기훈 : 01 도함수의 활용

October 14, 2015

1 증가함수와 도함수

정의 1) 증가함수

임의의 $x_1, x_2 \in I$ 에 대해

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

이면, $f(x)$ 가 구간 I 에서 **증가**한다고 말한다.

정리 2)

$f(x)$ 가 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하고, $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 (a, b) 에서 증가함수이다.

$$\boxed{f' > 0 \ \Rightarrow \ \text{증가}}$$

증명). $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ 를 가정하자. 평균값의 정리에 의해

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

인 c 가 존재한다$(x_1 < c < x_2)$. $c \in (a, b)$ 이므로 $f'(c) > 0$ 이고, 따라서 $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 이다.

즉 $f(x)$ 는 (a, b) 에서 증가한다. □

반례 3)

$$\boxed{f' \geq 0 \ \not\Rightarrow \ \text{증가}}$$

$f(x)$ 가 상수함수이면 $f'(x) \geq 0$ 이지만 증가함수는 아니다.

정리 4)

$f(x)$ 가 (a,b) 에서 미분가능하고 (a,b) 에서 증가하면 (a,b) 에서 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$$\boxed{\text{증가} \;\Rightarrow\; f' \geq 0}$$

증명). $x \in (a,b)$ 를 가정하고 $f'(x)$ 를 살펴보면

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로

$$\begin{cases} t > x \text{이면 } f(t) > f(x) \\ t < x \text{이면 } f(t) < f(x) \end{cases}$$

이다. 따라서

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} > 0$$

그러므로 $f'(x) \geq 0$. □

반례 5)

$$\boxed{\text{증가} \;\not\Rightarrow\; f' > 0}$$

$f(x) = x^3$ 이면 $f(x)$ 는 증가함수이지만 $f'(0) \not> 0$ 이다.

2 극소와 도함수

정의 6) 극소

$$t \in (p, q) \Rightarrow f(a) \leq f(t)$$

를 만족하는 실수 p, q가 존재하면$(p < a < q)$, $f(x)$가 $x = a$에서 **극소**이다.

정리 7)

미분가능한 함수 $f(x)$에 대해 $f'(a) = 0$이고, $x = a$ 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

증명). 가정에 의해

$$\begin{cases} x < a \text{ 이면 } f'(x) < 0 \\ x > a \text{ 이면 } f'(x) > 0 \end{cases}$$

이다. 조금 더 정확히 쓰면

$$\begin{cases} p < x < a \text{ 이면 } f'(x) < 0 \\ a < x < q \text{ 이면 } f'(x) > 0 \end{cases}$$

인 실수 p, q가 존재한다$(p < a < q)$.

$t \in (p, a)$라고 하자$(p < t < a)$. 평균값의 정리에 의해

$$f'(c) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

인 c가 존재한다$(t < c < a)$. $f'(c) < 0$이므로 $f(t) - f(a) > 0$이다. 즉 $f(t) > f(a)$이다. 정리하면,

$$t \in (p, a) \text{ 이면, } f(a) < f(t) \text{ 이다.}$$

마찬가지 논리에 의해서

$$t \in (a, q) \text{ 이면, } f(a) < f(t) \text{ 이다.}$$

이 둘을 종합하면

$$t \in (p, q) \text{ 이면, } f(a) \leq f(t) \text{ 이다.}$$

다시 말해, $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다. □

정리 8)

이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$가 $f'(a) = 0$이고 $f''(a) > 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

$$\boxed{f'(a) = 0,\ f''(a) > 0 \ \Rightarrow \ \text{극소}}$$

증명). (교과과정 외) $f''(a)$의 좌극한을 살펴보면

$$0 < f''(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f'(a-h) - f'(a)}{-h}.$$

h가 충분히 작으면 (어떤 양수 $\delta_1 > 0$가 존재하여 $0 < h < \delta_1$이면)

$$0 < \frac{f'(a-h) - f'(a)}{-h}$$

이다. 따라서 $f'(a-h) < 0$. 즉 $x = a$ 왼쪽에서 $f'(x) < 0$이다. 마찬가지의 논리에 의해서 $x = a$ 오른쪽에서 $f'(x) > 0$이다. 그러면 정리 7의 가정을 만족하므로 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다. □

3 오목성과 볼록성 (concavity)

정의 9) 아래로 볼록

구간 I의 임의의 두 실수 $x, y \in I(x < y)$에 대해 $A = (x, f(x)), B = (y, f(y))$라고 하자. 임의의 $x_3 \in (x, y)$에 대해 $C = (x_3, f(x_3))$가 선분 AB의 아래에 있으면 $f(x)$를 I에서 **아래로 볼록**이라고 한다.

참고 10) 동등한 정의들 (교과과정 외)

다음 다섯 가지 문장들은 모두 $f(x)$가 구간 I에서 아래로 볼록이기 위한 필요충분조건이다.

(1) 구간 I의 임의의 두 실수 $x, y \in I(x < y)$에 대해 $0 < t < 1$일 때

$$f(tx_1 + (1-t)y) < tf(x_1) + (1-t)f(y)$$

가 성립한다.

