수학 : 03 방정식과 부등식

2018년 7월 14일

차 례

1 일차연립방정식

예시 1)

$$3x + 2y - 3 = 0 \tag{1}$$
$$x - y - 1 = 0 \tag{2}$$

(1) + 2 × (2) 를 하면,

$$5x - 5 = 0$$

따라서 $x = 1$ 이다. 이것을 (1) 에 대입하면

$$3 \cdot 1 + 2y - 3 = 0 \tag{3}$$

따라서 $y = 0$ 이다.

답 : $(x, y) = (1, 0)$

이렇듯 주어진 식들에 일정한 숫자를 곱해 더하거나 빼서 답을 얻는 방법을 가감법이라고 한다. 이 방법 말고도 대입법이나 등치법이 쓰일 수 있다.

대입법

(2) 를 변형한

$$y = x - 1$$

을 (1) 에 대입하면

$$3x + 2(x - 1) - 3 = 0$$

따라서 $x = 1$, $y = 0$.

등치법

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$
$$y = x - 1$$

로부터

$$-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = x - 1$$

따라서 $x = 1$, $y = 0$.

예시 2)

$$2x + 4y + 1 = 0 \tag{1}$$
$$x + 2y + 3 = 0 \tag{2}$$

(1) − 2 × (2) 를 하면,

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 5 = 0 \tag{3}$$

이 된다. (3) 을 만족시키는 x, y 는 존재하지 않는다. 따라서 이 연립방정식의 해는 없다.

답 : 근이 없다 (불능不能)

예시 3)

$$2x + 4y + 6 = 0 \tag{1}$$
$$x + 2y + 3 = 0 \tag{2}$$

(1) − 2 × (2) 를 하면,

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0 \tag{3}$$

이 된다. (3) 은 항상 성립하는 식이다. x 가 하나 주어졌을 때 y 값은 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 로 주어진다. 예를 들어 $x = 0$ 이면 $y = -\frac{3}{2}$, $x = 1$ 이면 $y = -2$, $x = 2$ 이면 $y = -\frac{5}{2}$ 이다. 즉,

$$(x, y) = \left(0, -\frac{3}{2}\right), (1, -2), \left(2, -\frac{5}{2}\right), \cdots$$

등이 해가 될 수 있다. 따라서 이 연립방정식의 해는 무수히 많다.

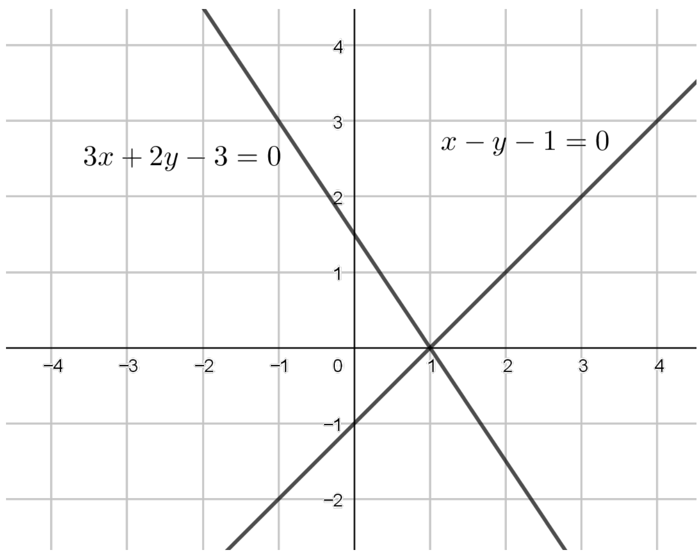
답 : 근이 무수히 많다 (부정不定)

참고 4)

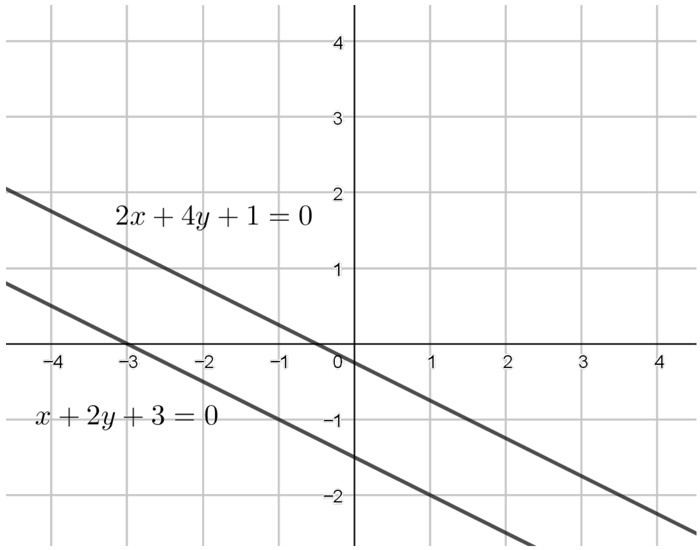
예시 1)–3)를 그래프로 해석해보자. 예시 1)의 (1)과 (2)를 변형하면

