윤영 : 08 명제(1)

2016년 11월 15일

차 례

1 명제의 뜻

예시 1)
다음 중 참인 것을 고르시오.

(1) 독도는 대한민국의 영토이다,

(2) 달은 지구 주위를 공전한다,

(3) 제주도는 큰 섬이다.

(4) 1+2>4

위의 예에서 (1)과 (2)는 참인 문장이고 (4)는 거짓인 문장이다. (3)의 경우에는 참이라고 할 수도 없고 거짓이라고 할 수도 없다. '큰 섬'의 기준이 명확하지 않기 때문이다.

정의 2) 명제
(1), (2), (4)처럼 그 내용이 참인지 거짓인지를 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다. (1), (2)는 참인 명제이고 (4)는 거짓인 명제이다.

문제 3)
다음 중 명제인 것을 모두 찾고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이다.

(2) $x = 2$이면 $2x + 1 = 3$이다.

(3) $x - 1 \leq 3$

(4) $\frac{1}{100}$은 0에 가까운 수이다.

정의 4) $p \to q$ 꼴의 명제

명제 '두 삼각형이 서로 합동이면 두 삼각형의 넓이는 서로 같다'는 다음의 두 문장

p : 두 삼각형이 서로 합동이다.

q : 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.

로 나눌 수 있으므로 이 명제를 'p 이면 q 이다'로 나타낼 수 있다.

이것을 기호로

$$p \to q$$

로 나타내고, p를 **가정**, q를 **결론**이라고 한다.

즉, 위의 명제에서 가정은 '두 삼각형이 서로 합동이다.'이고 결론은 '두 삼각형의 넓이는 서로 같다.'이다.

예시 5)

명제 'a가 6의 약수이면 a는 12의 약수이다.'에서

가정 : a가 6의 약수이다.

결론 : a가 12의 약수이다.

문제 6)

다음 명제의 가정과 결론을 말하여라.

(1) $x = 2$ 이면 $2x + 3 = 7$ 이다.
가정 :
결론 :

(2) 두 수 a, b가 짝수이면 $a + b$는 짝수이다.
가정 :
결론 :

(3) 두 삼각형이 서로 닮음이면 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.
가정 :
결론 :

2 정의, 정리, 증명

예시 7) 정의

정삼각형은 '세 변의 길이가 모두 같은 삼각형'으로 정하고 있다. 이와 같이 용어를 정확하게 정한 문장을 그 용어의 정의라고 한다.

(1) 정사각형은 네 변의 길이가 모두 같고 네 각의 크기가 모두 같은 사각형으로 정의한다.

(2) 마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형으로 정의한다.

문제 8)

다음 용어의 정의를 말하여라.

(1) 이등변삼각형

(2) 원

(3) 직각삼각형

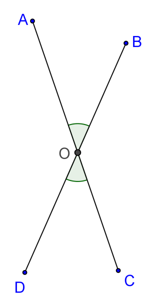
(4) 사다리꼴

예시 9) 정리, 증명

명제

‘두 직선이 한 점에서 만나면 맞꼭지각의 크기는 서로 같다’

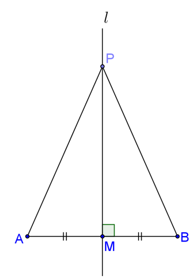
는 정의와 성질을 통하여 참임을 보일 수 있다. 이와 같이 정의와 성질, 가정을 통해 참임을 보일 수 있는 명제를 **정리**라고 한다. 이때 어떤 명제가 참임을 보이는 과정을 **증명**이라고 한다.

정리	두 직선이 한 점에서 만날 때, 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.
가정	두 직선이 한 점에서 만난다.
결론	맞꼭지각의 크기는 서로 같다.
증명	오른쪽 그림과 같이 직선 AC와 BD가 한 점 O에서 만날 때, $\angle AOC$는 평각이므로 $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \qquad (1)$ 또 $\angle BOD$는 평각이므로 $\angle BOC + \angle COD = 180^\circ \qquad (2)$ (1), (2)에서 $\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$ 따라서 $\angle AOB = \angle COD$이다. 

문제 10)

다음은 명제 '선분 AB의 수직이등분선 l 위에 한 점 P를 잡으면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이다.' 가 참임을 증명하는 과정이다. 빈칸에 알맞은 용어나 문장을 써넣어라.

