민형 : 02 부정적분

2016년 11월 12일

차 례

1 부정적분의 기본공식

정의 1) 부정적분

$F(x)$의 도함수가 $f(x)$이면, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

이면 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 혹은 **원시도함수**라고 부르고 기호로는

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

라고 표현한다.

즉, 부정적분은 미분의 반대인 '역미분'이다. 따라서 부정적분의 공식들은 미분 공식들을 거꾸로 뒤집어서 얻어질 수 있다.

정리 2) 부정적분의 기본 공식

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f(x) & \Rightarrow && \int f(x)\,dx &= F(x) + C \\
\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' &= x^n & \Rightarrow && \int x^n\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x} & \Rightarrow && \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \\
(e^x)' &= e^x & \Rightarrow && \int e^x\,dx &= e^x + C \\
\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' &= a^x & \Rightarrow && \int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
(-\cos x)' &= \sin x & \Rightarrow && \int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
(\sin x)' &= \cos x & \Rightarrow && \int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
(\tan x)' &= \sec^2 x & \Rightarrow && \int \sec^2 x\,dx &= \tan x + C \\
(-\cot x)' &= \csc^2 x & \Rightarrow && \int \csc^2 x\,dx &= -\cot x + C \\
(\sec x)' &= \tan x \sec x & \Rightarrow && \int \tan x \sec x\,dx &= \sec x + C \\
(-\csc x)' &= \cot x \csc x & \Rightarrow && \int \cot x \csc x\,dx &= -\csc x + C
\end{aligned}$$

2 치환적분법

정리 3) 합성함수의 미분법

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$y = f(t)$, $t = g(x)$ 라고 하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

로 쓸 수도 있다. 이때 'dt' 가 마치 약분되는 것처럼 보인다.

정리 4) 치환적분법

$t = g(x)$ 일 때,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

증명)

$f(t)$ 의 부정적분을 $F(t)$ 라고 하면

$$\{F(g(x))\}' = f(g(x))g'(x)$$

이므로

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)\,dx &= F(g(x)) + C \\ &= F(t) + C \\ &= \int f(t)\,dt\end{aligned}$$

□

$g(x) = t$ 임을 감안하여 치환적분법 식을 다시 쓰면

$$\int f(t)\frac{dt}{dx}\,dx = \int f(t)\,dt$$

이다. 이때 'dx' 가 마치 약분되는 것처럼 보인다.

예시 5)

$\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx$ 를 구해보자.

(1) $2x+1=t$ 로 치환하면 $x=\frac{1}{2}(t-1)$ 이고 따라서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$ 이고

$$\begin{aligned}\int e^{2x+1}\,dx &= \int e^t\,dx \\ &= \int e^t \frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int e^t\,dt \\ &= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C.\end{aligned}$$

(2) $f(t)=e^t$, $g(x)=2x+1$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\int e^{2x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int e^{2x+1}\cdot 2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int e^t\,dt = e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C.\end{aligned}$$

예시 6) $\tan x$ **와** $\sec x$ **의 적분**

(1) $\cos x = t$ 로 치환하면 $\sin x = -\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \int \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{dt}{dx}\right) \, dx \\ &= -\int \frac{1}{t} \, dt \\ &= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

(2) $\tan x + \sec x = u$ 로 치환하면 $\sec x(\tan x + \sec x) = \frac{du}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} \, dx \\ &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \, dx \\ &= \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln|u| + C = \ln|\tan x + \sec x| + C\end{aligned}$$

3 분수함수의 부정적분

분수 형태로 된 함수를 미분할 때는 몫의 미분법인

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

을 사용하면 되지만 이것을 변형한

$$\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}\,dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

는 거의 쓰이기가 힘들다. 분수함수의 경우 다음 두 방법을 통해 적분을 시도해볼 수 있다.

만약 피적분함수가 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 의 형태이면 아래 정리를 활용한다.

정리 7)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

증명)

$f(x) = t$ 라고 하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{dx}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|f(x)| + C$$

□

예시 8)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+3x+2)'}{x^3+3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+2| + C$$

$$\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}\,dx = \ln|1-\cos x| + C = \ln(1-\cos x) + C$$

피적분함수가 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 의 형태가 아니면 아래 식을 사용해 계산할 수 있다.

