

운영 : 06 집합(1)

2016년 11월 8일

차 례

차 례	1
1 집합의 뜻	2
2 집합의 표현	4
3 부분집합	6
4 보충·심화 문제	14

1 집합의 뜻

정의 1) 집합과 원소

어떤 조건이나 기준에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 집합이라고 한다. 또 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 원소라고 한다.

예시 2)

‘6의 약수의 모임’은 그 대상이 1, 2, 3, 6으로 분명하기 때문에 집합이다. 이때 1, 2, 3, 6은 원소이다.

문제 3)

- | | |
|----------------------|-----------------|
| (1) 10보다 작은 자연수의 모임 | (집합이다, 집합이 아니다) |
| (2) 1에 가까운 수의 모임 | (집합이다, 집합이 아니다) |
| (3) 성북구에 위치한 중학교의 모임 | (집합이다, 집합이 아니다) |
| (4) 수학 점수가 높은 학생의 모임 | (집합이다, 집합이 아니다) |

정의 4)

a 가 집합 A 의 원소일 때, ‘ a 는 집합 A 에 속한다’라고 말하고

$$a \in A$$

로 나타낸다. 반대로 a 가 집합 A 의 원소가 아니면 ‘ a 는 집합 A 에 속하지 않는다’라고 말하며

$$a \notin A$$

로 나타낸다.

또한, 원소가 하나도 없는 집합을 공집합이라고 하고 기호로는

$$\emptyset$$

로 나타낸다.

예시 5)

예시 2의 집합을 A 라고 하면 $1 \in A$ 이고 $3 \in A$ 이다. 그리고 $4 \notin A$ 이다.

문제 6)

10보다 작은 자연수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 빈 칸에 \in , \notin 중 알맞은 기호를 써넣어라.

(1) $0 \square A$

(2) $1 \square A$

(3) $7 \square A$

(4) $13 \square A$

(5) $5 \square \emptyset$

2 집합의 표현

예시 7)

A 를 ‘8의 약수들의 집합’이라고 하자. A 는 다음의 세 방법으로 나타낼 수 있다.

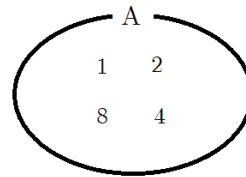
- (1) A 의 원소들을 일일이 나열하는 방법;

$$A = \{1, 2, 4, 8\}$$

- (2) A 에 속하는 조건을 제시하는 방법;

$$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$$

- (3) 그림으로 표현하는 방법;



정의 8) 집합의 표현

집합은 예시 7의 세 가지 방식으로 표현될 수 있다. (1)의 방법을 원소나열법, (2)의 방법을 조건제시법이라고 부른다. (3)의 그림은 벤 다이어그램(Venn diagram)이라고 부른다.

예시 9)

- (1) 집합 $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 는 원소나열법으로 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 와 같이 나타낼 수 있다.
- (2) 집합 $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 는 $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$ 로 나타낼 수 있다. 아니면 $\{5k \mid k \text{는 자연수}\}$ 로 나타낼 수도 있다.

문제 10)

다음 집합을 원소나열법으로 나타내어라.

- (1) 10 보다 작은 소수의 집합 =
- (2) 18의 약수의 집합 =
- (3) $\{x \mid 6 < x < 12, x \text{는 짝수}\} =$
- (4) $\{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\} =$
- (5) $\{y \mid y \text{는 홀수}\} =$
- (6) $\{3k - 1 \mid k \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\} =$

문제 11)

다음 집합을 조건제시법으로 나타내어라.

- (1) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\} =$
- (2) $\{1, 3, 5, \dots, 99\} =$
- (3) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} =$

문제 12)

다음 집합을 벤 다이어그램으로 나타내어라.