<table>
<tr><td>$\boxed{}$</td><td>점 P가 $\overline{AB}$의 수직이등분선 l 위의 한 점일 때 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이다.</td></tr>
<tr><td>가정</td><td>점 P는 선분 $\overline{AB}$의 수직이등분선 l 위의 한 점이다.</td></tr>
<tr><td>결론</td><td>$\boxed{}$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{}$</td><td>오른쪽 그림에서 선분 AB의 중점을 M 이라고 하면 직선 l은 AB의 수직이등분선이므로
$\overline{AM} = \overline{BM}$ (4)
$\angle AMP = \angle BMP$ (5)
$\overline{PM}$은 공통 (6)
(1), (2), (3) 에서
$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$($SAS$합동)
따라서 $\overline{P}A = \overline{P}B$ 이다.</td></tr>
</table>



3 조건과 진리집합

'x는 12의 약수이다'

는 명제라고는 볼 수는 없다. x의 값에 따라 참일 수도 있고 거짓일 수도 있기 때문이다. 만약 $x = 3$이면 참인 명제가 되고 $x = 5$이면 거짓인 명제가 된다. 위의 문장을 참이 되도록 만드는 x의 값은 $x = 1, 2, 3, 4, 6, 12$이다.

정의 11) 조건, 진리집합

(1) 변수를 포함하는 문장이나 식이 변수의 값에 따라 참, 거짓이 정해질 때, 이 문장이나 식을 **조건**이라고 한다.

(2) 전체집합 U의 원소 중에서 어떤 조건을 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 그 조건의 **진리집합**이라고 한다.

예시 12)

자연수 전체의 집합에서 조건 p : 'x는 12의 약수이다'의 진리집합을 P라고 하면 $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이다.

문제 13)

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서, 다음 조건의 진리집합을 구하여라.

(1) x는 짝수이다

(2) $x^2 - 6x + 5 = 0$

(3) $2x - 1 \geq 3$

(4) x는 8의 약수이다.

정의 14) 부정

명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 **부정**이라고 하고, 이것을 기호로 $\sim p$로 나타낸다.

예시 15)

(1) 명제 p : '3은 홀수이다'의 부정은 $\sim p$: '3은 홀수가 아니다.' 이다.

(2) x가 실수일 때, 조건 p : '$x > 2$'의 부정은 $\sim p$: '$x \leq 2$이다.

문제 16)

다음 명제 또는 조건의 부정을 말하여라.

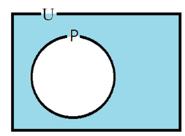
(1) 6은 합성수이다.

(2) $0 \in \varnothing$

(3) x는 3의 배수이다.

(4) $x - 1 \geq 0$

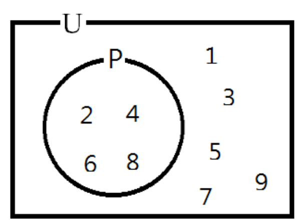
조건 p의 진리집합이 P라고 할 때, $\sim p$의 진리집합에 대하여 알아보자. 조건 $\sim p$를 참이 되게 하는 원소들은, P의 원소가 아닌 것들이다. 따라서



조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C 이다.

예시 18)

전체집합이 $U = \{x \,|\, x$는 10보다 작은 자연수$\}$ 일 때, 조건 p : 'x는 2의 배수이다.'에 대하여



(1) 조건 p의 진리집합은

$$P = \{2, 4, 6, 8\}$$

(2) 조건 p의 부정은 $\sim p$: 'x는 2의 배수가 아니다.' 이고 그 진리집합은

$$P^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

문제 19)
전체집합 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 조건의 부정을 말하고, 그것의 진리집합을 구하여라.

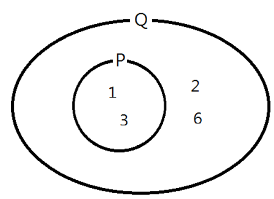
(1) x는 홀수이다.

(2) $x \geq 3$

(3) $(x-1)(x-4)=0$

(4) $x^2 \leq 4$

예시 21)
두 조건



p : 'x는 3의 약수이다.'

q : 'x는 6의 약수이다.'

에 대하여 $p \to q$는 참이다. 이때, 이 명제의 가정 p와 결론 q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$$P = \{1,3\}, \quad Q = \{1,2,3,6\}$$

이므로 $P \subset Q$이다.

