수학(하) : 11 유리함수와 무리함수의 그래프

2018년 10월 29일

차 례

1 복습

정리 1) 도형의 평행이동

도형 $f(x,y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키면 $f(x-a,\ y-b)=0$이 된다.

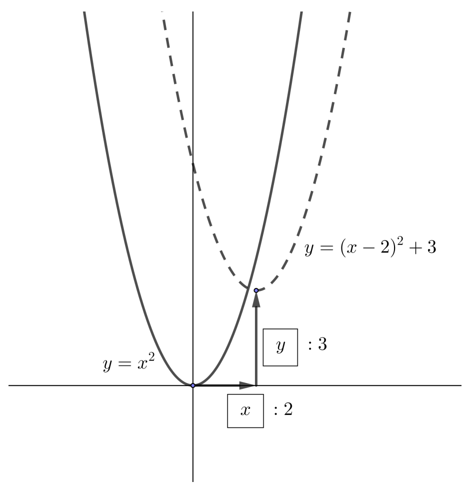
$$f(x,y)=0 \quad \xrightarrow[x \leftarrow x-a, \quad y \leftarrow y-b \text{ 대입}]{\boxed{x}\,:\,a, \quad \boxed{y}\,:\,b} \quad f(x-a,\ y-b)=0$$

예시 2)

포물선 $y=x^2$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 $y-3=(x-2)^2$이 된다.

$$y=x^2 \quad \xrightarrow[x \leftarrow x-2, \quad y \leftarrow y-3 \text{ 대입}]{\boxed{x}\,:\,2, \quad \boxed{y}\,:\,3} \quad y-3=(x-2)^2$$

이것을 정리하면 $y=(x-2)^2+3$이 된다.



문제 3)

직선 $y=3x$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 도형의 방정식을 구하여라.

정리 4) 도형의 대칭이동

도형 $f(x,y)=0$을 각각 x축, y축, 원점, $y=x$에 대해 대칭이동시키면

$$f(x,y)=0 \quad \xrightarrow[y\leftarrow -y \text{ 대입}]{x\text{축 대칭}} \quad f(x,-y)=0$$

$$f(x,y)=0 \quad \xrightarrow[x\leftarrow -x \text{ 대입}]{y\text{축 대칭}} \quad f(-x,y)=0$$

$$f(x,y)=0 \quad \xrightarrow[x\leftarrow -x,\quad y\leftarrow -y \text{ 대입}]{\text{원점 대칭}} \quad f(-x,-y)=0$$

$$f(x,y)=0 \quad \xrightarrow[x\leftarrow y,\quad y\leftarrow x \text{ 대입}]{y=x \text{ 대칭}} \quad f(y,x)=0$$

예시 5) 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$을

(1) x축에 대해

(2) y축에 대해

대칭이동시킨 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $(x-3)^2+(y-1)^2=1 \quad \xrightarrow[y\leftarrow -y \text{ 대입}]{x\text{축 대칭}} \quad (x-3)^2+(-y-1)^2=1$

이다. 이것을 정리하면 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$이 된다.

(2) $(x-3)^2+(y-1)^2=1 \quad \xrightarrow[x\leftarrow -x \text{ 대입}]{y\text{축 대칭}} \quad (-x-3)^2+(y-1)^2=1$

이다. 이것을 정리하면 $(x+3)^2+(y-1)^2=1$이 된다.

문제 6) 예시 5)의 도형을

(1) 원점 대해

(2) 직선 $y=x$에 대해

대칭이동시킨 도형의 방정식을 구하여라.

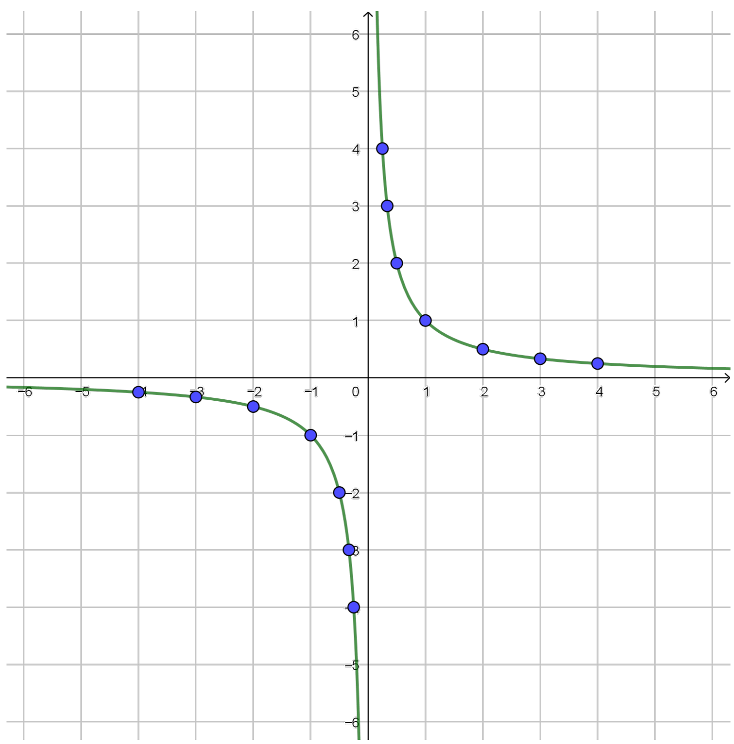
2 유리함수의 그래프

예시 7) $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 그려라.

