미적분 1 : 03 미분계수와 도함수

2022년 2월 26일

차 례

1 복습

예시 1) 직선의 기울기

(1) 직선 $y = 2x + 1$의 기울기는 2이고 y절편은 1이다. 이때 기울기란 직선이 기울어진 정도로서

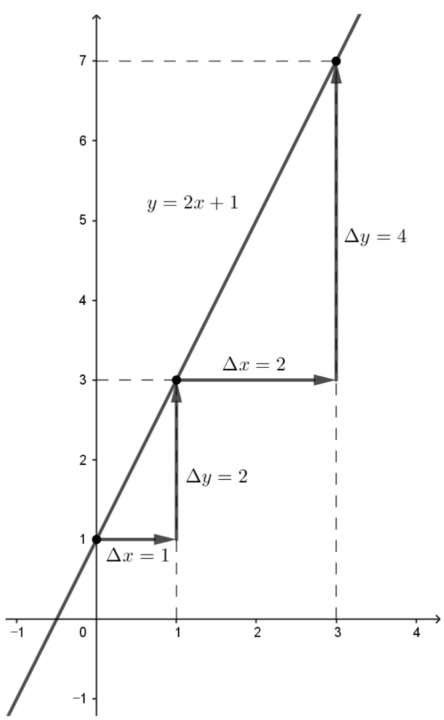
$$기울기 = \frac{x의\ 값의\ 증가량}{y의\ 값의\ 증가량}$$

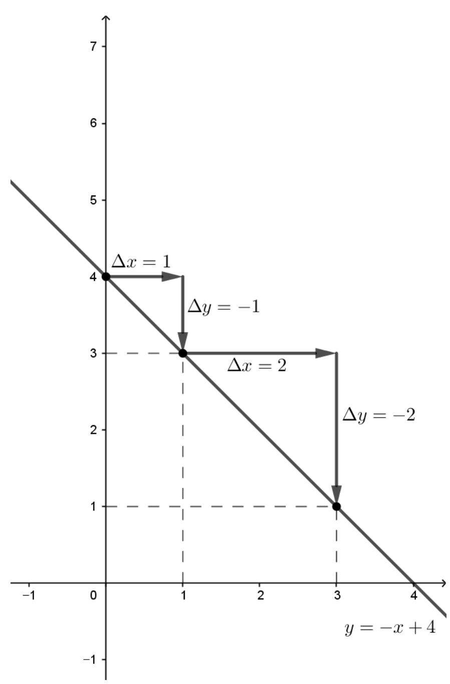
으로 계산한다. 이때 기울기는 항상 일정한 값 2를 가진다는 것을 관찰할 수 있다.

$$기울기 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}.$$

(2) 만약 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소한다면, y의 값의 증가량은 음수로 나타낸다. 예를 들어, 직선 $y = -x + 4$의 기울기는 -1이다.

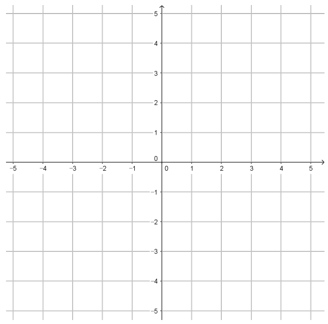
$$기울기 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = \frac{-2}{2}.$$



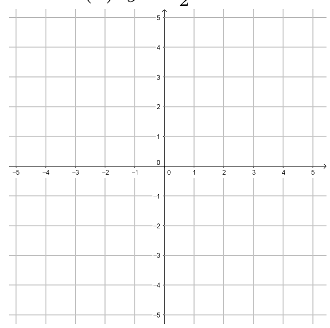


문제 2) 다음 직선들에 대하여 기울기를 계산하여라.

(1) $y = -3x + 1$



(2) $y = \frac{1}{2}x + 2$



예시 3) 이차함수 $y = x^2 + 2$ 위의 한 점 $(1, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

접선의 기울기를 m이라고 두면, 이 접선의 방정식을

$$y = m(x-1) + 3$$

이라고 둘 수 있다.

이때, 포물선과 직선이 접하기 위해서는 교점의 개수가 한 개여야 한다. 따라서 연립방정식

$$\begin{cases} y &= x^2 + 2 \\ y &= m(x-1) + 3 \end{cases}$$

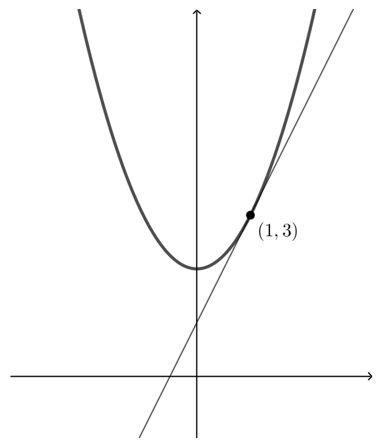
은 단 하나의 근을 가져야 한다. 즉 이차방정식

$$x^2 + 2 = mx - m + 3$$
$$x^2 - mx + m - 1 = 0$$

의 판별식의 값이 0이어야 한다;

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-1) = m^2 - 4m + 4 = 0$$

따라서 $m = 2$이고, 접선의 방정식은 $y = 2x + 1$이다.



문제 4) 이차함수 $y = -x^2 + 6x - 4$ 위의 한 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

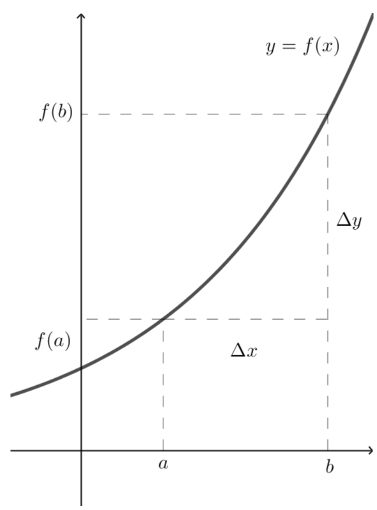
2 평균변화율

함수 $y = f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값 y는 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. 이때 x의 변화량인 $b-a$를 x의 증분, y의 변화량인 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라고 부르며 각각 Δx, Δy라고 표시한다.

$$\Delta x = b - a$$
$$\Delta y = f(b) - f(a)$$

이때, 평균변화율이란 Δy를 Δx로 나눈 값을 말한다;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$



예시 5) 다음 함수들에 대하여 $x = 1$에서 $x = 3$까지의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x) = 2x^2 + 1$ (2) $g(x) = 2x + 3$

$$\text{(1) 평균변화율} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{19-3}{2} = 8$$
$$\text{(2) 평균변화율} = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{9-5}{2} = 2$$

문제 6) 다음 함수들에 대하여 $x = -1$에서 $x = 3$까지의 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ (2) $g(x) = x^2$ (3) $h(x) = |2x-2| + 1$

3 순간변화율(미분계수)