

수학2 : 지수

2018년 10월 8일

차 례

차 례	1
1 복습	2
2 거듭제곱근	4
3 지수의 확장과 지수법칙	10
3.1 정수 지수	10
3.2 유리수 지수	12
3.3 실수 지수	16
4 보충·심화 문제	18

1 복습

문제 1) 다항식의 전개

다음 식을 전개하시오.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

답 : ()

문제 2) 인수분해

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3 - b^3$

(2) $x^3 - 27$

(3) $x^2 - 1$

(4) $x^4 - 16$

기본적인 인수분해 공식

(1) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(2) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(3) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

문제 3) 이차방정식

다음 이차방정식을 푸시오.

- (1) $x^2 - x - 2 = 0$ (2) $x^2 - x - 1 = 0$ (3) $x^2 - x + 2 = 0$
(4) $x^2 = 4$ (5) $x^2 = 0$ (6) $x^2 = -4$

답 : (1) $x =$ (2) $x =$ (3) $x =$
(4) $x =$ (5) $x =$ (6) $x =$

이차방정식의 풀이

(1) 이차방정식 $x^2 = A$ 의 근은

$$x = \pm\sqrt{A}$$

(2) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

2 거듭제곱근

예시 4) 3의 제곱근

제곱해서 3이 되는 수를 ‘3의 제곱근’이라고 한다. 즉 $x^2 = 3$ 의 근인데 이것을 풀면

$$\begin{aligned}x^2 &= 3 \\x^2 - 3 &= 0 \\(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) &= 0 \\x &= -\sqrt{3}, \sqrt{3}\end{aligned}$$

그러므로 3의 제곱근은 $\sqrt{3}$ 와 $-\sqrt{3}$ 의 두 개이다.

$3\text{의 제곱근} \Rightarrow \text{제곱해서 } 3\text{이 되는 수} \Rightarrow x^2 = 3$

예시 5) -3의 제곱근

-3의 제곱근은 제곱해서 -3이 되는 수이다. 즉 $x^2 = -3$ 의 근인데 이것을 풀면

$$x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$$

이다. 따라서 -3의 제곱근은 $\sqrt{3}i$ 와 $-\sqrt{3}i$ 의 두 개이다.

$-3\text{의 제곱근} \Rightarrow \text{제곱해서 } -3\text{이 되는 수} \Rightarrow x^2 = -3$
--

문제 6)

(1) 4의 제곱근을 구하여라.

답 : ()

(2) 8의 제곱근을 구하여라.

답 : ()

(3) 0의 제곱근을 구하여라.

답 : ()

(4) -4 의 제곱근을 구하여라.

답 : ()

예시 7) 8의 세제곱근

세제곱해서 8이 되는 수를 8의 세제곱근이라고 한다. 즉 $x^3 = 8$ 의 근인데 이것을 풀면

$$x^3 = 8$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x = 2 \text{ 이거나 } x^2 + 2x + 4 = 0$$

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 에서 근의공식을 쓰면

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}i}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

이다. 따라서 8의 세제곱근은 2, $-1 + \sqrt{3}i$, $1 + \sqrt{3}i$ 의 세 개이다.

$8\text{의 세제곱근} \Rightarrow \text{세제곱해서 8이 되는 수} \Rightarrow x^3 = 8$

문제 8)

(1) -8 의 세제곱근을 구하여라.

답 : ()

(2) 27 의 세제곱근을 구하여라.

답 : ()

(3) -1 의 세제곱근을 구하여라.

답 : ()

네제곱해서 81이 되는 수를 81의 네제곱근이라고 한다. 즉 $x^4 = 81$ 의 근인데 이것을 풀면

$$x = 3, -3 \text{ 이거나 } x^2 = -9$$

81의 네제곱근 \Rightarrow 네제곱해서 81이 되는 수 $\Rightarrow x^4 = 81$

--

7

이번에는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 에서 쓰이는 근호(루트)와 비슷한 기호를 알아보자.