$y = \frac{1}{x}$ 를 만족시키는 모든 점 (x, y)을 표시하면 된다.
$x = 1$ 이면 $y = 1$ 이고 $y = 2$ 이면 $y = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프는 $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$ 와 같은 점들을 포함한다. 이밖에도

$$\begin{aligned}(x, y) =&(1, 1),\ (2, \tfrac{1}{2}),\ (3, \tfrac{1}{3}),\ (4, \tfrac{1}{4}),\ \cdots\\ &(\tfrac{1}{2}, 2),\ (\tfrac{1}{3}, 3),\ (\tfrac{1}{4}, 4),\ \cdots\\ &(-1, -1),\ (-2, -\tfrac{1}{2}),\ (-3, -\tfrac{1}{3}),\ (-4, -\tfrac{1}{4}),\ \cdots\\ &(-\tfrac{1}{2}, -2),\ (-\tfrac{1}{3}, -3),\ (-\tfrac{1}{4}, -4),\ \cdots\end{aligned}$$

와 같은 점들을 찍을 수 있다. 이 점들을 자연스럽게 이으면 다음과 같은 곡선이 나온다.

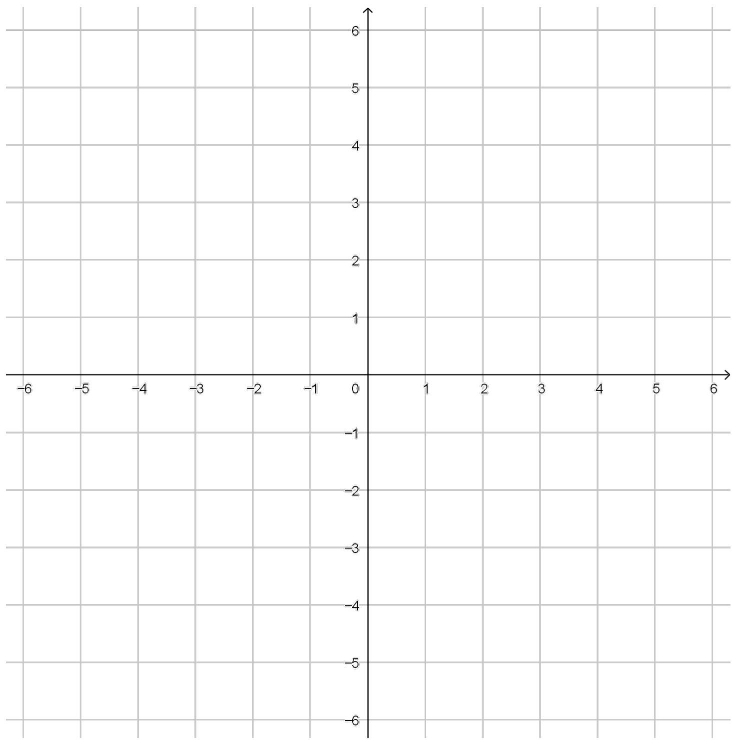


문제 8) 다음 유리함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = \frac{2}{x}$

(2) $y = \frac{6}{x}$

(3) $y = \frac{1}{2x}$



정리 9) $y = \frac{k}{x}$ **의 그래프** $(k > 0)$

- 대칭적인 곡선이다.*
- 제1사분면과 제3사분면에 그래프가 그려진다.
- k값이 커질수록 원점에서 멀어지고 k값이 작아질수록 원점에 가까워진다.

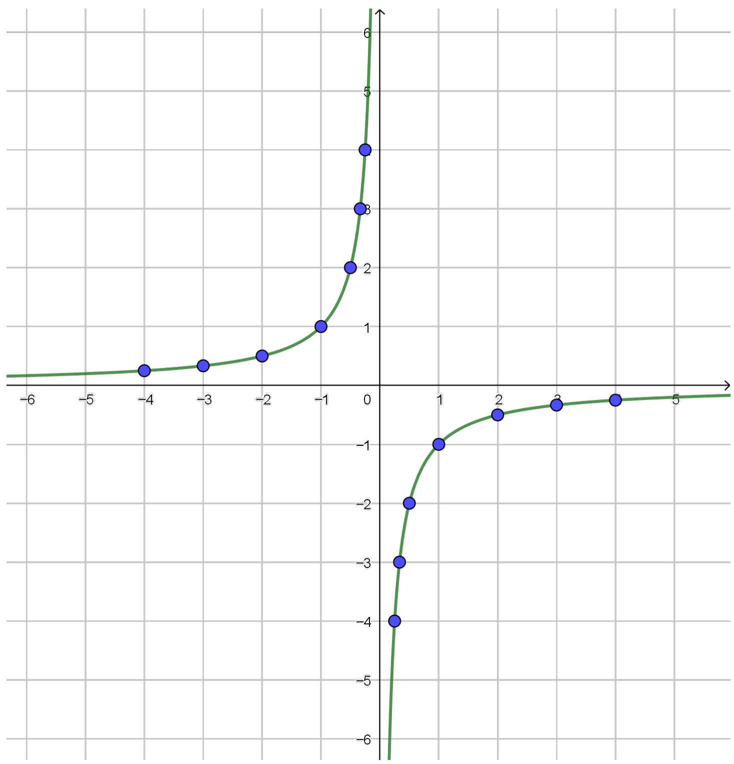
*원점에 대해, 직선 $y = x$에 대해, 직선 $y = -x$에 대해 대칭인 곡선이다.

예시 10) $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 그려라.

