수지 : 다항함수의 미분 복습

2018년 5월 20일

함수의 극한

극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

$\iff \boxed{\qquad\quad} = \boxed{\qquad\quad}$

함수의 연속

$f(x)$가 $x = a$에서 연속이다.

$\iff \boxed{\qquad\quad} = \boxed{\quad}$

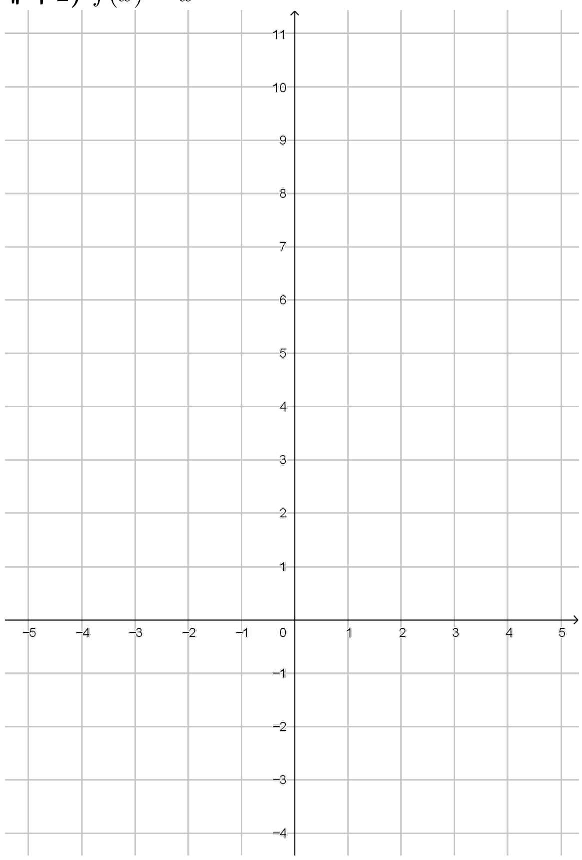
평균변화율

$f(x)$의 $x = a$에서 $x = b$까지의 평균변화율 $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

순간변화율 (=미분계수)

$$\begin{aligned} f(x)\text{의 } x = a\text{에서의 순간변화율 } &= f'(a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

예시 1) $f(x) = x^2$



(1) $x = 1$에서 $x = 3$까지의 평균변화율은 $\boxed{\quad}$이다.

(2) 두 점 $(1, f(1))$, $(3, f(3))$를 지나는 직선의 방정식은 $\boxed{\qquad\quad}$이다.

(3) $x = 1$에서 $x = 2$까지의 평균변화율은 $\boxed{\quad}$이다.

(4) 두 점 $(1, f(1))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 방정식은 $\boxed{\qquad\quad}$이다.

(5) $x = 1$에서 $x = x$까지의 평균변화율은 $\boxed{\qquad}$이다.

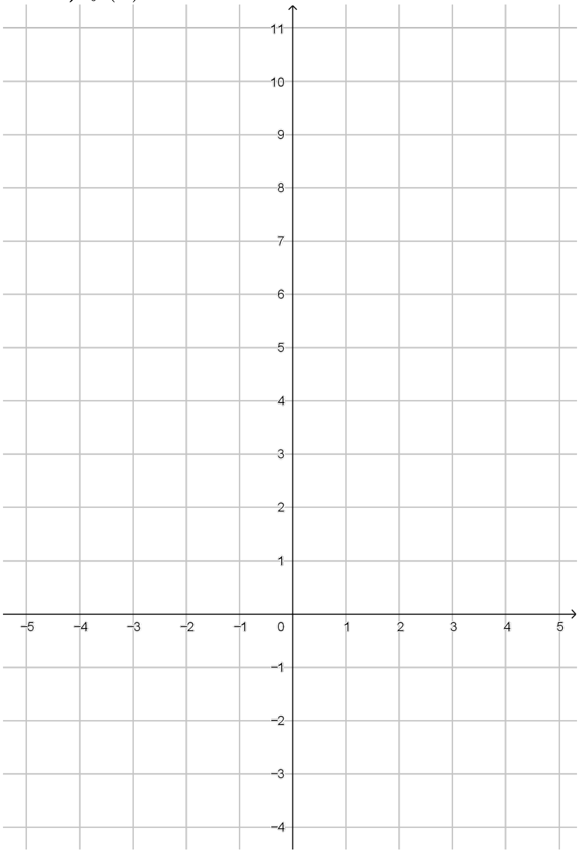
(6) $x = 1$에서의 순간변화율 $f'(1)$은 $\boxed{\quad}$이다.

