

준영 : 08 로그

2016년 11월 30일

차 례

차 례	1
1 복습	2
2 로그의 뜻	3
3 로그의 성질	6
4 계산 문제 연습	13
5 보충 · 심화 문제	18

1 복습

문제 1)

다음 빈칸에 들어갈 알맞은 수를 구하여라.

(1) $2^{\square} = 1$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\square} = 9$

(3) $(0.1)^{\square} = 10$

(4) $4^{\square} = \sqrt{2}$

답 : (1) (2) (3) (4)

2 로그의 뜻

예시 2)

어느 실험실에서 박테리아가 시간당 2배의 속도로 증식했다고 한다. 다음은 처음 1g이던 박테리아가 x 시간이 지난 후 증식한 양 2^x g을 표로 나타낸 것이다.

x 시간	1	2	3	...	6	...	
박테리아의 양(g)	2	4	8	512

- (1) 6시간이 지난 후의 박테리아의 양은 몇 g인가?
- (2) 박테리아의 양이 512g이 된 때는 처음으로부터 몇 시간이 흐른 때인가?
- (3) 박테리아의 양이 5g이 된 때는 처음으로부터 몇 시간이 흐른 때인가?

(1) 6시간이 지난 후의 박테리아의 양 2^6 g으로 64g이다.

(2) 박테리아의 양이 512g이 된 때가 처음으로부터 x 시간이 흐른 때라고 가정하면

$$2^x = 512$$

이다. 이를 만족하는 x 는 단 하나 존재하며, $x = 9$ 이면 식이 성립된다. 따라서 $x = 9$ 이다.

(3) 박테리아의 양이 5g이 된 때가 처음으로부터 x 시간이 흐른 때라고 가정하면

$$2^x = 5$$

이다. 이를 만족하는 x 는 단 하나 존재한다. 하지만 정확히 어떤 값인지는 알 수 없고, 그 값을 우리가 알고 있는 사칙연산이나 루트를 사용해 표현할 수는 없다. 따라서 새로운 기호를 도입해 $2^x = 5$ 를 만족하는 x 를

$$x = \log_2 5$$

로 쓴다.

정의 3) 로그의 정의

$a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때,

$$a^x = N \iff x = \log_a N$$

이다. 이때, a 를 밑, N 을 진수라고 한다.

예시 4)

(1)

$$2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$$

(2)

$$3^{-2} = \frac{1}{9} \iff -2 = \log_3 \frac{1}{9}$$

문제 5)

다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $5^3 = 125$

(2) $2^0 = 1$

(3) $2^{-2} = 0.25$

(4) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

문제 6)

다음 등식을 $a^x = N$ 의 꼴로 나타내어라.

(1) $\log_2 16 = 4$

(2) $\log_3 1 = 0$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

(4) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

예시 7)

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_2 32$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

(1) $\log_2 32 = x$ 로 놓으면

$$2^x = 32$$

이다. 이때 $32 = 2^5$ 이므로 $x = 5$ 이다.

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ 로 놓으면

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$$

이다. 이때 $27 = 3^3 = (3^{-1})^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 이므로 $x = -3$ 이다.

예시 8)

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_5 25$

(2) $\log_7 \frac{1}{49}$

답 : (1)

(2)

예시 9)

다음 등식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

(1) $\log_2 x = -5$

(2) $\log_x 27 = 3$

답 : (1)

(2)

3 로그의 성질

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a > 0, a \neq 1$ 일 때, $a^0 = 1, a^1 = a$ 이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

이다.

또 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때,

$$\log_a M = p, \quad \log_a N = q$$

로 놓으면 로그의 정의에 의해 $a^p = M, a^q = N$ 이다. 이때 지수법칙을 이용하면

$$MN = a^p a^q = a^{p+q}$$

이므로 로그의 정의를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$$

문제 10)

$a > 0, a \neq 0, M > 0, N > 0$ 일 때, 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ (2) $\log_a M^k = k \log_a M$

일반적으로 다음과 같은 로그의 성질이 성립한다.

