

## 종현, 추가과제 07

날짜 : 2017년 □월 □일 □요일,    제한시간 : □□분,    점수 : □□ / □□

### 1 집합(1)

#### 문제 1)

다음 중 집합인 것은?

- ① 작은 자연수들의 모임
- ② 어려운 수학 문제들의 모임
- ③ 방정식  $x^2 = 1$ 의 해들의 모임
- ④ 수학 성적이 우수한 학생들의 모임
- ⑤ 양의 약수의 개수가 많은 자연수들의 모임

#### 문제 2)

다음 집합 중 나머지 넷과 다른 하나는?

- ①  $\{x \mid x = y - 1, y \text{는 짝수인 자연수}\}$
- ②  $\{x \mid x \text{는 } 16 \text{과 서로소인 자연수}\}$
- ③  $\{x \mid x \text{는 } 2 \text{로 나눈 나머지가 } 1 \text{인 자연수}\}$
- ④  $\{x \mid x = 2y + 1, y \text{는 자연수}\}$
- ⑤  $\{x \mid x = ab, a, b \text{는 홀수인 자연수}\}$

#### 문제 3)

세 집합

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 양의 약수}\}$$

$$C = \{x \mid x^2 - x + 2 = 0, x \text{는 실수}\}$$

에 대하여  $n(A) + n(B) + n(C)$ 의 값은?

- ① 8                      ② 9                      ③ 10                      ④ 11                      ⑤ 12

#### 문제 4)

두 집합  $A, B$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ.  $A = \{0, 1\}$ 이면  $n(A) = 1$ 이다.

ㄴ.  $n(A) = 0$ 이면  $A = \emptyset$

ㄷ.  $n(A) = n(B)$ 이면  $A = B$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ                      ④ ㄱ, ㄷ                      ⑤ ㄴ, ㄷ

문제 5)

10 이하의 자연수  $k$ 에 대하여 두 집합  $A, B$ 가

$$A = \{2k - 1, 2k + 1, 2k + 3\},$$

$$B = \{x \mid k \leq x \leq 21 - k\}$$

일 때,  $A \subset B$ 가 되도록 하는  $k$ 의 개수는?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

문제 6)

세 집합

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in A\},$$

$$C = \{x \mid x = b - a, a \in A, b \in B\}$$

의 포함관계를 바르게 나타낸 것은?

- ①  $A \subset B \subset C$     ②  $A \subset C \subset B$     ③  $B \subset A \subset C$     ④  $B \subset C \subset A$     ⑤  $C \subset A \subset B$

문제 7)

두 양수  $a, b$ 에 대하여 두 집합

$$A = \{1, 2a - b, b\}, \quad B = \{2, 4, a - b\}$$

가  $A = B$ 를 만족시킬 때,  $ab$ 의 값은?

- ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 16

문제 8)

두 집합

$$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$$

에 대하여  $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합  $X$ 의 개수는?

- ① 16                      ② 32                      ③ 64                      ④ 128                      ⑤ 256

문제 9)

10 이하의 자연수  $k$ 에 대하여 집합

$$X = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$$

$$A_k = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 양의 약수}\}$$

라고 하자. 집합  $A_k$ 를 포함하는 집합  $X$ 의 부분집합의 개수가 256이 되도록 하는 모든  $k$ 의 값의 합은?

- ① 15                      ② 17                      ③ 19                      ④ 21                      ⑤ 23

## 2 집합(2)

### 문제 10)

세 집합

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{의 양의 약수}\},$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{과 서로소인 자연수}\}$$

에 대하여 집합  $(A \cup B) \cap C$ 의 모든 원소의 합은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

### 문제 11)

자연수  $k$ 에 대하여 집합  $A_k$ 가

$$A_k = \{x \mid x \text{는 } k \text{의 배수인 자연수}\}$$

일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

①  $A_2 \cap A_4 = A_4$

②  $A_4 \cap A_6 = A_{12}$

③  $A_2 \cup A_3 = A_6$

④  $A_6 \subset A_2 \cap A_3$

⑤  $A_4 \subset A_2 \cup A_6$

### 문제 12)

집합  $A, B, C, D$ 가 다음과 같을 때, 서로소인 집합은?

<보기>

$$A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 양의 약수}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 짝수}\}$$

①  $A$ 와  $B$

②  $A$ 와  $C$

③  $B$ 와  $C$

④  $B$ 와  $D$

⑤  $C$ 와  $D$

### 문제 13)

전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 두 부분집합

$$A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 짝수}\}$$

에 대하여 집합  $A^c - B^c$ 의 원소의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

**문제 14)**

전체집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B^c = \{1, 2\}$$

일 때 집합  $(A - B) \cup (A^c - B)$ 의 모든 원소의 합은?

- ① 20                      ② 22                      ③ 24                      ④ 26                      ⑤ 28

**문제 15)**

전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $X, Y$ 에 대하여 기호  $\ominus$ 를  $X \ominus Y = X^c - Y^c$ 으로 정의할 때, 전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

㉠.  $A \ominus B = B \ominus A$

㉡.  $A \ominus B = \emptyset$ 이면  $A \cap B = B$ 이다.

