수학(하) : 09 명제

2018년 10월 12일

차 례

1 명제와 조건, 진리집합

예시 1)

(1) '참과 거짓을 분명하게 판별할 수 있는 문장이나 식'을 $\boxed{\text{명제}}$라고 한다.

p_1 : 산화반응이 일어나면 열이 발생한다.
p_2 : 9는 3의 배수이다.
p_2 : $4 \times 3 \leq 9$
p_3 : 서울에서 전주까지는 멀다.
p_4 : 연근조림은 맛있는 음식이다.

에서 p_1과 p_2는 참이고 p_3는 거짓이다. 따라서 p_1, p_2, p_3는 명제이다. 하지만 p_4와 p_5는 참인지 거짓인지 판단할 수 없으므로 명제가 아니다.

(2) 한편

p : x는 4의 약수이다.
q : $x^2 - 7x + 10 = 0$

와 같이 미지수 x가 포함된 경우, x의 값에 따라 참이 될 수도 있고 거짓이 될 수도 있다.* 따라서 명제는 아니다. 이처럼 미지수가 포함된 문장이나 식은 $\boxed{\text{조건}}$이라고 부른다.

(3) 조건 p를 만족시키는 x의 값에는 1, 2, 4가 있다. 이것들로 이루어진 집합

$$P = \{1, 2, 4\}$$

를 p의 $\boxed{\text{진리집합}}$이라고 부른다. 마찬가지로

$$Q = \{2, 5\}$$

이다.

---

* p의 경우, $x = 1$이면 참이다. $x = 2$이면 참이다. $x = 3$이면 거짓이다.
q의 경우, $x = 1$이면 거짓이다. $x = 2$이면 참이다. $x = 3$이면 거짓이다.

(4) x가 실수일 때, 두 조건 r, s를

r : $x^2 \geq 0$
s : $|x| + 1 = 0$

이라고 하자. r은 항상 성립하므로

$$R = U$$

이다. 또 s는 절대 성립할 수 없으므로

$$S = \varnothing$$

문제 2)

다음 중 명제의 개수를 a, 참인 명제의 개수를 b, 조건의 개수를 c라고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

p_1 : 염산의 pH는 7보다 크다.
p_2 : 삼각김밥은 맛있다.
p_3 : 이등변삼각형의 두 변의 길이는 같다.
p_4 : 세 변의 길이가 3, 5, 6인 삼각형은 예각삼각형이다.
p_5 : $4 + 7 > 10$
p_6 : $4 + x > 10$
p_7 : 모든 순환소수는 유리수이다.

문제 3)

x가 실수일 때, 다음 조건들의 진리집합을 구하여라.

p : x는 4의 배수이다.
q : $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
r : $x^2 - 4x + 4 \leq 0$
s : $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

2 부정

예시 4) 명제의 부정
명제 p의 부정은 $\sim p$로 표현한다.* 만약

p : 2는 4의 약수이다.

이면 p의 부정은

$\sim p$: 2는 4의 약수가 아니다.

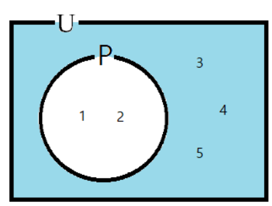
이다.

> **정리 5)**
> 명제 p에 대해
>
> - p가 참이면 $\sim p$는 거짓이다
> - p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

예시 6) 조건의 부정

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때,

$p : x < 3$



이면 $P = \{1, 2\}$이다. p의 부정은

$\sim p : x \geq 3$

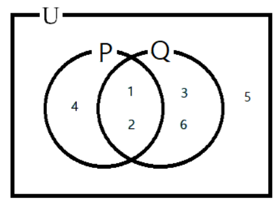
이고 $\sim p$의 진리집합은 $\{3, 4, 5\}$인데
이것은 P^c이다.

> **정리 7)**
> 조건 p에 대해
>
> - $\sim p$의 진리집합은 P^c이다.

*읽을 때는 'not p'라고 읽는다.