정리 11) 로그의 성질 (1)

$a > 0, a \neq 0, M > 0, N > 0$ 일 때,

(1) $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$

(2) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(3) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(4) $\log_a M^k = k \log_a M$

예시 12)

(1) $\log_2 6 = \log_2 (2 \times 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3.$

(2) $\log_2 \frac{5}{2} = \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2 5 - 1.$

(3) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2}.$

문제 13)

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_5 25\sqrt{5}$

(2) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{0.0001}}$

답 : (1)

(2)

예시 14)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\log_2 12 + \log_2 \frac{1}{3}$

(2) $\log_2 6 - 2 \log_2 \sqrt{3}$

(1) $\log_2 12 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 (12 \times \frac{1}{3}) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2$

(2) $\log_2 6 - 2 \log_2 \sqrt{3} = \log_2 6 - \log_2 \sqrt{3}^2 = \log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$

답 : (1) 2 (2) 1

문제 15)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\log_3 6 + \log_3 \frac{1}{2}$

(2) $\log_3 45 - \log_3 5$

(3) $2 \log_5 \sqrt{15} - \log_5 3$

(4) $\log_2 12 + \log_2 6 - 2 \log_2 3$

답 : (1) (2)
(3) (4)

문제 16)

$\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, 다음을 a , b 로 나타내어라.

(1) $\log_5 4$

(2) $\log_5 10$

(3) $\log_5 12$

(4) $\log_5 \sqrt{15}$

답 : (1) (2)
(3) (4)

정리 17) 로그의 성질 (2), 밑의 변환공식

$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

증명)

$\log_a b = x, \log_c a = y$ 로 놓으면 $a^x = b, c^y = a$ 이므로

$$b = a^x = (c^y)^x = c^{xy}$$

따라서, 로그의 정의에 의해

$$\log_c b = xy = \log_a b \cdot \log_c a$$

이다. 그러므로

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

예시 18)

$$(1) \log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \frac{\log_7 3}{\log_7 2} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$(2) \log_2 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2}$$

문제 19)

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

(2) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 4$

답 : (1)

(2)

문제 20)

$\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$ 일 때, 다음을 a , b 로 나타내어라.

(1) $\log_2 3$

(2) $\log_3 \sqrt{8}$

답 : (1)

(2)

문제 21)

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, \neq 1$ 일 때 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

(2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

정리 22) 로그의 성질 (3)

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, \neq 1$ 일 때,

(1) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

(2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

4 계산 문제 연습

문제 23)

다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^5 = 32$

(2) $10^{-3} = 0.001$

(3) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$

문제 24)

다음 등식을 지수를 사용하여 나타내어라.

(1) $\log_3 81 = 4$

(2) $\log_{10} 0.0001 = -4$

(3) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

문제 25)

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_2 16$

(2) $\log_{0.5} 16$

(3) $\log_{0.25} 4$

(4) $\log_{125} \sqrt[3]{25}$

(5) $\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{32}$

(6) $\log_{49} \sqrt{343}$

문제 26)

다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

(1) $\log_3 x = 4$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$

(3) $\log_x 49 = 2$

(4) $\log_x \frac{1}{100} = -2$

(5) $\log_3(\log_2 x) = 1$

(6) $\log_2(\log_5 x) = 2$

문제 27)

다음 값을 구하여라.

(1) $\log_3 1$

(2) $\log_5 5$

(3) $\log_3 \frac{1}{81}$

(4) $\log_2 0.25$

문제 28)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\log_2 16 + \log_2 \frac{1}{8}$

(2) $\log_6 3 + \log_6 \sqrt{12}$

(3) $\log_2 \frac{4}{3} + 2 \log_2 12$

(4) $\log_2 \frac{2}{9} + 4 \log_2 \sqrt{12}$

(5) $\log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt{2}$

(6) $\log_3 \sqrt{27} - \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

(7) $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4$

(8) $\log_2 3 - \log_2 \frac{9}{2} + \log_2 12$

문제 29)

다음을 간단히 하여라.

