수학(하) : 07 도형의 이동

2018년 11월 5일

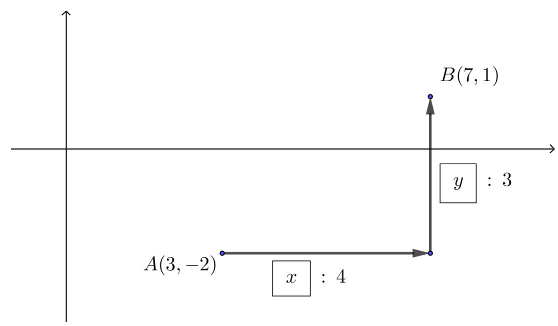
차 례

1 평행이동

1.1 점의 평행이동

예시 1)

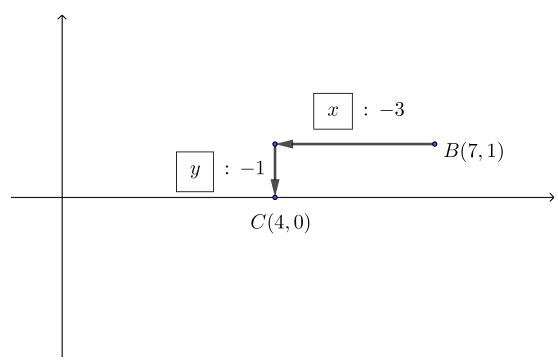
점 $A(3,-2)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시켜 얻은 점 B의 좌표를 구하여라.



답 : $B=(7,1)$

예시 2)

점 $B(7,1)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시켜 얻은 점 C의 좌표를 구하여라.



답 : $C=(4,0)$

정리 3) 점의 평행이동
점 (p,q)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키면 $(p+a, q+b)$가 된다.

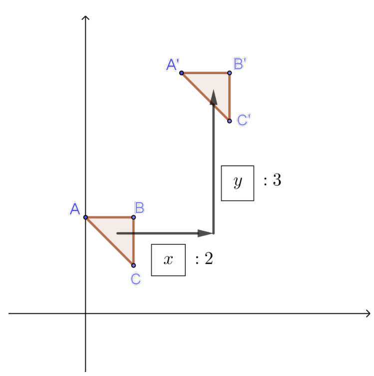
$$(p,q) \xrightarrow{\boxed{x}\,:\,a,\quad \boxed{y}\,:\,b} (p+a, q+b)$$

문제 4)
점 $(1,5)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시켜 얻은 점의 좌표를 구하여라.

문제 5)
점 $(a,2)$를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키면 $(1,5)$가 될 때, $a+b$의 값을 구하여라.

1.2 도형의 평행이동

예시 6)
$A(0,2)$, $B(1,2)$, $C(1,1)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형이 있다. 이 삼각형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키자.



새로운 삼각형은 $A'(2,5)$, $B'(3,5)$, $C'(3,4)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형이다.

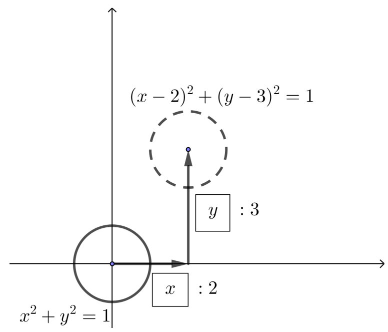
예시 7)

다음 식이 나타내는 도형들을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $x^2+y^2=1$, (2) $y=x^2$, (3) $y=2x$

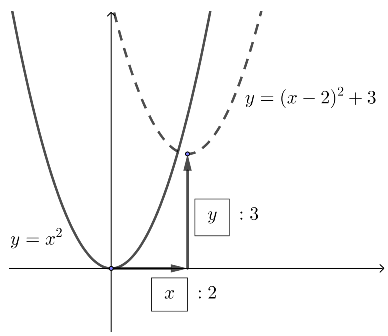
(1) 원의 중심은 $(0,0)$에서 $(2,3)$으로 이동한다. 원의 중심이 $(2,3)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-3)^2=1$$



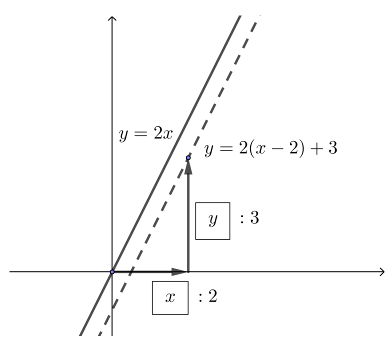
(2) 포물선의 꼭짓점은 $(0,0)$에서 $(2,3)$으로 이동한다. 꼭짓점이 $(2,3)$이고 $a=1$인 포물선의 방정식은

$$y=(x-2)^2+3$$



(3) $y=2x$의 위의 한 점 $(0,0)$은 $(2,3)$으로 이동한다. $(2,3)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2(x-2)+3$$



