수학(하) : 06 원의 방정식

2018년 8월 7일

차 례

1 자취문제

$\cdots$를 만족시키는 점 P의 자취를 구하여라.

$\cdots$를 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

$\cdots$를 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여라.

$\cdots$를 만족시키는 점 P가 그리는 궤적을 구하여라.

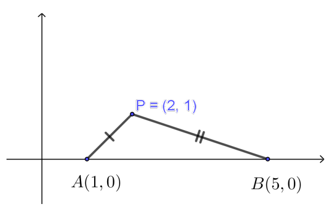
와 같은 수학문제가 있다. 이것을 '자취문제'라고 하자.

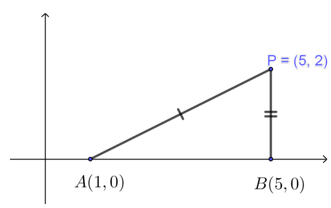
예시 1)
예를 들어,

두 점 $A(1,0)$, $B(5,0)$에 대해 $\overline{PA} = \overline{PB}$을 만족시키는 점 P의 자취를 구하여라.

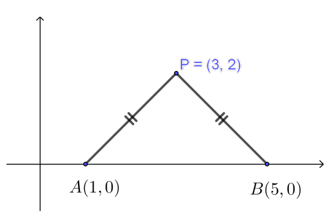
라는 문제가 있다고 하자.

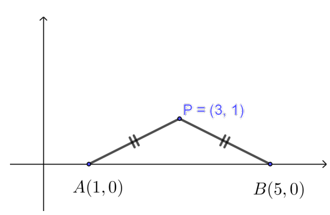
P가 어떤 점일 때 $\overline{PA} = \overline{PB}$가 성립할까? 만약 $P = (2,1)$이거나 $P = (5,2)$이면 $\overline{PA} \neq \overline{PB}$이 되어 주어진 조건이 성립하지 않는다.





하지만 $P = (3,2)$이거나 $P = (3,1)$ 같은 점이면 주어진 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$가 성립한다.



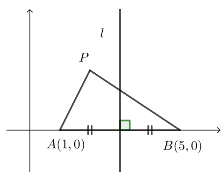


조금만 더 생각해보면 점 P가 선분 AB의 수직이등분선인 $x = 3$ 위에 있으면 된다는 것을 알 수 있다.

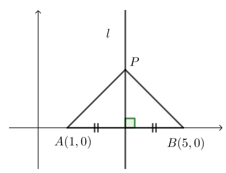
이 문제는 다음 두 방법으로 설명할 수 있다.

풀이1

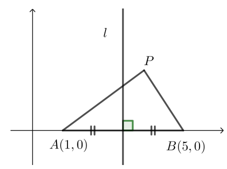
점 P가 선분 AB의 수직이등분선 l 위에 있으면 주어진 조건 $\overline{PA}=\overline{PB}$가 성립한다. 하지만 점 P가 직선 l보다 왼쪽에 있으면 $\overline{PA}<\overline{PB}$이고 오른쪽에 있으면 $\overline{PA}>\overline{PB}$이다. 즉 P가 l 위에 있지 않으면 주어진 조건 $\overline{PA}=\overline{PB}$가 성립하지 않는다.



$\overline{PA}<\overline{PB}$



$\overline{PA}=\overline{PB}$



$\overline{PA}>\overline{PB}$

따라서 P의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이다.

풀이2

구하는 점 P를

$$P=(x,y)$$

라고 두자. 그러면 $\overline{PA}=\overline{PB}$는

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}$$

이고 이것을 제곱하여 정리하면

$$(x-1)^2+(y-0)^2=(x-5)^2+(y-0)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2=x^2-10x+25+y^2$$
$$8x=24$$
$$x=3$$

이다. 따라서 점 P의 자취의 방정식은 $x=3$이다.