또한 $q \to p$는 거짓이다. 원소 2는 6의 배수이기는 하지만 3의 배수라고는 할 수 없기 때문이다. 이때 $Q \not\subset P$이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

정리 22) 명제 $p \to q$의 참, 거짓
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때,

(1) $p \to q$가 참이면 $P \subset Q$이고 $p \to q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.

(2) $P \subset Q$가 참이면 $p \to q$이고 $P \not\subset Q$가 거짓이면 $p \to q$이다.

(3) $p \to q$가 거짓일 때, p는 성립하면서 q는 성립하지 않는 원소를 반례라고 한다.

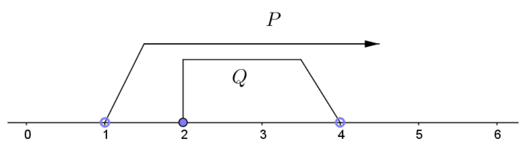
예시 23)

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $x = 4$ 이면 $x^2 = 16$ 이다. (2) $x > 1$ 이면 $2 \leq x < 4$ 이다.

(1) 두 조건 $p : x = 4$, $q : x^2 = 16$ 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면, $P = \{4\}$, $Q = \{-4, 4\}$ 이다. $P \subset Q$ 이므로 $p \to q$ 는 참이다.

(2) 아래 그림과 같이 두 조건 $p : x > 1$, $q : 2 \leq x < 4$ 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 하면, $P = \{x \,|\, x > 1\}$, $Q = \{x \,|\, 2 \leq x < 4\}$ 이다.



$P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \to q$ 는 거짓이다.

이때 반례는 $x > 1$ 은 만족하면서 $2 \leq x < 4$ 는 만족하지 않는 원소들로, $\frac{3}{2}$, 5, 6 등이다.

문제 24)

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $x - 2 = 0$ 이면 $x^2 + x - 6 = 0$ 이다.

(2) x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

(3) $\triangle ABC$ 가 정삼각형이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

(4) x 가 무리수이면 x^2 은 유리수이다.

4 ‘모든’과 ‘어떤’이 들어있는 명제

예시 25)
전체집합이 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 일 때,

$$\text{‘모든 } x\text{에 대하여 } x^2+1>0\text{이다.’} \tag{1}$$
$$\text{‘모든 } x\text{에 대하여 } x+1>0\text{이다.’} \tag{2}$$

에서 (1)은 전체집합 U의 모든 원소에 대하여 $x^2+1>0$이므로 참이지만, (2)는 $x=-2$이거나 $x=-1$일 때 성립하지 않으므로 거짓이다. 조건 p, q를 각각 $p : x^2+1>0$, $q : x+1>0$이라고 하면 진리집합 P, Q는 각각 $P=U$, $Q=\{0,1,2\} \neq U$이다.

또

$$\text{‘어떤 } x\text{에 대하여 } x+1<0\text{이다.’} \tag{3}$$
$$\text{‘어떤 } x\text{에 대하여 } x^2+1<0\text{이다.’} \tag{4}$$

에서 (3)은 $x=-2$일때 성립하므로 참이지만, (4)는 $x^2+1<0$을 참으로 만드는 x값이 없으므로 거짓이다. 조건 r, s를 각각 $r : x+1<0$, $s : x^2+1<0$이라고 하면 진리집합 R, S는 각각 $R \neq \varnothing$, $S=\varnothing$이다.

정리 26) ‘모든’과 ‘어떤’이 포함된 명제의 참, 거짓
전체집합을 U, 조건 p의 진리집합을 P라고 하면
(1) ‘모든 x에 대하여 p이다.’는
$P=U$이면 참이고, $P \neq U$이면 거짓이다.

(2) ‘어떤 x에 대하여 p이다.’는
$P \neq \varnothing$이면 참이고, $P=\varnothing$이면 거짓이다.

예시 27)

(1) 명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이다'는 $\{x \mid x^2 \geq 0\} = U$이므로 참이다.

(2) 명제 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2 < 0$이다'는 $\{x \mid x^2 < 0\} = \varnothing$이므로 거짓이다.

문제 28)

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 = 2x$이다.

(2) $x < 1$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 < 1$이다.