(2) 구간 I의 임의의 두 실수 $x, y \in I(x < y)$에 대해 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$일 때

$$f(\alpha x_1 + \beta y) < \alpha f(x_1) + \beta f(y)$$

가 성립한다.

(3) 구간 I의 임의의 세 실수 $x_1, x_2, x_3(x_1 < x_2 < x_3)$에 대해

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

가 성립한다.

(4) 구간 I의 임의의 세 실수 $x_1, x_2, x_3(x_1 < x_2 < x_3)$에 대해

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

가 성립한다.

(5) 구간 I의 임의의 세 실수 $x_1, x_2, x_3(x_1 < x_2 < x_3)$에 대해

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

가 성립한다.

증명). (1) 과 (2) 가 정의 9와 동치인 것은 당연하다.

또 $\alpha = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, $\beta = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$, $x = x_1$, $y = x_3$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}
(2) \iff & f\left(\frac{(x_3-x_2)x_1}{x_3-x_1} + \frac{(x_2-x_1)x_3}{x_3-x_1}\right) < \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3) \\
\iff & (x_3-x_1)f(x_2) < (x_3-x_2)f(x_1) + (x_2-x_1)f(x_3) \qquad (*) \\
\iff & (x_3-x_1)(f(x_2)-f(x_1)) < (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1)) \\
\iff & (5).
\end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned}
(*) \iff & (x_3-x_2)(f(x_3)-f(x_1)) < (x_3-x_1)(f(x_3)-f(x_2)) \\
\iff & (4)
\end{aligned}$$

이다. 따라서 (2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) 이다.

한편 (4) $\wedge$ (5) $\Rightarrow$ (3) 이고, 따라서 (2) $\Rightarrow$ (3) 이다.

또 (3) 을 가정하면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\times(x_2-x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\times(x_3-x_2) = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\times(x_3-x_1)$$

에서

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\times(x_2-x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\times(x_3-x_2) > \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\times(x_3-x_1)$$

이고 따라서 (4) 가 성립한다.

그러므로 (1) $\sim$ (5) 은 모두 동치이다. $\square$

정리 11)

$f(x)$가 구간 I에서 $f''(x) > 0$이면 $f(x)$는 I에서 아래로 볼록이다.

$$\boxed{f'' > 0 \ \Rightarrow \ \text{아래로볼록}}$$

증명). $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$라고 하자. 평균값의 정리에 의해

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d)$$

인 c, d가 존재한다($x_1 < c < x_2 < d < x_3$). 그런데 I에서 $f''(x) > 0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이고, 따라서 $f'(c) < f'(d)$이다. 그러므로

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

이다. 참고 10에 의해 $f(x)$는 I에서 아래로 볼록이다. □

반례 12)

$$\boxed{f'' \geq 0 \ \not\Rightarrow \ \text{아래로볼록}}$$

$f(x)$가 일차함수이거나 상수함수이면 $f'' = 0$이어서 $f'' \geq 0$이 성립하지만 아래로 볼록은 아니다.

정리 13)

$f(x)$ 가 구간 I 에서 아래로 볼록이고 이계도함수가 존재하면 $f(x)$ 는 구간 I 에서 $f''(x) \geq 0$ 이다.

$$\boxed{\text{아래로볼록} \;\; \Rightarrow \;\; f'' \geq 0}$$

증명). $x_2 < x_3$ 를 가정하고 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 인 x_1 과 x_4 를 생각하자. $f(x)$ 가 아래로 볼록이므로

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_4) - f(x_4)}{x_4 - x_3}$$

이다. $x_1 \to x_2$ 와 $x_4 \to x_3$ 을 하면

$$\lim_{x_1 \to x_2 -} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \lim_{x_4 \to x_3 +} \frac{f(x_4) - f(x_4)}{x_4 - x_3}$$

이고, 따라서 $f'(x_2) \leq f'(x_3)$ 이다. 즉 $f'(x)$ 는 (거의) 증가함수이다. 따라서 정리 4에서 사용한 논리를 똑같이 적용하면 $f''(x) \geq 0$ 이다. □

반례 14)

$$\boxed{\text{아래로볼록} \;\; \not\Rightarrow \;\; f'' > 0}$$

$f(x) = x^4$ 은 실수 전체에서 아래로 볼록이지만 $f''(0) \not> 0$ 이다.

4 변곡점

정의 15) 변곡점

$f(x)$ 가 $x = a$ 를 기준으로 오목성 (볼록성) 이 바뀌면 점 $(a, f(a))$ 를 **변곡점** 이라고 한다.

정리 16)

$f''(x)$ 의 부호가 $x = a$ 를 기준으로 바뀌면 점 $(a, f(a))$ 는 변곡점이다.

증명). $x < a$ 에서는 $f''(x) > 0$ 이었다가 $x > a$ 에서는 $f''(x) < 0$ 이다. (혹은 그 반대이다.) 정리 11에 의해 $x < a$ 에서는 아래로 볼록이었다가 $x < a$ 에서는 위로 볼록이 된다. 따라서 점 $(a, f(a))$ 는 변곡점이다. □