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$
$$y = x - 1$$

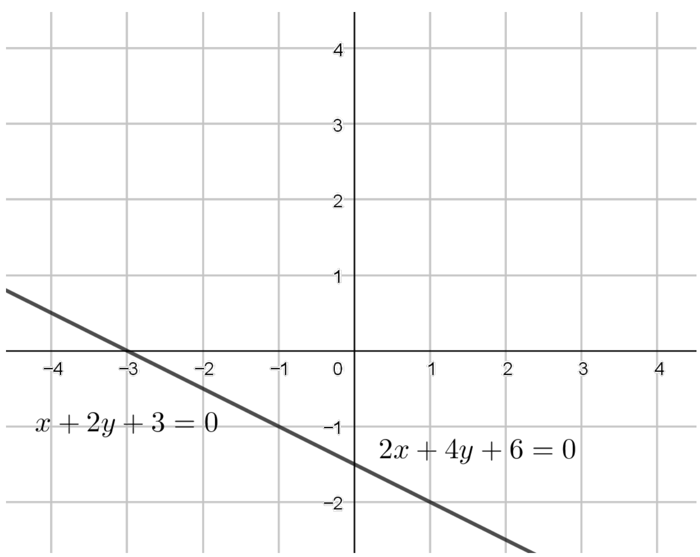
이 되어 (1)은 기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 y절편이 $\frac{3}{2}$인 직선, (2)는 기울기가 1이고 y절편이 -1인 직선이 된다. 두 직선은 한 점 $(1, 0)$에서 만나므로 연립방정식을 만족하는 (x, y)는 한 개이다.



한편, 예시 2) 의 경우 두 직선이 평행하므로 서로 만나지 않는다. 즉, 두 직선의 교점이 없다. 따라서 연립방정식을 만족시키는 (x, y)는 존재하지 않는다.



또한, 예시 3) 에서는 두 직선이 일치한다. 즉 두 직선의 교점이 무한히 많다. 따라서 연립방정식을 만족시키는 (x, y)는 무한히 많다.



정리 5)

a, b, c, a', b', c' 가 0이 아닌 실수일 때, 연립방정식

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

의 근은 다음과 같다.

i) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ 이면 근이 한 개이다.

ii) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ 이면 근이 없다.

iii) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 이면 근이 무수히 많다.

증명)

두 식을 각각 정리하면

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a} \\ y = -\frac{b'}{a'}x - \frac{c'}{a'} \end{cases}$$

이다. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ 를 변형하면

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$$

이 된다. 또한 $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ 를 변형하면

$$-\frac{c}{a} = -\frac{c'}{a'}$$

이 된다. 즉 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ 아면 두 직선의 기울기가 같고, $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ 이면 두 직선의 y 절편이 같다.

i) 의 경우, 두 직선의 기울기가 서로 다르다. 따라서 두 직선은 한 점에서 만나고 연립방정식의 근은 한 개이다.

ii) 의 경우, 두 직선의 기울기가 서로 같고 y 절편은 서로 다르다. 따라서 두 직선은 평행하여 만나지 않는다. 그러므로 연립방정식의 근은 없다.

iii) 의 경우, 두 직선의 기울기가 서로 같고 y 절편도 서로 같다. 따라서 두 직선은 일치하여 무수히 많은 점에서 만난다. 그러므로 연립방정식의 근은 무수히 많다.

문제 6)

다음은 가감법을 이용하여 정리 5) 를 증명한 것이다. (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 채워넣어라.

증명)

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

$$a'x + b'y + c' = 0 \tag{2}$$

(1) 에는 b' 을 곱하고, (2) 에는 b를 곱하면

$$ab'x + bb'y + b'c = 0 \tag{3}$$

$$\boxed{\quad\text{(가)}\quad} = 0 \tag{4}$$

이 된다. (3) − (4) 를 하면

$$(ab' - a'b)x + (b'c - bc') = 0 \tag{5}$$

이 된다.