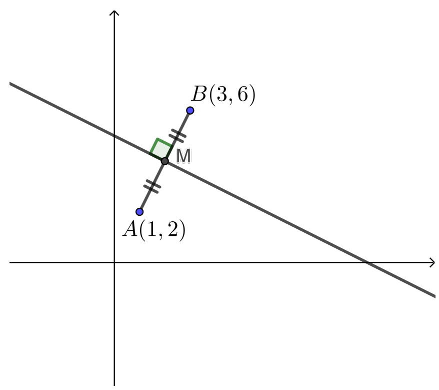
답 : 선분 AB의 수직이등분선 또는 $x=3$

예시 2)

두 점 $A(1,2)$, $B(3,6)$에 대해 $\overline{PA}=\overline{PB}$을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식 구하여라.

풀이1

예시 1)에서와 같이 생각해보면 구하는 자취의 방정식은 선분 AB의 수직이등분선이다.



선분 AB의 기울기는

$$\frac{6-2}{3-1}=2$$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 또 A와 B의 중점

$$M=\left(\frac{1+3}{2}\ ,\ \frac{2+6}{2}\right)=(2,4)$$

를 지나므로

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+4$$

$$y=-\frac{1}{2}x+5$$

이다. 이것을 더 정리해

$$x+2y-10=0$$

로 쓸 수도 있다.

풀이2

구하는 점 P를 $P=(x,y)$라고 두고 $\overline{PA}=\overline{PB}$를 풀면

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=(x-3)^2+(y-6)^2$$
$$4x+8x-40=0$$
$$x+2y-10=0$$

답 : 선분 AB의 수직이등분선 또는 $y=-\frac{1}{2}x+5$ 또는 $x+2y-10=0$

위의 문제들에서 **풀이1**의 방법으로 풀 수 있다면 가장 좋지만, 많은 경우에 그렇게 풀리지 않는다. 그래서 아래와 같은 **풀이2**의 방법을 사용할 수 있어야 한다.

정리 3) 자취 문제의 풀이

다음과 같은 자취문제

조건 A를 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

를 풀 때에는 다음의 방법으로 푼다.

i) $P=(x,y)$로 둔다.

ii) 주어진 조건 A를 사용하여 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

문제 4)

두 점 $A(-1,2)$, $B(-1,5)$에 대해 $\overline{PA}=\overline{PB}$을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

문제 5)

두 점 $A(0,0)$, $B(3,2)$에 대해 $\overline{PA}=\overline{PB}$을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

문제 6)

점 $A(4,2)$에서 직선 $2x+3y+12=0$ 사이의 거리를 구하여라.

문제 7)

다음과 같은 t에 대한 방정식을 풀어라.

(1) $|t|=3$

(2) $|t-2|=5$

(3) $|t+1|=|2t-7|$

예시 8)

두 직선 $l: x+7y+3=0$, $m: x-y-5=0$에서 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

점 P를 $P(x,y)$로 두면

$$\frac{|x+7y+3|}{\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{|x-y-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$|x+7y+3| = 5|x-y-5|$$

$$x+7y+3 = 5(x-y-5) \qquad \text{혹은} \qquad x+7y+3 = -5(x-y-5)$$

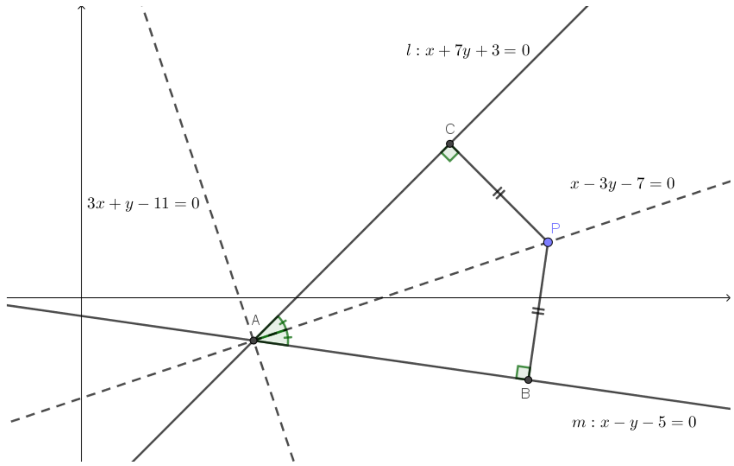
$$x-3y-7=0 \qquad \text{혹은} \qquad 3x+y-11=0$$