2.1 "또는"과 "그리고"의 부정

예시 8) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$일 때, 두 조건 p, q를



p : x는 4의 약수이다.
q : x는 6의 약수이다.

라고 하자.

두 조건 p, q로 만든 네 명제

p 또는 q	: x는 4의 약수이거나 6의 약수이다.
p 그리고 q	: x는 4의 약수이고 6의 약수이다.
$\sim p$ 또는 $\sim q$	: x는 4의 약수가 아니거나 6의 약수가 아니다.
$\sim p$ 그리고 $\sim q$	: x는 4의 약수가 아니고 6의 약수도 아니다.

를 생각하자.

'p 또는 q'의 부정은 진리집합이

$$(P \cup Q)^c$$

이다. 그런데 이것은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'의 진리집합인

$$P^c \cap Q^c$$

와 같다(드 모르간의 법칙). 따라서

$\boxed{p \text{ 또는 } q}$의 부정은 $\boxed{\sim p \text{ 그리고 } \sim q}$이다.

마찬가지로 생각하면

$\boxed{p \text{ 그리고 } q}$의 부정은 $\boxed{\sim p \text{ 또는 } \sim q}$이다.

정리 9)

- $\sim (p$ 또는 $q) \iff \sim p$ 그리고 $\sim q$
- $\sim (p$ 그리고 $q) \iff \sim p$ 또는 $\sim q$

문제 10) 다음 중 옳은 것을 고르시오.

① 삼각형 ABC는 예각삼각형이다. $\xrightarrow{\text{부정}}$ 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

② x는 9의 약수이다. $\xrightarrow{\text{부정}}$ x는 9의 배수이다.

③ $x < 3$ $\xrightarrow{\text{부정}}$ $x > 3$

④ $x = 1$ 또는 $x = 3$이다. $\xrightarrow{\text{부정}}$ $x \neq 1$ 또는 $x \neq 3$이다.

⑤ $x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$이다. $\xrightarrow{\text{부정}}$ $x > 1$이고 $x < 3$이다.

문제 11) 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $\sqrt{25}$는 무리수이다. (2) 11은 짝수이거나 3의 배수이다.

문제 12)

전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에서 두 조건

$$p : x \geq 2, \qquad q : x^2 + x - 6 = 0$$

의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 집합 P, Q 사이의 포함관계를 나타내시오.

문제 13)

조건 '$2 < x < 5$'의 부정을 말하여라.

2.2 “모든”과 “어떤”의 부정

예시 14) 다음 명제들에 대해 생각해보자.

p : 모든 자연수 x에 대하여 $x > 0$이다.*
q : 모든 자연수 x에 대하여 $x > 3$이다.

p는 참이다. 모든 자연수는 0보다 크기 때문이다. 하지만 q는 거짓이다.
3보다 크지 않은 자연수도 있기 때문이다.

r : 어떤 자연수 x에 대하여 $x^2 = 9$이다.**
s : 어떤 자연수 x에 대하여 $x^2 = 3$이다.

r은 참이다. $x = 3$이면 $x^2 = 9$를 만족시키기 때문이다. 하지만 s는 거짓이다.
자연수 중에서는 $x^2 = 3$을 만족시키는 수가 없기 때문이다.

이처럼 조건 $p(x)$에 대하여,

모든 x에 대하여 $p(x)$이다.   어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.

와 같은 명제를 만들 수 있다.

문제 15) 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + 1 > 0$이다.
(2) 어떤 자연수 x에 대하여 $x < 1$이다.
(3) 모든 실수 x에 대하여 $(x + 2)^2 - 1 > 0$이다.
(4) 어떤 실수 x에 대하여 $x(x - 1) = 0$이다.

문제 16) 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 소수는 홀수이다.
(2) 모든 직사각형은 사다리꼴이다.
(3) 어떤 이등변삼각형은 정삼각형이다.
(4) 어떤 홀수는 24의 약수이다.

---

*임의의 자연수 x에 대하여 $x > 0$이다.   등으로 표현되기도 한다.
x가 자연수이면 $x > 0$이다.
자연수 x의 값에 관계없이 $x > 0$이다.