예시 7)를 요약하면

$$\begin{array}{ccc} x^2+y^2=1 & & (x-2)^2+(y-3)^2=1 \\ y=x^2 & \xrightarrow{\boxed{x}:2,\quad \boxed{y}:3} & y=(x-2)^2+3 \\ y=2x & & y=2(x-2)+3 \end{array}$$

이다. 잘 살펴보면 왼쪽 식들의 x 대신에 $x-2$를 대입하고, y 대신에 $y-3$을 대입하여 정리하면 오른쪽 식들이 나온다는 것을 알 수있다.

예를 들어 $y=x^2$에서 x 대신에 $x-2$를 대입하고, y 대신에 $y-3$을 대입하면

$$y-3=(x-2)^2$$

이다. 이것을 정리하면 $y=(x-2)^2+3$이 나온다.

$$\begin{array}{ccc} x^2+y^2=1 & & (x-2)^2+(y-3)^2=1 \\ y=x^2 & \xrightarrow{x\leftarrow x-2,\quad y\leftarrow y-3\ \text{대입}} & y=(x-2)^2+3 \\ y=2x & & y=2(x-2)+3 \end{array}$$

정리 8) 도형의 평행이동

도형 $C: f(x,y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키면 $C': f(x-a,\quad y-b)=0$이 된다.

$$f(x,y)=0 \quad \xrightarrow[x\leftarrow x-a,\quad y\leftarrow y-b\ \text{대입}]{\boxed{x}:a,\quad \boxed{y}:b} \quad f(x-a,\ y-b)=0$$

예시 9)

원 $x^2-4x+y^2=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하여라.

풀이1

원래의 식 $x^2-4x+y^2=0$에서 x 대신 $x+2$를, y 대신 $y-3$를 대입하면 된다.

$$x^2-4x+y^2=0 \quad \xrightarrow[x \leftarrow x+2, \quad y \leftarrow y-3 \text{ 대입}]{\boxed{x} : -2, \quad \boxed{y} : 3} \quad (x+2)^2-4(x+2)+(y-3)^2=0$$

오른쪽 식을 더 정리하면 $x^2+y^2-6y+5=0$이다.

풀이2

원의 방정식을 정리하면

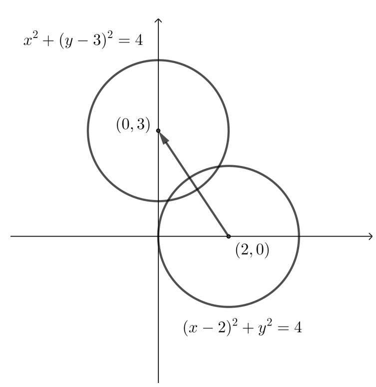
$$(x-2)^2+y^2=4$$

이므로 이 원은 중심이 $C(2,0)$에 있고 반지름의 길이가 2이다. 이 원을 평행이동하고 나면 원의 중심은 $C'(0,3)$이 되고 반지름의 길이는 여전히 2이다. 따라서

$$x^2+(y-3)^2=4$$

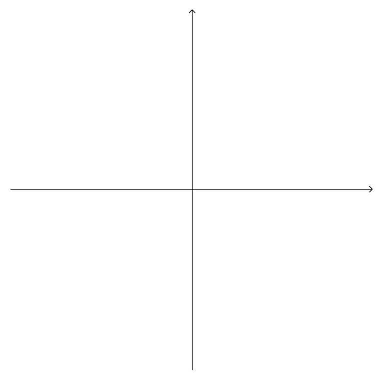
답 : $x^2+y^2-6y+5=0$ 혹은 $x^2+(y-3)^2=4$

예시 9)의 두 원을 그려보면 다음과 같다.



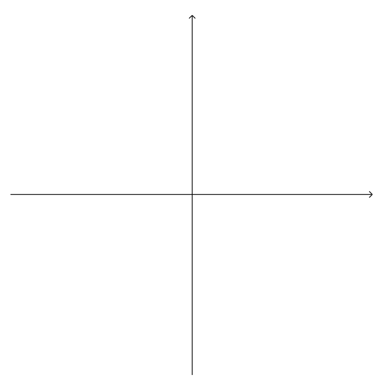
문제 10)

포물선 $y = x^2 - 4x + 3$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식을 구하고 그 그래프를 그려라.



문제 11)

직선 $y = -x + 2$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식을 구하고 그 그래프를 그려라.



