태희, 추가 과제 01 - 풀이

문제 ??) 2018년 6월 고1 학력평가 26번

26. [출제의도] **인수정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기**

$$x^4+ax+b=(x-2)^2Q(x)$$

조립제법을 이용하면

2	1	0	0	a	b
		2	4	8	$2a+16$
	1	2	4	$a+8$	$b+2a+16$

x^4+ax+b는 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$b+2a+16=0$$

이고 $(x-2)Q(x)=x^3+2x^2+4x+a+8$이다.

$x^3+2x^2+4x+a+8$을 $x-2$로 나누면

2	1	2	4	$a+8$
		2	8	24
	1	4	12	$a+32$

$x^3+2x^2+4x+a+8$은 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$a+32=0$$

이고

$$x^4+ax+b=(x-2)^2(x^2+4x+12)$$

이다. 그러므로 $Q(x)=x^2+4x+12$이다.

따라서 $a=-32$, $b=48$, $Q(2)=4+8+12=24$이고 $a+b+Q(2)=40$이다.

문제 ??) 2018년 6월 고1 학력평가 15번

15. [출제의도] **인수분해 이해하기**

$a=2018$, $b=3$이라 하면

$$2018\times 2021+9=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2$$

이고

$$2018^3-27=a^3-b^3$$

이다. 인수분해 공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하면

$$\begin{aligned}2018^3-27&=a^3-b^3\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=2015\times(2018\times 2021+9)\end{aligned}$$

따라서 몫은 2015이다.

문제 ??) 2018년 6월 고1 학력평가 21번

21. [출제의도] **곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기**

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$에서

$$\begin{aligned}&\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}\\&=12x^4+24x^3+12x^2+16\end{aligned}$$

$P(x)+Q(x)=4$이므로

$$\begin{aligned}64-12P(x)Q(x)&=12x^4+24x^3+12x^2+16\\-12P(x)Q(x)&=12x^4+24x^3+12x^2-48\\-P(x)Q(x)&=x^4+2x^3+x^2-4\\&=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)\\&=(x^2+x-2)(x^2+x+2)\end{aligned}$$

$P(x)+Q(x)=4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 조건(가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$는

$$P(x)=-x^2-x+2,\ Q(x)=x^2+x+2$$

이다. 따라서 $P(2)+Q(3)=10$이다.

[다른 풀이]

$$P(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$$

$$Q(x)=4-(ax^2+bx+c)$$

라 하자.

$$\begin{aligned}&\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3\\&=(ax^2+bx+c)^3+64-48(ax^2+bx+c)\\&\quad+12(ax^2+bx+c)^2-(ax^2+bx+c)^3\\&=12a^2x^4+24abx^3+(12b^2+24ac-48a)x^2+\\&\quad(24bc-48b)x+(12c^2-48c+64)\\&=12x^4+24x^3+12x^2+16\end{aligned}$$

에서 $12a^2=12$이므로 $a=-1\ (\because\ a<0)$이다.

$24ab=24$에서 $b=-1$이다. $12b^2+24ac-48a=12$에서 $c=2$이다.

$b=-1$, $c=2$를 $24bc-48b=0$, $12c^2-48c+64=16$에 대입하면 등식이 성립하므로

$$P(x)=-x^2-x+2$$

$$Q(x)=4-(-x^2-x+2)=x^2+x+2$$

이다. 따라서 $P(2)+Q(3)=-4+14=10$이다.

태희, 추가 과제 02 - 문제

문제 1)

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여

$$iz=\overline{z}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $z+\overline{z}=-2b$

ㄴ. $i\overline{z}=-z$

ㄷ. $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2)

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-a^2x \geq 0 \\ x^2-4ax+4a^2-1 < 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이 되기 위한 모든 실수 a의 값의 합은? (단, $0<a<\sqrt{2}$) [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{25}{16}$ ③ $\dfrac{13}{8}$ ④ $\dfrac{27}{16}$ ⑤ $\dfrac{7}{4}$

문제 3)

다음 조건을 만족시키는 모든 이차다항식 $P(x)$의 합을 $Q(x)$라 하자.

(가) $P(1)P(2)=0$
(나) 사차다항식 $P(x)\{P(x)-3\}$은 $x(x-3)$으로 나누어 떨어진다.

$Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지를 구하시오. [4점]

문제 1) 2017년 6월 고1 학력평가 18번

21. [출제의도] 연립부등식의 해 추론하기

$$x^2-a^2x=x(x-a^2)\geq 0$$

에서 $x\leq 0$ 또는 $x\geq a^2$ 이고

$$x^2-4ax+4a^2-1=(x-(2a-1))(x-(2a+1))<0$$

에서 $2a-1<x<2a+1$ 이다.

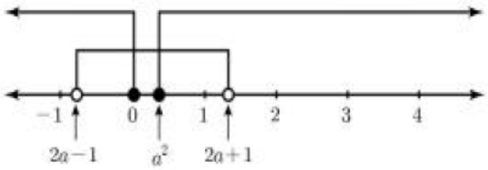
ⅰ) $0<a<\frac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$-1<2a-1<x\leq 0 \text{ 또는 } a^2\leq x<2a+1<2$$

인데 $0<a^2<\frac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로

$x=0,1$의 2개 정수해가 존재한다.



