준영 : 06 수열(4)

2016년 11월 12일

차 례

1 수열의 귀납적 정의(1)

예시 1)

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad \cdots$$

는 일반항 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$로 나타내기도 하지만 첫째항 1부터 차례로 일정한 수 2를 더해서 얻어지는 수열이므로

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

와 같이 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계식을 이용하여 수열을 정의하기도 한다.

정의 2) 수열의 귀납적 정의

일반적으로 a_1의 값과 a_n에서 a_{n+1}을 구할 수 있는 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이 정해진다. 이와 같이 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다. 이때, 이웃하는 항들 사이의 관계식을 **점화식**이라고 한다.

예시 3)

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 4항을 구하면

$n = 1$을 대입 : $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$n = 2$을 대입 : $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$n = 3$을 대입 : $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제4항은 15이다.

문제 4)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라.

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

문제 5)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라.

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

문제 6)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_5 + a_{10}$의 값을 구하여라.

(1) $a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

(2) $a_1 = 1,\ \ a_2 = 2,\ \ a_{n+2} = a_n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

위 문제에서 (1)의 수열은 **피보나치 수열**이라고 불린다.

예시 7)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 5,\ \ a_{n+1} = a_n + 8\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$a_{n+1} - a_n = 8$ 에서 공차가 8 인 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 5$ 이므로

$$a_n = 5 + (n-1)8 = 8n - 3$$

답 : $a_n = 8n - 3$

(2) $a_1 = 2,\ \ a_2 = 6,\ \ 2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이다. 따라서 인접한 세 항은 등차수열을 이루고, 전체 수열도 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 2$ 이고 공차는 $d = a_2 - a_1 = 4$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1)4 = 4n - 2$$

답 : $a_n = 4n - 2$

(3) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 2a_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 에서 공비가 2 인 등비수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 1$ 이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

답 : $a_n = 2^{n-1}$

(4) $a_1 = 4,\ \ a_2 = 6,\ \ {a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항이다. 따라서 인접한 세 항은 등차수열을 이루고, 전체 수열도 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 4$ 이고 공차는 $d = a_2 \div a_1 = \frac{3}{2}$ 이므로

$$a_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

답 : $a_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

문제 8)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} - a_n = 5 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

(2) $a_1 = 4, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_{n+2} + a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

(3) $a_1 = 4, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

(4) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

2 수열의 귀납적 정의(2)

예시 9)

문제 5의 (1), (2), (3)의 일반항을 구해보자.

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + n$

점화식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 나열하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1 \\ a_3 &= a_2 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + (n-1) \end{aligned}$$

이다. 이 식들을 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 3 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 6}{2} \end{aligned}$$

이다.

답 : $a_n = \frac{n^2-n+6}{2}$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$

점화식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 나열하면

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \tfrac{3}{1} a_1 \\
a_3 &= \tfrac{4}{2} a_2 \\
a_4 &= \tfrac{5}{3} a_3 \\
a_5 &= \tfrac{6}{4} a_3 \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= \tfrac{n}{n-2} a_{n-2} \\
a_n &= \tfrac{n+1}{n-1} a_{n-1}
\end{aligned}
$$

이다. 이 식들을 모두 곱하면

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 \times \tfrac{3}{1} \times \tfrac{4}{2} \times \tfrac{5}{3} \times \tfrac{6}{4} \times \cdots \times \tfrac{n}{n-2} \times \tfrac{n+1}{n-1} \\
&= a_1 \times \tfrac{n(n+1)}{1 \times 2} \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

이다.

답 : $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

주어진 점화식

$$a_{n+1} = 3a_n + 2$$

은

$$a_{n+1} + k = 3(a_n + k)$$

꼴로 만들 수 있다. 두 식을 비교해보면 $2k = 2$ 이므로 $k = 1$ 이고

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

이다. $b_n = a_n + 1$ 을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 을 생각하면

$$b_{n+1} = 3b_n$$

이므로 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이다. $b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ 이므로

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이고

$$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이다. 따라서

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

이다.

답 : $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

문제 10)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 4n$

답 : $a_n =$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2^n a_n$

답 : $a_n =$

(3) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$

답 : $a_n =$

3 수학적 귀납법

예시 11)

$1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ 이므로 다음을 추측할 수 있다.

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad (㉠)$$

하지만 이 사실만으로 모든 자연수 n에 대하여 식 ㉠이 성립한다고 할 수는 없다. 또한, 무한히 많은 자연수 n에 대해 일일이 성립하는지 확인해볼 수도 없을 것이다.

이제 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립함을 증명하는 방법을 알아보자.

[1] $n=1$일때 식 ㉠이 성립함을 보인다. 즉

$$(\text{좌변})=1, \quad (\text{우변})=1^2$$

이므로 식 ㉠은 $n=1$일 때 성립한다.