2 대칭이동

2.1 점의 대칭이동

예시 12)

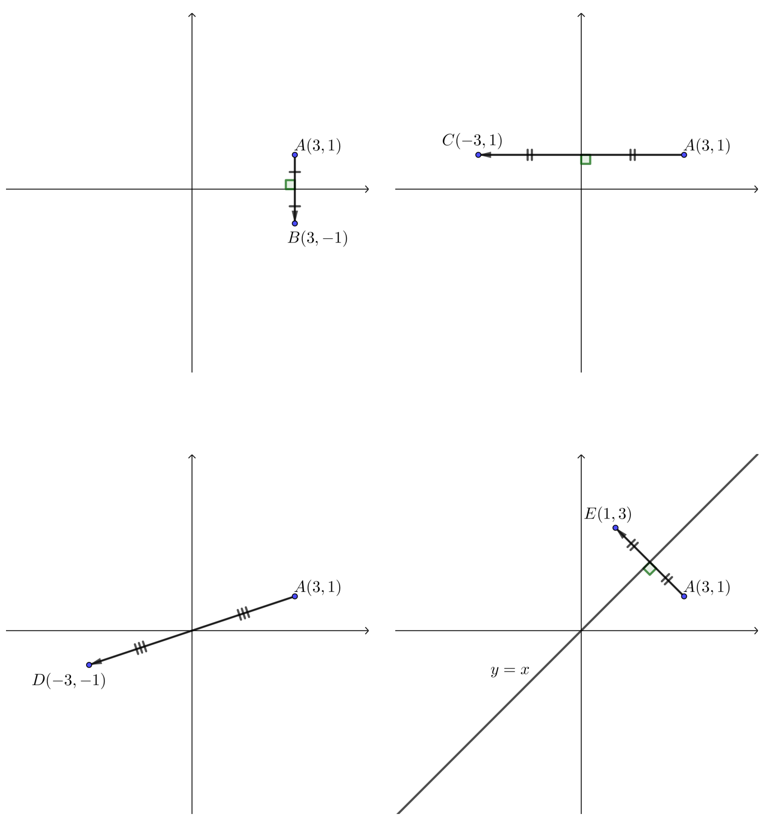
점 $A(3,1)$을

(1) x축에 대해 대칭이동한 점 B의 좌표를 구하여라.

(2) y축에 대해 대칭이동한 점 C의 좌표를 구하여라.

(3) 원점에 대해 대칭이동한 점 D의 좌표를 구하여라.

(4) 직선 $y=x$에 대해 대칭이동한 점 E의 좌표를 구하여라.



답 : (1) $B(3,-1)$,   (2) $C(-3,1)$,   (3) $D(-3,-1)$,   (4) $E(1,3)$

정리 13) 점의 대칭이동

점 (p, q)를 x축, y축, 원점, $y = x$에 대해 대칭이동시키면 각각 $(p, -q)$, $(-p, q)$, $(-p, -q)$, (q, p)가 된다.

$$
\begin{aligned}
(p, q) &\xrightarrow{x\text{축 대칭}} (p, -q) \\
(p, q) &\xrightarrow{y\text{축 대칭}} (-p, q) \\
(p, q) &\xrightarrow{\text{원점 대칭}} (-p, -q) \\
(p, q) &\xrightarrow{y=x\text{ 대칭}} (q, p)
\end{aligned}
$$

예시 14)

점 $A(-4, 2)$를 x축에 대칭이동시킨 점을 B, y축에 대해 대칭이동시킨 점을 C라고 할 때, B와 C의 좌표를 각각 구하여라.

예시 15)

점 $A(-2, 3)$를 x축, y축, 원점에 대해 대칭이동시킨 점을 각각 B, C, D라고 할 때, 삼각형 BCD의 넓이를 구하여라.

예시 16)

점 $(4, a+2)$를 x축에 대해 대칭이동한 점이 자기 자신일 때, a의 값을 구하여라.

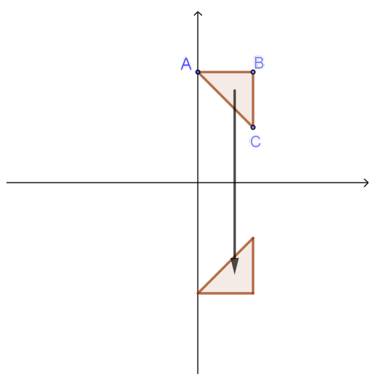
예시 17)

점 $A(1, 4)$를 직선 $y = x$에 대해 대칭이동한 점이 $B(a, b)$일 때, $a - b$의 값을 구하여라.

