수학(하) : 12 경우의 수

2018년 10월 4일

차 례

1 합의 법칙과 곱의 법칙

예시 1) 주사위를 한 번 던질 때, 나온 눈의 수가 짝수이거나 5의 약수인 경우의 수를 구해보자.

주사위의 눈이 짝수인 경우는 2, 4, 6의 세 가지이고 5의 약수인 경우는 1, 5의 두 가지이다. 두 경우가 서로 겹치지 않으므로 주사위의 눈이 짝수이거나 5의 약수인 경우의 수는 $3+2=5$의 다섯 가지이다.

답 : 5

짝수가 나오는 사건을 A, 5의 약수가 나오는 사건을 B라고 하자. A와 B를 집합처럼 생각하면

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{1,5\}$$

이다. 이때 $A \cap B \neq \varnothing$이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

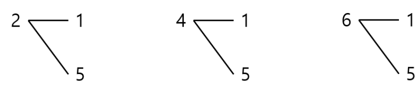
로 계산할 수 있는 것이다.

정리 2) 합의 법칙
두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

문제 3)
수빈이는 친구의 생일 선물로 줄 책을 한 권 고르려고 한다. 서로 다른 시집 5권과 서로 다른 수필집 4권 중에서 한 권을 고르는 경우의 수를 구하여라.

예시 4) 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째 눈의 수가 짝수이고 두 번째 눈의 수는 5의 약수인 경우의 수를 구해보자.

따라서 가능한 모든 경우를 수형도로 나타내면



이다. 따라서 가능한 경우의 수는 여섯 가지이다. 이것은 $3 \times 2 = 6$으로 계산했다고 생각할 수도 있다.

답 : 6

문제에서 말하는 여섯 가지 경우의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$(2,1),(2,5),$$
$$(4,1),(4,5),$$
$$(6,1),(6,5)$$

이다. 이 순서쌍들로 이루어진 집합 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ \ b \in B\}$을 생각할 때,

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

로 계산할 수 있는 것이다.

정리 5) 곱의 법칙
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각의 경우에 대해 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 사건 A에 잇달아 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

문제 6)
진우가 다니고 있는 학교에서는 과학 4과목, 사회 5과목을 가르친다.
과학 과목과 사회 과목 중 한 과목씩 택하여 공부하는 경우의 수를 구하여라.

문제 7) 진헌이와 한솔이는 각각 중식점과 양식점에서 식사하려고 한다.

차림표

밥류	면류
볶음밥	자장면
송이덮밥	짬뽕
마파두부밥	우동
고추잡채밥	

스테이크 정식

수프	요리	후식
호박수프	안심	녹차
양송이수프	등심	홍차
	채끝살	주스

진헌이는 밥류와 면류 중 하나만을 주문하고, 한솔이는 수프와 요리와 후식 중 하나씩을 주문하려고 한다. 두 사람이 각각 주문하는 경우의 수를 구하여라.

문제 8)

10원짜리 동전이 3개, 100원짜리 동전이 2개, 500원짜리 동전이 1개 있을 때, 이들 전부 또는 일부를 사용하여 지급할 수 있는 금액의 경우의 수는?

① 22　　② 23　　③ 24　　④ 25　　⑤ 26

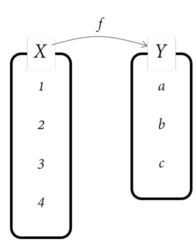
문제 9) 다음 식을 전개하였을 때 나타나는 모든 항의 개수를 구하시오.

(1) $(a+b+c)(x+y+z)$

(2) $(a+b+c+d)(x+y)$

문제 10)

정의역이 $X=\{1,2,3,4\}$, 공역이 $Y=\{a,b,c\}$인 함수 $f:X\to Y$의 개수를 구하여라.



예시 11)

(1) 12의 약수의 개수를 구하여라.

(2) 12의 약수들의 합을 구하여라.

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이다. 따라서 12의 약수의 개수는 여섯 개이고, 12의 약수들의 합은 $1+2+3+4+6+12=28$이다.

답 : (1) 6, (2) 28

이 문제를 소인수분해를 통해 접근해보자. 12를 소인수분해하면 $12=2^2\times 3$이다. 따라서 12의 소수들은 다음과 같이 표로 표현할 수 있다.