마찬가지로 $y = -\frac{1}{x}$ 를 만족시키는 모든 점 (x, y) 을 표시하면 된다.

$$\begin{aligned}(x,y) =&(1,-1),\ (2,-\tfrac{1}{2}),\ (3,-\tfrac{1}{3}),\ (4,-\tfrac{1}{4}),\ \cdots\\ &(\tfrac{1}{2},-2),\ (\tfrac{1}{3},-3),\ (\tfrac{1}{4},-4),\ \cdots\\ &(-1,1),\ (-2,\tfrac{1}{2}),\ (-3,\tfrac{1}{3}),\ (-4,\tfrac{1}{4}),\ \cdots\\ &(-\tfrac{1}{2},2),\ (-\tfrac{1}{3},3),\ (-\tfrac{1}{4},4),\ \cdots\end{aligned}$$

와 같은 점들을 찍을 수 있다. 이번에도 이 점들을 자연스럽게 이으면 다음과 같은 곡선이 나온다.

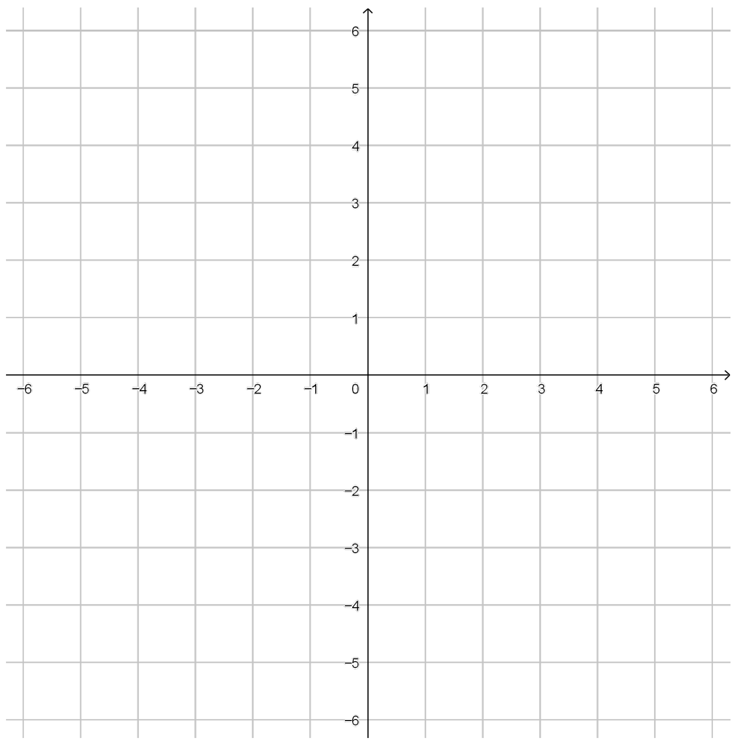


문제 11) 다음 유리함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = -\frac{2}{x}$

(2) $y = -\frac{6}{x}$

(3) $y = -\frac{1}{2x}$



정리 12) $y = \frac{k}{x}$ **의 그래프(**$k < 0$**)**

- 대칭적인 곡선이다.
- 제2사분면과 제4사분면에 그래프가 그려진다.
- $|k|$값이 커질수록 원점에서 멀어지고 $|k|$값이 작아질수록 원점에 가까워진다.

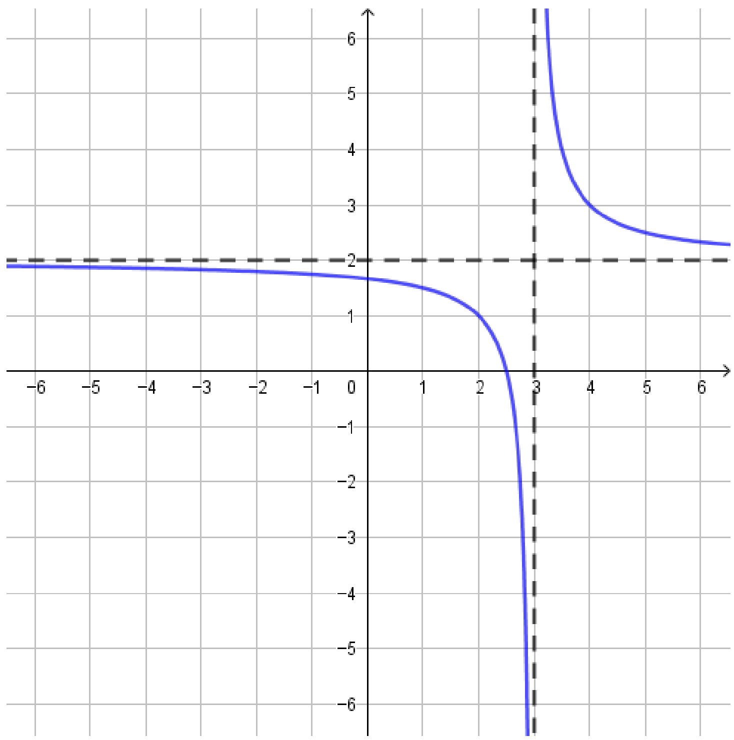
문제 13) 함수 $y = \frac{k}{x}$의 정의역과 공역, 치역을 각각 말하여라.

예시 14) $y=\frac{2x-5}{x-3}$의 그래프를 그려라.

주어진 식의 좌변을 잘 정리하면

$$\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}+2$$

이다. 따라서 $y=\frac{1}{x-3}+2$의 그래프를 그리면 된다.
이 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프이다.