㉢.  $A \ominus B = B$ 이면  $A \cap B = \emptyset$ 이다.

- ① ㉠                      ② ㉡                      ③ ㉢                      ④ ㉠, ㉡                      ⑤ ㉡, ㉢

**문제 16)**

전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합

$$A = \{x \mid x = 3k + 1, k \text{는 자연수}\},$$

$$B = \{x \mid x = 2k - 1, k \text{는 자연수}\}$$

에 대하여 집합  $A \cap (A - B)^c$ 의 원소의 최솟값은?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

**문제 17)**

전체집합  $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여  $n(A) = 8$ ,  $n(B^c) = 12$ ,  $n(A^c \cup B^c) = 16$ 일 때,  $n(A \cup B)$ 의 값은?

- ① 4                      ② 6                      ③ 8                      ④ 10                      ⑤ 12

**문제 18)**

30명의 학생으로 이루어진 어느 학급의 국어, 수학 방과후학교 수강현황을 조사하였더니 방과후학교에 참여하지 않는 학생이 5명, 국어를 수강하는 학생은 12명, 수학을 수강하는 학생은 15명이었다. 국어와 수학을 모두 수강하는 학생은 몇 명인가?

- ① 2                      ② 4                      ③ 6                      ④ 8                      ⑤ 10

### 3 명제 (1)

#### 문제 19)

전체집합이  $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$  일 때, 두 조건  $p, q$ 를 각각

$$p: 3 < x \leq 7, \quad q: x \text{는 } 30 \text{의 양의 약수}$$

라고 하자. 두 조건 ‘ $p$  그리고  $q$ ’, ‘ $p$  또는  $\sim q$ ’의 진리집합을 각각  $X, Y$ 라고 할 때,  $X \cup Y$ 의 원소의 개수는?

- ① 4                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 8

#### 문제 20)

전체집합이  $U = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$  일 때, 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합이 각각

$$P = \{1, 4, 8\}, \quad Q = \{x \mid x \text{는 } 16 \text{의 약수}\}$$

$$R = \{x \mid x \text{는 } 16 \text{ 이하의 소수}\}$$

이다. <보기>의 명제 중 반드시 참인 것만을 있는 대로 고르시오.

<보기>

$$\neg. p \rightarrow q$$

$$\neg. p \rightarrow \sim r$$

$$\neg. r \rightarrow \sim q$$

- ①  $\neg$                       ②  $\neg$                       ③  $\neg, \neg$                       ④  $\neg, \neg$                       ⑤  $\neg, \neg$

#### 문제 21)

세 조건

$$p: a - 1 \leq x \leq 4, \quad q: -4 \leq x \leq a^2, \quad r: x \leq -a + 8$$

에 대하여 두 명제  $p \rightarrow q, p \rightarrow r$ 이 모두 참이 되도록 하는 실수  $a$ 의 최댓값  $M$ 과 최솟값  $m$ 의 곱  $Mm$ 의 값은?

- ① -15                      ② -12                      ③ -9                      ④ -6                      ⑤ -3

#### 문제 22)

세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을  $P, Q, R$ 이라고 할 때,  $P \subset Q, Q \cap R = \emptyset$ 이 성립한다. 대우가 참인 명제를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

$$\neg. p \rightarrow q$$

$$\neg. p \rightarrow \sim r$$

$$\neg. r \rightarrow \sim q$$

- ①  $\neg$                       ②  $\neg$                       ③  $\neg, \neg$                       ④  $\neg, \neg$                       ⑤  $\neg, \neg, \neg$

**문제 23)**

세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 이라고 할 때, 명제 ‘ $p$  그리고  $q$ 이면  $\sim r$ 이다.’가 거짓임을 보이기 위한 반례  $x$ 에 대한 명제 중 참인 것은?

- ①  $x \in R$ 이고  $x \in (P \cup Q)^c$ 이다.
- ②  $x \in R$ 이고  $x \in (P \cap Q)^c$ 이다.
- ③  $x \in R$ 이고  $x \in P \cap Q$ 이다.
- ④  $x \in R^c$ 이고  $x \in P \cup Q$ 이다.
- ⑤  $x \in R^c$ 이고  $x \in P \cup Q$ 이다.

**문제 24)**

다음은 자연수  $a, b$ 에 대하여 명제 ‘ $ab$ 가 짝수이면  $a$  또는  $b$ 는 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.

주어진 명제의 대우인 ‘ $a$ 와  $b$ 가 모두 홀수이면  $ab$ 는 홀수이다.’를 증명하면 된다.  
 $a, b$ 가 모두 홀수이므로 자연수  $m, n$ 에 대하여  $a = \boxed{\text{(가)}}$ ,  $b = 2n - 1$ 로 놓으면  
 $ab = \boxed{\text{(나)}} + 1$ 이므로  $ab$ 는 홀수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ①  $2m - 1, mn - m - n$
- ②  $2m - 1, 2mn - m - n$
- ③  $2m - 1, 2(2mn - m - n)$
- ④  $2m + 1, 2mn + m + n$
- ⑤  $2m + 1, 2(2mn + m + n)$

**문제 25)**

다음은  $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하는 과정이다.