$\times$	1	3^1
1	1	3^1
2^1	2^1	$2^1\times 3^1$
2^2	2^2	$2^2\times 3^1$

그러므로 12의 약수는 $3\times 2=6$의 여섯 개이다. 12의 약수들의 합을 계산할 때에도 위의 표를 참고하면 다음 계산을 할 수 있다.

$$\begin{aligned}1+3^1+2^1+2^1\times 3^1+2^2+2^2\times 3^1 &= (1+3^1)+2^1(1+3^1)+2^2(1+3^1)\\ &= (1+3^1)(1+2^1+2^2)\\ &= 4\cdot 7=28\end{aligned}$$

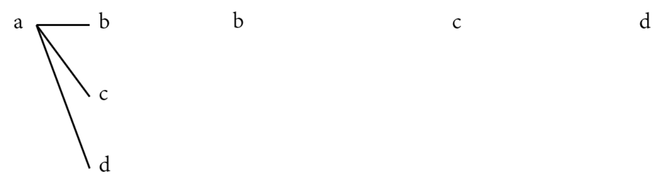
문제 12) 54의 약수의 개수와 약수들의 합을 구하여라.

문제 13) 60의 약수의 개수와 약수들의 합을 구하여라.

2 순열

예시 14) 네 개의 곡 a, b, c, d 중 두 개의 곡을 차례대로 재생하는 방법의 수를 구하여라.

모든 경우의 수를 수형도로 나타내면,



이다. 첫 번째로 재생할 수 있는 곡은 a, b, c, d의 4가지이고, 각각에 대하여 두 번째로 재생할 수 있는 곡은 첫 번째로 재생한 곡을 제외한 3가지이다. 따라서, 곱의 법칙에 의하여 두 곡을 차례대로 재생하는 방법의 수는

$$4 \times 3 = 12$$

이다.

문제 15)

다섯 개의 곡 a, b, c, d, e 중 의 세 개의 곡을 차례대로 재생하는 방법의 수를 구하여라.

예시 14)의 경우의 수를 기호로 $\boxed{{}_4P_2}$와 같이 나타낸다. 4개 중에서 2개를 택해 일렬로 나열하는 방법의 수이다. 한편, 문제 15)의 경우의 수는 $\boxed{}$ 으로 나타낼 수 있을 것이다.

정의 16) 순열
서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 ${}_nP_r$로 나타낸다.

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (1 \le r \le n) $$

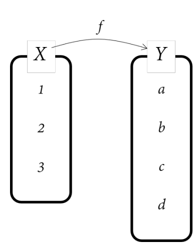
문제 17) 다음 값을 구하시오

(1) ${}_3P_2$ (2) ${}_6P_3$ (3) ${}_4P_4$ (4) ${}_4P_1$

문제 18) 연극에 참가할 9명 중에서 4개의 배역 A, B, C, D를 정하는 경우의 수를 구하시오.

문제 19)
다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5,에서 서로 다른 세 개의 숫자를 택하여 세 자리 수를 만든다. 예를 들어 1, 5, 2를 택하여 세 자리 수 152를 만들 수 있다. 이렇게 만들 수 있는 세 자리 수의 개수를 구하시오.

문제 20)
정의역이 $X = \{1, 2, 3\}$, 공역이 $Y = \{a, b, c, d\}$인 일대일함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하여라.



정의 21) n의 계승

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

참고 22)

(1) !는 팩토리얼(factorial)이라고 읽는다.

(2) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

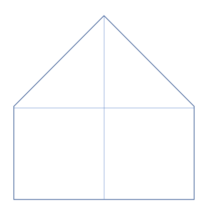
(3) $0! = 1$로 정의한다.

$n!$은 ${}_nP_n$과 같다. 즉 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수이다.

문제 23)
수빈이는 내일까지 수학 문제 풀기, 영어 단어 외우기, 역사 보고서 쓰기의 세 가지 숙제를 해야 한다. 한 번에 여러 개의 숙제를 할 수 없을 때 숙제의 순서를 정하는 방법의 수를 구하여라.

문제 24)
우석, 유진, 찬희, 종원, 승미의 다섯 명의 학생이 100m 달리기에 참여한다. 순위가 정해지는 경우의 수를 구하여라.

문제 25)
오른쪽 그림과 같은 영역에 빨강, 노랑, 초록, 파랑의 네 가지 색을 하나씩 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하여라.



팩토리얼을 사용하면 순열의 수를 깔끔한 형태로 쓸 수 있다.

정리 26)

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

예를 들어 ${}_8P_3$은

$$ {}_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 $$

인데, 이것은

$$ {}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} $$

로 계산한 결과와 같다.

문제 27) 정리 26)을 사용하여 다음을 계산하여라.

(1) ${}_5P_2$ (2) ${}_3P_3$ (3) ${}_4P_0$

문제 28) 다음 $\boxed{}$안에 알맞은 수를 써넣으시오

(1) ${}_{11}P_4 = \dfrac{11!}{\boxed{}!}$ (2) ${}_{10}P_{\square} = \dfrac{10!}{7!}$

3 조합

예시 29) 네 개의 곡 a, b, c, d 중 좋아하는 두 곡을 고르는 방법의 수를 구하여라.

