중학교 3-2 기말 대비(천재교육 교과서)

2018년 9월 27일

1 이차방정식

문제 1) 162-1
네 수 m, 5, 9, 16에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 평균이 10일 때, m의 값

(2) 중앙값이 10일 때, m의 값

문제 2) 162-2
다음이 모두 성립할 때, a의 범위를 구하여라.

ㄱ. 5개의 수 10, 14, 20, 24, a의 중앙값은 14이다.

ㄴ. 4개의 수 2, 5, 11, a의 중앙값은 8이다.

문제 3) 162-3
다음이 모두 성립할 때, a의 범위를 구하여라.

ㄱ. 5개의 수 21, 28, 35, 42, a의 중앙값은 35이다.

ㄴ. 4개의 수 40, 50, 60, a의 중앙값은 45이다.

문제 4) 162-4
다음이 모두 성립할 때, a의 범위를 구하여라.

ㄱ. 5개의 수 5, 10, 15, 20, a의 평균은 13보다 작다.

ㄴ. 4개의 수 5, 9, 13, a의 중앙값은 11이다.

문제 5) 162-5
다음이 모두 성립할 때, a의 범위를 구하여라.

ㄱ. 5개의 수 4, 10, 16, 22, a의 중앙값을 m이라고 할 때, $13 \leq m \leq 16$이다.

ㄴ. 4개의 수 18, 27, 36, a의 평균은 25보다 작다.

문제 6) 162-6
다음이 모두 성립할 때, a의 범위를 구하여라.

ㄱ. 5개의 수 2, 5, 7, 11, a의 중앙값을 m은 5이다.

ㄴ. 8개의 수 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7 a의 최빈값은 6이다.

문제 7) 165

다음은 수현이가 이번 중간고사에서 얻은 점수들을 나열한 것이다.

과목	국어	영어	수학	과학
점수	100	90	78	76

이 점수들에 대해 다음 값들을 구하여라.

(1) 최솟값

(2) 최댓값

(3) 평균

(4) 중앙값

(5) 최빈값

(6) 점수의 최댓값과 최솟값의 차

(7) 각 점수와 평균의 차의 합

(8) 각 점수의 평균의 차의 제곱의 합

(9) 분산

(10) 표준편차

문제 8) 167

다음 중 틀린 것을 고르시오.

① 대푯값에는 평균, 중앙값, 최빈값 등이 있다.

② 자료에 매우 크거나 작은 값이 포함되어 있을 때에는 평균보다는 중앙값을 사용하는 것이 좋다.

③ 자료들이 대푯값 주위에 몰려있으면 산포도가 작다.

④ 편차는 평균에서 편차를 뺀 값이다.

⑤ 편차들을 모두 더한 값은 0이다.

문제 9) 173-1

다섯 개의 수 4, 7, 11, x, y의 평균이 9, 분산이 10일 때, x와 y의 값을 각각 구하여라. (단, $x < y$)

문제 10) 173-2

여섯 개의 수 1, 4, 5, 11, x, y의 평균이 5, 분산이 11일 때, x와 y의 값을 각각 구하여라. (단, $x < y$)

문제 11) 173-3

다음은 다섯 학생의 수학 점수를 나타낸 것이다.

학생	일장	지인	소진	진태	태희
점수	94	x	88	82	y

수학 점수의 평균이 90점이고 표준편차는 40점일 때, xy의 값을 구하여라.

예시 12) 173-4

다음은 지현이네 모둠 4명 각각의 쪽지 시험 점수에서 지현이의 점수를 뺀 값이다.

학생	지영	민우	지현	현식
뺀점수	-3	-2	0	1

네 학생의 점수를 각각 a, b, c, d라고 하자. 표를 해석하면

$$a-c=-3,\quad b-c=-2,\quad c-c=0,\quad d-c=1$$

이다. 따라서

$$a=c-3,\quad b=c-2,\quad c=c,\quad d=c+1$$

이다.

만약 $c=8$이면

$$a=5,\quad b=6,\quad c=8,\quad d=9$$

이고 $c=10$이면

$$a=7,\quad b=8,\quad c=10,\quad d=11$$

인 것이다.

네 점수의 평균은

$$\frac{(c-3)+(c-2)+c+(c+1)}{4}=c-1$$

이다. 따라서

학생	지영	민우	지현	현식
점수	$c-3$	$c-2$	c	$c+1$
편차	-2	-1	1	2

이고 분산은

$$\frac{(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}{4}=\frac{5}{2}$$

이다.

문제 13) 173-5

다음은 지현이네 모둠 5명 각각의 쪽지 시험 점수에서 지현이의 점수를 뺀 값이다.

학생	지영	민우	지현	현식	상철
뺀점수	-7	-3	0	1	4

(1) 지현이의 점수가 11점일 때, 상철이의 점수를 구하여라.

(2) 지현이의 점수가 13점일 때, 점수들의 평균을 구하여라.

(3) 점수들의 분산을 구하여라.

문제 14) 173-6

다음은 지현이네 모둠 5명 각각의 쪽지 시험 점수에서 지현이의 점수를 뺀 값이다.

학생	지영	민우	지현	현식	상철
뺀점수	-3	-1	0	6	8

이때, 다섯 점수들의 분산을 구하여라.

예시 15) 175-1

3개의 변량 a, b, c의 평균이 4, 분산이 6이다. 이때, $2a-3$, $2b-3$, $2c-3$의 평균과 분산을 구하여라.