(1) $9^{\frac{3}{2}} + \log_3 81$

(2) $\sqrt[3]{27} - \log_3 \sqrt{81}$

(3) $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} \times \log_3 81$

(4) $3^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{9}} + \log_2 8$

문제 30)

$\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a, b 로 나타내어라.

- (1) $\log_{10} 48$
- (2) $\log_{10} 5$
- (3) $\log_{10} \frac{1}{25}$
- (4) $\log_{10} 45$
- (5) $\log_{10} 0.072$
- (6) $\log_{10} \left(\frac{4}{5}\right)^3$
- (7) $\log_{10} \sqrt[4]{15}$

문제 31)

다음을 간단히 하여라

- (1) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$
- (2) $\log_{25} 9 \cdot \log_{27} 5$
- (3) $\log_5 3 \cdot \log_3 \sqrt{5}$
- (4) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$

문제 32)

$\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a, b 로 나타내어라.

- (1) $\log_2 3$
- (2) $\log_6 12$
- (3) $\log_2 \sqrt{27}$
- (4) $\log_3 \sqrt{18}$

문제 33)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\log_2 20 - \frac{1}{\log_5 2}$

(2) $\log_2(\log_2 3) + \log_2(\log_3 4)$

(3) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \cdots \times \log_{31} 32$

문제 34)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\log_{5^3} 5^4$

(2) $\log_8 2\sqrt{2}$

(3) $2^{\log_2 10}$

(4) $27^{\log_3 5}$

문제 35)

(1) $\log_4 2 + \log_{16} 2$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_7 \frac{1}{7}$

(3) $(\log_2 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$

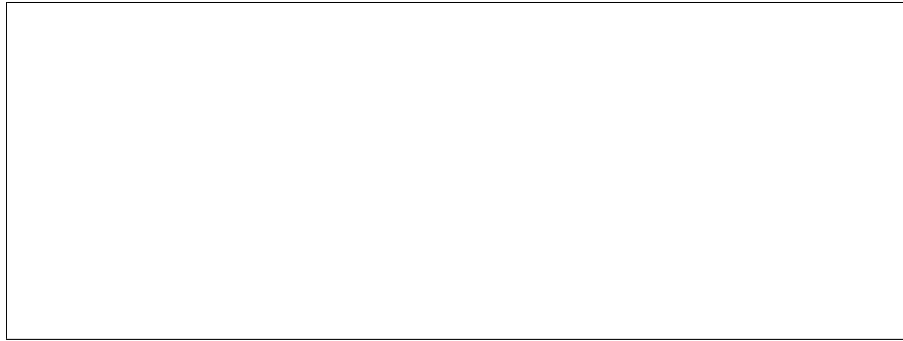
(4) $\log_5 3 \times (\log_3 \sqrt{5} - \log_{\frac{1}{9}} 125)$

5 보충 · 심화 문제

문제 36)

다음이 정의되도록 실수 x 의 값의 범위를 정하여라.

$$\log_{x-2} 5 - x$$



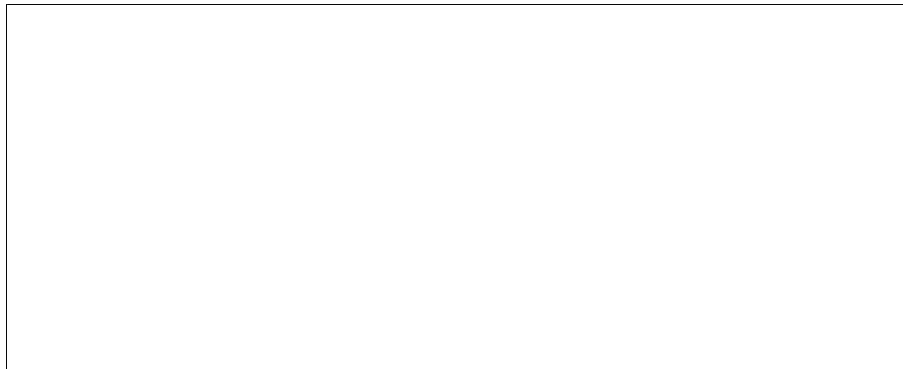
답 : ()