정의 11)

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a \text{의 } n \text{제곱근 중 양수} & (n = \text{짝수}) \\ a \text{의 } n \text{제곱근 중 실수} & (n = \text{홀수}) \end{cases}$$

예시 12)

- (1) $\sqrt{4}$ 은 ‘4의 제곱근 중 양수인 것’을 뜻한다. 즉 $x^2 = 4$ 의 두 근 $-2, 2$ 중 양수인 2를 뜻하므로

$$\sqrt{4} = 2$$

- (2) $\sqrt[3]{8}$ 은 ‘8의 세제곱근 중 실수인 것’을 뜻한다. 즉 $x^3 = 8$ 의 세 근 $2, 1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i$ 중 실수인 2를 뜻하므로

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

- (3) $\sqrt[4]{16}$ 은 ‘16의 네제곱근 중 양수인 것’을 뜻한다. 즉 $x^4 = 16$ 의 네 근 $2, -2, 2i, -2i$ 중 양수인 2를 뜻하므로

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

예시 13)

다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[3]{-27}$ (2) $\sqrt[5]{100000}$ (3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ (4) $-\sqrt[4]{0.0625}$

- (1) $\sqrt[3]{-27}$ 은 -27 의 세제곱근 중 실수인 -3 이다.
(2) $\sqrt[5]{100000}$ 은 100000 의 다섯제곱근 중 실수인 10 이다.
(3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 은 $\frac{16}{81}$ 의 네제곱근 중 양수인 $\frac{2}{3}$ 이다.
(4) $\sqrt[4]{0.0625}$ 은 0.0625 의 네제곱근 중 양수인 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $-\sqrt[4]{0.0625} = -\frac{1}{2}$

답 : (1) $\sqrt[3]{-27} = -3$ (2) $\sqrt[5]{100000} = 10$
(3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ (4) $-\sqrt[4]{0.0625} = -\frac{1}{2}$

문제 14)

다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[5]{32}$ (2) $\sqrt[3]{0.008}$ (3) $\sqrt[3]{-8}$ (4) $-\sqrt[4]{0.0001}$

답 : (1) (2)
(3) (4)

3 지수의 확장과 지수법칙

$$a^x$$

와 같이 생긴 것을 거듭제곱이라고 부른다. 이때 a 를 밑, x 를 지수라고 부른다. 이러한 지수에 대해 다음 법칙이 항상 성립한다.

정리 15) 지수법칙

다음이 성립한다.

$$(1) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$(2) a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(3) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(4) (ab)^x = a^x b^x$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

3.1 정수 지수

예시 16)

다음 나열된 수를 보고 빈칸에 들어갈 수를 유추해보자.

$$2^4 = 16,$$

$$2^3 = 8,$$

$$2^2 = 4,$$

$$2^1 = 2,$$

$$2^0 = \boxed{?}$$

$$2^{-1} = \boxed{?}$$

$$2^{-2} = \boxed{?}$$

16, 8, 4, 2는 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열을 이루고 있으므로 그 다음에 나올 수는

차례로 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 가 되면 자연스러운 것임을 알 수 있다.

$$2^0 = 1, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

정의 17) 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 이 자연수이면

(1) $a^0 = 1$

(2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

예시 18)

(1) $2^0 = 1$

(2) $(-3)^0 = 1$

(3) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

문제 19)

다음 값을 구하여라.

(1) $(\sqrt{3})^2$ (2) $(\frac{2}{3})^0$ (3) $(-2)^{-3}$ (4) $(\frac{1}{2})^{-1}$

답 : (1)

(2)

(3)

(4)

예시 20)

$$(1) 3^{-3} \div 3^{-2} \times 9^2 = 3^{(-3)-(-2)} \times (3^2)^2 = 3^{-1} \times 3^4 = 3^{-1+4} = 3^3$$

$$(2) (25^4 \times 125^{-3})^{-2} = ((5^2)^4 \times (5^3)^{-3})^{-2} = (5^8 \times 5^{-9})^{-2} = (5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$$

문제 21)