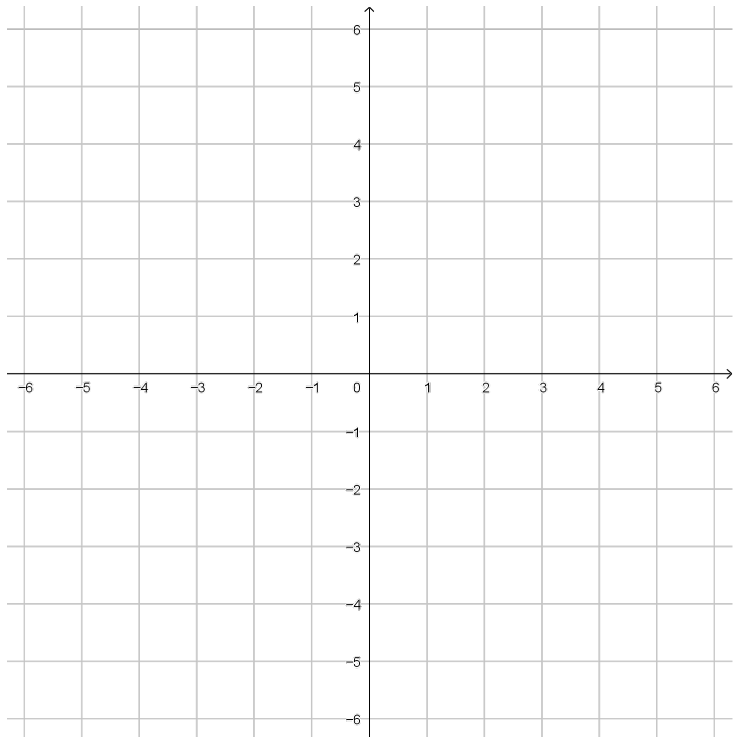
이때, 곡선 위의 점들은 x의 절댓값이 커질수록 직선 $y=2$에 가까워지고 y의 절댓값이 커질수록 직선 $x=3$에 가까워진다. 이와 같은 두 직선 $y=2$, $x=3$을 $\boxed{\text{점근선}}$이라고 부른다.

또한, 주어진 식 $y=\frac{2x-5}{x-3}$에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{5}{2}$이고, $x=0$을 대입하면 $y=\frac{5}{3}$이므로 x절편은 $\frac{5}{2}$, y절편은 $\frac{5}{3}$이다.

문제 15)

다음 유리함수들의 그래프를 그리고 점근선과 x절편, y절편을 구하여라.

(1) $y = \frac{3x+5}{x+1}$

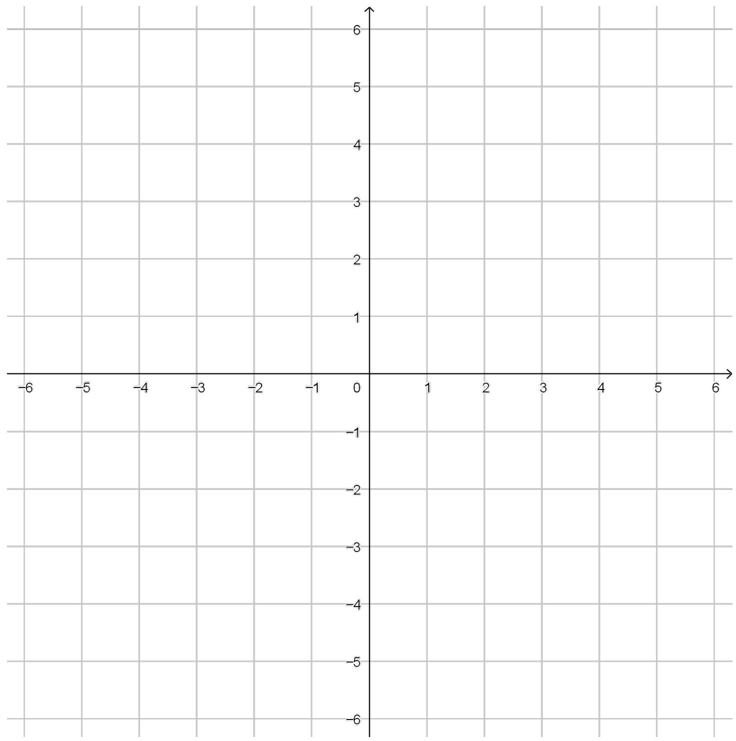


점근선 :