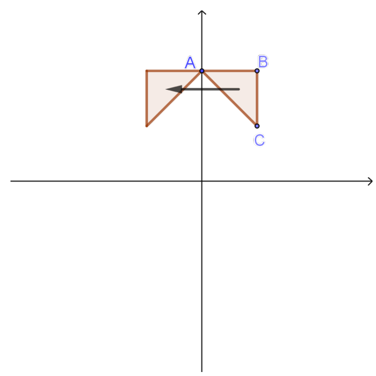
2.2 도형의 대칭이동

예시 18)

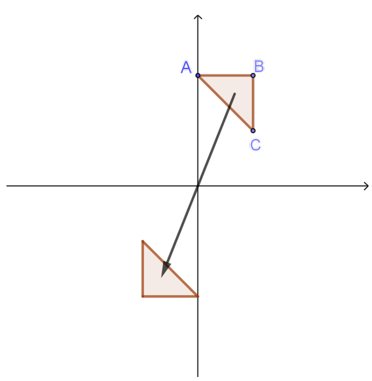
예시 6)에서의 삼각형 ABC를 각각 x축, y축, 원점, $y=x$에 대해서도 대칭이동시킬 수 있다.



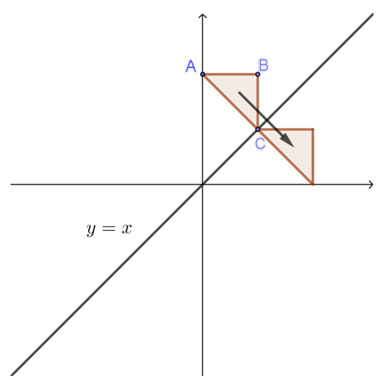
x축 대칭



y축 대칭



원점 대칭



$y=x$ 대칭

예시 19)

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=0$을

(1) x축에 대해, (2) y축에 대해, (3) 원점에 대해, (4) 직선 $y=x$에 대해

대칭이동시킨 원의 방정식을 각각 구하여라.

(1) 원의 중심은 $(3,-1)$이고 반지름의 길이는 1이므로

$$(x-3)^2+(y+1)^2=0$$

(2) 원의 중심은 $(-3,1)$이고 반지름의 길이는 1이므로

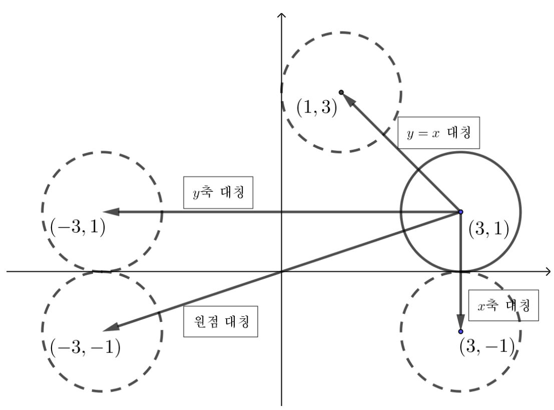
$$(x+3)^2+(y-1)^2=0$$

(3) 원의 중심은 $(-3,-1)$이고 반지름의 길이는 1이므로

$$(x+3)^2+(y+1)^2=0$$

(4) 원의 중심은 $(3,1)$이고 반지름의 길이는 1이므로

$$(x-3)^2+(y-2)^2=0$$



예시 19)를 요약하면

$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{x\text{축 대칭}} (x-3)^2+(y+1)^2=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{y\text{축 대칭}} (x+3)^2+(y-1)^2=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{\text{원점 대칭}} (x+3)^2+(y+1)^2=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{y=x\text{ 대칭}} (x-1)^2+(y-3)^2=0$$

이다. 잘 살펴보면 x축 대칭의 경우, 왼쪽 식의 y 대신에 $-y$를 대입한

$$(x-3)^2+(-y-1)^2=0$$

를 정리하면 오른쪽 식이 나온다는 것을 알 수있다. 즉,

$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{y \leftarrow -y \text{ 대입}} (x-3)^2+(y+1)^2=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{x \leftarrow -x \text{ 대입}} (x+3)^2+(y-1)^2=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{x \leftarrow -x,\quad y \leftarrow -y \text{ 대입}} (x+3)^2+(y+1)^2=0$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=0 \xrightarrow{x \leftarrow y,\quad y \leftarrow x \text{ 대입}} (x-1)^2+(y-3)^2=0$$