문제 37)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_3 6}$

(2) $(\log_3 8 + \log_9 4) \cdot \log_2 3$

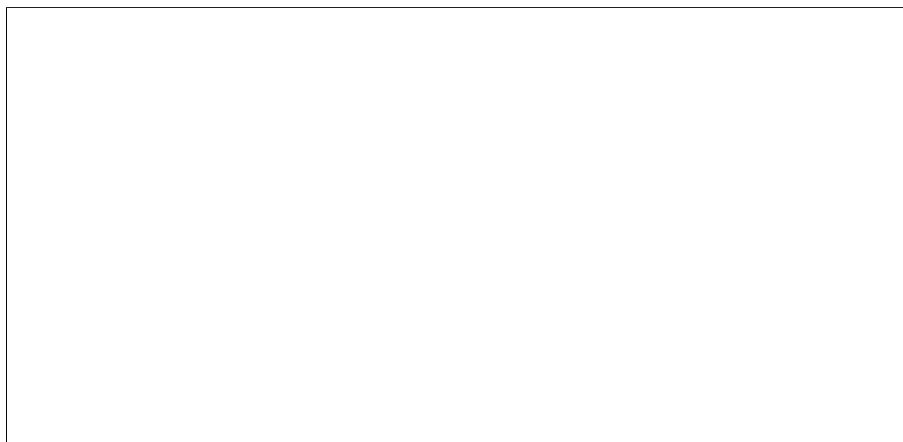


답 : (1) (2)

문제 38)

다음 값을 계산하여라.

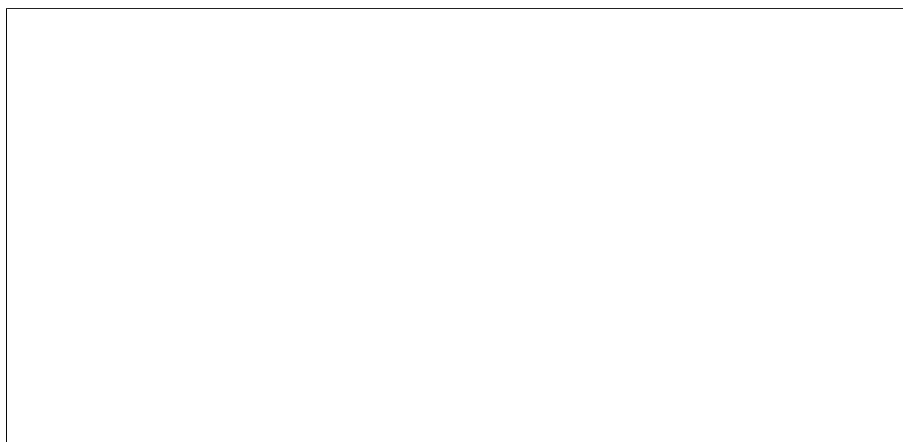
$$\log_2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{32}\right)$$



답 : ()

문제 39)

이차방정식 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하여라.



답 : ()

문제 40)

$a > 0, a \neq 1$ 인 실수 a 와 세 양의 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 = y^3 = z^4 = a$ 일 때, $\log_a xyz$ 의 값을 구하여라.

