예시 1)

실수 a, b, c에 대하여 $(a \neq 0)$,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

형태의 식을 이차방정식이라고 한다. 그리고, 이 식을 만족시키는 x의 값을 이 이차방정식의 근 이라고 부른다. 예를 들어,

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

는 $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$인 형태의 식이므로 이차방정식이다. 또한,

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0 \\ x = 2: &\quad 2^2 - 3 \times 2 + 2 \neq 0 \\ x = 3: &\quad 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 0 \\ x = 4: &\quad 4^2 - 3 \times 4 + 2 \neq 0 \\ x = 5: &\quad 5^2 - 3 \times 5 + 2 \neq 0 \end{aligned}$$

이므로 $x = 1$, $x = 3$은 이 이차방정식의 근이지만, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$는 근이 아니다.

이차방정식의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 두 식 (1), (2)가 성립한다.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \tag{1}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

위의 예에서 $\alpha = 1$, $\beta = 3$이므로 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 3$이다. 그런데 $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$, $\frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$이므로 (1), (2) 식을 확인할 수 있다. 이것이 성립하는 이유는 다음과 같이 설명할 수 있다.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta \\ &\iff (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \\ &\iff x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \end{aligned}$$

즉, 두 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$과 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$이 같은 이차방정식이어야 한다. 다시 말해, 다음 식이 성립하여야 한다.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

즉, $\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta)$와 $\frac{c}{a} = \alpha\beta$가 성립해야 한다. 이것을 정리하면 각각 (1), (2)가 된다.

예시 2)

두 실수 a, b에 대하여 $z = a + bi$ 형태의 수를 복소수라고 부른다. 이때, i는

$$i^2 = -1$$

을 만족시키는 새로운 수이다.

예를 들어

$$z_1 = 2 + 3i$$

는 $a = 2$, $b = 3$인 형태의 복소수이다. 또한,

$$z_2 = 5i$$

는 $a = 0$, $b = 5$인 형태의 복소수이다. 이처럼 $a = 0$인 형태의 복소수를 순허수라고 부른다.

$$z_3 = 4$$

는 $a = 4$, $b = 0$인 형태의 복소수인데, 이때 z_3은 실수이다. 즉, $b = 0$이면, 복소수 $a + bi$는 실수이다.

복소수 $z = a + bi$에 대하여,

$$\bar{z} = a - bi$$

를 z의 켤레복소수라고 부른다. 켤레복소수와 관련하여, 다음과 같이 몇가지 사실들이 성립한다.

(a) $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다.
(b) $z = -\bar{z}$이면 z는 순허수거나 0이다.
(c) $z + \bar{z}$는 실수이다.
(d) $z\bar{z}$는 0보다 크거나 같은 실수이다.

$z = a + bi$라고 두자. (단, a, b는 실수)

(a) $z = \bar{z}$이면 $a + bi = a - bi$이다. 따라서 $b = -b$이고 $b = 0$이다. 그러므로 $z = a$는 실수이다.

(b) $z = -\bar{z}$이면 $a + bi = -(a - bi) = -a + bi$이다. 따라서 $a = -a$이고 $a = 0$이다. 그러면 z는 $z = bi$의 형태가 되는데, $b \neq 0$이면 z는 순허수이고, $b = 0$이면, $z = 0$이다.

(c) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$이다. 따라서 $z + \bar{z}$는 실수이다.

(d) $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$이다. 다라서 $z\bar{z}$는 0보다 크거나 같은 실수이다.