예시 29)

세 학생 a, b, c에 대하여, 다음 네 명제를 생각해보자.

$$\text{모든 학생은 남자이다.} \tag{1}$$
$$\text{모든 학생은 여자이다.} \tag{2}$$
$$\text{어떤 학생은 남자이다.} \tag{3}$$
$$\text{어떤 학생은 여자이다.} \tag{4}$$

명제 (1)의 부정이 무엇인지 한번 생각해 보자. '모든 학생은 남자이다'의 부정이니 '모든 학생은 여자이다'라고 답하기 쉽지만 실제로 그렇지 않다.
세 학생의 성별의 가능한 경우를 모두 나열해보면 오른쪽 그림과 같은데, 명제 (1)이 성립하는 경우의 반대는 명제 (4)이다. 따라서 명제 (1)의 부정은 (4)이다. 즉

a	b	c
남	남	남
남	남	여
남	여	남
남	여	여
여	남	남
여	남	여
여	여	남
여	여	여

$$\boxed{\text{모든 학생은 남자이다.}}$$

의 부정은

$$\boxed{\text{어떤 학생은 남자가 아니다.}}$$

이다.

정리 30) '모든'과 '어떤'이 포함된 명제의 부정

(1) 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은

'어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'

(2) 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은

'모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'

예시 31)

명제 '모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 1$이다'의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

주어진 명제의 부정은 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2 < 1$이다'가 된다. $x^2 < 1$의 진리집합은 $\{x \mid x^2 < 1\} = \{x \mid -1 < x < 1\} \neq \varnothing$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

문제 32)

주어진 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 정사각형은 마름모이다.

(2) 어떤 정수는 자연수이다.

(3) 모든 실수 x에 대하여 $|x-1| > 0$이다.

(4) 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 = x$이다.

확인문제

문제 33)

다음 중 명제인 것을 찾고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(2) 6의 약수는 12의 약수이다.

문제 34)

두 조건 p, q가 다음과 같을 때, 명제 $p \to q$의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $p : x > 2,$ $\quad q : x^2 - 1 > 0$

(2) $p : x^2 - 4 = 0,$ $\quad q : x - 2 = 0$

문제 35)

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라. 또 거짓인 것은 반례를 들어라.

(1) 모든 소수는 홀수이다.

(2) 전체집합 $U = \{1, 2, 5, 10\}$에 대하여 어떤 x는 짝수이다.

답

문제 3)

(1) 명제이다, 참.

(2) 명제이다, 거짓.

(3) 명제가 아니다.

(4) 명제가 아니다.

문제 6)

(1) 가정 : $x = 2$ 이다., 결론 : $2x + 3 = 7$ 이다.

(2) 가정 : 두 수 a, b 가 짝수이다, 결론 : $a + b$ 가 짝수이다.

(3) 가정 : 두 삼각형이 서로 닮음이다., 결론 : 두 삼각형의 넓이가 서로 같다.

문제 8)

(1) 두 변의 길이가 같은 삼각형

(2) 평면 위의 한 점으로부터의 거리가 일정한 모든 점들의 집합

(3) 한 각이 직각인 삼각형

(4) 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행이 사각형

문제 10)
정리, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이다., 증명

문제 13)

(1) $\{2, 4, 6\}$ (2) $\{1, 5\}$
(3) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (4) $\{1, 2, 4\}$

문제 17)

(1) 6은 합성수가 아니다. (2) $0 \notin \varnothing$
(3) x는 3의 배수가 아니다. (4) $x - 1 < 0$

문제 19)

(1) x는 홀수가 아니다, $\{2,4,6\}$ (2) $x<3$, $\{1,2\}$

(3) $(x-1)(x-4)\neq 0$, $\{2,3,5,6\}$ (4) $x^2>4$, $\{3,4,5,6\}$

문제 24)

(1) 참 (2) 거짓

(3) 참 (4) 거짓

문제 28)

(1) 참 (2) 거짓

문제 32)

(1) '어떤 정사각형은 마름모가 아니다.', 거짓

(2) '모든 정수는 자연수가 아니다.', 거짓

(3) '어떤 실수 x에 대하여 $|x-1|\leq 0$이다.', 참

(4) '모든 실수 x에 대하여 $x^2\neq x$이다.', 거짓

문제 33)

(1) 명제가 아니다. (2) 명제이다, 참

문제 34)

(1) 참 (2) 거짓

문제 35)

(1) 거짓, 반례는 2 (2) 참