답

문제 1)

- (1) 0
- (2) -2
- (3) -1
- (4) $\frac{1}{4}$

문제 5)

- (1) $3 = \log_5 125$
- (2) $0 = \log_2 1$
- (3) $-2 = \log_2 0.25$
- (4) $\frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3}$

문제 6)

- (1) $2^4 = 16$
- (2) $3^0 = 1$
- (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
- (4) $9^{\frac{1}{2}} = 3$

문제 8)

- (1) 2
- (2) -2

문제 9)

- (1) $\frac{1}{32}$
- (2) 3

문제 10)

- (1)

$$\log_a M = p, \quad \log_a N = q$$

로 놓으면 로그의 정의에 의해 $a^p = M$, $a^q = N$ 이다.

이때 지수법칙을 이용하면

$$\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

이므로 로그의 정의를 이용하면

$$\log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$

이다.

- (2)

$$\log_a M = p$$

로 놓으면 로그의 정의에 의해 $a^p = M$ 이다. 양변에 k 제곱을 하면

$$(a^p)^k = M^k$$

$$a^{pk} = M^k$$

가 된다. 여기에 로그의 정의를 이용하면

$$\log_a M^k = pk = k \log_a M$$

이다.

문제 13)

- (1) $\frac{5}{2}$
- (2) 2

문제 15)

- (1) 1
- (2) 2

문제 16)

- (1) $2a$
- (2) $a + 1$
- (3) $2a + b$
- (4) $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$

문제 19)

- (1) 2
- (2) 1

문제 20)

- (1) $\frac{b}{a}$
- (2) $\frac{3a}{2b}$

문제 21)

- (1)

$$\begin{aligned}\log_{a^m} b^n &= \frac{\log_c b^n}{\log_c a^m} = \frac{n \log_c b}{m \log_c a} \\ &= \frac{m \log_c b}{n \log_c a} = \frac{m}{n} \log_a b\end{aligned}$$

- (2) $a^{\log_b c} = x$ 로 놓으면,

$$\log_b c = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

이고 이것을 정리하면

$$\log_b a = \frac{\log_b x}{\log_b c} = \log_c x$$

따라서

$$x = c^{\log_b a}$$

이고,

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

문제 23)

- (1) $\log_2 32 = 5$
- (2) $\log_{10} 0.001 = -3$
- (3) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$
- (4) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

문제 24)

- (1) $3^4 = 81$
- (2) $10^{-4} = 0.0001$
- (3) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- (4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

문제 25)

- (1) 4 (2) -4
- (3) -1
- (4) $\frac{2}{9}$
- (5) $\frac{5}{6}$
- (6) $\frac{3}{4}$

문제 26)

- (1) 81
- (2) $\frac{1}{8}$
- (3) 7
- (4) 10
- (5) 8
- (6) 625

문제 27)

- (1) 0
- (2) 1
- (3) -4
- (4) -2

문제 28)

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 4
- (4) 5
- (5) 1
- (6) 2
- (7) 1
- (8) 3

문제 29)

- (1) 31
- (2) 1
- (3) 2
- (4) 6

문제 30)

- (1) $4a + b$
- (2) $1 - a$
- (3) $2a - 2$
- (4) $-a + 2b + 1$
- (5) $3a + 2b - 3$
- (6) $9a - 3$
- (7) $\frac{1}{4}(-a + b + 1)$

문제 31)

- (1) 1
- (2) $\frac{1}{3}$
- (3) $\frac{1}{2}$
- (4) 2

문제 32)

- (1) $\frac{b}{a}$
- (2) $\frac{2a+b}{a+b}$
- (3) $\frac{3b}{2a}$
- (4) $\frac{a+2b}{2b}$

문제 33)

- (1) 2
- (2) 1
- (3) 5

문제 34)

- (1) $\frac{4}{3}$
- (2) $\frac{1}{2}$
- (3) 10
- (4) 125

문제 35)

- (1) $\frac{3}{4}$
- (2) -2
- (3) 2
- (4) 2

문제 36)

$$2 < x < 3 \text{ 또는 } 3 < x < 5$$

문제 37)

- (1) 1
- (2) 4

문제 38)

$$-5$$

문제 39)

$$14$$

문제 40)

$$\frac{13}{12}$$

