윤영 : 13 수열(3)

2017년 1월 15일

차 례

1 합의 기호 Σ

정의 1) 합의 기호 Σ

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $a_1+a_2+\cdots+a_n$은 합의 기호 Σ를 통해 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

이때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$는 a_k의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 얻은 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n의 합을 뜻한다.

예시 2)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$은 $2k-1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, 10을 차례로 대입하여 얻은 항의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=1+3+5+\cdots+19$$

(2) $2+4+8+\cdots+2^7$은 수열의 제 i항 2^i의 i에 1, 2, 3, $\cdots$, 7을 차례로 대입하여 얻은 항을 모두 더한 것이므로 기호 Σ를 사용하여 나타내면,

$$2+4+8+\cdots+2^7=\sum_{i=1}^{7}2^i$$

문제 3)

다음을 합의 기호 Σ를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내어라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}2k=2+4+6+8+\cdots+20$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}3^k=$

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{8}\sqrt{k}=$

(4) $\displaystyle\sum_{m=1}^{5} \frac{1}{2m+1} =$

문제 4)

다음을 합의 기호 Σ를 사용하여 나타내시오.

(1) $4 + 7 + 10 + \cdots + 31 = \displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k+1)$

(2) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 =$

(3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{15} =$

(4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 =$

(5) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{15\cdot 16} =$

문제 5)

다음을 계산하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(4k+2) = 6 + 10 + 14 + 18 + \cdots + 42 = \frac{10(6+42)}{2} = 240$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n =$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} 2^j =$

2 $\sum$의 성질

문제 6)

다음 계산을 해보자.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2^k =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k =$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (2^k + k) =$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (2^k - k) =$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2^k \times k =$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{2^k}{k} =$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (3 \cdot 2^k) =$

문제 7)

빈칸에 $=$ 또는 $\neq$를 넣으시오.

$$\sum_{k=1}^{3} (2^k + k) \quad \square \quad \sum_{k=1}^{3} 2^k + \sum_{k=1}^{3} k$$

$$\sum_{k=1}^{3} (2^k - k) \quad \square \quad \sum_{k=1}^{3} 2^k - \sum_{k=1}^{3} k$$

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k \times k \quad \square \quad \sum_{k=1}^{3} 2^k \times \sum_{k=1}^{3} k$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{2^k}{k} \quad \square \quad \frac{\sum_{k=1}^{3} 2^k}{\sum_{k=1}^{3} k}$$

$$\sum_{k=1}^{3} 3 \cdot 2^k \quad \square \quad 3\sum_{k=1}^{3} 2^k$$

정리 8) 수열의 기본성질

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$, 실수 c에 대해 다음이 성립한다.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$

또 다음은 성립하지 않는다.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k}$

3 자연수의 거듭제곱의 합

정리 9)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

증명)

(1) 등차수열의 합 공식을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$에 k 대신 1, 2, $\cdots$, n을 차례로 대입하고

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \\
&\vdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1
\end{aligned}$$

이것들을 모두 더하면,

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1^3 =& 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) + 3(1+2+3+\cdots+n) \\
&+ (1+1+1+\cdots+1) \\
n^3+3n^2+3n =& 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
n^3+3n^2+3n =& 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

이다. 이것을 정리하면

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 된다.

(3) (생략, (2)와 같은 방법을 적용하면 된다.)

문제 10)

다음을 구하여라.

(1) $1+2+3+\cdots+10 = \frac{10\times 11}{2} = 55$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2 =$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3 =$

문제 11)

(1) $2^2+4^2+6^2+\cdots+14^2 = \sum_{k=1}^{7}(2k)^2 = \sum_{k=1}^{7}4k^2 = 4\sum_{k=1}^{7}k^2$
$= 4\times\frac{7\times 8\times 15}{6} = 560$

(2) $1+3+5+7+9+\cdots+19 =$

(3) $2^3+4^3+6^3+\cdots+12^3 =$

답

문제 3)

(2) $3+3^2+3^3+\cdots+3^7$

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{8}$

(4) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$

문제 4)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)}$

문제 5)

(2) 55

(3) 2046

문제 6)

(1) 14

(2) 6

(3) 20

(4) 8

(5) 34

(6) $\frac{20}{3}$

(7) 42

문제 7)
$=, =, \neq, \neq. =$

문제 10)

(2) 385

(3) 3025

문제 11)

(2) 100

(3) 3528