정리 20) 도형의 대칭이동

도형 $C: f(x,y)=0$을 각각 x축, y축, 원점, $y=x$에 대해 대칭이동시키면

$$f(x,y)=0 \xrightarrow[y \leftarrow -y \text{ 대입}]{x\text{축 대칭}} f(x,-y)=0$$
$$f(x,y)=0 \xrightarrow[x \leftarrow -x \text{ 대입}]{y\text{축 대칭}} f(-x,y)=0$$
$$f(x,y)=0 \xrightarrow[x \leftarrow -x,\quad y \leftarrow -y \text{ 대입}]{\text{원점 대칭}} f(-x,-y)=0$$
$$f(x,y)=0 \xrightarrow[x \leftarrow y,\quad y \leftarrow x \text{ 대입}]{y=x\text{ 대칭}} f(y,x)=0$$

예시 21)

직선 $y = 2x - 3$을

(1) x축에 대해, (2) y축에 대해, (3) 원점에 대해, (4) 직선 $y = x$에 대해

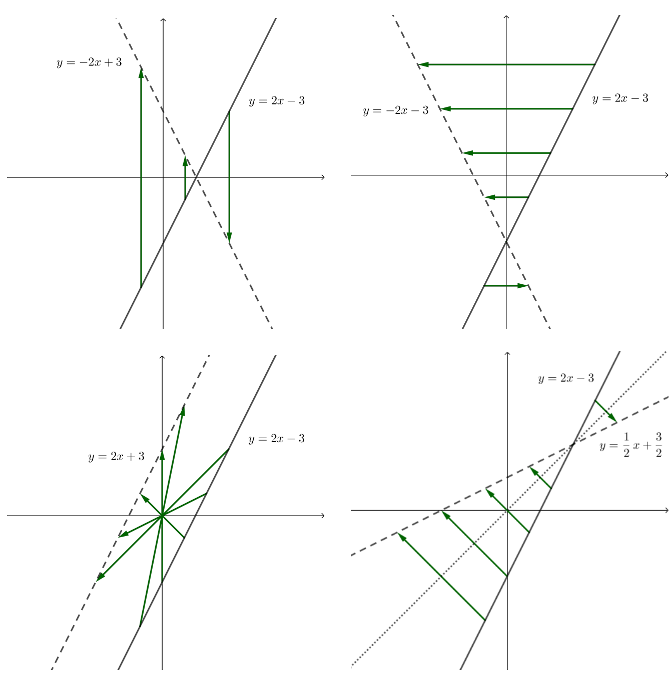
대칭이동시킨 직선의 방정식을 각각 구하여라.

(1) $y = 2x - 3 \xrightarrow[y \leftarrow -y \text{ 대입}]{x\text{축 대칭}} -y = 2x - 3$ 따라서 $y = -2x + 3$

(2) $y = 2x - 3 \xrightarrow[x \leftarrow -x \text{ 대입}]{y\text{축 대칭}} y = 2(-x) - 3$ 따라서 $y = -2x - 3$

(3) $y = 2x - 3 \xrightarrow[x \leftarrow -x, \quad y \leftarrow -y \text{ 대입}]{\text{원점 대칭}} -y = 2(-x) - 3$ 따라서 $y = 2x + 3$

(4) $y = 2x - 3 \xrightarrow[x \leftarrow y, \quad y \leftarrow x \text{ 대입}]{y=x \text{ 대칭}} x = 2y - 3$ 따라서 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

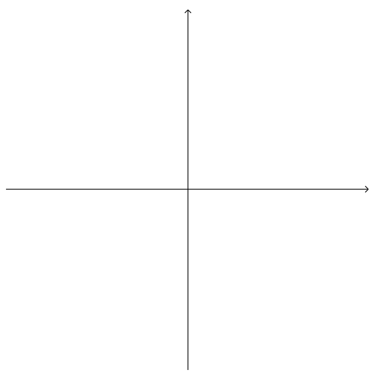


문제 22)

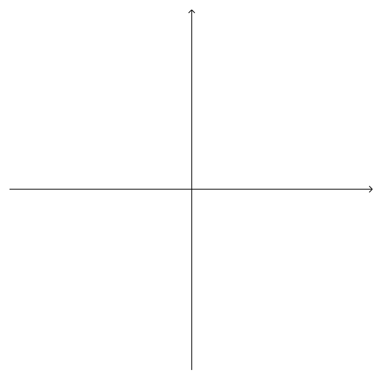
포물선 $y=(x-2)^2+3$을

(1) x축에 대해,   (2) y축에 대해,   (3) 원점에 대해

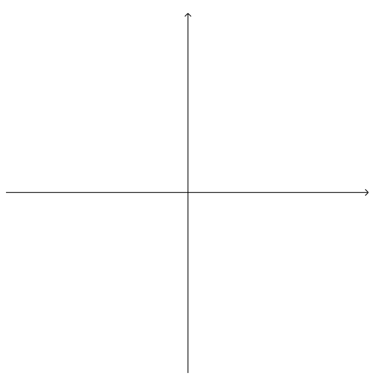
대칭이동시킨 포물선의 방정식을 각각 구하고, 그 그래프를 그려라.