x절편 =

y절편 =

(2) $y = \frac{2x}{x-2}$

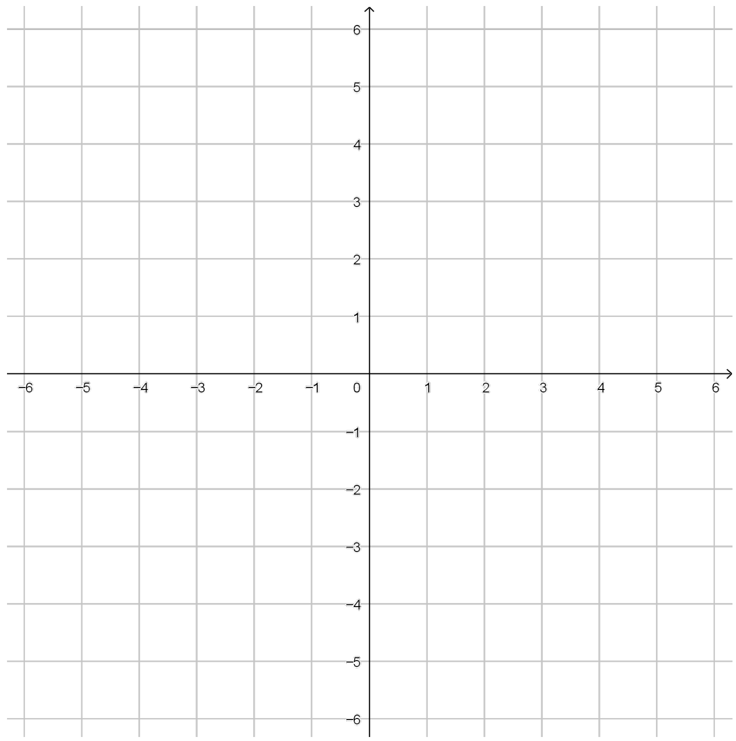


점근선 :

x절편 =

y절편 =

(3) $y = \frac{-x+2}{x-3}$



점근선 :

x절편 =

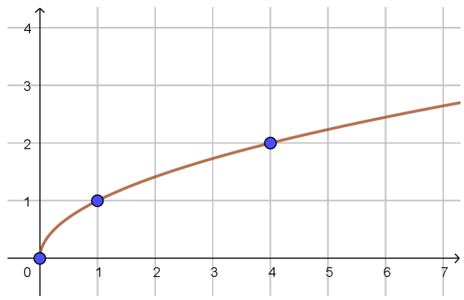
y절편 =

3 무리함수의 그래프

예시 16) $y = \sqrt{x}$의 그래프를 그려라.
$y = \sqrt{x}$를 만족시키는 모든 점 (x, y)를 표시하면 된다.

$$(x, y) = (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), \cdots$$

등을 좌표평면에 표시하고 자연스럽게 이으면



이 된다.

잘 살펴보면 $y = \sqrt{x}$의 그래프는 $y = x^2$의 그래프와 비슷하게 생겼다. $y = x^2$의 그래프 중 제1사분면 부분을 $y = x$에 대해 대칭이동시키면 $y = \sqrt{x}$의 그래프가 되는 것이다.

실제로 함수 $y = x^2$의 정의역이 $\{x \,|\, x \geq 0\}$이고 공역이 $\{y \,|\, y \geq 0\}$이라고 가정하고, 이 함수의 역함수를 구해보면,

$$y = x^2 \qquad (x \geq 0,\ y \geq 0)$$

에서 x 대신에 y를, y 대신에 x를 대입시켜야 하므로

$$x = y^2 \qquad (y \geq 0,\ x \geq 0)$$

이고 $y \geq 0$로부터

$$y = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0,\ y \geq 0)$$

이다. 즉, A를 음이 아닌 실수들의 집합이라고 할 때, 함수 $f : A \to A$, $f(x) = x^2$의 역함수 $f^{-1} : A \to A$는 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$이다.

예시 17) 다음 무리함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y=-\sqrt{x}$

(2) $y=\sqrt{-x}$

(3) $y=-\sqrt{-x}$

(1)의 경우 식 $y=\sqrt{x}$에 y대신 $-y$를 대입한 $-y=\sqrt{x}$를 정리하여 얻어질 수 있다.

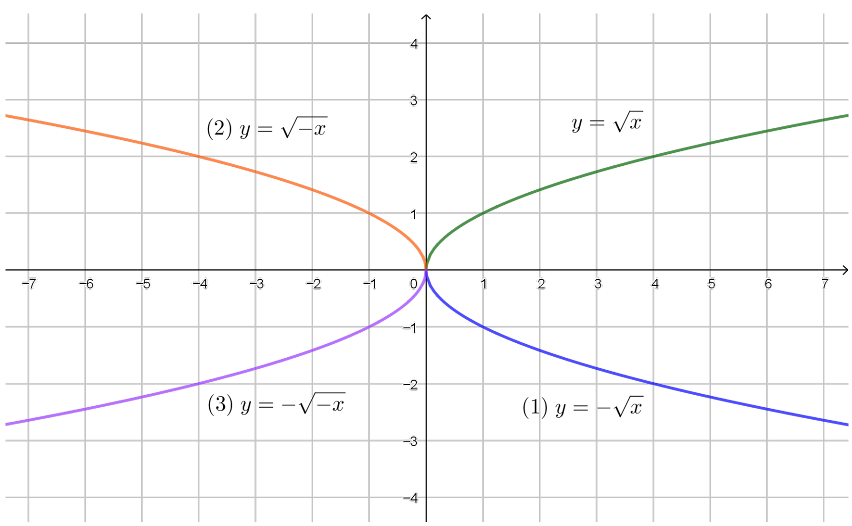
$$y=\sqrt{x} \quad \xrightarrow[y \leftarrow -y \text{ 대입}]{x\text{축 대칭}} \quad y=-\sqrt{x}$$

따라서 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축대칭시킨 것이다.
(2)와 (3)의 경우에는

$$y=\sqrt{x} \quad \xrightarrow[x \leftarrow -x \text{ 대입}]{y\text{축 대칭}} \quad y=\sqrt{-x}$$

