수학 2 : 지수

2017년 1월 26일

차 례

1 복습

문제 1) 다항식의 전개

다음 식을 전개하시오.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

답 : (   )

문제 2) 인수분해

다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3-b^3 (2) x^3-27

(3) x^2-1 (4) x^4-16

기본적인 인수분해 공식

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

문제 3) 이차방정식

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2 - x - 2 = 0$ (2) $x^2 - x - 1 = 0$ (3) $x^2 - x + 2 = 0$

(4) $x^2 = 4$ (5) $x^2 = 0$ (6) $x^2 = -4$

답 : (1) $x =$ **(2)** $x =$ **(3)** $x =$

(4) $x =$ **(5)** $x =$ **(6)** $x =$

이차방정식의 풀이

(1) 이차방정식 $x^2 = A$의 근은

$$x = \pm\sqrt{A}$$

(2) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

2 거듭제곱근

예시 4) 3의 제곱근

제곱해서 3이 되는 수를 '3의 제곱근' 이라고 한다. 즉 $x^2 = 3$의 근인데 이것을 풀면

$$\begin{aligned} x^2 &= 3 \\ x^2 - 3 &= 0 \\ (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) &= 0 \\ x &= -\sqrt{3}, \sqrt{3} \end{aligned}$$

그러므로 3의 제곱근은 $\sqrt{3}$와 $-\sqrt{3}$의 두 개이다.

3의 제곱근 $\Rightarrow$ 제곱해서 3이 되는 수 $\Rightarrow$ $x^2 = 3$

예시 5) -3의 제곱근

-3의 제곱근은 제곱해서 -3이 되는 수이다. 즉 $x^2 = -3$의 근인데 이것을 풀면

$$x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$$

이다. 따라서 -3의 제곱근은 $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$의 두 개이다.

-3의 제곱근 $\Rightarrow$ 제곱해서 -3이 되는 수 $\Rightarrow$ $x^2 = -3$

문제 6)

(1) 4의 제곱근을 구하여라.

답 : (   )

(2) 8의 제곱근을 구하여라.

답 : (   )

(3) 0의 제곱근을 구하여라.

답 : (   )

(4) -4의 제곱근을 구하여라.

답 : (   )

예시 7) 8의 세제곱근

세제곱해서 8이 되는 수를 8의 세제곱근이라고 한다. 즉 $x^3 = 8$의 근인데 이것을 풀면

$$x^3 = 8$$
$$x^3 - 8 = 0$$
$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$
$$x = 2 \text{ 이거나 } x^2+2x+4 = 0$$

$x^2+2x+4=0$에서 근의공식을 쓰면

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

이다. 따라서 8의 세제곱근은 2, $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$의 세 개이다.

8의 세제곱근 $\Rightarrow$ 세제곱해서 8이 되는 수 $\Rightarrow$ $x^3 = 8$

문제 8)

(1) -8의 세제곱근을 구하여라.

답 : (   )

(2) 27의 세제곱근을 구하여라.

답 : (   )

(3) -1의 세제곱근을 구하여라.

답 : (   )

예시 9) 81의 네제곱근

네제곱해서 81이 되는 수를 81의 네제곱근이라고 한다. 즉 $x^4=81$의 근인데 이것을 풀면

$$x^4 = 81$$
$$x^4 - 81 = 0$$
$$(x^2-9)(x^2+9) = 0$$
$$(x-3)(x+3)(x^2+9) = 0$$
$$x = 3,\ -3 \text{ 이거나 } x^2 = -9$$

$x^2=-9$이면 $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}i=\pm 3i$ 따라서 81의 네제곱근은 3, -3, $3i$, $-3i$의 네 개이다.

81의 네제곱근 ⇒ 네제곱해서 81이 되는 수 ⇒ $x^4=81$

문제 10)

(1) 16의 네제곱근을 구하여라.

답 : (   )

(2) 1의 네제곱근을 구하여라.

답 : (   )

이번에는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$에서 쓰이는 근호(루트)와 비슷한 기호를 알아보자.