(1)



(2)



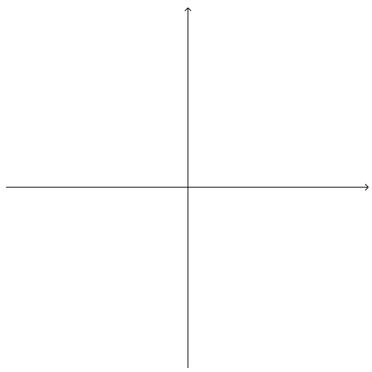
(3)

문제 23)

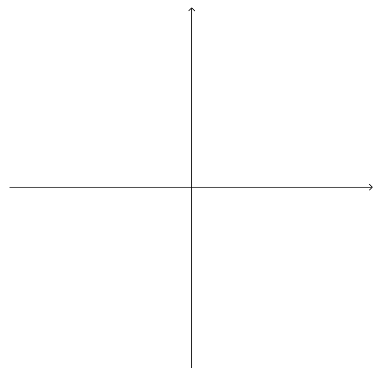
원 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$을

(1) x축에 대해, (2) y축에 대해, (3) 원점에 대해, (4) 직선 $y=x$에 대해

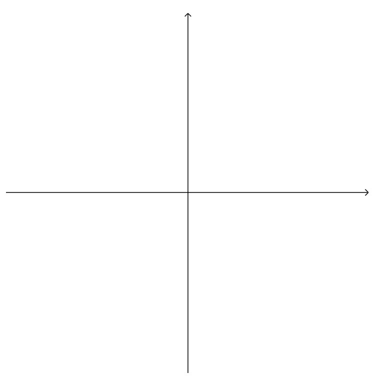
대칭이동시킨 원의 방정식을 각각 구하고, 그 그래프를 그려라.



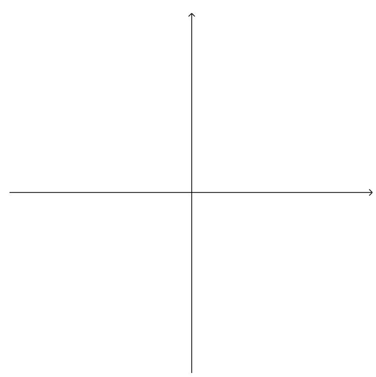
(1)



(2)



(3)



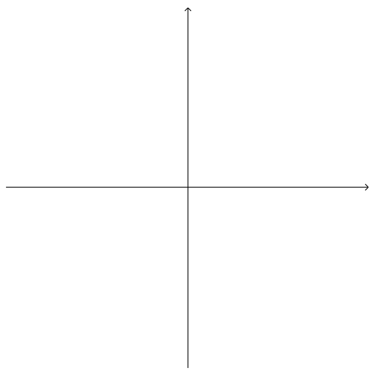
(4)

문제 24)

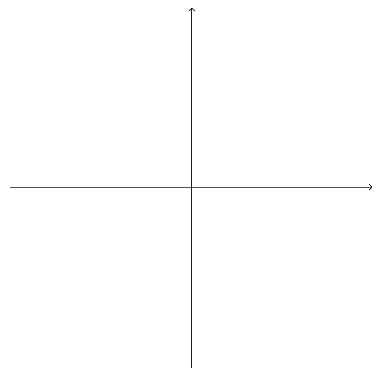
직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$을

(1) x축에 대해, (2) y축에 대해, (3) 원점에 대해, (4) 직선 $y=x$에 대해

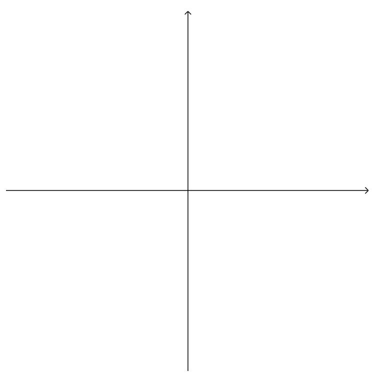
대칭이동시킨 직선의 방정식을 각각 구하고, 그 그래프를 그려라.