**$x^2 = 9$를 만족시키는 자연수 x가 존재한다.   등으로 표현되기도 한다.
적어도 한 개 이상의 자연수 x에 대해 $x^2 = 9$이다.

예시 17) 세 학생 A, B, C에 대해, 다음 명제들을 생각하자.*

p : 모든 학생은 남자이다.
q : 어떤 학생은 남자이다.
r : 모든 학생은 여자이다.
s : 어떤 학생은 여자이다.

예를 들어

① 셋 다 남자이면,
p는 참이고, q도 참이다. 하지만 r은 거짓이고 s도 거짓이다.

② A, B는 남자, C는 여자이면,
p는 거짓이고, q는 참이다. 또 r은 거짓이고 s는 참이다.

발생할 수 있는 모든 경우를 아래에 표현해보면

	A	B	C	p	q	r	s
①	남	남	남	참	참	거짓	거짓
②	남	남	여	거짓	참	거짓	참
③	남	여	남				
④	남	여	여				
⑤	여	남	남				
⑥	여	남	여				
⑦	여	여	남				
⑧	여	여	여				

이다. (빈 칸을 모두 채워보자.)

*모든 학생은 남자 아니면 여자라고 가정하자.

정리하면,

- p는 ①이면 참이고 ②~⑧이면 거짓이다.
- q는 ①~⑦이면 참이고 ⑧이면 거짓이다.
- r는 ①~⑦이면 거짓이고 ⑧이면 참이다.
- s는 ①이면 거짓이고 ②~⑧이면 참이다.

따라서 p의 부정은 s이다. 또 q의 부정은 r이다.

$\boxed{\text{모든 학생은 남자이다}}$의 부정은 $\boxed{\text{어떤 학생은 여자이다}}$

$\boxed{\text{어떤 학생은 남자이다}}$의 부정은 $\boxed{\text{모든 학생은 여자이다}}$

x를 A, B, C 중에 하나라고 하고, $p(x)$를

$p(x)$: x는 남자이다.

라고 하면 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$\boxed{\text{모든 } x\text{에 대해 } p(x)\text{이다}}$의 부정은 $\boxed{\text{어떤 } x\text{에 대해 } \sim p(x)\text{이다}}$

$\boxed{\text{어떤 } x\text{에 대해 } p(x)\text{이다}}$의 부정은 $\boxed{\text{모든 } x\text{에 대해 } \sim p(x)\text{이다}}$

정리 18)

- $\sim$ (모든 x에 대하여 $p(x)$이다.) $\iff$ 어떤 x에 대하여 $\sim p(x)$이다.
- $\sim$ (어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.) $\iff$ 모든 x에 대하여 $\sim p(x)$이다.

문제 19) 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $x^2 > 0$이다.

(2) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 = 10$이다.

3 $p \to q$ 꼴의 명제

예시 20)

(1) 두 조건 p, q에 대하여 'p이면 q이다'꼴의 명제가 있다.
이때 p를 $\boxed{\text{가정}}$, q를 $\boxed{\text{결론}}$이라고 부른다. 예를 들어

봄이 오면 꽃이 핀다.

에서의 가정은 '봄이 온다'이고 결론은 '꽃이 핀다'이다. 또

n이 4의 약수이면 n은 8의 약수이다.

에서의 가정은 'n이 4의 약수이다.'이고 결론은 'n이 8의 약수이다.'이다.

(2) 위의 명제

n이 4의 약수이면 n은 8의 약수이다.

은 참이다. 가정 p와 결론 q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면,

$$P = \{1, 2, 4\}, \quad Q = \{1, 2, 4, 8\}$$

이다. 즉 $P \subset Q$가 성립한다.

(3) 하지만

n이 4의 약수이면 n은 6의 약수이다.