$\sqrt{2}$ 가 무리수가 아니라고 가정하면 서로소인 두 자연수  $p, q$ 에 대하여  $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.  
 양변을 제곱하여 정리하면  $2p^2 = q^2$ 이다.  $q^2$ 이  $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로  $q$ 는  $\boxed{\text{(나)}}$ 이다. 그러므로 자연수  $k$ 에 대하여  $2p^2 = 4k^2$ 이다.  $p^2 = 2k^2$ 에서  $p^2$ 은  $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로  $p$ 도  $\boxed{\text{(나)}}$ 이다. 이것은  $\boxed{\text{(다)}}$ 라는 가정에 모순이다. 따라서  $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다. 즉  $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ①  $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ , 2의 배수, ‘ $p, q$ 가 소수’
- ②  $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ , 2의 배수, ‘ $p, q$ 가 서로소’
- ③  $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ , 4의 배수, ‘ $p, q$ 가 서로소’
- ④  $\sqrt{2} = pq$ , 4의 배수, ‘ $p, q$ 가 소수’
- ⑤  $\sqrt{2} = pq$ , 2의 배수, ‘ $p, q$ 가 서로소’

#### 4 명제 (2)

##### 문제 26)

두 조건  $p, q$ 에 대하여  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단,  $x, y$ 는 실수이다.)

<보기>

$$\neg. p : xy > 0$$

$$q : x > 0, y > 0$$

$$\neg. p : x^2 + y^2 = 0$$

$$q : xy = 0$$

$$\supset. p : x^2 \geq y^2$$

$$q : |x| - |y| = ||x| - |y||$$

①  $\neg$

②  $\supset$

③  $\neg, \neg$

④  $\neg, \supset$

⑤  $\neg, \supset$

##### 문제 27)

전체집합  $U$ 에 대하여 세 조건  $p, q, r$ 의 진리집합을 각각  $P, Q, R$ 이라고 하자.  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이고,  $\sim r$ 은  $q$ 이기 위한 필요조건일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단,  $P, Q, R$ 은 모두 공집합이 아니다.)

<보기>

$$\neg. P \subset Q$$

$$\neg. P \subset R$$

$$\supset. R \subset P^c$$

①  $\neg$

②  $\supset$

③  $\neg, \neg$

④  $\neg, \supset$

⑤  $\neg, \supset$

##### 문제 28)

두 조건

$$p : a - 3 \leq x \leq a^2 + 1, \quad q : 2a - 1 \leq x \leq 3a + 5$$

에 대하여  $p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수  $a$ 의 개수는? (단,  $-6 < a < 0$ )

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

##### 문제 29)

다음은 두 실수  $a, b$ 에 대하여 부등식

$$2a^2 + 3b^2 \geq 4ab$$

가 성립함을 증명하는 과정이다.

$$2a^2 + 3b^2 - 4ab = \boxed{\text{가}} + b^2$$

$a, b$ 는 실수이므로  $\boxed{\text{가}} \geq 0, b^2 \geq 0$ 이다.

따라서  $2a^2 + 3b^2 - 4ab \geq 0$ 이다.

(단, 등호는  $\boxed{\text{나}}$ 일 때 성립한다.)

위의 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ①  $2(a-b)^2, a=b=0$
- ②  $2(a-b)^2, a=b$
- ③  $(2a-b)^2, a=b$
- ④  $\frac{1}{2}(2a-b)^2, a=b=0$
- ⑤  $\frac{1}{2}(2a-b)^2, a=b$

**문제 30)**

다음은 두 실수  $a, b$ 에 대하여 부등식

$$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2a(b+1)$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

$2a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a = (a-b)^2 + \boxed{\text{(가)}}$   
 $(a-b)^2 \geq 0, \boxed{\text{(가)}} \geq 0$ 이므로  
 $(a-b)^2 + \boxed{\text{(가)}} \geq 0$ 이다.  
 따라서  $2a^2 + b^2 + 1 \geq 2a(b+1)$ 이다.  
 (단, 등호는  $a = \boxed{\text{(나)}}$ ,  $b = \boxed{\text{(다)}}$ 일 때 성립한다.)

(가)에 알맞은 식을  $f(a)$ 라고 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $\alpha, \beta$ 라고 할 때,  $f(2) + \alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

**문제 31)**

$a > 0, b > 0$ 일 때,  $(2a+b)\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값은?

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ②  $\sqrt{2}$
- ③ 2
- ④  $2\sqrt{2}$
- ⑤ 4

**문제 32)**

$x > -1$ 일 때,  $4x+1 + \frac{4}{x+1}$ 의 최솟값을 구하시오.

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

**문제 33)**

세 실수  $x, y, z$ 에 대하여,  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 일 때,  $3x+4y+5z$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라고 한다.  $M-m$ 의 값은?

- ① 8
- ② 12
- ③ 16
- ④ 20
- ⑤ 24