정의 11)

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a\text{의 } n\text{제곱근 중 양수} & (n = \text{짝수}) \\ a\text{의 } n\text{제곱근 중 실수} & (n = \text{홀수}) \end{cases}$$

예시 12)

(1) $\sqrt{4}$은 '4의 제곱근 중 양수인 것'을 뜻한다. 즉 $x^2 = 4$의 두 근 -2, 2 중 양수인 2를 뜻하므로

$$\sqrt{4} = 2$$

(2) $\sqrt[3]{8}$은 '8의 세제곱근 중 실수인 것'을 뜻한다. 즉 $x^3 = 8$의 세 근 2, $1+\sqrt{3}i$, $-1+\sqrt{3}i$ 중 실수인 2를 뜻하므로

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

(3) $\sqrt[4]{16}$은 '16의 네제곱근 중 양수인 것'을 뜻한다. 즉 $x^4 = 16$의 네 근 2, -2, $2i$, $-2i$ 중 양수인 2를 뜻하므로

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

예시 13)

다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[3]{-27}$ (2) $\sqrt[5]{100000}$ (3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ (4) $-\sqrt[4]{0.0625}$

(1) $\sqrt[3]{-27}$은 -27의 세제곱근 중 실수인 -3이다.

(2) $\sqrt[5]{100000}$은 100000의 다섯제곱근 중 실수인 10이다.

(3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$은 $\frac{16}{81}$의 네제곱근 중 양수인 $\frac{2}{3}$이다.

(4) $\sqrt[4]{0.0625}$은 0.0625의 네제곱근 중 양수인 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 $-\sqrt[4]{0.0625} = -\frac{1}{2}$

답 : (1) $\sqrt[3]{-27} = -3$ **(2)** $\sqrt[5]{100000} = 10$
(3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ **(4)** $-\sqrt[4]{0.0625} = -\frac{1}{2}$

문제 14)

다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[5]{32}$ (2) $\sqrt[3]{0.008}$ (3) $\sqrt[3]{-8}$ (4) $-\sqrt[4]{0.0001}$

답 : (1) **(2)**
(3) **(4)**

3 지수의 확장과 지수법칙

$$a^x$$

와 같이 생긴 것을 거듭제곱이라고 부른다. 이때 a를 밑, x를 지수라고 부른다. 이러한 지수에 대해 다음 법칙이 항상 성립한다.

정리 15) 지수법칙

다음이 성립한다.

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x b^y$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

3.1 정수 지수

예시 16)

다음 나열된 수를 보고 빈칸에 들어갈 수를 유추해보자.

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16, \\ 2^3 &= 8, \\ 2^2 &= 4, \\ 2^1 &= 2, \\ 2^0 &= \boxed{?} \\ 2^{-1} &= \boxed{?} \\ 2^{-2} &= \boxed{?} \end{aligned}$$

16, 8, 4, 2는 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이루고 있으므로 그 다음에 나올 수는 차례로 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$가 되면 자연스러울 것임을 알 수 있다.

$$2^0 = 1, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

정의 17) 정수인 지수
$a \neq 0$ 이고 n 이 자연수이면
(1) $a^0 = 1$

(2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

예시 18)

(1) $2^0 = 1$

(2) $(-3)^0 = 1$

(3) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

문제 19)
다음 값을 구하여라.
(1) $(\sqrt{3})^2$ (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ (3) $(-2)^{-3}$ (4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

답 : (1) (2) (3) (4)

예시 20)

(1) $3^{-3} \div 3^{-2} \times 9^2 = 3^{(-3)-(-2)} \times (3^2)^2 = 3^{-1} \times 3^4 = 3^{-1+4} = 3^3$

(2) $(25^4 \times 125^{-3})^{-2} = \left((5^2)^4 \times (5^3)^{-3}\right)^{-2} = (5^8 \times 5^{-9})^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$

문제 21)

다음을 간단히 하여라

(1) $2^4 \times 4^{-1} \div 6^2$ (2) $(3^3 \times 9^{-2})^{-1}$

답 : (1) (2)

3.2 유리수 지수

예시 22)

예시 16과 같은 추론을 다시 해보자.

$$\begin{aligned} 2^2 &= 4, \\ 2^{1.5} &= \boxed{?}, \\ 2^1 &= 2, \\ 2^{0.5} &= \boxed{?}, \\ 2^0 &= 1 \end{aligned}$$

2^0, 2^1, 2^2 가 등비수열을 이루므로2^0, $2^0.5$, 2^1, $2^{1.5}$, 2^2 도 등비수열을 이루어야 자연스러울 것이다. $2^{0,5}$ 는 $2^0 = 1$과 $2^1 = 2$의 등비중항이므로 $2^{0.5} = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$. $0.5 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

이다. 마찬가지로

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}, \quad \cdots$$

등이다.