다음을 간단히 하여라

$$(1) 2^4 \times 4^{-1} \div 6^2$$

$$(2) (3^3 \times 9^{-2})^{-1}$$

답 : (1) (2)

3.2 유리수 지수

예시 22)

예시 16과 같은 추론을 다시 해보자.

$$2^2 = 4,$$

$$2^{1.5} = \boxed{?},$$

$$2^1 = 2,$$

$$2^{0.5} = \boxed{?},$$

$$2^0 = 1$$

$2^0, 2^1, 2^2$ 가 등비수열을 이루므로 $2^0, 2^{0.5}, 2^1, 2^{1.5}, 2^2$ 도 등비수열을 이루어야 자연스러운 것이다. $2^{0.5}$ 는 $2^0 = 1$ 과 $2^1 = 2$ 의 등비중항이므로 $2^{0.5} = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$. $0.5 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

이다. 마찬가지로

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}, \quad \dots$$

등이다.

정의 23) 유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m 은 정수, n 은 2이상의 정수일 때,

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

문제 24)

다음을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^{\frac{3}{4}}$

(2) $3^{0.5}$

(3) $5^{-\frac{3}{2}}$

(4) $7^{-1.2}$

답 : (1)

(2)

(3)

(4)

문제 25)

다음을 $a^{\frac{m}{n}}$ 의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt[3]{2^4}$

(2) $\sqrt{3^4}$

(3) $\sqrt[4]{5^{-3}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$

답 : (1) (2) (3) (4)

문제 26)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{2^4} \times 2^{\frac{2}{3}}$

(2) $(\sqrt[3]{3})^2 \div 3^{-\frac{1}{3}}$

(3) $12^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{9} \times 4^{-\frac{1}{3}}$

(4) $\sqrt[3]{2} \div 4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{9}}$

답 : (1) (2) (3) (4)

예시 27)

$\sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[4]{ab^3}$ 을 간단히 하여라. (단, $a > 0$, $b > 0$)

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[4]{ab^3} &= (a^3b)^{\frac{1}{4}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (ab^3)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right) \times \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) \div \left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right) \\
&= a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} \\
&= a^1b^0 \\
&= a
\end{aligned}$$

답 : a

문제 28)

다음을 간단히 하여라. (단, $a > 0$)

$$(1) a^{\frac{1}{2}} \div (a^{-\frac{1}{2}})^4$$

$$(2) \sqrt{\sqrt[6]{a} \times \sqrt{a^5}}$$

$$(3) (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$$

$$(4) (a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})$$

답 : (1)

(2)

(3)

(4)

3.3 실수 지수

예시 29)

지수의 범위를 실수까지 확장시켜보자.

예를 들어 $3^{\sqrt{2}}$ 에 대하여 알아보자. 무리수 $\sqrt{2}$ 는 $\sqrt{2} = 1.414213\dots$ 이므로 $\sqrt{2}$ 에 가까워지는 유리수

$$1, \quad 1.4 \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \quad 1.41421, \quad \dots$$

을 지수로 하는 수들은 일정한 수에 가까워진다는 사실이 알려져있다.

$$3^1 = 3$$

$$3^{1.4} = 4.65553\dots$$

$$3^{1.41} = 4.70696\dots$$

$$3^{1.414} = 4.72769\dots$$

$$3^{1.4142} = 4.72873\dots$$

$$3^{1.41421} = 4.72878\dots$$

$$3^{1.414213} = 4.72880\dots$$

이 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$ 로 정한다.

이러한 방식으로 무리수 x 에 대해 3^x 를 정할 수 있다.

예시 30)

$$(1) \ 2^{\sqrt{2}} \times 2^{-\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 2^0 = 1$$

$$(2) \ \left(2^{\sqrt{8}} \div 2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(2^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

문제 31)

다음을 간단히 하여라.

$$(1) \ 2^{\sqrt{2}} \times 4^{\sqrt{2}}$$

$$(2) \ (\sqrt{2})^{3\sqrt{2}} \div 2^{\sqrt{2}}$$

$$(3) \ \left(3^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}$$

$$(4) \ \left(2^{\sqrt{2}} \div 3^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{2}} \times 9^{\sqrt{3}}$$

답 : (1)

(2)

(3)

(4)

4 보충·심화 문제

문제 32)

64의 세제곱근 중 실수인 것을 a , $\sqrt[4]{81}$ 을 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

문제 33)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

(2) $2^3 \div 4 \times (-2)^{-2}$

문제 34)

다음을 간단히 하여라.

