혜령02 : 복습(2)

March 29, 2016

Contents

1 평행이동

예제 1) y축 방향의 평행이동
직선 $y = 2x + 1$을 y축 방향으로 3만큼 평행이동해보자. 평행이동한 직선은 기울기는 2로 일정하지만 y절편이 1에서 3만큼 증가하여 4가 된다. 따라서 평행이동한 직선은 $y = 2x + 4$이 된다.
이처럼 단순히 y절편의 값에 3을 더해 $y = 2x + 4$를 얻었다고 볼 수도 있지만

$$\begin{aligned} y = 2x + 1 \quad &\Longrightarrow \quad y = (2x + 1) + 3 \quad (\text{우변에 } 3\text{을 더함.}) \\ &\Longrightarrow \quad y = 2x + 4 \end{aligned}$$

y 대신 $y - 3$을 대입해서 $y = 2x + 4$를 얻었다고 말해도 똑같은 설명이 된다는 점을 주목하자.

$$\begin{aligned} y = 2x + 1 \quad &\Longrightarrow \quad y - 3 = 2x + 1 \quad (y\text{대신에 } y - 3\text{를 대입.}) \\ &\Longrightarrow \quad y = 2x + 4 \end{aligned}$$

예제 2) x축 방향의 평행이동
같은 직선을 x축 방향으로 2만큼 평행이동해보자. 평행이동한 직선의 기울기는 2로 일정하다. y절편을 결정하기 위해서, $y = 2x + n$라고 놓자. 원래 직선인 $y = 2x + 1$은 $(0, 1)$을 지나므로, 평행이동한 직선은 $(0, 1)$을 x축 방향으로 2만큼 평행이동한 $(2, 1)$을 지난다. 따라서 $1 = 2 \cdot 2 + n$이고, $n = -3$이다. 따라서 평행이동한 직선은 $y = 2x - 3$이 된다.
위 방법은 분명히 사용 가능한 방법이지만, 약간 복잡하다. 아까 y축 방향으로 3만큼의 평행이동을 설명할 때에, y 대신 $y - 3$을 대입하는 방법과 비슷한 방법을 적용해보면 어떨까? x축 방향으로 2만큼의 평행이동이므로 x 대신 $x - 3$을 대입해보면

$$\begin{aligned} y = 2x + 1 \quad &\Longrightarrow \quad y = 2(x - 2) + 1 \quad (x\text{대신에 } x - 2\text{를 대입.}) \\ &\Longrightarrow \quad y = 2x - 3 \end{aligned}$$

이 되어 방금 전에 얻은 결과와 일치한다.

예제 3) x축, y축 방향의 평행이동
이번에는 x축 방향으로의 평행이동과 y축 방향으로의 평행이동을 동시에 해보자. $y = 2x + 1$을 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동하자.
먼저 x축 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$\begin{aligned} y = 2x + 1 \quad &\Longrightarrow \quad y = 2(x - 2) + 1 \quad (x\text{대신에 } x - 2\text{를 대입.}) \\ &\Longrightarrow \quad y = 2x - 3 \end{aligned}$$

이고, 이것을 다시 y축 방향으로 3만큼 평행이동하면

$$\begin{aligned} y = 2x - 3 \quad &\Longrightarrow \quad y - 3 = 2x - 3 \quad (y\text{대신에 } y - 3\text{를 대입.}) \\ &\Longrightarrow \quad y = 2x \end{aligned}$$

이다.

