현빈 18 : 숫자 e

January 24, 2016

1 e에 대한 두 가지 정의

숫자 e의 정의는 다음의 두 가지이다.[1]

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{1}$$

$$e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \tag{2}$$

두 정의는 동등한 정의일까?

(1) 을 다시 살펴보면, (1) 은

$$e = \lim_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{1-a}$$

$$e = \lim_{x \to 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{1-b}$$

로 이루어져 있다. 다시 말해

$$(1) \iff (1-a) \land (1-b)$$

이다.[2] 한편 $x = \frac{1}{t}$ 로 치환하면

$$(1-a) \iff (2)$$

임을 알 수 있다. 다시 말해 두 정의가 동등하려면, 즉

$$(1) \iff (2)$$

이려면,

$$(1-a) \land (1-b) \iff (1-a)$$

여야 하고, 그러려면

$$(1-a) \Rightarrow (1-b)$$

여야 한다.

따라서 다음을 증명해보자.

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ 이면 } e = \lim_{x \to 0-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ 이다.}}$$

[1] 홍성대, “수학의 정석, 미적분2”, 성지출판, 2014, p 139.

[2] $\land$는 and를 의미한다.

2 은행 예금

(1) 연이율이 6%인 은행에 100만원을 예금한다고 하자. 1년 후 돌려받는 금액은

$$100\text{만원} \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 106\text{만원}$$

이다.

(2) 이번에도 연이율 6%과 원금 100만원을 예금하되, 이자를 6개월마다 한 번씩 받는 상황을 생각해보자. 연이율이 6%이므로, 6개월 동안의 이율은 연이율의 절반인 3%로 생각하자. 처음에 100만원이었던 원금은 6개월 후에

$$100\text{만원} \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 103\text{만원}$$

이 되고 다시 6개월이 흐른 1년 후에는

$$103\text{만원} \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 106\text{만 } 900\text{원}$$

이 된다.

(3) 이번에는 이자를 4개월마다 한 번씩 받는 상황을 생각해보자. 연이율이 6%이므로, 4개월 동안의 이율은 연이율의 1/3인 2%로 생각하자. 같은 방식으로 계산하면 1년 후에

$$100\text{만원} \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 = 106\text{만 } 1208\text{원}$$

을 받을 수 있게 된다.

(4) 100만원을 한 번에 걸쳐 이자를 붙이면 106만원이 되고, 두 번에 걸쳐 이자를 붙이면 106만 900원이 되며, 세 번에 걸쳐 이자를 붙이면 106만 1208원이 된다. 따라서 여러 번에 걸쳐 이자를 붙일 수록 이익인 것 같다.

그렇다면 한없이 여러 번에 걸쳐 이자를 붙인다면, 얼마까지 이익을 볼 수 있을까? 예를 들어 한 만 번 정도에 걸쳐 이자를 붙이면 원금의 두 배인 200만원 정도를 받을 수 있을까?