는 거짓이다. 이 경우

$$P = \{1, 2, 4\}, \quad Q = \{1, 2, 3, 6\}$$

이므로 $P \not\subset Q$이다. 이 명제가 거짓인 이유는 $n = 4$인 경우가 있기 때문이다. 이처럼, p는 만족시키지만 q는 만족시키지 않는 예를 $\boxed{\text{반례}}$라고 부른다.*

*따라서 반례는 $P \cap Q^c$의 원소이다.

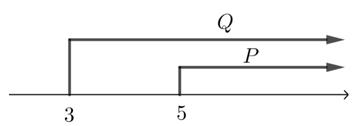
정리 21)

- $P \subset Q$이면 명제 $p \to q$는 참이다.
- $P \not\subset Q$이면 명제 $p \to q$는 거짓이다.

예시 22) 다음 명제의 참 거짓을 판별하고, 거짓인 경우 반례를 들어라.

(1) $x > 5$이면 $x > 3$이다, (2) $x^2 = 25$이면 $x = 5$이다

(1) $P = \{x \mid x > 5\}$, $Q = \{x \mid x > 3\}$ 이다. 따라서 $P \subset Q$가 성립하며 주어진 명제는 참이다.



(2) $P = \{-5, 5\}$, $Q = \{5\}$ 이다. 따라서 $P \subset Q$가 성립하지 않으며 주어진 명제는 거짓이다. 이때 반례는 -5이다.

답 : (1) 참, (2) 거짓 (반례 : -5)

문제 23) 다음 명제의 참 거짓을 판별하여라.

(1) $2x - 1 = 3$이면 $x^2 - 5x + 6 = 0$이다

(2) $x^2 + 2x - 3 > 0$이면 $x + 1 > 0$이다.

문제 24) 다음 중에서 명제 'x와 y가 무리수이면 xy는 무리수이다.'의 반례가 될 수 있는 것은?

① $x = 1$, $y = 2$ ② $x = 2$, $y = \sqrt{2}$ ③ $x = \sqrt{3}$, $y = 1$

④ $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. ⑤ $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2} - 1$

3.1 역과 대우

정의 25)
주어진 명제 $p \to q$에서

- 명제 $q \to p$를 $p \to q$의 $\boxed{\text{역}}$이라고 한다.
- 명제 $\sim q \to \sim p$를 $p \to q$의 $\boxed{\text{대우}}$이라고 한다.

예시 26)

n이 4의 약수이면 n은 8의 약수이다.

의 역은

n이 8의 약수이면 n은 4의 약수이다.

이고, 대우는

n이 8의 약수가 아니면 n은 4의 약수가 아니다.

이다.

문제 27) 다음 명제의 역과 대우를 각각 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하시오.

(1) $x^2 - 2x = 0$이면 $x = 2$이다.

(2) $x^2 < 16$이면 $-4 < x < 4$이다.

$p \to q$가 참이려면 $P \subset Q$이어야 하고, $q \to p$가 참이려면 $Q \subset P$이어야 하며, $\sim q \to \sim p$가 참이려면 $Q^c \subset P^c$이어야 한다.

$P \subset Q$인 것과 $Q \subset P$인 것은 서로 관련이 없지만, $P \subset Q$인 것과 $Q^c \subset P^c$는 완전히 같은 상태를 가리킨다. 따라서

정리 28)

- 명제 $p \to q$가 참이라고 해서 그 역이 반드시 참인 것은 아니다.
- 명제 $p \to q$가 참이면 그 대우도 참이다.
- 명제 $p \to q$가 거짓이면 그 대우도 거짓이다.

3.2 필요조건과 충분조건

정의 29)

(1) 명제 $p \to q$가 참이면

$$p \Longrightarrow q$$

로 나타낸다. 이때,

p는 q이기 위한 $\boxed{\text{충분조건}}$이다.

q는 p이기 위한 $\boxed{\text{필요조건}}$이다.

라고 말한다.

(2) 명제 $p \to q$와 $q \to p$가 모두 참이면, 즉 $p \Longrightarrow q$이면서 $q \Longrightarrow p$이면

$$p \iff q$$

로 나타낸다. 이때,

p는 q이기 위한 $\boxed{\text{필요충분조건}}$이다.*

라고 말한다.