요약 4) 평행이동

1. 직선 $y = ax+b$를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 식은 x 대신에 $x-m$를, y 대신에 $y-n$을 대입해 얻은 $y-n = a(x-m)+b$이다;

$$\begin{array}{lcll} y = ax+b & \Longrightarrow & y = a(x-m) & (x\text{대신에 } x-m\text{을 대입.}) \\ & \Longrightarrow & y-n = a(x-m) & (y\text{대신에 } y-n\text{를 대입.}) \end{array}$$

2. 일반적으로, 식 $f(x,y) = 0$이 나타내는 도형을 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동한 도형이 나타내는 식은 x 대신에 $x-m$를, y 대신에 $y-n$을 대입해 얻은 $f(x-m, y-n) = 0$이다;

$$\begin{array}{lcll} f(x,y) = 0 & \Longrightarrow & f(x-m, y) = 0 & (x\text{대신에 } x-m\text{을 대입.}) \\ & \Longrightarrow & f(x-m, y-n) = 0 & (y\text{대신에 } y-n\text{를 대입.}) \end{array}$$

문제 5)

다음 식의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구하고 모눈 위에 표시하여라.

1. $y = -2x+1$를 x축 방향으로 4만큼 평행이동
2. $y = -2x+1$를 y축 방향으로 -2만큼 평행이동
3. $y = -2x+1$를 x축 방향으로 4만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동

문제 6)

다음 식의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구하고 모눈 위에 표시하여라.

1. $y = \frac{1}{2}x+1$를 x축 방향으로 -2만큼 평행이동
2. $y = \frac{1}{2}x+1$를 y축 방향으로 3만큼 평행이동
3. $y = \frac{1}{2}x+1$를 x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동

문제 7)

다음 식의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구하고 모눈 위에 표시하여라.

1. $y = 3x+1$를 x축 방향으로 1만큼 평행이동
2. $y = 3x+1$를 y축 방향으로 3만큼 평행이동
3. $y = 3x+1$를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동

문제 8)

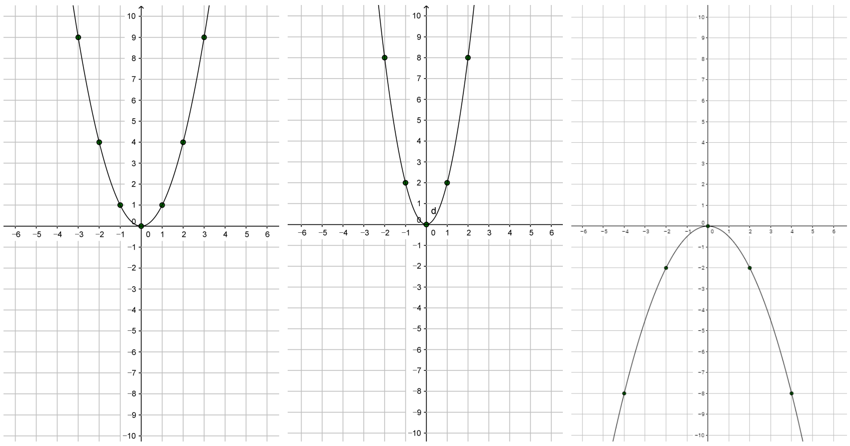
다음 식의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구하고 모눈 위에 표시하여라.

1. $xy = 1$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동
2. $y = 2^x$을 x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동

2 이차함수

요약 9) 이차함수의 기본형

$y = ax^2$ 의 그래프는 $y = ax^2$ 을 만족하는 모든 점들 (x, y) 의 집합으로 꼭지점이 $(0, 0)$ 인 포물선이다. $a > 0$ 이면 아래로 볼록한 포물선이고, $a < 0$ 이면 위로 볼록한 포물선이다.



$y = x^2$ $\qquad$ $y = 2x^2$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2}x^2$

요약 10) 이차함수의 일반형

이차함수

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$$

는 적절한 계산을 통해

$$y = a(x - m)^2 + n$$

꼴로 바꿀 수 있다. 이 함수의 그래프는 $y = ax^2$ 의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하여 얻을 수 있다.

