근 -3을 가졌다. 실제로 판별식을 계산해보면 $a = 1, b = 6, c = 9$ 이므로

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

이다. 따라서 한 실근을 가지는 것이 맞다.

예제 39에서 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$은 두 허근 $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$를 가졌다. 실제로 판별식을 계산해보면 $a = 1, b = 2, c = 3$ 이므로

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$$

이다. 따라서 두 허근을 가지는 것이 맞다.

5.4 근과 계수와의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α와 β라고 하자. 정리 41에 의해 $D>0$이면 두 근은 실수이고 $\alpha \neq \beta$이다. $D=0$이면 두 근은 실수이고 $\alpha=\beta$이다. $D<0$이면 두 근은 허수이고 $\alpha \neq \beta$이다. 이때 α, β와 a, b, c 사이에 다음 관계가 성립한다.

정리 43)

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

증명). 근의 공식에 의해

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다(또는 그 반대이다). 이를 바탕으로 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$를 계산하면 된다. □

6 이차방정식과 이차함수

6.1 이차함수

정의 44) 이차함수

함수 f가

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

꼴로 정의되어 있으면$(a\neq 0)$ f를 **이차함수**라고 부른다.

$f(x)=ax^2+bx+c$를 가끔씩은

$$y=ax^2+bx+c$$

로 쓰기도 한다.

예시 45)

(1) $f(x)=3x^2+2x+1$은 $a=3,\ b=2,\ c=1$인 이차함수이다.

(2) $y=2x^2-1$은 $a=2,\ b=0,\ c=-1$인 이차함수이다.

(3) $f(x)=4x+1$은 $a=0,\ b=4,\ c=1$이므로 이차함수가 아니다.

(4) $y=3$은 $a=0,\ b=0,\ c=3$이므로 이차함수가 아니다.

정의 46) 이차함수의 그래프

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는

$$y = ax^2 + bx + c$$

을 만족하는 점 (x, y) 들의 집합을 말한다.

예시 47)

$y = x^2$ 의 그래프는

$$y = x^2$$

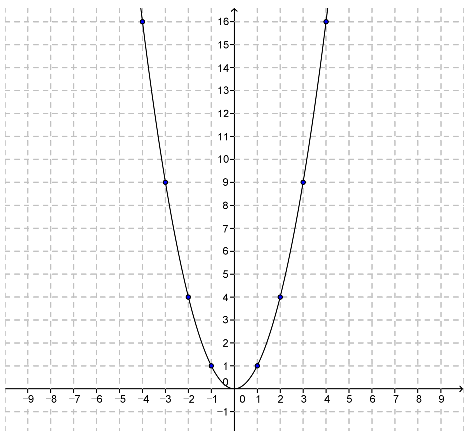
을 만족하는 점 (x, y) 들의 집합을 말한다.

예를 들어 $(0, 0)$ 은 $0 = 0^2$ 을 만족하므로 $y = x^2$ 의 그래프의 일부이다. 또 $(1, 1)$, $(2, 4)$ 도 $1 = 1^2$, $4 = 2^2$ 을 만족하므로 $y = x^2$ 의 그래프의 일부이다. 반면 $(1, 2)$ 는 $2 \neq 1^2$ 이므로 $y = x^2$ 의 그래프의 점이 아니다.

그래프 위에 있는 점들은 대략

$$(0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9), (4, 16), (-4, 16), \cdots$$

등이므로 좌표 평면 위에 $y = x^2$ 의 그래프를 나타내면



이다.

정리 48)

모든 이차함수

$$y = ax^2 + bx + c$$

는

$$y = a(x-p)^2 + q$$

꼴로 바꿀 수 있고 이때 이 이차함수의 그래프는 (p, q)를 꼭지점으로 하는 포물선이다. $a > 0$이면 그래프는 아래로 볼록이고, $a < 0$이면 그래프는 위로 볼록이다.

예시 49)

이차함수

$$y = x^2 + 4x + 2$$

의 그래프를 그려보자.

$$2px = 4x$$

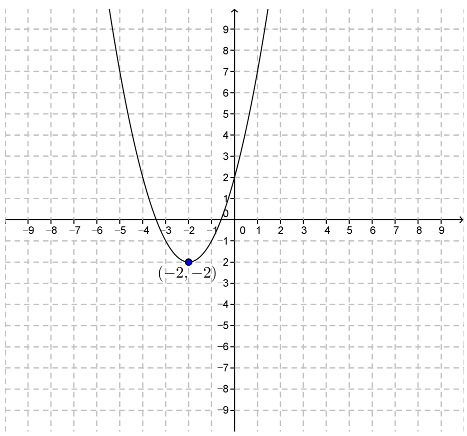
이므로 $p = 2$이고

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + 2 \\ &= (x^2 + 4x + 4) - 4 + 2 \\ &= (x+2)^2 - 2 \end{aligned}$$

이고 $a = 1$, $p = -2$, $q = -2$이다. 그러므로 그래프의 꼭지점은 $(-2, -2)$이고, $a > 0$이므로 아래로 볼록이다.