(7) $x = 1$에서 $x = 1 + h$까지의 평균변화율은 $\boxed{\qquad}$이다.

(8) $x = 1$에서의 순간변화율 $f'(1)$은 $\boxed{\quad}$이다.

(9) 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은 $\boxed{\qquad\quad}$이다.

예시 2) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$



(1) $x = 2$ 에서 $x = 4$ 까지의 평균변화율은 $\boxed{\quad}$ 이다.

(2) 두 점 $(2, f(2))$, $(4, f(4))$ 를 지나는 직선의 방정식은 $\boxed{\qquad\qquad}$ 이다.

(3) $x = 2$ 에서 $x = 3$ 까지의 평균변화율은 $\boxed{\quad}$ 이다.

(4) 두 점 $(2, f(2))$, $(3, f(3))$ 를 지나는 직선의 방정식은 $\boxed{\qquad\qquad}$ 이다.

(5) $x = 2$ 에서 $x = x$ 까지의 평균변화율은 $\boxed{\qquad}$ 이다.

(6) $x = 2$ 에서의 순간변화율 $f'(2)$ 은 $\boxed{\;}$ 이다.

(7) $x = 2$ 에서 $x = 2 + h$ 까지의 평균변화율은 $\boxed{\qquad}$ 이다.

(8) $x = 2$ 에서의 순간변화율 $f'(2)$ 은 $\boxed{\;}$ 이다.

(9) 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식은 $\boxed{\qquad\qquad}$ 이다.

예시 3) $f'(2) = 3$ **일 때, 다음 극한값들을 구하여라.**

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times 3$
$= f'(2)\times 3 = 9$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$
$\displaystyle= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(2+h)-f(2)\}-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$
$\displaystyle= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$
$= f'(2) + f'(2) = 6$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$
$\displaystyle= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$
$\displaystyle= f'(2)\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{f(x)-f(2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{f(x)-f(2)}$
$\displaystyle= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$
$\displaystyle= \frac{12}{f'(2)} = 4$

문제 4) $f'(1) = 2$ **일 때, 다음 극한값들을 구하여라.**

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h} =$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h} =$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} =$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1} =$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)} =$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1} =$

미분가능성

$f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하다.
$\Longleftrightarrow f'(a)$ 가 존재한다.

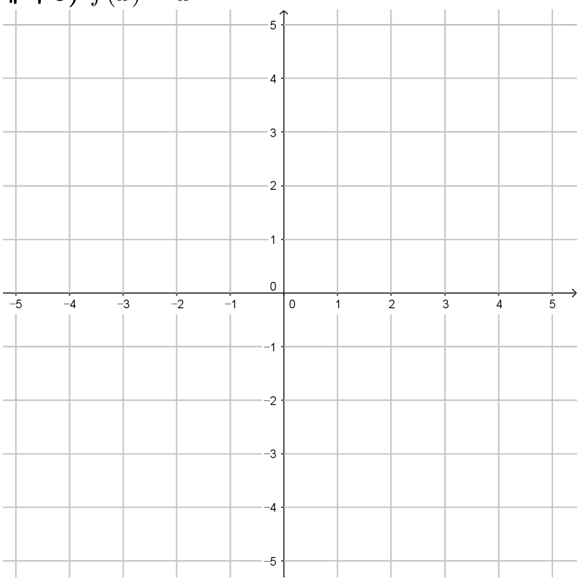
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\qquad\qquad}$ 가 존재한다.

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$

미분가능성과 연속

미분가능하면 연속이다.
하지만 연속이라고 해서 미분가능한 것은 아니다.

예시 5) $f(x) = x^2$



(1) $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$ 이 성립한다 / 성립하지 않는다.