예제 11)

예를 들어 이차함수

$$y = 2x^2 + 4x + 3$$

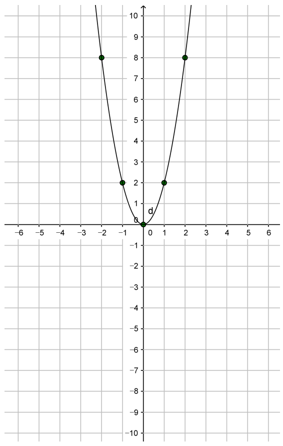
의 그래프를 그리기 위해서는

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x + 3 \\ &= 2(x^2 + 2x) + 3 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= 2(x + 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

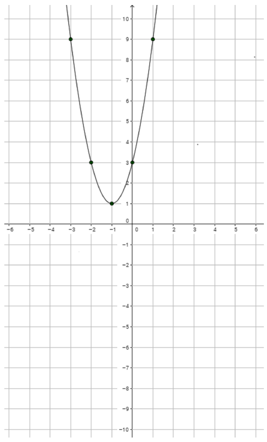
와 같이 식을 변환하여

$$y = 2(x+1)^2 + 1$$

를 얻고, $y = 2x^2$ 의 그래프 그려, 이것을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 1 만큼 평행이동하면 된다.



$y = 2x^2$



$y = 2x^2 + 4x + 3$

문제 12)

다음 식의 그래프를 그리고, 그래프 위의 다섯 개 점(정수, 정수)을 표시하시오.

1. $y = -x^2$
2. $y = x^2 - 4x + 3$
3. $y = -2x^2 + 8x - 5$
4. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$
5. $y = x^2 + x + 1$

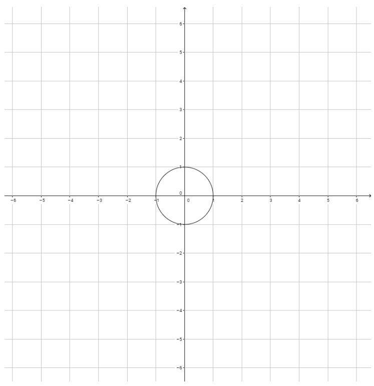
3 원

요약 13) 원의 방정식의 기본형

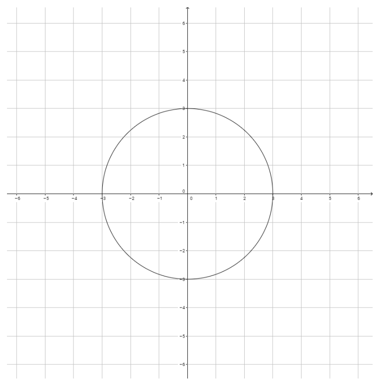
$x^2+y^2=r^2$의 그래프는 $x^2+y^2=r^2$을 만족하는 모든 점들 (x, y)의 집합이다. $P=(x, y)$라고 가정할 때 이 식은 정확히

$$\overline{PO}=r$$

이므로 이 식의 그래프는 중심이 원점이고 반지름이 r인 원이다.



$x^2+y^2=1$



$x^2+y^2=9$

요약 14) 원의 방정식의 일반형

방정식

$$x^2+y^2+Ax+By+C$$

는 적절한 계산을 통해

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

꼴로 바꿀 수 있다. 이 함수의 그래프는 $x^2+y^2=r^2$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하여 얻을 수 있다.

예제 15)

