동락 04

2015년 11월 8일

문제 1)

B의 열벡터들을 각각 $B_1, B_2, \cdots, B_p$이라고 하자 ;

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_p \end{bmatrix}, \quad B_i \in \mathbb{R}^n.$$

또 $r = \text{rank}(A)$라고 하자.

$AB = \mathbf{0}$에서 $AB_i = \mathbf{0}$이다$(1 \le i \le p)$. 따라서 $B_i \in N(A)$ ($N(A)$는 A의 퇴화공간, $1 \le i \le p$). 이때

$$\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

이므로 $\dim(N(A)) = n - r$. B_i들이 $n - r$차원의 부분공간 내에 있으므로 B_i들은 최대 $n - r$개의 일차독립인 열들을 가진다. 즉 $\text{rank}(B) \le n - r$. 따라서

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \le n.$$

문제 2)

$$(\text{가}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{나}) : Rx = \mathbf{0}, \left(R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$(\text{다}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\text{라}) = 1$$

$$(\text{마}) = 3$$

$$(\text{바}) : 1, 2, 3(\text{번째})$$

$$(\text{사}) = 2$$

문제 3)

(문제가 이상한 것 같은데..?)

반례) $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,0)$ 이면, $\boldsymbol{v}_1$ 와 $\boldsymbol{v}_2$ 는 일차독립, $\boldsymbol{v}_1$ 와 $\boldsymbol{v}_3$ 도 일차독립, $\boldsymbol{v}_2$ 와 $\boldsymbol{v}_3$ 도 일차독립이다. 하지만 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ 는 일차종속이다.

문제 4)

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{w}_r = \mathbf{0}$$

을 가정하자. 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$$\begin{gathered} A \times (c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{w}_r) = A \times \mathbf{0}, \\ c_1A\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_rA\boldsymbol{w}_r = \mathbf{0}, \\ c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}. \end{gathered}$$

$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_r$ 은 일차독립이므로 $c_1 = c_2 = \cdots c_r = 0$. 따라서 $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{w}_r$ 은 일차독립이다.