(1) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$

(2) $\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$

(3) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

(4) $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}$

문제 35)

다음 세 수의 대소를 비교하여라.

$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[6]{6}$
--

문제 36)

$a + a^{-1} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단 $a > 0$)

(1) $a^2 + a^{-2}$

(2) $a^3 + a^{-3}$

(3) $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}$

(4) $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}$

문제 37)

$2^{x+1} = a$, $3^x = b$ 일 때, 72^x 를 a 와 b 에 관한 식으로 나타내어라.

문제 38)

$x > 0$ 이고 $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ 일 때, 다음을 간단히 하여라.

$$\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}} \times \left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$$

문제 39)

사람 피부의 겉넓이 A m² 는 몸무게 W kg와 키 H cm에 대하여 다음 식이 성립한다고 한다.

$$A = 0.007W^{0.425}H^{0.725}$$

몸무게 81kg, 키 192cm인 사람이 피부의 넓이를 $0.007 \times 2^a \times 3^b$ 로 나타내었을 때, 두 실수 a , b 의 값을 구하여라.

답

문제 1)

$$a^3 + b^3$$

문제 2)

$$(1) (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad (4) -0.1$$

$$(2) (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$(3) (x+1)(x-1)$$

$$(4) (x+2)(x-2)(x^2+4)$$

문제 3)

$$(1) x = -1, 2$$

$$(2) x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(3) x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$(4) x = 2, -2$$

$$(5) x = 0$$

$$(6) x = 2i, -2i$$

문제 6)

$$(1) 2, -2$$

$$(2) 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}$$

$$(3) 0$$

$$(4) 2i, -2i$$

문제 8)

$$(1) -2, 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$(2) 3, \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

문제 10)

$$(1) \pm 2, \pm 2i$$

$$(2) \pm 1, \pm i$$

문제 14)

$$(1) 2$$

$$(2) 0.2$$

$$(3) -2$$

$$(4) -0.1$$

문제 19)

$$(1) 3$$

$$(2) 1$$

$$(3) -\frac{1}{8}$$

$$(4) 2$$

문제 21)

$$(1) \frac{1}{9}$$

$$(2) 3$$

문제 24)

$$(1) \sqrt[4]{2^3}$$

$$(2) \sqrt{3}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{5^3}}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt[5]{7^6}}$$

문제 25)

$$(1) 2^{\frac{4}{3}}$$

$$(2) 3^2$$

$$(3) 5^{-\frac{3}{4}}$$

$$(4) 7^{-\frac{3}{5}}$$

문제 26)

$$(1) 4$$

$$(2) 3$$

$$(3) 3$$

$$(4) 1$$

문제 28)

$$(1) a^{\frac{5}{2}}$$

$$(2) a^{\frac{4}{3}}$$

$$(3) a - a^{-1}$$

$$(4) a + a^{-1}$$

문제 31)

$$(1) 2^{3\sqrt{2}}$$

$$(2) 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$(3) 3$$

$$(4) 4$$

문제 32)

$$7$$

문제 33)

$$(1) -8$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

문제 34)

$$(1) \frac{1}{2}$$

$$(2) 2^{\frac{5}{6}}$$

$$(3) 2^{\frac{7}{8}}$$

$$(4) 2^{\frac{11}{12}}$$

문제 35)

$$\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

문제 36)

$$(1) 7$$

$$(2) 18$$

$$(3) \sqrt{5}$$

$$(4) 2\sqrt{5}$$

문제 37)

$$\frac{1}{8}a^3b^2$$

문제 38)

$$\frac{1}{x}$$

문제 39)

$$a = \frac{87}{20}, b = \frac{97}{40}$$