참고 30)

p : n은 4의 배수이다.
q : n은 짝수이다.

에서 $p \Longrightarrow q$가 성립한다.

(1) p는 q이기 위한 충분조건이다.
n이 4의 배수인 것은 n이 짝수이기 위해서 이미 충분한 조건이기 때문이다.

(2) q는 p이기 위한 필요조건이다.
n은 짝수인 것은 n이 4의 배수가 되기 위해서 필요한 조건이기 때문이다.

**'p와 q가 동치이다.' 라고도 말한다.

4 정의, 정리, 증명

수학의 모든 논리체계는 정의와 정리, 증명으로 이루어져있다.

- 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 $\boxed{\text{정의}}$라고 한다.
- 참인 명제들 중 기본이 되는 명제들을 $\boxed{\text{정리}}$라고 한다.
- 어떤 명제가 참임을 논리적으로 밝히는 과정을 $\boxed{\text{증명}}$이라고 한다.

문제 31) 다음 중 정의와 정리를 구분하여라.

(1) 이등변삼각형이란, 두 변의 길이가 같은 삼각형을 말한다.

(2) 삼각형의 세 각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

(3) $a \neq 0$ 일 때, $ax^2 + bx + c = 0$ 꼴의 방정식을 이차방정식이라고 한다.

(4) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다.

예시 32) a, b, c가 10보다 작은 자연수일 때,

$a+b+c$가 3의 배수이면, 세자리 자연수 $a\,b\,c_{(10)}$ 가 3의 배수이다.*

를 증명하여라.

> $a + b + c$가 3의 배수라고 가정하자. 따라서 $a + b + c = 3k$(k는 자연수) 라고 놓을 수 있다. 그러면
>
> $$a\,b\,c_{(10)} = 100a+10b+c = 99a+9b+(a+b+c) = 99a+9b+3k = 3(33a+3b+k)$$
>
> 이므로 $a\,b\,c_{(10)}$ 도 3의 배수이다. $\square$**

*(10)표시는 십진법으로 표현되었다는 의미이다. $a \times b \times c$와 구분하기 위하여 썼다.

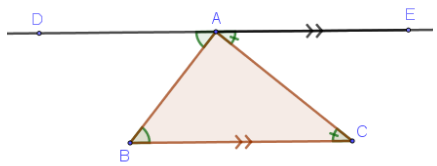
**증명이 끝났다는 것을 기호 $\square$ 혹은 'Q.E.D.'로 표시하기도 한다.

문제 33) 다음은

삼각형의 세 각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

를 증명하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 채워 넣어라.

삼각형 ABC의 한 꼭짓점 A를 지나고 선분 BC에 평행한 직선 위에 다음과 같이 두 점 D, E를 잡자.



두 엇각의 크기는 서로 같으므로

$$\angle ABC = \boxed{(가)} \tag{1}$$
$$\angle ACB = \boxed{(나)} \tag{2}$$

따라서

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB \overset{(1),(2)}{=} \boxed{(가)} + \angle BAC + \boxed{(나)} = 180°$$

이다. 즉 삼각형의 세 각의 크기를 모두 더하면 $180°$ 이다. □

예시 32)와 문제 33) 에서 사용한 증명방법을 $\boxed{\text{직접증명법}}$이라고 한다. 가정 p에서 출발하여 q에 도달시키면 명제 $p \to q$가 증명된다.

한 번에 결론으로 도달하지 못하고 여러 단계를 거쳐야 하는 경우도 있다. 이 때에는 $p \to q$이 참이고 $q \to r$가 참이면 $p \to r$가 참이라는, '삼단논법'에 의해 차근차근 단계를 밟아가면서 증명할 수 있다.

반면 $\boxed{\text{간접증명법}}$에는 $\boxed{\text{대우를 이용한 증명}}$과 $\boxed{\text{귀류법}}$ 등이 있다.