예시 50)

이차함수

$$y = 2x^2 + 8x + 8$$

의 그래프를 그려보자. 최고자항 $2x^2$의 계수 2로 묶으면

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 8x + 8 \\ &= 2(x^2 + 4x) + 8 \end{aligned}$$

이다.

$$2px = 4x$$

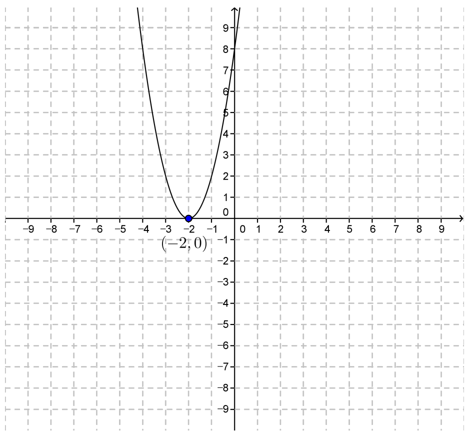
이므로 $p = 2$이고

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 4x) + 8 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 8 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 8 \\ &= 2(x+2)^2 \end{aligned}$$

이고 $a = 2$, $p = -2$, $q = 0$이다. 그러므로 그래프의 꼭지점은 $(-2, 0)$이고, $a > 0$ 이므로 아래로 볼록이다.



예시 51)

이차함수

$$y = -2x^2 + 4x - 3$$

의 그래프를 그려보자. 최고차항 $-2x^2$의 계수 -2로 묶으면

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x - 3 \\ &= -2(x^2 - 2x) - 3 \end{aligned}$$

이다.

$$2px = -2x$$

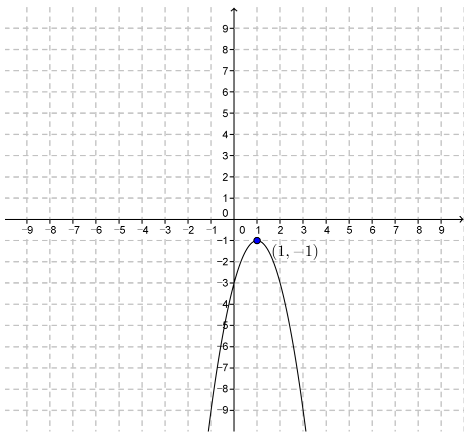
이므로 $p = -1$이고

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} y &= -2(x^2 - 2x) - 3 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 2 - 3 \\ &= -2(x-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

이고 $a = -2$, $p = 1$, $q = -1$이다. 그러므로 그래프의 꼭지점은 $(1, -1)$이고, $a < 0$이므로 위로 볼록이다.



6.2 이차함수의 그래프와 x축 사이의 위치관계

정리 52)

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$에 대해서 $D = b^2 - 4ac$이라고 하자.

그러면

(1) $D > 0$이면 이 이차함수의 그래프와 x축 사이의 교점은 두 개이다.

(2) $D = 0$이면 이 이차함수의 그래프와 x축 사이의 교점은 한 개이다(접한다).

(3) $D < 0$이면 이 이차함수의 그래프와 x축 사이의 교점은 없다.

예시 53)

예제 49의

$$y = x^2 + 4x + 2$$

에서 $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$이다. 따라서 $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8 > 0$이다. 정리 52의 (1)에 따르면 이 함수의 그래프와 x축과의 교점이 두 개여야 한다. 실제로 그래프와 x축 사이의 교점도 두 개이다.

예제 50의

$$y = 2x^2 + 8x + 8$$

에서 $a = 2$, $b = 8$, $c = 8$이다. 따라서 $D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$이다. 정리 52의 (2)에 따르면 이 함수의 그래프와 x축과의 교점이 한 개여야 한다. 실제로 그래프와 x축 사이의 교점도 한 개이다.

예제 51의

$$y = -2x^2 + 4x - 3$$

에서 $a = -2$, $b = 4$, $c = -3$이다. 따라서 $D = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 16 - 24 = -8 < 0$이다. 정리 52의 (3)에 따르면 이 함수의 그래프와 x축과의 교점이 없어야 한다. 실제로 그래프와 x축 사이의 교점은 없다.

6.3 이차함수의 그래프와 직선 사이의 위치관계

정리 54)

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프와 직선 $y = mx + n$을 생각하자. 두 식을 연립해서 얻어지는 방정식

$$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$$

에 대해

$$D = (b-m)^2 - 4a(c-n)$$

라고 할 때,

(1) $D > 0$ 이면 이 이차함수의 그래프와 직선 사이의 교점은 두 개이다.

(2) $D = 0$ 이면 이 이차함수의 그래프와 직선 사이의 교점은 한 개이다(접한다).

(3) $D < 0$ 이면 이 이차함수의 그래프와 직선 사이의 교점은 없다.

예시 55)

이차함수

$$y = x^2 + 4x + 2$$

와 세 개의 직선

$$y = 2x \tag{1}$$

$$y = 2x + 1 \tag{2}$$

$$y = 2x + 2 \tag{3}$$

을 생각하자.

(1)

$$x^2 + 4x + 2 = 2x$$

의 우변을 좌변으로 이항하면

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

이고 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$ 이다. 따라서 이차함수의 그래프와 직선 $y = 2x$ 사이의 교점은 없다.