[2] $n=k$일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때도 식 ㉠이 성립함을 보인다. 즉

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

을 가정하고 이 식의 양변에 $2k+1$을 더하면. 그러면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

이다. 따라서 식 ㉠은 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

*[1]*에서 $n=1$일 때, 식 ㉠이 성립함을 보였으므로 위에서 증명한 사실 *[2]* 로부터

$n=1$일 때 식 ㉠이 성립하므로 $n=2$일 때 식 ㉠이 성립한다.
$n=2$일 때 식 ㉠이 성립하므로 $n=3$일 때 식 ㉠이 성립한다.
$n=3$일 때 식 ㉠이 성립하므로 $n=4$일 때 식 ㉠이 성립한다.

$$\vdots$$

따라서 *[1]*, *[2]*가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 식 ㉠이 성립함을 알 수 있다.

자연수에 대한 어떤 명제가 성립함을 보일 때, 위와 같은 방법으로 증명하는 것을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

정리 12) 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

[1] $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

[2] $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 $p(n)$이 성립한다.

예시 13)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (㉠)$$

[1] $n=1$이면

$$(\text{좌변})=1^2=1, \quad (\text{우변})=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$$

이므로 식 ㉠은 $n=1$일 때 성립한다.

[2] $n=k$일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

을 가정하자. $n=k+1$일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k+1}{6}\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

[1], *[2]*에서 모든 자연수에 대해 식 ㉠이 성립한다.

문제 14)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (㉠)$$

문제 15)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad (㉠)$$

예시 16)

$h>0$ 이고 n 이 2 이상의 자연수일 때, 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$(1+h)^n > 1+nh \qquad (㉠)$$

[1] $n=2$ 이면

$$(\text{좌변}) = (1+h)^2 = h^2+2h+1, \quad (\text{우변}) = 1+2h$$

에서

$$h^2+2h+1 > 1+2h$$

이므로 식 ㉠은 $n=2$ 일 때 성립한다.

[2] $n=k$ 일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$(1+h)^k > 1+kh$$

을 가정하자. $n=k+1$ 일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $(1+h)$ 를 곱하면

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &> (1+kh)(1+h)\\ &= 1+(k+1)h+kh^2\\ &> 1+(k+1)h\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

[1], *[2]*에서 식 ㉠은 2이상의 자연수 n 에 대하여 성립한다.

문제 17)

5 이상의 자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$2^n > n^2 \qquad (㉠)$$

4 보충 · 심화 문제

문제 18)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 10항을 구하여라.

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n$

문제 19)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 20항을 구하여라.

(1) $a_1 = 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$

문제 20)

1시간마다 2개가 죽고, 나머지는 각각 2개로 분열하는 세포가 있다. 처음 5개의 세포가 n시간 후에 남아있는 개수를 a_n 이라고 할 때, 다음 중 옳은것은?

① $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$
② $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$
③ $a_{n+2} + 1 = 2(a_n + 2)$
④ $a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2)$
⑤ $a_{n+1} - 4 = 2(a_n - 4)$

문제 21)

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 6n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 를 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하여라.

문제 22)

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 를 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하여라.

문제 23)

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3^n a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) a_n 을 구하여라.

(2) 3^{55} 는 제 몇 항인가?

문제 24)

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 를 만족할 때 a_n 을 구하여라.

문제 25)

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 를 만족할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) a_n 을 구하여라.

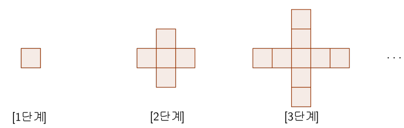
(2) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 을 구하여라.

문제 26)

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_3 = 63,\ a_{n+1} = 4a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 를 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하여라.

문제 27)

아래 그림과 같이 정사각형을 이용하여 십자 모양의 도형을 만들려고 한다. n단계를 만드는 데 필요한 정사각형의 개수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



(1) a_1의 값을 구하여라.

(2) a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구하여라.

(3) a_n을 구하여라.

문제 28)

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n=2^{n+1}-2$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

[1] $n=\boxed{(\text{가})}$ 일 때

$$(\text{좌변})=\boxed{(\text{나})},\quad (\text{우변})=\boxed{(\text{나})}$$

이므로 주어진 등식은 $n=\boxed{(\text{가})}$ 일 때 성립한다.

[2] $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$2+2^2+\cdots+2^k=2^{k+1}-2$$

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}2+2^2+\cdots+2^k+\boxed{(\text{다})}&=2^{k+1}-2+\boxed{(\text{다})}\\&=\boxed{(\text{라})}\end{aligned}$$

이므로 주어진 등식은 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서, *[1]*, *[2]*로부터 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 써넣어라.

문제 29)

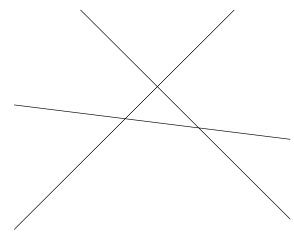
모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

문제 30)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

문제 32)



평면 위에 n개의 직선이 있다. 이 중 어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 같은 점을 지나지 않는다. 이 n개의 직선에 의하여 나누어지는 영역의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어 오른쪽 그림에서 $a_3 = 7$이다. 다음 물음에 답하여라.