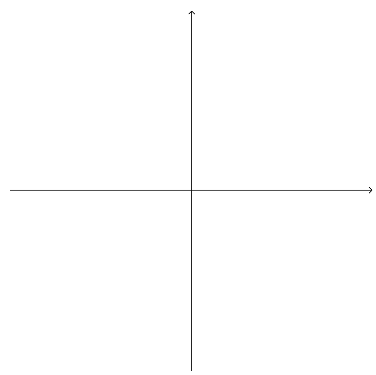
(1)



(2)



(3)



(4)

답

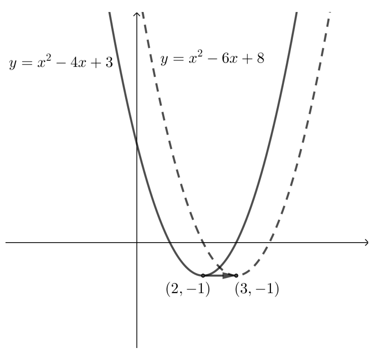
문제 4)

$(4, 2)$

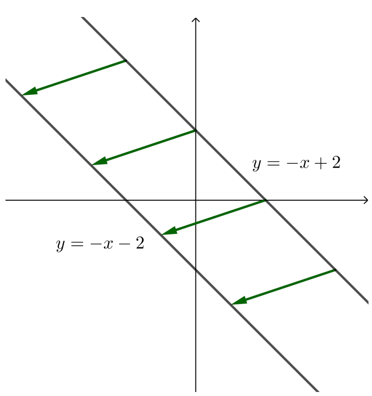
문제 5)

-1

문제 10) $y = x^2 - 6x + 8$



문제 11) $y = -x - 2$



문제 14)

$B = (-4, -2)$, $C = (4, 2)$

문제 15)

12

문제 16)

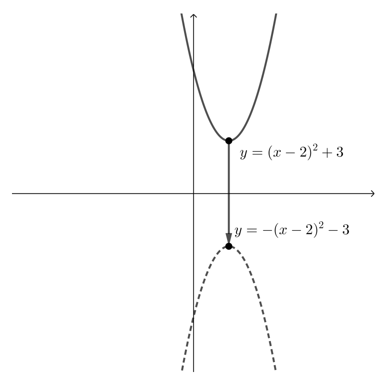
-2

문제 17)

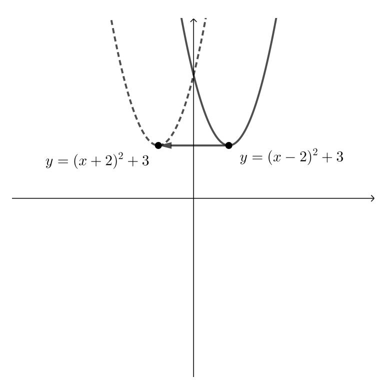
3

문제 22)

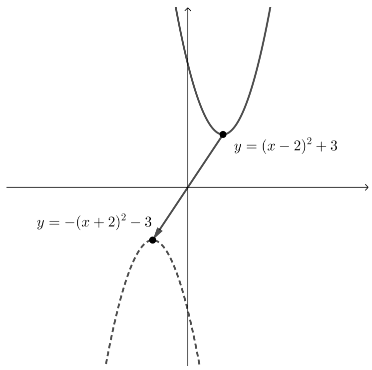
(1) $y = -(x-2)^2 - 3$



(2) $y = (x+2)^2 + 3$

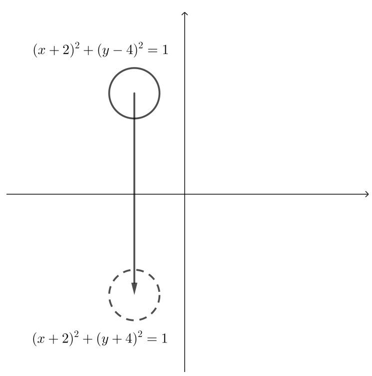


(3) $y = -(x+2)^2 - 3$

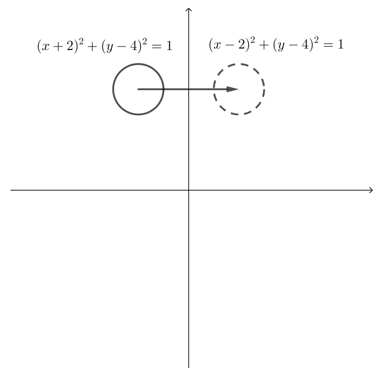


문제 23)

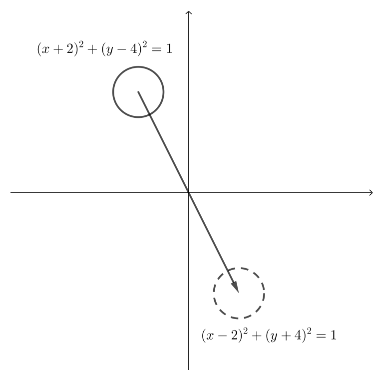
(1) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 1$