- (1) 방정식 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 해의 집합 A
- (2) 30과 서로소인 20 이하의 자연수의 집합 B

3 부분집합

정의 13) 부분집합

집합 A 의 모든 원소가 집합 B 에 속할 때, A 를 B 의 부분집합이라고 부른다. 이때 ‘ A 가 B 에 포함된다’ 혹은 ‘ B 가 A 를 포함한다’고 말하며 기호로

$$A \subset B$$

와 같이 나타낸다. 또 A 가 B 의 부분집합이 아니면 기호로

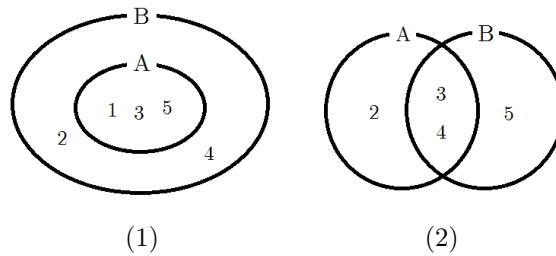
$$A \not\subset B$$

와 같이 나타낸다.

예시 14)

(1) 두 집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이다.

(2) 두 집합 $C = \{2, 3, 4\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 $C \not\subset D$, $D \not\subset C$ 이다.



문제 15)

다음 두 집합을 벤 다이어그램으로 표현해보고, 빈칸에 \subset , $\not\subset$ 중 알맞은 기호를 써넣어라.

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{보다 작은 자연수}\}$

답 : $A \square B$, $B \square A$

(2) $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

답 : $A \square B$, $B \square A$

(3) $A = \{3k \mid k \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

답 : $A \square B$, $B \square A$

정의 16)

두 집합 A, B 에 대해서 $A \subset B, B \subset A$ 가 동시에 성립할 때, ‘두 집합 A 와 B 는 서로 같다’라고 말하고, 기호로

$$A = B$$

와 같이 나타낸다. 또 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 이면 A 를 B 의 **진부분집합**이라고 부른다.

문제 17)

다음 두 집합 A, B 에 대하여 집합 A 가 집합 B 의 진부분집합인 것을 말하여라.

(1) $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}$

(2) $A = \{x \mid x \text{는 자연수}\}, \quad B = \{x \mid x \text{는 정수}\}$

예시 18)

세 집합 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 2\}, C = \{1, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이다. 따라서 $A = B$ 이다. 또, $A \subset C$ 이고 $C \subset A$ 이다. 따라서 $A = C$ 이다.

정리하면

- (1) 집합에서 원소의 순서가 바뀌어도 같은 집합이다.
- (2) 중복된 원소는 하나의 원소로 생각한다.

정리 19) 부분집합의 성질

세 집합 A, B, C 에 대하여

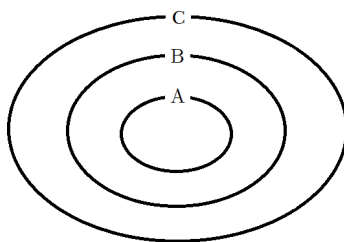
(a) $A \subset A, \emptyset \subset A$

(b) $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

(c) $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

증명)

(a), (b)는 당연하다. (c)에서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이면 벤 다이어그램이 아래와 같다.



따라서 $A \subset C$ 이다.

문제 20)

다음 집합의 부분집합을 모두 구하고, 그 개수를 말하여라.

(1) $A = \{a\}$

() 개

(2) $B = \{a, b\}$

() 개

(3) $C = \{a, b, c\}$

() 개

(4) $D = \{a, b, c, d\}$

() 개

문제 21)

문제 20를 바탕으로 다음 집합의 부분집합의 개수를 유추하여라.

(1) $E = \{a, b, c, d, e\}$

() 개

(2) $F = \{a, b, c, d, e, f\}$

() 개

문제 20-21로부터 다음 정리를 유추할 수 있다.

정리 22) 부분집합의 개수

원소의 개수가 n 개인 집합의 부분집합의 개수는 개이다.

문제 23)

$A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) A 의 부분집합을 모두 구하여라.

(2) A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(3) A 의 진부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(4) $\{1, 3\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(5) A 의 부분집합 중 2를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(6) A 의 부분집합 중 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

문제 24)

$B = \{1, 3, 5, 7\}$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) B 의 부분집합을 모두 구하여라.

(2) B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(3) $\{5, 7\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(4) B 의 부분집합 중 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

(5) B 의 부분집합 중 1, 3을 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

문제 25)

$C = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중 1은 반드시 포함하고, 2는 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

() 개

4 보충·심화 문제

문제 26)

집합 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 20, x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라.