답 : $x-3y-7=0$ 혹은 $3x+y-11=0$

실제로 그림을 그려보면, 답이 되는 두 직선은 l과 m의 각이등분선이라는 것을 알 수 있다. 다음 그림에서 $\triangle PAB \equiv \triangle PAC(RHS)$이고, 따라서

$$\angle PAB = \angle PAC$$

이기 때문이다.



문제 9)

두 직선 $l : y = 0$, $m : 3x - 4y - 6 = 0$에서 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하여라.

문제 10)

두 직선 $l : 2x - y = 0$, $m : x + 2y = 0$의 각이등분선들을 구하여라.

2 원의 방정식

원이란,

$\boxed{\text{평면 위의 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점들이 이루는 도형}}$

이다.

예시 11)
좌표평면 위의 한 점 $C(3,0)$으로부터 2만큼 떨어져 있는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여라.

$P=(x,y)$라고 두자. $\overline{PC}=2$가 성립해야 하므로

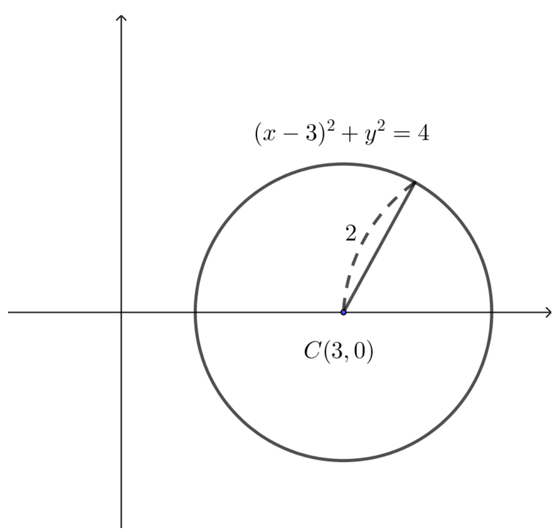
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=2$$
$$(x-3)^2+y^2=4$$

답 : $(x-3)^2+y^2=4$

다시 말해, 중심이 $C(3,0)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=4$$

이다.



정리 12) 원의 방정식
중심이 $C(a,b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

문제 13) 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 $(2,-3)$이고 반지름의 길이가 4인 원

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원

예시 14)
원의 방정식 $x^2-6x+y^2+4y+5=0$이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

주어진 식을 정리하면

$$x^2-6x+y^2+4y=-5$$
$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=-5+9+4$$
$$(x-3)^2+(y+2)^2=8$$

이다. 따라서 원의 중심은 $(3,-2)$이고, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

답 : 원의 중심 $=(3,-2)$, 반지름의 길이 $=2\sqrt{2}$

문제 15) 다음 원의 방정식들이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

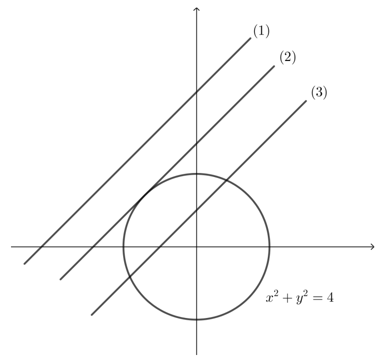
(1) $x^2+y^2+4x=0$

(2) $2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$

3 원과 직선의 위치관계

예시 16)

직선 $y = x + n$과 원 $x^2 + y^2 = 4$의 위치관계가 다음과 같을 때, 실수 n의 값 또는 값의 범위를 구하여라.