ⅱ) $a=\frac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$\frac{1}{4}=a^2\leq x<2a+1=2$$

이므로 $x=1$의 1개 정수해가 존재한다.

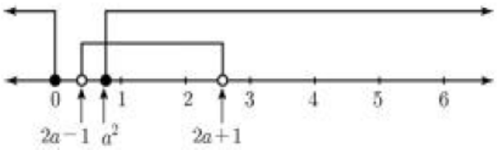
ⅲ) $\frac{1}{2}<a<1$일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\leq x<2a+1$$

인데 $\frac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로

$x=1,2$의 2개 정수해가 존재한다.



ⅳ) $a=1$일 때

연립부등식의 해는

$$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$$

이므로 $x=2$의 1개 정수해가 존재한다.

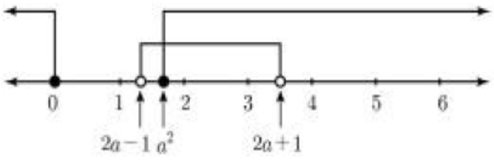
ⅴ) $1<a<\sqrt{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\leq x<2a+1$$

인데 $1<a^2<2$이고 $3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로

$x=2,3$의 2개 정수해가 존재한다.



그러므로 ⅰ) ~ ⅴ)에 의해

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개 정수해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

문제 2) 2017년 6월 고1 학력평가 21번

21. [출제의도] 연립부등식의 해 추론하기

$$x^2-a^2x=x(x-a^2)\geq 0$$

에서 $x\leq 0$ 또는 $x\geq a^2$ 이고

$$x^2-4ax+4a^2-1=(x-(2a-1))(x-(2a+1))<0$$

에서 $2a-1<x<2a+1$ 이다.

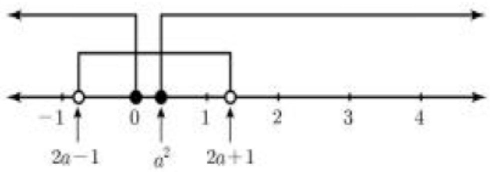
ⅰ) $0<a<\frac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$-1<2a-1<x\leq 0 \text{ 또는 } a^2\leq x<2a+1<2$$

인데 $0<a^2<\frac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로

$x=0,1$의 2개 정수해가 존재한다.



ⅱ) $a=\frac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$\frac{1}{4}=a^2\leq x<2a+1=2$$

이므로 $x=1$의 1개 정수해가 존재한다.

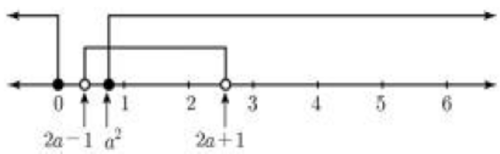
ⅲ) $\frac{1}{2}<a<1$일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\leq x<2a+1$$

인데 $\frac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로

$x=1,2$의 2개 정수해가 존재한다.



ⅳ) $a=1$일 때

연립부등식의 해는

$$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$$

이므로 $x=2$의 1개 정수해가 존재한다.

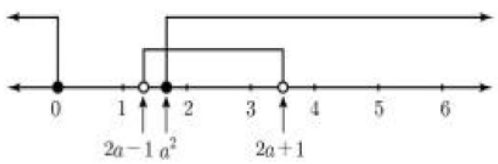
ⅴ) $1<a<\sqrt{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\leq x<2a+1$$

인데 $1<a^2<2$이고 $3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로

$x=2,3$의 2개 정수해가 존재한다.



그러므로 ⅰ) ~ ⅴ)에 의해

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개 정수해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

문제 3) 2017년 6월 고1 학력평가 30번

30. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 이차다항식 추론하기

ⅰ) $P(1)=0$, $P(2)=0$ 인 경우
$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의해

$$P(0)=3,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

이다.

ⅱ) $P(1)=0$, $P(2)\neq 0$ 인 경우
$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의해 아래와 같이 세 가지 경우만 생각하면 된다.

① $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때,

$$P(1)=0,\ P(0)=0,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$$

이다.

② $P(0)=3$, $P(3)=0$일 때,

$$P(1)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=0$$

이다. 따라서

$$P(x)=(x-1)(x-3)$$

이다.

③ $P(0)=3$, $P(3)=3$일 때,

$$P(1)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

이다. 그런데 $P(2)=0$이므로 모순이다.

ⅲ) $P(1)\neq 0$, $P(2)=0$인 경우
$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의해 아래와 같이 세 가지 경우만 생각하면 된다.

① $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때,

$$P(2)=0,\ P(0)=0,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=x(x-2)$$

이다.

② $P(0)=3$, $P(3)=0$일 때,

$$P(2)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=0$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

이다.

③ $P(0)=3$, $P(3)=3$일 때,

$$P(2)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

이다. 그런데 $P(1)=0$이므로 모순이다.
그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해

$$\begin{aligned}Q(x)=&\frac{3}{2}(x-1)(x-2)+\frac{1}{2}x(x-1)\\&+(x-1)(x-3)+x(x-2)\\&+\frac{1}{2}(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 $Q(4)=27$이다.