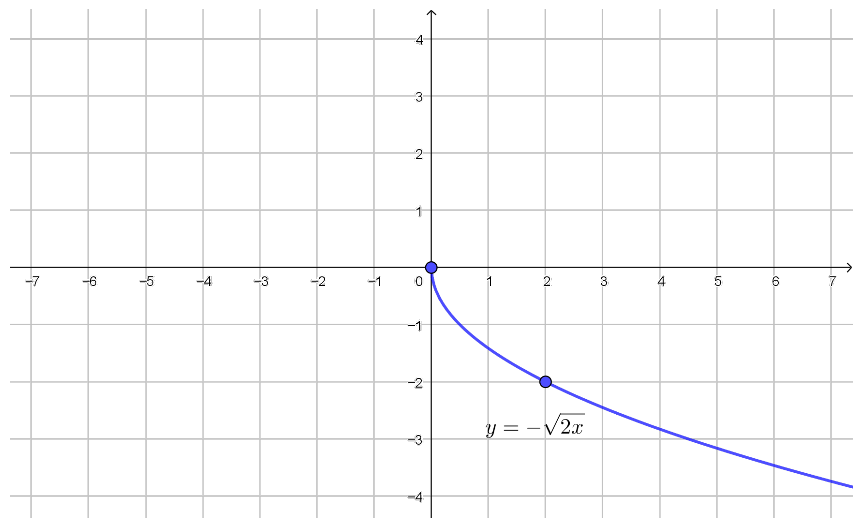
$$y=\sqrt{x} \quad \xrightarrow[x \leftarrow -x, \quad y \leftarrow -y \text{ 대입}]{\text{원점 대칭}} \quad y=-\sqrt{-x}$$

이다. 따라서 $y=\sqrt{-x}$와 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 각각 x축대칭, 원점대칭시켜 얻어진다. 이것들을 좌표평면 위에 그리면 다음과 같다.



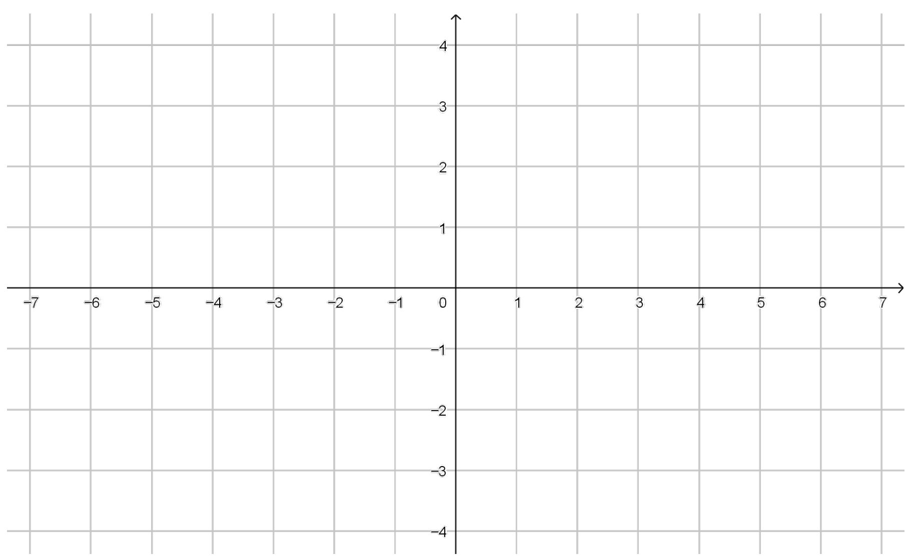
예시 18) $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 그려라.

$y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프의 개형은 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프와 비슷할 것이다. $(0,0)$, $(2,-2)$ 등을 지나도록 그래프를 그리면 다음과 같다.

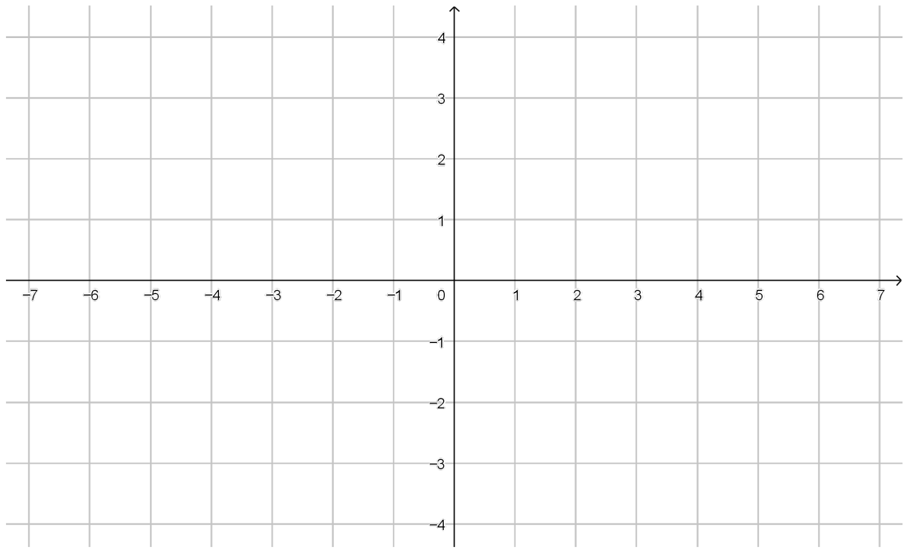


문제 19) 다음 무리함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$



(2) $y = -\sqrt{-3x}$



문제 20)

예시 18)과 문제 19)의 세 함수들의 정의역과 치역을 각각 말하여라.