(1) 만나지 않을 때

(2) 한 점에서 만날 때(접할 때)

(3) 두 점에서 만날 때

풀이1

(1)이면 교점이 없고, (2)이면 교점이 한 개 있으며, (3)이면 교점이 두 개 있다. 따라서 연립방정식

$$\begin{cases} y = x + n \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

의 근의 개수가 (1) 0개, (2) 1개, (3) 2개일 조건을 구하면 된다. 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입해 정리하면

$$x^2 + (x+n)^2 = 4$$
$$2x^2 + 2nx + n^2 - 4 = 0$$

이다. $D/4$를 계산하면

$$D/4 = n^2 - 2(n^2 - 4) = -n^2 + 8$$

이므로

(1) $-n^2 + 8 < 0$, $n^2 > 8$. 따라서 $n < 2\sqrt{2}$ 혹은 $n > 2\sqrt{2}$

(2) $-n^2 + 8 = 0$, $n^2 = 8$. 따라서 $n = \pm 2\sqrt{2}$.

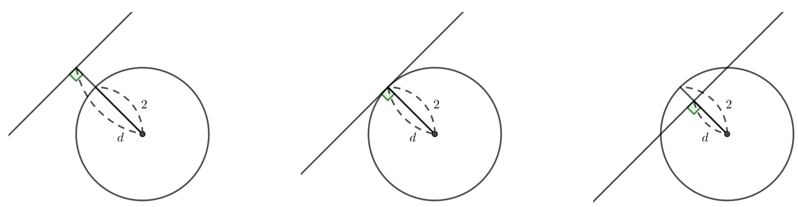
(3) $-n^2 + 8 > 0$, $n^2 < 8$. 따라서 $-2\sqrt{2} < n < 2\sqrt{2}$.

풀이2

원점에서부터 직선 $x - y + n = 0$까지의 거리를 d라고 하면

$$d = \frac{|0 - 0 + n|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|n|}{\sqrt{2}}$$

이다.



(1) $d > 2$ (2) $d = 2$ (3) $d < 2$

따라서

(1) $\dfrac{|n|}{\sqrt{2}} > 2, \quad |n| > 2\sqrt{2}$.

따라서 $n < 2\sqrt{2}$ 혹은 $n > 2\sqrt{2}$.

(2) $\dfrac{|n|}{\sqrt{2}} = 2, \quad |n| = 2\sqrt{2}$.

따라서 $n = \pm 2\sqrt{2}$.

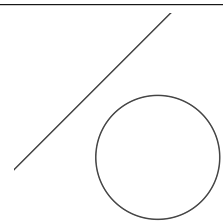
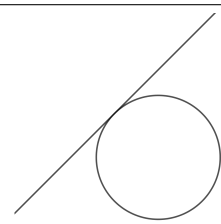
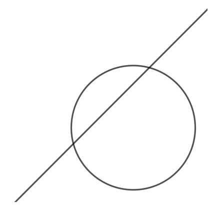
(3) $\dfrac{|n|}{\sqrt{2}} < 2, \quad |n| < 2\sqrt{2}$.

따라서 $-2\sqrt{2} < n < 2\sqrt{2}$.

답 : (1) $n < 2\sqrt{2}$ 혹은 $n > 2\sqrt{2}$, (2) $n = \pm 2\sqrt{2}$, (3) $-2\sqrt{2} < n < 2\sqrt{2}$

정리 17) 원과 직선의 위치관계

평면 위에 원과 직선이 있다면 다음의 세 경우 중 하나이다.

만나지 않는다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	두 점에서 만난다.
		
$D<0$	$D=0$	$D>0$
$d>r$	$d=r$	$d<r$

문제 18)

직선 $y=2x+n$이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$과 두 점에서 만날 때 실수 n의 값의 범위를 구하여라.