(2) $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

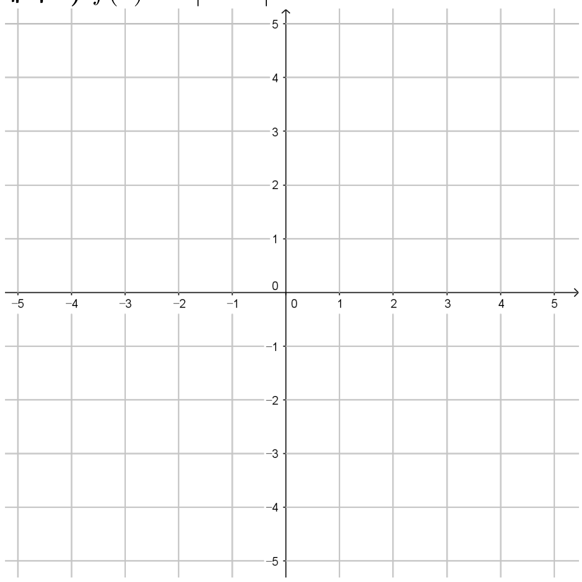
(3) $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 1$ 에서 이어져있다 / 끊어져있다.

(4) $f'(1)$ 이 존재한다 / 존재하지 않는다.

(5) $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하다 / 미분불가능하다

(6) $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 1$ 에서 접선을 그을 수 있다 / 그을 수 없다.

예시 6) $f(x) = x|x-2|$



(1) $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$ 이 성립한다 / 성립하지 않는다.

(2) $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

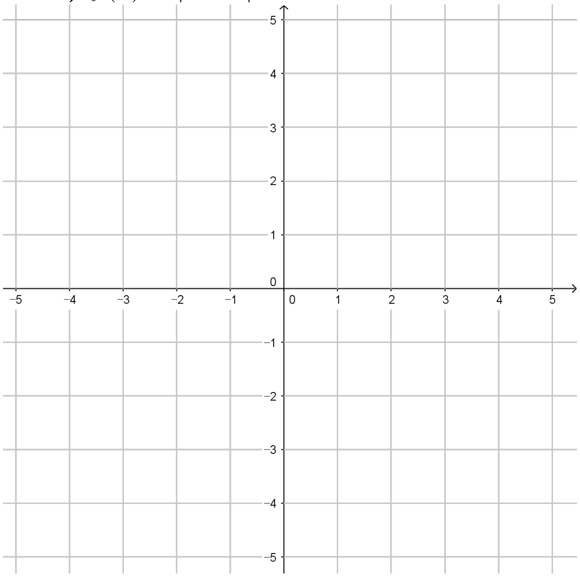
(3) $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 2$ 에서 이어져있다 / 끊어져있다.

(4) $f'(2)$ 이 존재한다 / 존재하지 않는다.

(5) $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 미분가능하다 / 미분불가능하다

(6) $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 2$ 에서 접선을 그을 수 있다 / 그을 수 없다.

예시 7) $f(x) = |x-1|$



(1) $f(1) = \lim_{x\to1} f(x)$ 이 성립한다 / 성립하지 않는다.

(2) $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

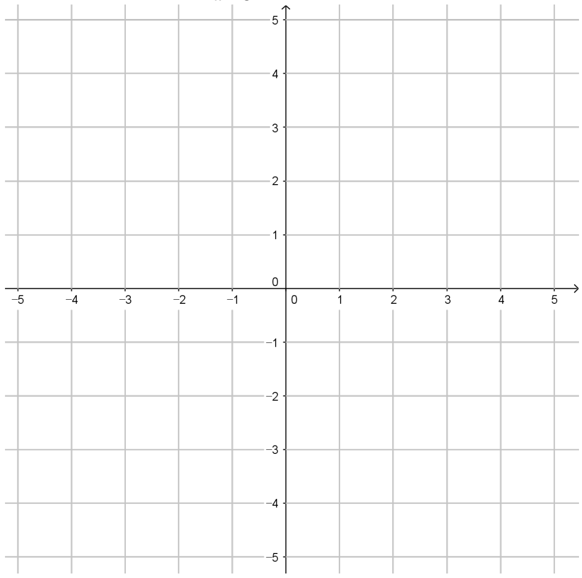
(3) $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=1$ 에서 이어져있다 / 끊어져있다.

(4) $f'(1)$ 이 존재한다 / 존재하지 않는다.

(5) $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다 / 미분불가능하다

(6) $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 1$ 에서 접선을 그을 수 있다 / 그을 수 없다.

예시 8) $f(x) = \frac{x^3-x^2-6x}{x-3}$



(1) $f(3) = \lim_{x\to3} f(x)$ 이 성립한다 / 성립하지 않는다.

(2) $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

(3) $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=3$ 에서 이어져있다 / 끊어져있다.

(4) $f'(3)$ 이 존재한다 / 존재하지 않는다.

(5) $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하다 / 미분불가능하다

(6) $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 3$ 에서 접선을 그을 수 있다 / 그을 수 없다.