

# 영석 : 09 기말고사(1학년 1학기) 개념 요약

June 20, 2015

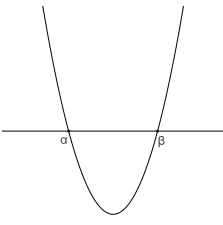
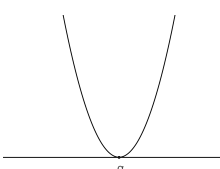
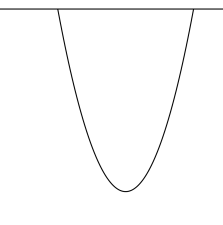
## Contents

1	여러 가지 부등식	2
2	평면좌표	5
3	직선의 방정식	8
4	원의 방정식(1)	18
5	원의 방정식(2)	24
6	도형의 이동	30
7	부등식의 영역	34

# 1 여러 가지 부등식

## 요약 1)

- 부등식의 양변에 같은 값을 더하거나 빼더라도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.
- 부등식의 양변에 같은 값을 곱하거나 나눌 때에는, 곱하거나 나누는 수가 양수이면 부등호의 방향이 바뀌지 않고, 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.
- 양수  $a$ 에 대해,
  - $|x| < a$ 이면  $-a < x < a$ 이다.
  - $|x| > a$ 이면  $x < -a$  또는  $x > a$ 이다.
- 이차부등식의 해는 다음과 같이 구한다( $a > 0$ ).

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프			
$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해	$x < \alpha$ 또는 $x > \beta$	$x \neq \alpha$ 인 모든 실수	모든 실수
$ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해	$x \leq \alpha$ 또는 $x \geq \beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해	$\alpha < x < \beta$	없다.	없다.
$ax^2 + bx + c \leq 0$ 의 해	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x = \alpha$	없다.

## 예제 2)

다음 부등식을 풀어라.

- $3x < 9$
- $6 - 3x \geq 2(x + 1)$

## 풀이)

- 양변을 3으로 나누면  $x < 3$ 이다.

(2) 우변을 전개하면  $6 - 3x \geq 2x + 2$  이고, 양변에서 6을 빼면 (6을 이항하면)  $-3x \geq 2x - 4$  이며, 다시 양변에서  $2x$ 를 빼면  $-5x \geq -4$ 가 된다. 마지막으로 양변을  $-5$ 로 나누면  $x \leq \frac{4}{5}$ 이다.

**문제 3)**

다음 부등식을 풀어라.

(1)  $3x - 2 < 13$

(2)  $x + 2 \geq -2x + 5$

답 : (1)  $x < 5$  (2)  $x \geq 1$

**예제 4)**

부등식  $|x - 2| < 3$ 을 풀어라.

**풀이)**

$-3 < x - 2 < 3$ 이 성립한다. 이는  $-3 < x - 2$ 와  $x - 2 < 3$ 이 성립한다는 뜻이다. 각각을 정리하면  $x > -1$ ,  $x < 5$ 가 되므로  $-1 < x < 5$ 이다.

**문제 5)**

다음 부등식을 풀어라.

(1)  $|x + 3| > 1$

(2)  $|3x + 2| < 4$

(3)  $|5 - 2x| \geq 7$

(4)  $|2x - 1| \leq 3x + 2$

답 : (1)  $x < -4$  또는  $x > -2$  (2)  $-2 < x < \frac{2}{3}$   
(3)  $x \leq -1$  또는  $x \geq 6$  (4)  $x \geq -\frac{1}{5}$

**예제 6)**

다음 이차부등식을 풀어라.

(1)  $x^2 - 2x - 3 > 0$

(2)  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

(3)  $x^2 + 2x + 2 \leq 0$

**풀이)**

(1)  $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) > 0$ 이므로  $y = x^2 - 2x - 3$ 은  $x$ 축과 두 점에서 만난다. 또  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ 이므로 만나는 두 점의  $x$ 좌표는  $-1$ 과

3이다. 따라서  $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프는 그림 1과 같이 나타난다. 그러므로  $x < -1$  또는  $x > 3$ 이다.