4.1 대우를 이용한 증명

명제 $p \to q$를 증명할 때, 주어진 명제를 증명하는 대신 대우를 증명하는 방법이다. 정리 28)에 따르면 대우 명제가 참이면 원래 명제도 참이므로, 대우만 증명해도 원래 명제가 참임을 알 수 있다.

예시 34) n이 자연수일 때,

n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

가 참임을 증명하여라.

이 명제의 대우인 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'가 참임을 보이면 된다. n이 홀수이면 $n = 2k - 1$이다(단, k는 자연수). 그러면

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

이므로 n^2은 홀수이다. $\square$

문제 35) n이 자연수일 때,

n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다

가 참임을 증명하여라.

4.2 귀류법

명제 $p \to q$를 증명할 때, 결론을 부정하여 가정과의 모순*을 이끌어내어 증명하는 방법이다.

결론을 부정(Q^c)하여 가정(P)과의 모순$(\varnothing)$을 이끌어내면, $P \cap Q^c = \varnothing$이 성립한다는 뜻이다. 이것은 곧 $P - Q = \varnothing$이라는 말이고, 즉 $P \subset Q$가 성립한다는 뜻이다. 따라서 귀류법을 통해 명제 $p \to q$를 증명할 수 있다.

예시 36) a, b, c가 정수일 때,

> $ax^2 + bx + c = 0$이 정수인 근을 가지면 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다.

를 증명하여라.

결론을 부정하여 a, b, c가 모두 홀수라고 가정하자.

- 만약 근이 짝수이면 ax^2은 짝수, bx는 짝수, c는 홀수이다. 그러면 $ax^2 + bx + c$는 홀수가 되어 0이 될 수 없다.
- 만약 근이 홀수이면 ax^2은 홀수, bx는 홀수, c는 홀수이다. 그러면 $ax^2 + bx + c$는 홀수가 되어 0이 될 수 없다.

따라서 근은 짝수도 아니고 홀수도 아니다. 이것은 $ax^2 + bx + c = 0$이 정수인 근을 가진다는 가정에 모순이다.

따라서 a, b, c 중 적어도 하나는 짝수이다. □

*$p \to q$꼴의 명제가 아닐 경우 이미 알려져 있는 사실과의 모순을 이끌어내도 된다.

정의 37)

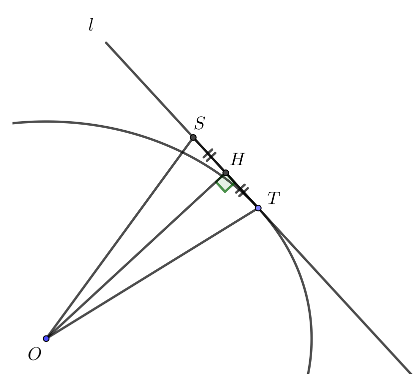
- 원이란, 평면 위의 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점들의 모임이다.
- 원의 접선이란, 원과 한 점에서 만나는 직선을 말한다.

문제 38) 다음은

원의 접선은 접선에서 그은 반지름과 수직이다.

를 증명하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 채워 넣어라.

아래 그림과 같이 원 O와 직선 l이 T에서 접한다고 하자.



주어진 명제를 부정하여 접선 l과 반지름 $\overline{OT}$가 수직하지 않는다고 가정하자. 원의 중심 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H \neq T$이다. T의 반대편에 $\overline{TH} = \overline{SH}$를 만족시키는 점 S를 직선 l 위에 잡으면, $\overline{OH}$는 공통, $\angle OHT = \angle OHS$, $\overline{TH} = \overline{SH}$로부터

$$\triangle OTH \equiv \boxed{\text{(가)}} (SAS)$$

이다. 따라서 $\overline{OT} = \boxed{\text{(나)}}$이다. 이것은 S가 원 O 위의 점이라는 뜻이며 S가 원 O와 직선 l의 교점이라는 뜻이다. 즉, 원 O와 직선 l은 두 개의 교점 T, S을 가지게 되므로, 직선 l이 접선이라는 사실에 모순이다.