풀이1

풀이2

4 원의 접선의 방정식

예시 19)

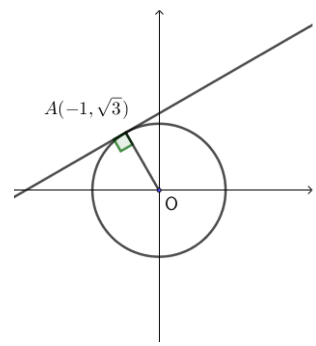
원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $A(-1,\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

원의 중심 $O(0,0)$와 A를 이은 선분 OA의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}-0}{(-1)-0}=-\sqrt{3}$$

이므로 접선의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)+\sqrt{3}$$
$$x-\sqrt{3}y+4=0$$



답 : $x-\sqrt{3}y+4=0$

문제 20)

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $A(2,1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

문제 21)

원 $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 위의 점 $A(7,7)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

정리 22)
원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $A(x_1,y_1)$에서의 접선의 방정식은

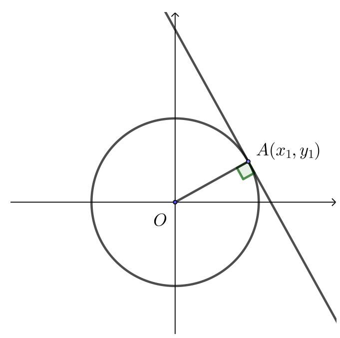
$$x_1x+y_1y=r^2$$

증명*) 원의 중심 $O(0,0)$와 A를 이은 선분 OA의 기울기는

$$\frac{y_1-0}{x_1-0}=\frac{y_1}{x_1}$$

이므로 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1 \\ y_1y &= -x_1x+{x_1}^2+{y_1}^2 \\ y_1y+x_1x &= {x_1}^2+{y_1}^2 \end{aligned}$$



$A(x_1,y_1)$는 원 위에 있으므로
${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$이다. 이것을 사용하면

$$y_1y+x_1x=r^2$$

를 얻는다. □

예시 23)
예시 19)를 정리 22)의 공식을 적용해 구하면

$$(-1)\cdot x+\sqrt{3}y=4$$

$$x-\sqrt{3}y+4=0$$

문제 24)
문제 20)을 정리 22)의 공식을 적용해 구하여라.

*정확한 증명을 위해서는 $x_1=0$이거나 $y_1=0$인 경우도 고려해야 하지만 생략했다.

예시 25)

원 $x^2+y^2=10$에 접하고 기울기가 -3인 접선의 방정식을 구하여라.

접선의 방정식을 $y = -3x+n$으로 두고, 예시 16)에서 사용한 방법을 쓰면 된다.

$\boxed{\textbf{풀이1}}$ 두 식을 연립하면

$$x^2+(-3x+n)^2=10$$

$$10x^2-6nx+n^2-10=0$$

$$D/4=9n^2-10(n^2-10)=-n^2+100=0$$

$$n=\pm 10.$$

$\boxed{\textbf{풀이2}}$ 원점에서 $3x+y-n=0$까지의 거리는 $\frac{|n|}{\sqrt{10}}$ 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

에서 $|n|=10$, $n=\pm 10$.

따라서 접선의 방정식은

$$y=-3x\pm 10$$

문제 26)

원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식을 구하여라.

정리 27)
원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

증명) 접선의 방정식을 $y = mx + n$으로 두자.

방법1 두 식을 연립하면

$$x^2 + (mx+n)^2 = r^2$$
$$(1+m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$$
$$D/4 = (mn)^2 - (1+m^2)(n^2-r^2) = 0$$
$$-n^2 + (1+m^2)r^2 = 0$$
$$n = \pm r\sqrt{1+m^2}$$

방법2 원점에서 $mx - y + n = 0$까지의 거리는 $\frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}}$이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}} = r$$

따라서

$$n = \pm r\sqrt{1+m^2}$$

....

이 n값을 $y = mx + n$에 대입하면 위의 식이 나온다.