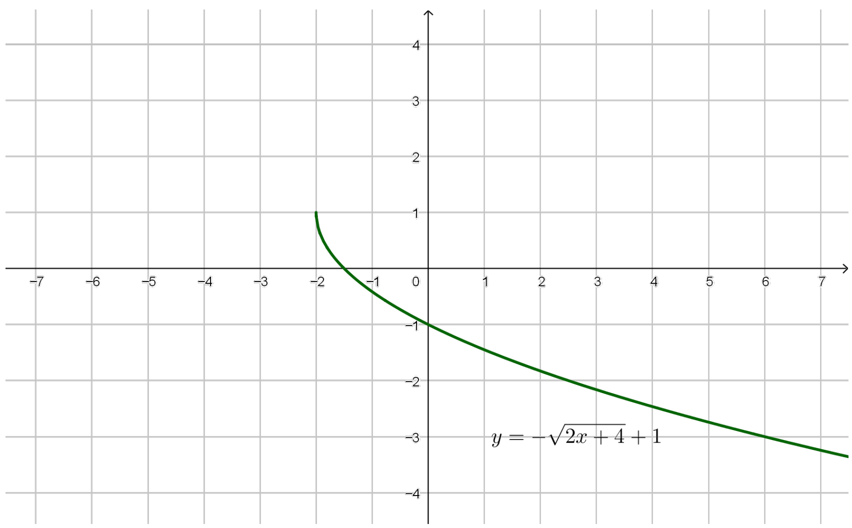
	정의역	치역
$y = -\sqrt{2x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$	$\{y \mid y \leq 0\}$
$y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$		
$y = -\sqrt{-3x}$		

예시 21) $y = -\sqrt{2x+4}+1$의 그래프를 그리고, x절편과 y절편을 각각 구하여라.

주어진 식을 잘 정리하면

$$y - 1 = -\sqrt{2(x+2)}$$

가 된다. 따라서 이 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.
$y = -\sqrt{2x}$의 그래프가 $(0,0)$, $(2,-2)$를 지나기 때문에
$y = -\sqrt{2x+4}+1$의 그래프는 $(-2,1)$, $(0,-1)$을 지난다.



이다.

또한, 주어진 식 $y = -\sqrt{2x+4}+1$에

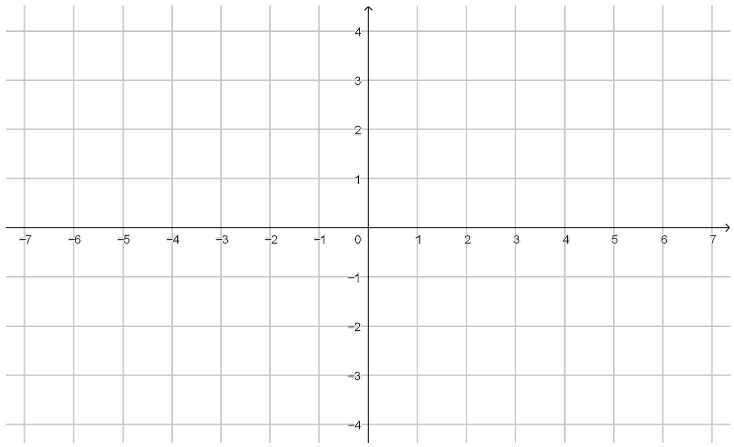
$y = 0$을 대입하면 $x = -\frac{3}{2}$이고, $x = 0$을 대입하면 $y = -1$이므로

x절편은 $-\frac{3}{2}$, y절편은 -1이다.

문제 22)

다음 무리함수들의 그래프를 그리고 x절편, y절편을 구하여라.

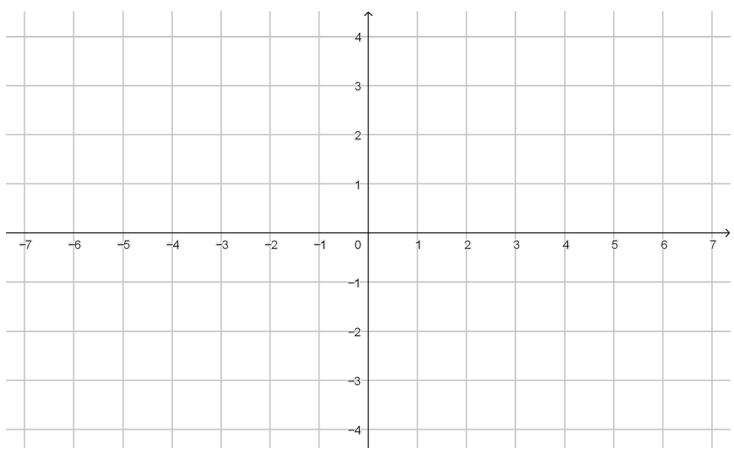
(1) $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x + 3}$



x절편 $=$

y절편 $=$

(2) $y = -\sqrt{-3x + 9} + 3$



x절편 $=$

y절편 $=$

답

문제 3)

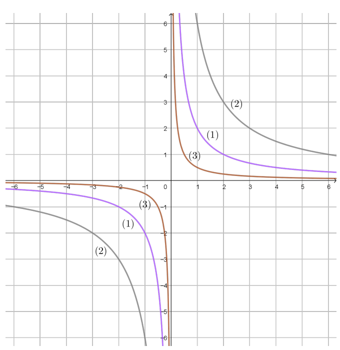
$y = 3x - 5$

문제 6)

