미적분2 : 삼각함수의 덧셈공식과 활용

July 26, 2015

1 삼각함수의 덧셈공식

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{2}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{3}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{5}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{6}$$

증명. 생략. □

2 삼각함수의 배각 (삼배각) 공식

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{7}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{8}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{9}$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \tag{10}$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \tag{11}$$
$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^{\alpha}} \tag{12}$$

증명. (1), (3), (5) 에 β 대신 α 혹은 2α 를 넣어 정리하면 얻어진다. □

3 삼각함수의 반각공식

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{13}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \tag{14}$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \tag{15}$$

증명. (13), (14) 은 (8) 으로부터 당연하다. (15) 은 (13) 에서 (14) 을 나누면 얻어진다. □

4 곱을 합으로 바꾸는 공식

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big] \tag{16}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\big] \tag{17}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big] \tag{18}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big] \tag{19}$$

증명. (1), (2) 을 더하거나 빼고 2 로 나누면 (16), (17) 이 얻어진다. (3), (4) 을 더하거나 빼고 2 로 나누어 잘 정리하면 (18), (19) 이 얻어진다. □

5 합을 곱으로 바꾸는 공식

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{20}$$
$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{21}$$
$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{22}$$
$$\sin A+\sin B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{23}$$

증명. (16)–(19) 식에 $\alpha+\beta = A$, $\alpha-\beta = B$ 로 치환해 정리한다. 다시말해, $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ 를 대입해 정리한다. □