- ① $\{3\} \in A$ ② $\emptyset \in A$ ③ $10 \notin A$
④ $\emptyset \subset A$ ⑤ $\{3, 6, 15, 18\} \subset A$

문제 27)

집합 $A = \{\frac{1}{n} \mid n \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라.

- ① $1 \in A$ ② $2 \in A$ ③ $\frac{1}{3} \subset A$
④ $\emptyset \in A$ ⑤ $\{\frac{1}{6}\} \subset A$

문제 28)

두 집합 $A = \{-1, 2, a^2 + 1\}$, $B = \{1, a - 1, b - 1\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단 a, b 는 실수)

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

문제 29)

두 집합 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid -1 \leq x \leq k\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 가 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하여라.

- ① $k \leq 3$ ② $k \geq 3$ ③ $k < 3$ ④ $k > 3$ ⑤ $k \leq 1$

문제 30)

집합 $\{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

문제 31)

집합 $\{1, 4, 5\}$ 의 진부분집합의 개수를 구하여라.

- ① 0 ② 1 ③ 3 ④ 7 ⑤ 15

두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라 (문제 32-35).

문제 32)

집합 A 의 부분집합 중 원소 1을 포함하는 것의 개수를 구하여라.

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

문제 33)

집합 A 의 부분집합 중 원소 2, 3을 포함하지 않는 것의 개수를 구하여라.

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

문제 34)

집합 A 의 부분집합 중 원소 1은 포함하고, 2, 3은 포함하지 않는 것의 개수를 구하여라.

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

문제 35)

$A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

문제 36)

집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 집합 $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ 의 원소의 개수를 구하여라.

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

문제 37)

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 집합 $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 의 원소의 개수를 구하여라.

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

두 집합 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라 (문제 38-39).

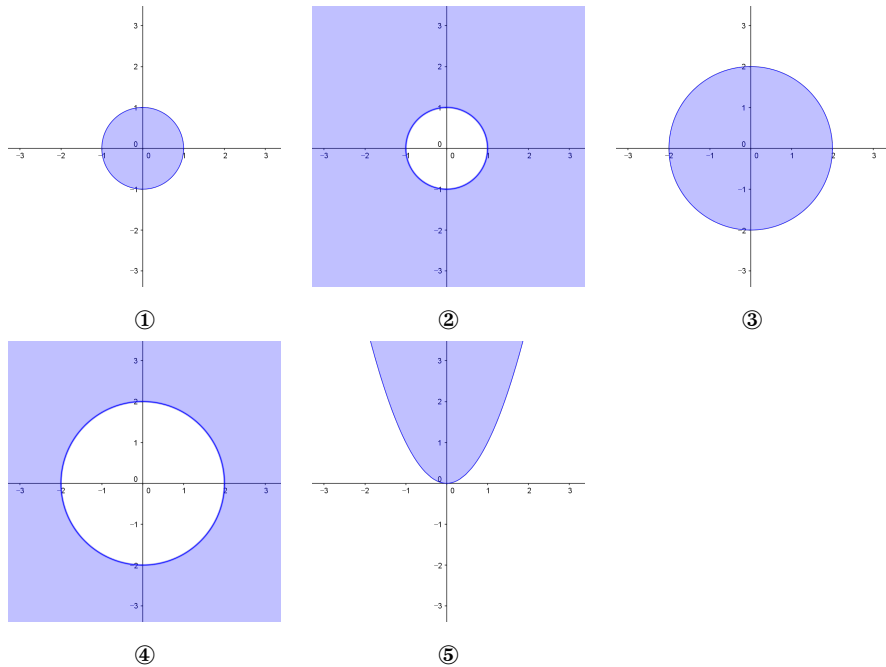
문제 38)

다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

- ① $(1, 1) \in A$ ② $(2, -3) \in A$ ③ $(-2, 0) \notin A$
 ④ $\emptyset \in A$ ⑤ $\{(0, 0), (-1, 1)\} \subset A$

문제 39)

집합 A 를 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것을 고르시오.



문제 40)

집합 A_n, B_n 이

$$A_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수}\}$$

$$B_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 배수}\}$$

와 같이 정의될 때, 다음 중 틀린 것을 고르시오.

- ① $2 \in A_6$ ② $3 \notin A_1$ ③ $8 \in B_4$ ④ $A_4 \subset A_8$ ⑤ $B_4 \subset B_8$