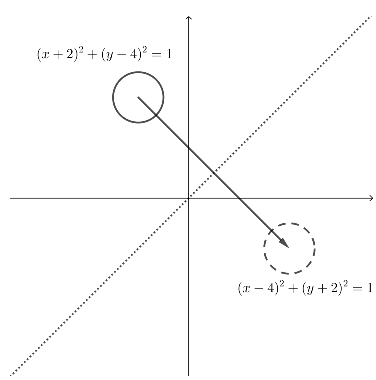
(2) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$



(3) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$

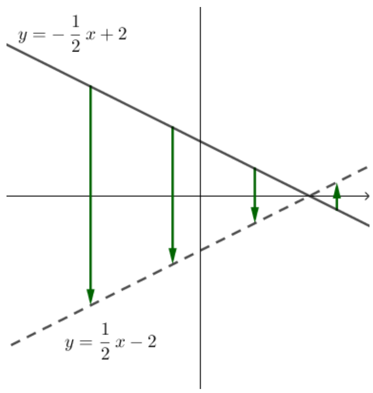


(4) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 1$

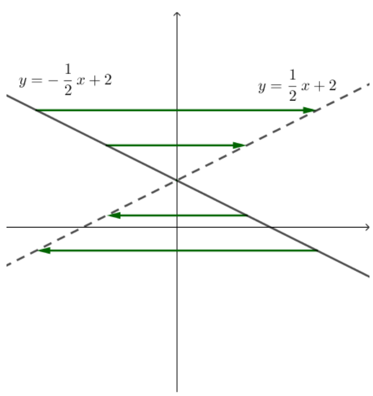


문제 24)

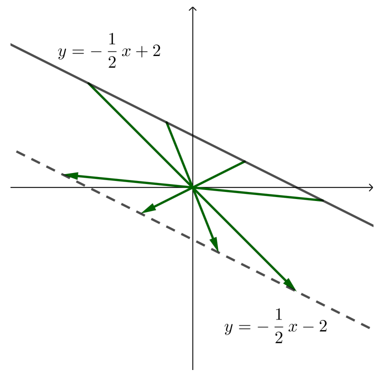
(1) $y = \frac{1}{2}x - 2$



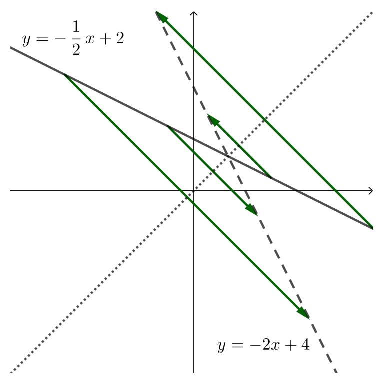
(2) $y = \frac{1}{2}x + 2$



(3) $y = -\frac{1}{2}x - 2$



(4) $y = -2x + 4$



요약

1. 평행이동

   1.1. 점의 평행이동

$$(p, q) \quad \xrightarrow{\boxed{x}:a,\quad \boxed{y}:b} \quad (p+a, q+b)$$

   1.2. 도형의 평행이동

$$f(x, y) = 0 \quad \xrightarrow[x \leftarrow x-a,\quad y \leftarrow y-b \text{ 대입}]{\boxed{x}:a,\quad \boxed{y}:b} \quad f(x-a, \quad y-b) = 0$$

2. 대칭이동

   2.1. 점의 대칭이동

$$\begin{aligned}
(p, q) &\xrightarrow{x\text{축 대칭}} (p, -q) \\
(p, q) &\xrightarrow{y\text{축 대칭}} (-p, q) \\
(p, q) &\xrightarrow{\text{원점 대칭}} (-p, -q) \\
(p, q) &\xrightarrow{y=x\text{ 대칭}} (q, p)
\end{aligned}$$

   2.2. 도형의 대칭이동

$$f(x, y) = 0 \quad \xrightarrow[y \leftarrow -y \text{ 대입}]{x\text{축 대칭}} \quad f(x, -y) = 0$$

$$f(x, y) = 0 \quad \xrightarrow[x \leftarrow -x \text{ 대입}]{y\text{축 대칭}} \quad f(-x, y) = 0$$

$$f(x, y) = 0 \quad \xrightarrow[x \leftarrow -x,\quad y \leftarrow -y \text{ 대입}]{\text{원점 대칭}} \quad f(-x, -y) = 0$$

$$f(x, y) = 0 \quad \xrightarrow[x \leftarrow y,\quad y \leftarrow x \text{ 대입}]{y=x\text{ 대칭}} \quad f(y, x) = 0$$