(1) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

(2) a_7의 값을 구하여라.

답

문제 4)

(1) 14

(2) $\frac{1}{8}$

문제 5)

(1) 13

(2) 15

(3) 161

문제 6)

(1) 60

(2) 9

문제 8)

(1) $a_n = 5n - 4$

(2) $a_n = -2n + 6$

(3) $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

(4) $a_n = 3^{n-2}$

문제 10)

(1) $a_n = 2n^2 - 2n + 1$

(2) $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(3) $a_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$

문제 14)

[1] $n = 1$ 이면

$$(\text{좌변}) = 1, \quad (\text{우변}) = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

이므로 식 ㉠은 $n = 1$ 일 때 성립한다.

[2] $n = k$ 일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

을 가정하자. $n = k+1$ 일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $k+1$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

*[1], [2]*에서 모든 자연수에 대해 식 ㉠이 성립한다.

문제 15)

[1] $n = 1$ 이면

$$(\text{좌변}) = 1\cdot 2 = 2, \quad (\text{우변}) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 2$$

이므로 식 ㉠은 $n = 1$ 일 때 성립한다.

[2] $n = k$ 일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

을 가정하자. $n = k+1$ 일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $(k+1)(k+2)$ 을 더하면

$$\begin{aligned} &1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2) \\ =&\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2) \\ =&\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

*[1], [2]*에서 모든 자연수에 대해 식 ㉠이 성립한다.

문제 17)

[1] $n=5$ 이면

$$(\text{좌변}) = 2^5 = 32, \quad (\text{우변}) = 5^2 = 25$$

이므로 식 ㉠은 $n=5$ 일 때 성립한다.

[2] $n=k$ 일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$2^k > k^2 \qquad (㉡)$$

을 가정하자. k 는 5 이상의 자연수이므로

$$k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0 \qquad (㉢)$$

이다. 따라서

$$2k^2 > (k+1)^2$$

이다. 이제 $n=k+1$ 일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 ㉡의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

이다. 여기에 ㉢를 적용하면

$$2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

[1], *[2]*에서 식 ㉠은 5 이상의 자연수 n 에 대하여 성립한다.

문제 18)
(1) 39
(2) 512

문제 19)
(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$
(2) $\frac{1}{210}$

문제 20)
⑤

문제 21)

$a_n = 3n^2 - 3n + 2$

문제 22)

$a_n = 2^n + 1$

문제 23)

(1) $a_n = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(2) 제 10 항

문제 24)

$a_n = \frac{1}{n}$

문제 25)

(1) $a_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$

(2) $S_n = 3^n - (n+1)$

문제 26)

$a_n = 4^n - 1$

문제 27)

(1) 1

(2) $a_{n+1} = a_n + 4$

(3) $a_n = 4n - 3$

문제 28)

(가) 1

(나) 2

(다) 2^{k+1}

(라) $2^{k+2} - 2$

문제 29)

[1] $n = 1$ 이면 $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$ 은 6의 배수이므로 식 ㉠은 $n = 1$ 일 때 $n^3 + 5n$ 은 6의 배수이다.

[2] $n = k$ 일때 $n^3 + 5n$ 이 6의 배수라고 가정하자. 즉 $k^3 + 5k$ 가 6의 배수라고 가정하자. $n = k + 1$ 일때에 $n^3 + 5n$ 이 6의 배수라는 것을 보이기 위해 n 대신 $k + 1$ 를 대입한 $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$ 을 정리하면

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + 5(k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5k + 5) \\ &= (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6\end{aligned}$$

이다. 인접한 두 자연수의 곱인 $k(k+1)$ 은 2의 배수이므로 따라서 $3k(k+1)$ 은 6의 배수이다. 따라서 $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$ 도 6의 배수이다.

[1], *[2]*에서 모든 자연수 n 에 대해 $n^3 + 5n$ 은 6의 배수이다.

문제 30)

[1] $n = 1$ 이면

$$(\text{좌변}) = 1 \cdot 2 = 2, \quad (\text{우변}) = (1 - 1) \cdot 2^{1+1} + 2 = 2$$

이므로 주어진 식은 $n = 1$ 일 때 성립한다.

[2] $n = k$ 일때 주어진 식이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = (k - 1)2^{k+1} + 2$$

을 가정하자. $n = k + 1$ 일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $(k + 1)2^{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + (k + 1)2^{k+1} \\ =&(k - 1)2^{k+1} + 2 + (k + 1)2^{k+1} \\ =&2k \cdot 2^{k+1} + 2 \\ =&k \cdot 2^{k+2} + 2\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

[1], *[2]*에서 모든 자연수에 대해 식 ㉠이 성립한다.

문제 31)

(1) $a_{n+1} = a_n + (n+1)$

(2) 29