정의 23) 유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m 은 정수, n 은 2 이상의 정수일 때,

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

문제 24)

다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^{\frac{3}{4}}$ (2) $3^{0.5}$ (3) $5^{-\frac{3}{2}}$ (4) $7^{-1.2}$

답 : (1) (2) (3) (4)

문제 25)

다음을 $a^{\frac{m}{n}}$ 의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt[3]{2^4}$ (2) $\sqrt{3^4}$ (3) $\sqrt[4]{5^{-3}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$

답 : (1) (2) (3) (4)

문제 26)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{2^4} \times 2^{\frac{2}{3}}$ (2) $(\sqrt[3]{3})^2 \div 3^{-\frac{1}{3}}$

(3) $12^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{9} \times 4^{-\frac{1}{3}}$ (4) $\sqrt[3]{2} \div 4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{9}}$

답 : (1) (2) (3) (4)

예시 27)

$\sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[4]{ab^3}$ 을 간단히 하여라. (단, $a > 0$, $b > 0$)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[4]{ab^3} &= (a^3b)^{\frac{1}{4}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (ab^3)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right) \times \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) \div \left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right) \\ &= a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} \\ &= a^1b^0 \\ &= a\end{aligned}$$

답 : a

문제 28)

다음을 간단히 하여라. (단, $a > 0$)

(1) $a^{\frac{1}{2}} \div \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^4$ (2) $\sqrt{\sqrt[6]{a} \times \sqrt{a^5}}$

(3) $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)$ (4) $\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)$

답 : (1) (2) (3) (4)

3.3 실수인 지수

예시 29)

지수의 범위를 실수까지 확장시켜보자.

예를 들어 $3^{\sqrt{2}}$에 대하여 알아보자. 무리수 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2} = 1.414213\cdots$이므로 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수

$$1, \quad 1.4 \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \quad 1.41421, \quad \cdots$$

을 지수로 하는 수들은 일정한 수에 가까워진다는 사실이 알려져있다.

$$\begin{aligned} 3^{1} &= 3 \\ 3^{1.4} &= 4.65553\cdots \\ 3^{1.41} &= 4.70696\cdots \\ 3^{1.414} &= 4.72769\cdots \\ 3^{1.4142} &= 4.72873\cdots \\ 3^{1.41421} &= 4.72878\cdots \\ 3^{1.414213} &= 4.72880\cdots \end{aligned}$$

이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$로 정한다.

이러한 방식으로 무리수 x에 대해 3^{x}를 정할 수 있다.

예시 30)

(1) $2^{\sqrt{2}} \times 2^{-\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 2^{0} = 1$

(2) $\left(2^{\sqrt{8}} \div 2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(2^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{2} = 4$

문제 31)

다음을 간단히 하여라.

(1) $2^{\sqrt{2}} \times 4^{\sqrt{2}}$ (2) $\left(\sqrt{2}\right)^{3\sqrt{2}} \div 2^{\sqrt{2}}$

(3) $\left(3^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}$ (4) $\left(2^{\sqrt{2}} \div 3^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{2}} \times 9^{\sqrt{3}}$

답 : (1) (2) (3) (4)

답

문제 1)

$a^3 + b^3$

문제 2)

(1) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9)$

(3) $(x+1)(x-1)$

(4) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$

문제 3)

(1) $x = -1,\ 2$

(2) $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(3) $x = \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

(4) $x = 2,\ -2$

(5) $x = 0$

(6) $x = 2i,\ -2i$

문제 6)

(1) $2,\ -2$

(2) $2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}$

(3) 0

(4) $2i,\ -2i$

문제 8)

(1) $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$

(2) $3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

문제 10)

(1) ±2,$\pm2i$

(2) $\pm1,\ \pm i$

문제 14)

(1) 2

(2) 0.2

(3) -2

(4) -0.1

문제 19)

(1) 3

(2) 1

(3) $-\frac{1}{8}$

(4) 2

문제 21)

(1) $\frac{1}{9}$

(2) 3

문제 24)

(1) $\sqrt[4]{2^3}$

(2) $\sqrt{3}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{5^3}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^6}}$

문제 25)

(1) $2^{\frac{4}{3}}$

(2) 3^2

(3) $5^{-\frac{3}{4}}$

(4) $7^{-\frac{3}{5}}$

문제 26)

(1) 4

(2) 3

(3) 3

(4) 1

문제 28)

(1) $a^{\frac{5}{2}}$

(2) $a^{\frac{4}{3}}$

(3) $a - a^{-1}$

(4) $a + a^{-1}$

문제 31)

(1) $2^{3\sqrt{2}}$

(2) $2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) 3

(4) 4