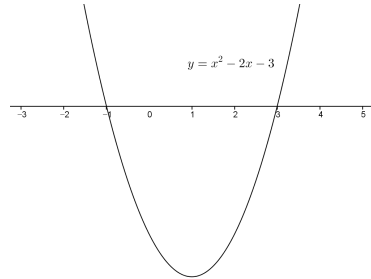


그림 1:  $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프

(2)  $D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ 이므로  $y = x^2 - 6x + 9$ 는  $x$ 축과 한 점에서 만난다(접한다). 또  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ 이므로 만나는 점의  $x$ 좌표는 3이다. 따라서  $y = x^2 - 6x + 9$ 의 그래프는 그림 2와 같이 나타난다. 그러므로 해는 모든 실수이다.

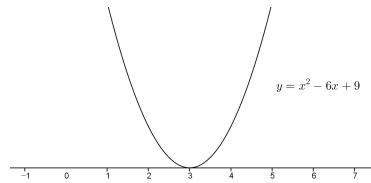


그림 2:  $y = x^2 - 6x + 9$ 의 그래프

(3)  $D = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 < 0$ 이므로  $y = x^2 + 2x + 2$ 는  $x$ 축과 만나지 않는다. 따라서  $y = x^2 + 2x + 2$ 의 그래프는 그림 3와 같이 나타난다. 그러므로 해는 없다.

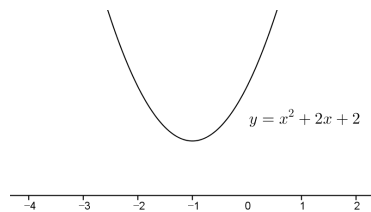


그림 3:  $y = x^2 + 2x + 2$ 의 그래프

문제 7)

다음 이차부등식을 풀어라.

- (1)  $x^2 - x - 2 < 0$
- (2)  $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$
- (3)  $-x^2 + 5x + 6 \geq 0$
- (4)  $2x^2 > 3x + 2$
- (5)  $x^2 - 2x + 1 > 0$
- (6)  $x^2 + 10x + 25 \leq 0$
- (7)  $-4x^2 + 4x - 1 \leq 0$
- (8)  $10x \geq x^2 + 25$
- (9)  $x^2 + 3x + 3 \leq 0$
- (10)  $x^2 + x + 2 > 0$
- (11)  $-2x^2 + 5x - 7 \leq 0$
- (12)  $x^2 < 4x - 5$

답 : (1)  $-1 < x < 2$  (2)  $x \leq \frac{1}{2}$  또는  $x \geq 1$   
(3)  $-1 \leq x \leq 6$  (4)  $x < -\frac{1}{2}$  또는  $x > 2$   
(5)  $x \neq 1$  (6)  $x = -5$   
(7) 모든 실수 (8)  $x = 5$   
(9) 해는 없다. (10) 모든 실수  
(11) 모든 실수 (12) 해는 없다.

## 2 평면좌표

요약 8)

1. 수직선 상의 두 점  $A(x_1), B(x_2)$  사이의 거리는  $|x_1 - x_2|$  이다.
2. 좌표 평면 위의 두 점  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  사이의 거리는  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  이다.
3. 수직선 상의 두 점  $A(x_1), B(x_2)$ 에 대해  $m : n$  내분점  $P$ 와 외분점  $Q$ 의 좌표는  $P = (\frac{mx_2 + nx_1}{m+n})$ ,  $Q = (\frac{mx_2 - nx_1}{m-n})$  이다.
4. 좌표평면 상의 두 점  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에 대한  $m : n$  내분점  $P$ 와 외분점  $Q$ 의 좌표는  $P = (\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n})$ ,  $Q = (\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n})$  이다.

5. 두 점  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  가 이루는 선분  $AB$ 의 중점  $M$ 의 좌표는  $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$  이다.
6. 세 점  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  가 이루는 삼각형  $ABC$ 의 무게중심  $G$ 의 좌표는  $G = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$  이다.

**예제 9)**

다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

- (1)  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 4)$   
 (2)  $A(-1, 2)$ ,  $B(11, 7)$

**풀이)**

- (1)  $\overline{AB} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{25} = 5$   
 (2)  $\overline{AB} = \sqrt{(-1-11)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{169} = 13$

**문제 10)**

다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

- (1)  $A(1, 3)$ ,  $B(-2, 4)$   
 (2)  $A(0, 0)$ ,  $B(1, -5)$   
 (3)  $A(2, 6)$ ,  $B(-1, -5)$   
 (4)  $A(3, -3)$ ,  $B(4, 4)$

답 : (1)  $\sqrt{10}$  (2)  $\sqrt{26}$  (3)  $\sqrt{130}$  (4)  $5\sqrt{2}$

**예제 11)**

세 점  $A(-2, 2)$ ,  $B(1, -4)$ ,  $C(4, 5)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형  $ABC$ 는 어떤 삼각형인지 말하여라.