i) 의 경우, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ 로부터 $ab' - a'b \neq 0$ 이다. 따라서 (5) 를 $ab' - a'b$ 로 나누어 정리하면

$$x = \boxed{\text{(나)}} \tag{6}$$

이다. 이제 (6) 을 (1) 에 대입하면

$$a \cdot \boxed{\text{(나)}} + by + c = 0$$

이고, 이것을 정리하면

$$\begin{aligned} by &= -a \cdot \boxed{\quad (나) \quad} - c \\ &= \frac{-a(bc' - b'c) - (ab' - a'b)c}{ab' - a'b} \\ &= \frac{a'bc - abc'}{ab' - a'b} \end{aligned}$$

따라서

$$y = \boxed{\quad (다) \quad}$$

이다. 즉 연립방정식의 근은

$$(x, y) = \left(\boxed{\quad (나) \quad}, \boxed{\quad (다) \quad} \right)$$

의 한 개이다.

ii) 와 iii) 의 경우, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ 로부터 $ab' - a'b = 0$ 이다. 따라서 (5) 는

$$0 \cdot x + (b'c - bc') = 0 \tag{7}$$

이다.

ii) 이면 $b'c - bc' \neq 0$ 이므로 (7) 의 근은 없다. 따라서 연립방정식의 근도 없다. 또, iii) 이면 $b'c - bc' = 0$ 이므로 (7) 은 무수히 많은 근을 가진다. 따라서 연립방정식도 무수히 많은 근을 가진다.

문제 7) 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+4y=14 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 3x+9y=12 \end{cases}$

문제 8) 다음 연립방정식이 해를 가지지 않을 때, k의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x+y+5=0 \\ x+ky+1=0 \end{cases}$$

문제 9) 다음 연립방정식이 무수히 많은 해를 가질 때, k의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ -2x+2y+k=0 \end{cases}$$

2 이차부등식

예시 10)

다음 이차부등식들의 해를 구하여라.

(1) $x^2 - 2x - 3 > 0$

(2) $x^2 - 2x - 3 < 0$

풀이1

$$AB > 0 \iff (A > 0 \text{ 이고 } B > 0) \text{ 또는 } (A < 0 \text{ 이고 } B < 0)$$
$$AB < 0 \iff (A > 0 \text{ 이고 } B < 0) \text{ 또는 } (A < 0 \text{ 이고 } B > 0)$$

임을 이용한다.

(1) $(x-3)(x+1) > 0$ 에서

$$\begin{aligned} & (x-3 > 0 \text{ 이고 } x+1 > 0) \text{ 또는 } (x-3 < 0 \text{ 이고 } x+1 < 0) \\ \iff & (x > 3 \text{ 이고 } x > -1) \text{ 또는 } (x < 3 \text{ 이고 } x > -1) \\ \iff & x > 3 \text{ 또는 } x > -1 \end{aligned}$$

이다.

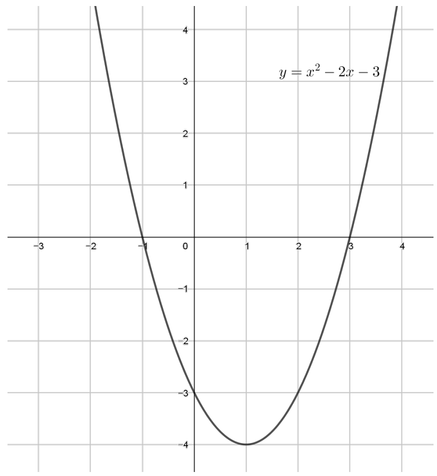
(2) $(x-3)(x+1) < 0$ 에서

$$\begin{aligned} & (x-3 \text{ 이고 } x+1 > 0) \text{ 또는 } (x-3 > 0 \text{ 이고 } x+1 < 0) \\ \iff & (x < 3 \text{ 이고 } x > -1) \text{ 또는 } (x > 3 \text{ 이고 } x < -1) \\ \iff & -1 < x < 3 \text{ 또는 } (\text{모순}) \\ \iff & -1 < x < 3 \end{aligned}$$

이다.

풀이2

$y = x^2 - 2x - 3$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



(1) 그래프가 x축보다 위쪽에 있으려면 $x < -1$ 또는 $x > 3$이어야 한다.
(2) 그래프가 x축보다 아래쪽에 있으려면 $-1 < x < 3$이어야 한다.

답 : (1) $x < -1$ 또는 $x > 3$, (2) $-1 < x < 3$

문제 11)

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2 - x - 12 \geq 0$

(2) $x^2 - x - 12 \leq 0$

풀이1

풀이2

예시 12)

다음 이차부등식들의 해를 구하여라.