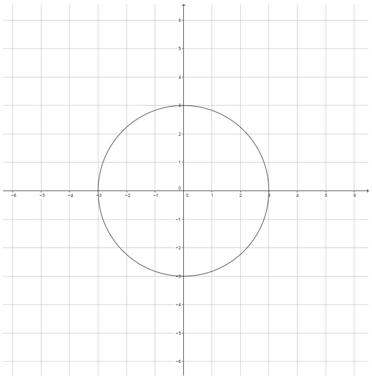
예를 들어 방정식

$$x^2+2x+y^2-4y-4=0$$

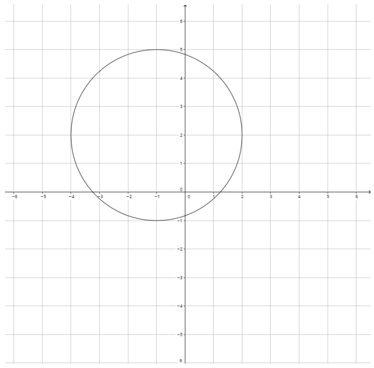
의 그래프를 그리기 위해서는

$$\begin{aligned}
&x^2+2x+y^2-4y-4=0\\
&(x^2+2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4-4=0\\
&(x+1)^2+(y-2)^2=9
\end{aligned}$$

와 같이 식을 변환하고, $x^2+y^2=9$의 그래프 그려, 이것을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동하면 된다.



$y = 2x^2$



$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$

문제 16)

다음 식의 그래프를 그리고, (정수, 정수) 점을 모두 표시하시오.

1. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

4 두 도형 사이의 교점

예제 17)

두 도형이 서로 만나는 점은 두 도형이 나타내는 식을 서로 연립하여 구한다. 예를 들어 포물선 $y = x^2$ 과 원 $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ 사이의 교점을 구해보자. 이것은 연립방정식

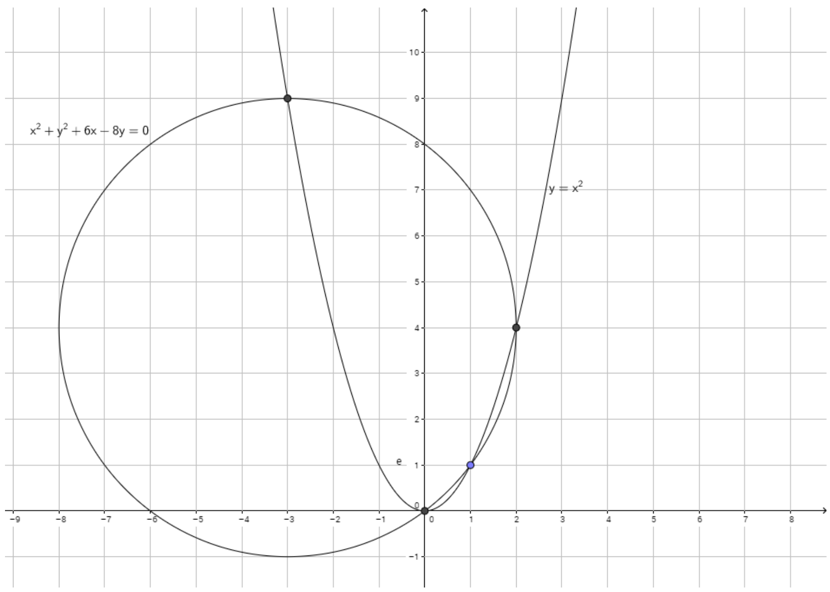
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases}$$

을 풀어서 해결할 수 있다.

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입해 정리하면

$$\begin{aligned} &x^4 + (x^2)^2 + 6x - 8x^2 = 0 \\ &x^4 - 7x^2 + 6x = 0 \\ &x(x^3 - 7x + 6) = 0 \\ &x(x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \\ &x(x-1)(x-2)(x+3) = 0 \\ &x = -3, 0, 1, 2 \end{aligned}$$

이다. 따라서 가능한 (x, y)는 $(x, y) = (-3, 9), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$ 이다.



문제 18)

다음 식이 나타내는 도형들의 교점의 좌표를 모두 구하시오.

1. $y = x^2$, $x + y = 2$
2. $y = x^2 + 1$, $x + 2y = 4$
3. $x^2 + y^2 = 25$, $y = x + 1$
4. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 12 = 0$, $y = x^2 - 4$

문제 19)

이차함수 $2x^2 - 3x + 1$의 그래프와 직선 $y = x + k$가 서로 접하기 위한 k의 값을 구하시오.