따라서 접선 l과 반지름 $\overline{OT}$는 수직하다. □

5 부등식의 증명

5.1 산술-기하 부등식

예시 39)

(1) 2와 8의 평균은 무엇일까? 보통은 $\frac{2+8}{2} = 5$로 계산하여 5가 평균이라고 말한다. 이 평균을 $\boxed{\text{산술평균}}$이라고 부른다.

(2) 한편, $2 = 2^1$, $2 = 2^3$으로 생각하면, 2와 8의 평균으로 $2^2 = 4$를 말할 수도 있다. 이 평균은 $\boxed{\text{기하평균}}$이라고 부른다.

(3) 마지막으로 두 수의 역수인 $\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{8}$의 평균이 어떤 수의 역수인지 생각해 볼수도 있다.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{h}$$

으로부터 $h = \frac{16}{5}$이다. 이 평균을 $\boxed{\text{조화평균}}$이라고 부른다.

문제 40) 2와 18의 산술평균, 기하평균, 조화평균을 구하여라.

정의 41) 산술평균, 기하평균, 조화평균

$a > 0$, $b > 0$일 때,
$\frac{a+b}{2}$를 산술평균, $\sqrt{ab}$를 기하평균, $\frac{2ab}{a+b}$를 조화평균이라고 한다.*

*세 양수 a, b, c에 대하여, $\frac{a+b+c}{3}$를 산술평균, $\sqrt[3]{abc}$를 기하평균, $\frac{3abc}{ab+bc+ca}$를 조화평균이라고 한다.

예시 39)에서 평균들의 대소관계를 비교해보면 산술평균(5)이 제일 크고, 기하평균(4)이 중간이며, 조화평균($\frac{16}{5}$)이 가장 작다. 일반적으로도 다음 관계가 성립한다.

정리 42) $a > 0$**,** $b > 0$**일 때,***

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{일때 성립})$$

증명) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab}$이므로 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$를 증명해도 된다.

$$(a+b)^2 - \left(2\sqrt{ab}\right)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$$

이므로 증명되었다. (단, 등호는 $a = b$일때 성립한다.)

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \iff (a+b)\sqrt{ab} \geq 2ab \iff a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

에서 마지막 식을 증명하였으므로 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$도 증명한 셈이 된다. □

정리 42)을 조금 변형한 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$는 자주 쓰이는 중요한 부등식이다.

정리 43) 산술–기하 부등식

$a > 0$, $b > 0$일 때,

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

이다. (단, 등호는 $a = b$일 때, 성립)

**세 양수 a, b, c에 대하여

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3abc}{ab+bc+ca} \quad (\text{단, 등호는 } a = b = c \text{일때 성립})$$

5.2 코시–슈바르츠 부등식

정리 44) 코시–슈바르츠 부등식*
a, b, x, y가 모두 실수일 때,

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

이다. (단, 등호는 $a:b=x:y$일 때, 성립)

증명)

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \\
=&(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2) \\
=&a^2y^2-2abxy+b^2x^2 \\
=&(ay-bx)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

(단, 등호는 $ay=bx$일 때, 즉 $a:b=x:y$일 때 성립) □

***a, b, c, x, y, z가 모두 실수일 때,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

이다. (단, 등호는 $a:b:c=x:y:z$일 때, 성립)

답

문제 2) 9

	명제	참/거짓	조건
p_1	○	거짓	
p_2			
p_3	○	참	
p_4	○	거짓	
p_5	○	참	
p_6			○
p_7	○	참	

$a = 5$, $c = 3$, $c = 1$. $\therefore a + b + c = 9$

문제 3)

$P = \{4, 8, 12, \cdots\}$
$Q = \{0, 2, 4\}$
$R = \{2\}$
$S = U$

문제 10) ⑤

①: '삼각형 ABC는 예각삼각형이 아니다.'
②: 'x는 9의 약수가 아니다.'
③: '$x \geq 3$'
④: '$x \neq 1$ 이고 $x \neq 3$이다.'