정리 9)

좌변처럼 주어진 식은 항상 우변의 형태로 정리할 수 있다.

(1) $\frac{ax+b}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta}$

(2) $\frac{ax^2+bx+c}{(x+\alpha)(x^2+\beta x+\gamma)} = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}$

(3) $\frac{ax^2+bx+c}{(x+\alpha)(x+\beta)^2} = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta} + \frac{C}{(x+\beta)^2}$

예시 10)

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$

분자를 정리하면 $x^2+1 = (x-1)(x+1)+2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx &= \int \frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1}\,dx \\ &= \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln|x-1| + C\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$

$$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

로 두면

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

에서 $A+B=1$, $2A+B=0$. 따라서 $A=-1$, $B=2$ 이고,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)dx \\ &= -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C\end{aligned}$$

4 부분적분법

정리 11) 곱의 미분법

$$\{f(x)g(x)\}' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

곱의 미분법 식을 부정적분의 형태로 고치면

$$\begin{aligned} \int \left[f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right] dx &= f(x)g(x) + C \\ \int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx &= f(x)g(x) + C \\ \int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \end{aligned}$$

이다.

정리 12) 부분적분법

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

부분적분법은 주어진 피적분함수를 다른 피적분함수로 바꾸는 역할을 할뿐이다. 따라서 좀 더 간단한 피적분 함수로 바꾸는 것이 필요하며 이를 위해서는 $f(x)$를 '미분하기 좋은' 함수로, $g'(x)$를 '적분하기 좋은' 함수로 선정하는 것이 좋다.

$$\begin{aligned} f(x) &: \text{미분하기 좋은 함수} \Rightarrow \text{다항함수, 로그함수} \\ g(x) &: \text{적분하기 좋은 함수} \Rightarrow \text{지수함수, 삼각함수} \end{aligned}$$

예시 13)

(1) $\displaystyle\int (x+4)e^x\,dx$

$x+4$는 미분하면 간단해지고, 적분하면 복잡해진다. e^x는 미분하건 적분하건 간단하다. 따라서 $x+4$를 $f(x)$로, e^x를 $g'(x)$로 잡는다.

$$\begin{aligned} f(x) &= x+4, & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= e^x, & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x+4)e^x\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= (x+4)e^x - \int e^x\,dx \\ &= (x+4)e^x - e^x + C \\ &= (x+3)e^x + C \end{aligned}$$

(참고) 만약 반대로 $f(x)$와 $g'(x)$를 잡았다면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x \\ g'(x) &= x+4, & g(x) &= \frac{1}{2}x^2+4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x+4)e^x\,dx &= \int f(x)g'(x)\,dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)e^x - \int \left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)e^x\,dx \end{aligned}$$

가 되어 오히려 더 복잡해졌을 것이다.

(2) $\int x \cos x \, dx$

x는 미분하면 간단해지고, 적분하면 복잡해진다. $\cos x$는 미분하건 적분하건 복잡해지지도 간단해지지도 않는다. 따라서 x를 $f(x)$로 잡고, $\cos x$를 $g'(x)$로 잡자.

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \cos x, & g(x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \int f(x) g'(x) \, dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

(3) $\int \ln x \, dx$

$\ln x$는 미분하면 $\frac{1}{x}$가 되고 적분하면 어떻게 되는지는 아직 모른다. 따라서 $\ln x$를 $f(x)$로 잡고 $g'(x) = 1$이라고 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x, & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1, & g(x) &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int f(x) g'(x) \, dx \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

문제 14)

(1) $\int xe^x \, dx$

답 : $xe^x - e^x + C$

(2) $\int x \sin x \, dx$

답 : $-x\cos x + \sin x + C$

(3) $\int x \ln x \, dx$

답 : $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}x + C$

다음 두 결과는 외워두면 유용하게 써먹을 수 있다.

정리 15)

(1) $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$

(2) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

예시 16)

$$\int e^x \sin x\,dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x \\ g'(x) &= \sin x, & g(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x \sin x\,dx &= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\,dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x \\ g'(x) &= \cos x, & g(x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

우변의 $\int e^x \sin x\,dx$를 이항하여 정리하면

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C$$

문제 17)

$$\int e^x \cos x \, dx$$

답 : $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$