민형 : 01 도함수의 활용 (1)

2016년 11월 10일

차 례

1 복습

정의 1) 미분계수

함수 f와 실수 a에 대해

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 'f가 $x=a$에서 **미분가능**하다'라고 말하고 이 값을 함수 f의 $x=a$에서의 **미분계수**라고 말한다. 구간 I에 대해, 모든 $a\in I$에 대해 f가 $x=a$에서 미분가능하면 'f가 구간 I에서 **미분가능**하다'라고 말한다.

예시 2)

함수 $f(x)=x^2$에 대해 $x=2$에서의 미분계수는

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$

이다. 따라서 f는 $x=2$에서 미분가능하다.

정의 3) 도함수

함수 f가 구간 I에서 미분가능할 때

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

로 함수 f'를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f의 **도함수**라고 말한다.

예시 4)

예제 2에서의 함수 $f(x)=x^2$는 실수 전체에서 미분가능하다. 이때의 도함수 도함수 f'는

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

로 정의된다. 즉

$$f'(x)=2x$$

이다.

정의 5) Leibniz Notation

함수 f에 대해 $y = f(x)$라고 하면 f의 도함수 $f'(x)$를

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad (f(x))'$$

등으로 쓰기도 한다. 함수 f의 $x = a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}, \quad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}, \quad (f(x))'\big|_{x=a}$$

등으로 쓰기도 한다.

예시 6)

예시 2, 예시 4의 결과를

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \quad \left.\frac{d(x^2)}{dx}\right|_{x=2} = 4$$
$$(x^2)' = 2x, \quad (x^2)'\big|_{x=2} = 4$$

등으로 쓸 수도 있다.

정리 7) 도함수의 성질

실수 c, 미분가능한 함수 f, g에 대해

(a) $(c)' = 0$

(b) $(cf(x))' = cf'(x)$

(c) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(d) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

(e) $\{f(x)g(x)\}' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

(f) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

정리 8) 여러 가지 함수의 도함수

(a) $(x^a)' = ax^{a-1} \qquad (a$는 실수$)$

(b) $(e^x)' = e^x$

(c) $(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0)$

(d) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(e) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (a > 0, \quad a \neq 0)$

(f) $(\sin x)' = \cos x$

(g) $(\cos x)' = -\sin x$

(h) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(i) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(j) $(\sec x)' = \tan x \sec x$

(k) $(\csc x)' = -\cot x \csc x$

정리 9) 합성함수의 미분법

두 함수 f, g가 미분가능할 때 합성함수 $(f \circ g)$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

이다. $y = f(u)$, $u = g(x)$라고 하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

로 쓸 수도 있다.

정리 10) 역함수의 미분법

함수 f와 그 역함수 f^{-1}가 모두 미분가능할 때,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

이다. $y = f(x)$라고 하면

$$\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{f'(y)}$$

로 쓸 수도 있다.

문제 11)

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \sqrt{x}$

$y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

답 : ($\frac{1}{2\sqrt{x}}$)

(2) $y = \frac{1}{x-1}$

답 : ( )

(3) $y = 3\sin^3 x$

답 : ( )

(4) $y = e^{-2x}$

답 : ( )

(5) $y = (\log_2 x)^3$

답 : ( )

(6) $y = \frac{\cos x}{x}$

답 : ( )

2 접선의 방정식

정리 12)
점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

이다.

증명)
기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y = mx + n$$

이다. n을 구하기 위해 (x_1, y_1)을 대입하면

$$y_1 = mx_1 + n$$

이고, 따라서

$$n = y_1 - mx_1$$

이다. 그러므로 구하는 방정식은

$$y = mx + y_1 - mx_1$$

이다. 이것을 정리하면 위의 식이 된다.

정리 13)
함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

이다.

증명)
접선의 기울기는 $f'(a)$이다. 따라서 정리 12에 대입하면 위의 결과를 얻는다.