문제 11)

(1) $\sqrt{25}$는 무리수가 아니다.(참)

(2) 11은 짝수도 아니고 3의 배수도 아니다.(참)

문제 12) $Q \subset P$

문제 13) $x \leq 2$ 또는 $x \geq 5$

문제 15)
(1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

문제 16)
(1) 거짓 (2) 참 (3) 참 (4) 참

예시 17)

	p	q	r	s
③	거짓	참	거짓	참
④	거짓	참	거짓	참
⑤	거짓	참	거짓	참
⑥	거짓	참	거짓	참
⑦	거짓	참	거짓	참
⑧	거짓	거짓	참	참

문제 19)

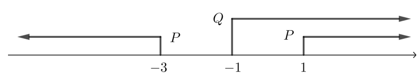
(1) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 \leq 0$이다. (참)

(2) 모든 실수 x에 대하여 $x^2 = 10$이다. (거짓)

문제 23)

(1) 참

(2) 거짓



문제 24) ④

문제 27)

(1) 역 : $x = 2$이면 $x^2 - 2x = 0$이다.(참)
대우 : $x \neq 2$이면 $x^2 - 2x \neq 0$이다.(거짓)

(2) 역 : $-4 < x < 4$이면 $x^2 < 16$이다.(참)
대우 : $x \leq -4$이거나 $x \geq 4$이면 $x^2 \geq 16$이다.(참)

문제 31)

(1) 정의

(2) 정리

(3) 정의

(4) 정리

문제 33)
(가) : $\angle BAD$, (나) : $\angle CAE$

문제 35)
이 명제의 대우인 'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'가 참임을 보이면 된다. n이 3의 배수가 아니면 n은 $3k-2$꼴이거나 $3k-1$꼴이다(단, k는 자연수).

- $n = 3k - 2$이면

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-2)^2 = 9k^2 - 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 - 4k + 1) + 1 \end{aligned}$$

- $n = 3k - 1$이면

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 - 2k) + 1 \end{aligned}$$

이다. 두 경우 모두 n^2은 3의 배수가 아니다. □

문제 38)
(가) : $\triangle OSH$, (나) : $\overline{OS}$

문제 40)

- 산술평균 : 10
- 기하평균 : 6
- 조화평균 : $\frac{18}{5}$

요약

1. 명제와 조건, 진리집합

   - 3은 6의 약수이다. $\cdots\cdots\cdots$ 명제(참)
   - 4는 6의 약수이다. $\cdots\cdots\cdots$ 명제(거짓)
   - x는 6의 약수이다. $\cdots\cdots\cdots$ 조건
     $\Rightarrow$ 진리집합 $= \{1,2,3,6\}$

2. 부정

   - $\sim (p$ 또는 $q) \iff \sim p$ 그리고 $\sim q$
   - $\sim (p$ 그리고 $q) \iff \sim p$ 또는 $\sim q$
   - $\sim \big($모든 x에 대하여 $p(x)$이다.$\big) \iff$ 어떤 x에 대하여 $\sim p(x)$이다.
   - $\sim \big($어떤 x에 대하여 $p(x)$이다.$\big) \iff$ 모든 x에 대하여 $\sim p(x)$이다.

3. $p \to q$꼴의 명제

   - $P \subset Q$이면 $p \to q$가 참이다$(p \Longrightarrow q)$.
     $P \not\subset Q$이면 $p \to q$가 거짓이다$(p \not\Longrightarrow q)$.
   - 역 : $q \to p$, 대우 : $\sim q \to \sim p$
   - $p \Longrightarrow q$이면 p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건
   - $p \iff q$이면 p는 q이기 위한 필요충분조건

4. 정의, 정리, 증명

   - 직접증명법 – 삼단논법
   - 간접증명법 – 대우를 이용한 증명, 귀류법

5. 부등식의 증명

   - 산술–기하 부등식 : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
     (단, 등호는 $a = b$일 때 성립)
   - 코시–슈바르츠 부등식 : $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
     (단, 등호는 $a : b = x : y$일 때 성립)