(1) $x^2 + 4x + 4 > 0$

(2) $x^2 + 4x + 4 < 0$

(3) $x^2 - 3x + 3 > 0$

(4) $x^2 - 3x + 3 < 0$

풀이1

$$A\text{가 실수일 때, } A \geq 0$$

임을 이용한다.

(1) 주어진 식을 정리하면

$$(x+2)^2 > 0$$

이고, 이 식은 $x \neq -2$이면 성립한다. 따라서 이 이차부등식의 해는 $x \neq -2$이다.

(2) 주어진 식을 정리하면

$$(x+2)^2 < 0$$

이고, 이 식은 성립하지 않는다. 따라서 이 이차부등식의 해는 없다.

(3) 주어진 식을 정리하면

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

이고, 이 식은 항상 성립한다. 따라서 이 이차부등식의 해는 모든 실수이다.

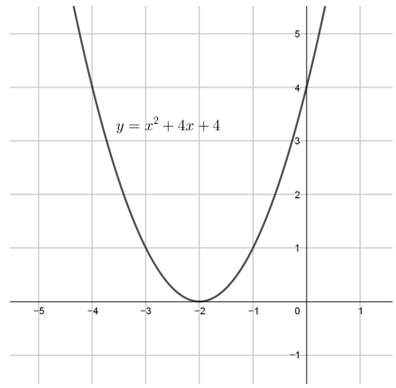
(4) 주어진 식을 정리하면

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 0$$

이고, 이 식은 성립하지 않는다. 따라서 이 이차부등식의 해는 없다.

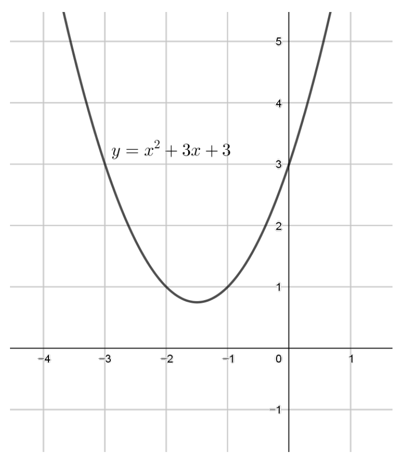
풀이2

$y = x^2 + 4x + 4$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



(1) 그래프가 x축보다 위쪽에 있으려면 $x \neq -2$이면 된다.
(2) 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 경우는 없다.

$y = x^2 + 3x + 3$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



(3) 그래프는 x축보다 항상 위쪽에 있다.
(4) 그래프가 x축보다 아래쪽에 있는 경우는 없다.

답 : (1) x는 $x \neq -2$인 모든 실수, (2) 해는 없다
(3) x는 모든 실수, (4) 해는 없다

문제 13)

다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2 - 2x + 1 > 0$

(2) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

(3) $x^2 - 2x + 1 < 0$

(4) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

풀이1

풀이2

예시 14)
모든 실수 x에 대하여

$$x^2 - 3x + k > 0$$

이 성립하도록 하는 k의 범위를 구하여라.

풀이

$f(x)$를

$$f(x) = x^2 - 3x + k$$

로 두면 $y = f(x)$의 그래프는 아래로 볼록인 포물선이다. 모든 실수 x에 대해 $f(x) > 0$이려면 $y = f(x)$의 그래프가 x축보다 위에 있어야 한다. 즉 $y = f(x)$의 그래프와 x축이 서로 만나지 않아야 하므로 방정식 $f(x) = 0$의 실근이 없어야 한다. 그러므로 $D < 0$를 풀면,

$$D = 9 - 4k < 0$$

따라서 $k > \frac{9}{4}$이다.

문제 15)
모든 실수 x에 대하여

$$x^2 + 4x + k \geq 0$$

이 성립하도록 하는 k의 범위를 구하여라.

문제 16)
모든 실수 x에 대하여

$$x^2 + kx + 3 > 0$$

이 성립하도록 하는 k의 범위를 구하여라.

답

문제 7)

(1) $(x, y) = (1, 2)$

(2) $(x, y) = (5, 1)$

(3) 근이 무수히 많다(부정)
$(x, y) = \left(x, \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right)$

(4) 근이 없다(불능)

문제 8)

4

문제 9)

-6

문제 6)

(가) $a'bx + bb'y + bc'$

(나) $\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$

(다) $\frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$

문제 11)

(1) $x \leq -3$ 또는 $x \geq 4$

(2) $-3 \leq x \leq 4$

문제 13)

(1) x는 $x \neq 1$인 모든 실수

(2) x는 모든 실수

(3) 해는 없다.

(4) $x = 1$

문제 15)

$k \geq 4$

문제 16)

$-2\sqrt{3} < k < 2\sqrt{3}$