(2)

$$x^2 + 4x + 2 = 2x + 1$$

의 우변을 좌변으로 이항하면

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

이고 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ 이다. 따라서 이차함수의 그래프와 직선 $y = 2x + 1$ 사이의 교점은 한 개이다.

(3)

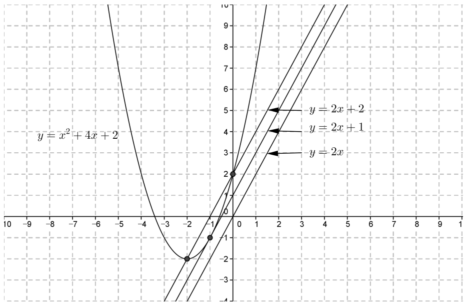
$$x^2 + 4x + 2 = 2x + 2$$

의 우변을 좌변으로 이항하면

$$x^2 + 2x = 0$$

이고 $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 > 0$ 이다. 따라서 이차함수의 그래프와 직선 $y = 2x + 2$ 사이의 교점은 두 개이다.

실제로 그래프들을 모두 그려보면 이므로 위 결론들이 모두 성립한다는 것을



알 수 있다.

6.4 이차함수의 최대와 최소

예시 56)

이차함수 $y = 2x^2 - 4x - 1$ 은

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x - 1 \\ &= 2(x^2 - 2x) - 1 \end{aligned}$$

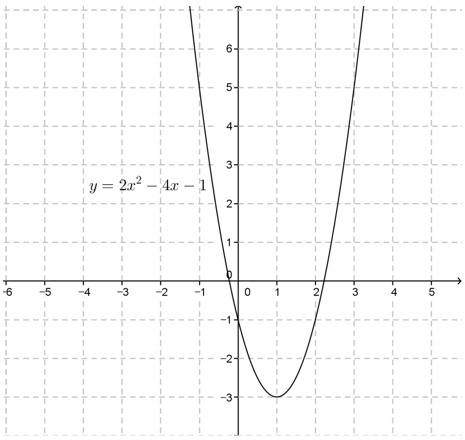
이고 $-2x = 2px$, $p = -1$, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 2x) - 1 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 1 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 - 1 \\ &= 2(x-1)^2 - 3 \end{aligned}$$

이다.

따라서 y 는 최솟값 -3 을 가진다.

이 함수의 최댓값은 없다.



7 고차방정식

예시 57)

고차방정식 $x^3-3x+2=0$을 풀어보자. 예시 23에서 x^3-3x+2가 $(x-1)^2(x+2)$로 인수분해 될 수 있음을 확인했으므로

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

이다. 따라서 $x-1=0$이거나 $x+2=0$이다. 즉 $x=1$이거나 $x=-2$이다.

예시 58)

고차방정식 $x^3-3x^2-x+3=0$을 풀어보자.

1	1	-3	-1	3
		1	-2	-3
	1	-2	-3	0

에 의해

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-x+3 &= (x-1)(x^2-2x-3) \\ &= (x-1)(x+1)(x-3)=0 \end{aligned}$$

이다.

따라서 $x=1$, $x=-1$, $x=3$이다.

고차방정식 $x^3-1=0$을 풀어보자. 정리 21의 (8)에 의해

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

이다. 따라서 $x-1=0$이거나 $x^2+x+1=0$이다. $x-1=0$이면 $x=1$이고 $x^2+x+1=0$이면 근의 공식에 의해 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

8 연립방정식

예시 59)

연립방정식

$$x-y+z=1 \tag{1}$$
$$x+2y-z=2 \tag{2}$$
$$-2x+y-3z=-4 \tag{3}$$

을 풀어보자.

(1)+(2)를 하면

$$2x+y=3 \tag{4}$$

이다. 3×(1)+(3)을 하면

$$x-2y=-1 \tag{5}$$

이다. 2×(4)+(5)를 하면

$$5x=5$$

가 되어 $x=1$이다. 이것을 다시 (4)에 대입하면 $y=1$이다. 또 $x=1$과 $y=1$을 (1)에 대입하면 $z=1$을 얻는다.

따라서 $x=1$, $y=1$, $z=1$이다.

예시 60)

연립방정식

$$x+y=1 \tag{1}$$
$$x^2+y^2=13 \tag{2}$$

을 풀어보자. (1) 에서

$$y = 1 - x \tag{3}$$

이다. 이를 (2) 에 대입하면

$$
\begin{gathered}
x^2 + (1 - x)^2 = 13 \\
x^2 + (x^2 - 2x + 1) = 13 \\
2x^2 - 2x - 12 = 0 \\
x^2 - x - 6 = 0 \\
(x - 3)(x + 2) = 0
\end{gathered}
$$

이므로 $x = -2$ 이거나 $x = 3$ 이다. $x = -2$ 이면 (3) 에 의해 $y = 1 - (-2) = 3$ 이고 $x = 3$ 이면 $y = 1 - 3 = -2$ 이다.

따라서 $x = -2$, $y = 3$ 이거나 $x = 3$, $y = -2$ 이다.