평균이 4이므로

$$a+b+c=12 \tag{1}$$

이다. 또 분산이 6이므로

$$(a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2=18$$

이다. 즉

$$(a^2+b^2+c^2)-8(a+b+c)+48=18$$

이다. (1)를 적용하면

$$a^2+b^2+c^2=66 \tag{2}$$

이제 $2a-3$, $2b-3$, $2c-3$의 평균과 분산을 구하자.

$$\begin{aligned} \text{평균} &= \frac{(2a-3)+(2b-3)+(2c-3)}{3} \\ &= \frac{2(a+b+c)-9}{3} = 5 \end{aligned}$$

이다. 변량들의 편차는 각각

$$\begin{aligned} &(2a-3)-5=2a-8, \\ &(2b-3)-5=2b-8, \\ &(2c-3)-5=2c-8 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \text{분산} &= \frac{(2a-8)^2+(2b-8)^2+(2c-8)^2}{3} \\ &= \frac{4(a^2+b^2+c^2)-32(a+b+c)+192}{3} \\ &= \frac{4\cdot 66-32\cdot 12+192}{3} = \frac{72}{3} = 24 \end{aligned}$$

문제 16) 175-2

다섯 개의 변량 a, b, c, d, e의 평균이 3, 분산이 2이다. 이때 $3a$, $3b$, $3c$, $3d$, $3e$의 평균과 분산을 구하여라.

문제 17) 175-3

네 개의 변량 a, b, c, d의 평균이 4, 분산이 5이다. 이때 $a+2$, $b+2$, $c+2$, $d+2$의 평균과 분산을 구하여라.

문제 18) 175-4

네 개의 변량 a, b, c, d의 평균이 8, 분산이 25이다. 이때 $3a+4$, $3b+4$, $3c+4$, $3d+4$의 평균과 분산을 구하여라.

문제 19) 178-1

4개의 수 a, b, c, d의 평균이 5, 표준편차가 $\sqrt{5}$일 때, a^2, b^2, c^2, d^2의 평균을 구하여라.

문제 20) 189-1

(1) 다음 식이 성립함을 확인하여라.

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 $\boxed{\text{피타고라스의 수}}$라고 한다. 예를 들어 3, 4, 5는 $3^2 + 4^2 = 5^2$ 을 만족시키므로 피타고라스의 수이다. 위의 식에 적당한 자연수 m, n을 넣어 다른 피타고라스의 수를 다섯 개 이상 찾아라.

문제 21) 189-2

$p^2 + q^2 = 1$ 을 만족시키는 유리수 p, q를 다섯 개 이상 찾아라.

문제 22) 189-3

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ 을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d를 구하여라.

문제 23) 189-4

$a^3 + b^3 = d^3$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 구하여라.

문제 24) 189-5

$a^4 + b^4 = d^4$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c를 구하여라.

답

문제 1)

(1) 10

(2) 11

문제 2) $11 \leq a \leq 14$

문제 3) $35 \leq a \leq 40$

문제 4) $13 \leq a < 15$

문제 5) $13 \leq a < 19$

문제 6) $a < 5$

문제 7)

(1) 78

(2) 100

(3) 86

(4) 84

(5) 없다.

(6) 24

(7) 36

(8) 376

(9) 94

(10) $\sqrt{94}$

문제 8) ④

문제 9)
$x = 10,\ y = 13$

문제 10)
$x = 2,\ y = 7$

문제 11) 8600

문제 13)

(1) 15점

(2) 12점

(3) 14

문제 14) 18

문제 16)
평균=9, 분산=18

문제 17)
평균=6, 분산=5

문제 18)
평균=28, 분산=225

문제 19) 30

문제 20)

(1)

$$\begin{aligned}&(2mn)^2+(m^2-n^2)^2\\=&4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4\\=&m^4+2m^2n^2+n^4\\=&(m^2+n^2)^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(m,n)&=(2,1) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(3,4,5)\\(m,n)&=(4,1) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(8,15,17)\\(m,n)&=(6,1) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(12,35,37)\\(m,n)&=(3,2) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(5,12,13)\\(m,n)&=(5,2) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(20,21,29)\\(m,n)&=(4,3) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(7,24,25)\\(m,n)&=(5,4) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(9,40,41)\\(m,n)&=(6,5) &\Longrightarrow&& (a,b,c)&=(11,60,61)\\&&\vdots&&\end{aligned}$$

문제 21)

$$\begin{aligned}(p,q)=&\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right),\left(\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right),\\&\left(\frac{8}{17},\frac{15}{17}\right),\left(\frac{9}{41},\frac{40}{41}\right)\cdots\end{aligned}$$

문제 22)

$$\begin{aligned}(a,b,c,d)=&(1,2,2,3),(2,10,11,15),\\&(2,3,6,7),(1,4,8,9),\cdots\end{aligned}$$

문제 23)

없다.

문제 24)

없다.*

---

*

$a^n+b^n=c^n$(단, n은 3 이상의 자연수)
를 만족시키는 자연수 a, b, c는 존재하지 않는다.

이것은 페르마의 마지막 정리 라고 불리는 정리이다. 이 정리는 17세기 프랑스의 수학자 페르마의 이름을 따서 만들어진 정리로, 오랜 세월을 거쳐 1995년 영국의 수학자 앤드류 와일즈에 의해 완전히 증명되었다.