두 개의 곡을 고르는 방법은

$$ab/ac/ad/bc/bd/cd$$

의 6가지이다. 따라서 예시 14)에서 구했던, 두 곡을 차례로 재생하는 방법의 수인 ${}_4P_2 = 12$와는 다르다. 예시 14)에서의 12가지 경우는

$$ab/ac/ad/ba/bc/bd/ca/cb/cd/da/db/dc$$

이었다. 이때, 따라서 ab와 ba는 서로 다른 경우로 취급했었다. a를 먼저 재생하고 b를 나중에 재생하는 것과 b를 먼저 재생하고 a를 나중에 재생하는 것을 구분해야 했기 때문이다. 하지만 지금처럼 두 개의 곡을 고르는 경우에는 ab와 ba가 서로 같은 경우를 나타낸다.

이처럼 12가지의 모든 경우가 한 쌍씩 같다.

$$ab = ba, \quad ac = ca, \quad ad = da,$$
$$bc = cb, \quad bd = db, \quad cd = dc$$

따라서 ${}_4P_2$을 2로 나눈 값이 답이 될 것이다.

$$\frac{{}_4P_2}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

문제 30) 여섯 개의 곡 a, b, c, d, e, f 중 좋아하는 두 곡을 고르는 방법의 수를 구하여라.

문제 31) 다섯 개의 곡 a, b, c, d, e 중 좋아하는 세 곡을 고르는 방법의 수를 구하여라.

예시 29)의 경우의 수를 기호로 $\boxed{{}_4C_2}$와 같이 나타낸다. 4개 중에서 2개를 선택하는 방법의 수이다. 한편, 문제 30)의 경우의 수는 $\boxed{}$으로, 문제 31)의 경우의 수는 $\boxed{}$으로 나타낼 수 있을 것이다.

정의 32) 조합

서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 경우의 수를 ${}_nC_r$로 나타낸다.

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \qquad (1 \le r \le n) $$

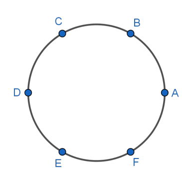
문제 33)

9명의 탁구선수 중에서 시합에 나가는 3명의 대표 선수를 선발하는 경우의 수를 구하여라.

문제 34) 아래 그림과 같이 원 위에 6개의 점들이 있다. 다음을 구하여라.

(1) 두 개의 점을 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수

(2) 세 개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수



문제 35) 집합 $A = \{a, b, c, d\}$에 대하여

(1) A의 부분집합의 개수를 구하여라.

(2) A의 부분집합 중 원소의 개수가 2개인 부분집합의 개수를 구하여라.

순열에 관한 두 식

$$
{}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)
$$
$$
{}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}
$$

을 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ 에 각각 적용하면, 다음 공식들을 얻을 수 있다.

$$
{}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{1}
$$
$$
{}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{2}
$$

예시 36)

예를 들어 ${}_{10}C_3$를 계산할 때에는 (1)의 식을 사용해

$$
{}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120
$$

로 계산해도 되고 (2)의 식을 사용해

$$
{}_{10}C_3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = 120
$$

로 계산해도 된다. 약분과정에서 보듯 사실상 같은 계산이다.

실제 조합에 관한 계산에서는 (1)이 많이 쓰이고, 조합에 관한 증명을 할 때에는 (2)가 많이 쓰인다.

문제 37) 다음 조합의 수들을 계산하여라.

(1) ${}_7C_0$ (2) ${}_7C_1$ (3) ${}_7C_2$ (4) ${}_7C_3$

(5) ${}_7C_4$ (6) ${}_7C_5$ (7) ${}_7C_6$ (8) ${}_7C_7$

답

문제 3) 9

문제 6) 20

문제 7)
진헌 : 7, 한솔 : 18

문제 8) ②

문제 9)

(1) 9

(2) 8

문제 10) 81

문제 12)
약수의 개수 : 8
약수들의 합 : 120

문제 13)

약수의 개수 : 12
약수들의 합 : 168

문제 15) 60

문제 17)

(1) 6

(2) 120

(3) 24

(4) 4

문제 18) 3024

문제 19) 60

문제 20) 24

문제 23) 6

문제 24) 120

문제 25) 24

문제 27)

(1) 20

(2) 6

(3) 1

문제 28)

(1) 7

(2) 3

문제 30) 15

문제 31) 10

문제 33) 84

문제 34)

(1) 15

(2) 20

문제 35)

(1) 16

(2) 6

문제 37)

(1) 1

(2) 7

(3) 21

(4) 35

(5) 35

(6) 21

(7) 7

(8) 1

요약

1. 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때,

   (a) A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$.

   (b) A에 잇달아 B가 일어나는 경우의 수는 $m \times n$.

2. 순열

   서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

3. 조합

   서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 방법의 수는

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$