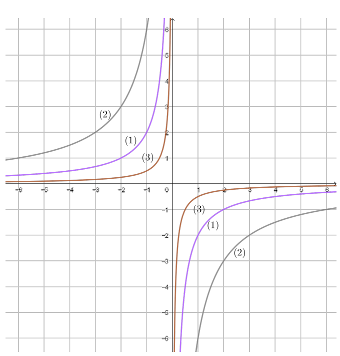
(1) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$

(2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$

문제 8)



문제 11)



문제 13)

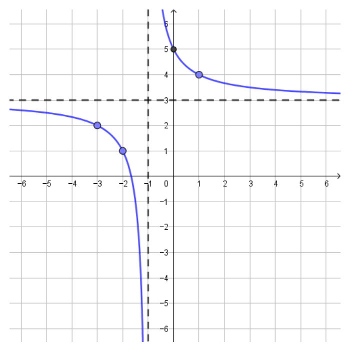
정의역 $= \{x \mid x \neq 0\}$

공역 $=$ 실수 전체의 집합

치역 $= \{y \mid y \neq 0\}$

문제 15)

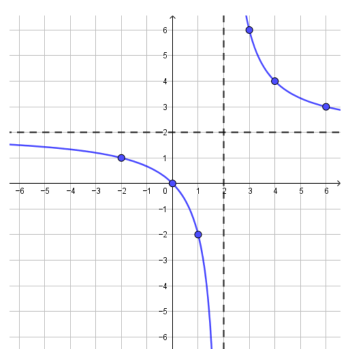
(1)



점근선 : $x = -1$, $y = 3$

x절편 $= -\frac{5}{3}$, y절편 $= 5$

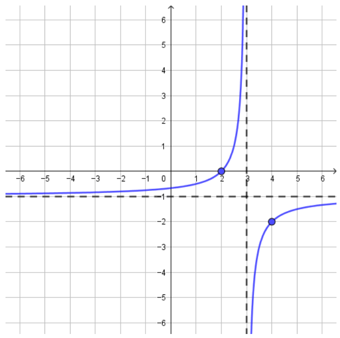
(2)



점근선 : $x = 2$, $y = 2$

x절편 $= 0$, y절편 $= 0$

(3)

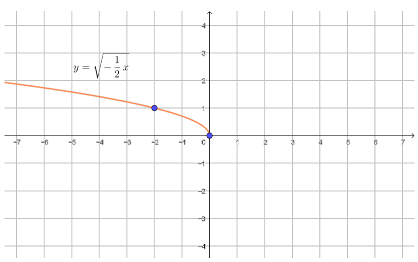


점근선 : $x = 3,\ y = -1$

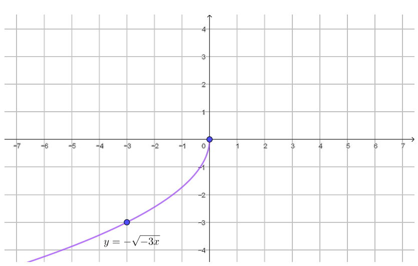
x절편 $= 2,\qquad y$절편 $= -\frac{2}{3}$

문제 19)

(1)



(2)

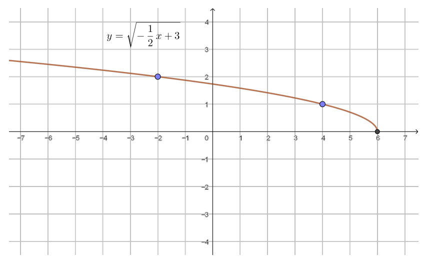


문제 20)

	정의역	치역
$y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$	$\{x \mid x \le 0\}$	$\{y \mid y \ge 0\}$
$y = -\sqrt{-3x}$	$\{x \mid x \le 0\}$	$\{y \mid y \le 0\}$

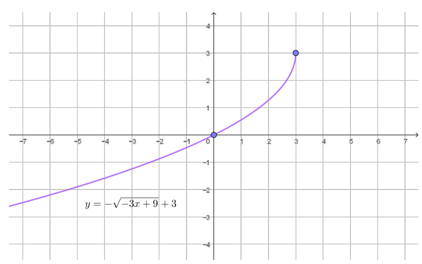
문제 22)

(1)



x절편 $= 6,\qquad y$절편 $= \sqrt{3}$

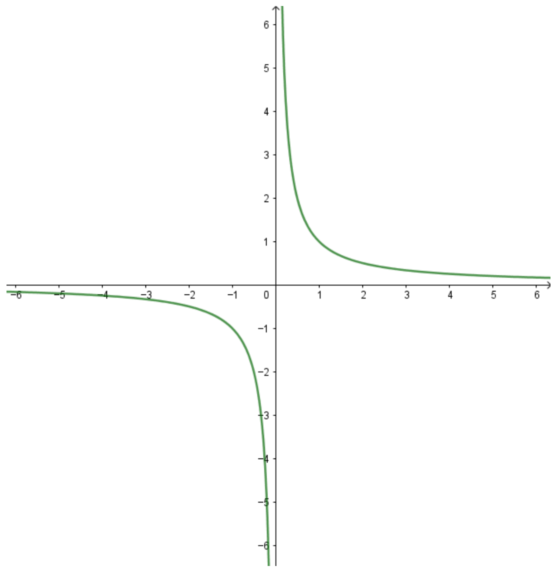
(2)



x절편 $= 0,\qquad y$절편 $= 0$

요약

1. 유리함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프



2. 무리함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프