예시 28)
예시 25)를 정리 27)의 공식을 적용해 구하면

$$y = -3x \pm \sqrt{10}\sqrt{1+(-3)^2} = -3x \pm 10$$

문제 29)
문제 26)을 정리 27)의 공식을 적용해 구하여라.

5 두 원의 교점을 지나는 도형

두 직선

$$l_1 : ax + by + c = 0$$
$$l_2 : a'x + b'y + c' = 0$$

에 대해

$$l_3 : (ax + by + c) + m(a'x + b'y + c') = 0$$

는 l_1과 l_2의 교점을 지나는 직선이었다.

마찬가지로, 두 원

$$C_1 : x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$C_2 : x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$$

에 대해

$$C_3 : (x^2 + y^2 + Ax + By + C) + m(x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$$

는 l_1과 l_2의 교점을 지나는 도형의 방정식이다. C_3는 대부분 원을 나타내지만 $m = -1$이면 x^2과 y^2의 항들이 사라지면서 직선의 방정식이 된다.

정리 30)

두 원 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, $x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$에 대해

(1) 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $(m \neq -1)$

$$(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + m(x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$$

(2) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2 + y^2 + Ax + By + C) - (x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$$

답

문제 4)
선분 AB의 수직이등분선
또는 $y = \frac{7}{2}$

문제 5)
선분 AB의 수직이등분선
또는 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$
또는 $6x + 4y - 13 = 0$

문제 6)
$2\sqrt{13}$

문제 7)

(1) $t = \pm 3$

(2) $t = -3,\ 7$

(3) $t = 2,\ 8$

문제 9)
$x - 3y - 2 = 0,\ 3x + y - 6 = 0$

문제 10)
$x - 3y = 0,\ 3x + y = 0$

문제 13)

(1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

(2) $x^2 + y^2 = 1$

문제 15)

(1) 원의 중심 $= (-2, 0)$
반지름의 길이 $= 2$

(2) 원의 중심 $= (1, -2)$
반지름의 길이 $= \frac{\sqrt{14}}{2}$

문제 18) $-6 < n < 4$

풀이1

$$(x-1)^2 + (2x+n-1)^2 = 5$$
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 4(n-1)x + (n-1)^2 = 5$$
$$5x^2 + 2(2n-3)x + n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} D/4 &= (2n-3)^2 - 5(n^2 - 2n - 3) \\ &= -n^2 - 2n + 24 > 0 \end{aligned}$$

$$n^2 + 2n - 24 < 0$$
$$(n-4)(n+6) < 0$$
$$-6 < n < 4$$

풀이2

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + n - 1|}{2^2 + (-1)^2} = \frac{|n+1|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$
$$|n+1| < 5$$
$$-5 < n+1 < 5$$
$$-6 < n < 4$$

문제 20)
$2x + y - 5 = 0$

문제 21)
$4x + 3y - 49 = 0$

문제 24)
생략

문제 26)
$y = -x \pm \sqrt{2}$

문제 29)
생략

요약

1. 자취문제

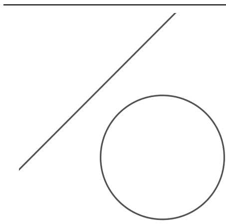
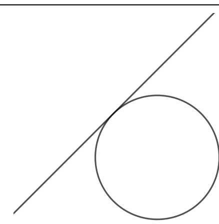
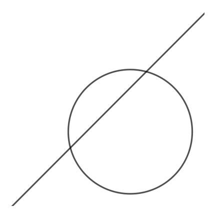
   i) $P = (x, y)$로 둔다.

   ii) 주어진 조건 A를 사용하여 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

2. 원의 방정식

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

3. 원과 직선의 위치관계

만나지 않는다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	두 점에서 만난다.
		
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$d > r$	$d = r$	$d < r$

4. 원의 접선의 방정식

   - $x_1 x + y_y = r^2$
   - $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

5. 두 원의 교점을 지나는 도형

$$(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + m(x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$$