**풀이)**

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}, \\ \overline{BC} &= \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}, \\ \overline{CA} &= \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

이므로  $\overline{AB} = \overline{CA}$ 이고  $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$ 이다. 따라서 삼각형  $ABC$ 는  $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

문제 12)

세 점  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, -3)$ ,  $C(-3, -1)$  을 꼭짓점으로 하는 삼각형  $ABC$  는 어떤 삼각형인지 말하여라.

답 :  $\angle C = 90^\circ$  인 직각삼각형

예제 13)

두 점  $A(5, 3)$ ,  $B(-2, 1)$  에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

- (1) 선분  $AB$  를 1 : 2 로 내분하는 점
- (2) 선분  $AB$  를 1 : 2 로 외분하는 점

풀이)

- (1) 내분점을  $P$  라고 하면  $P = (\frac{1 \times (-2) + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times 1 + 2 \times 3}{1+2}) = (\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$
- (2) 외분점을  $Q$  라고 하면  $Q = (\frac{1 \times (-2) - 2 \times 5}{1-2}, \frac{1 \times 1 - 2 \times 3}{1-2}) = (12, 5)$

문제 14)

다음 두 점  $A$ ,  $B$  에 대하여 선분  $AB$  를 4 : 3 으로 내분하는 점과 4 : 3 으로 외분하는 점의 좌표를 각각 구하여라.

- (1)  $A(1, 3)$ ,  $B(7, 8)$
- (2)  $A(-3, 6)$ ,  $B(5, -4)$

답 : (1) 내분하는 점 :  $(\frac{31}{7}, \frac{41}{7})$ , 외분하는 점 :  $(25, 23)$   
(2) 내분하는 점 :  $(\frac{11}{7}, \frac{2}{7})$ , 외분하는 점 :  $(29, -34)$

예제 15)

세 점  $A(-3, 5)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(2, -2)$  를 꼭짓점으로 하는 삼각형  $ABC$  의 무게중심의 좌표를 구하여라.

풀이)

무게중심을  $G$  라고 하면  $G = (\frac{(-3)+1+2}{3}, \frac{5+4+(-2)}{3}) = (0, \frac{7}{3})$  이다.

문제 16)

삼각형  $ABC$  의 두 꼭짓점이  $A(-2, 4)$ ,  $B(3, 6)$  이고 무게중심이  $G(1, 2)$  일 때, 꼭짓점  $C$  의 좌표를 구하여라.

답 :  $C = (2, -4)$

### 3 직선의 방정식

#### 요약 17)

1.  $y = mx + n$ 은 기울기가  $m$ 이고  $y$ 절편이  $n$ 인 직선이다. 하지만 평면 위의 모든 직선이  $y = mx + n$ 꼴로 표현될 수는 없다.  $y$ 축에 평행한 직선인  $x = 1$ 은  $y = mx + n$ 꼴로 표현할 수 없기 때문이다. 따라서  $ax + by + c = 0$ 으로 직선을 표시하면 모든 형태의 직선의 방정식을 포괄할 수 있다.
2. 기울기가  $m$ 이고 한 점  $(x_1, y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식은  $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이다.
3.  $x_1 \neq x_2$ 일 때, 두 점  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 을 지나는 직선의 방정식은  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ 이다.
4. 두 직선  $y = mx + n$ 과  $y = m'x + n'$ 에 대해
  - (a)  $m = m', n = n'$ 이면 두 직선은 일치한다.
  - (b)  $m = m', n \neq n'$ 이면 두 직선은 평행하다.
  - (c)  $m \neq m'$ 이면 두 직선은 한 점에서 만난다.
  - (d)  $mm' = -1$ 이면 두 직선은 서로 수직이다.
5. 두 직선 사이의 교점은 두 직선의 방정식을 연립함으로써 얻어진다.
6. 점  $A(x_1, y_1)$ 와 직선  $l : ax + by + c = 0$  사이의 거리는  $A$ 에서  $l$ 에 그은 수선의 길이로 정의하며(그림 4), 그 값  $d$ 는 다음과 같다.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

#### 예제 18)

다음의 직선의 방정식을 좌표평면 위에 나타내어라.

- (1)  $y = x - 3$
- (2)  $x + 3y - 9 = 0$
- (3)  $2y + 6 = 0$
- (4)  $x - 7 = 0$



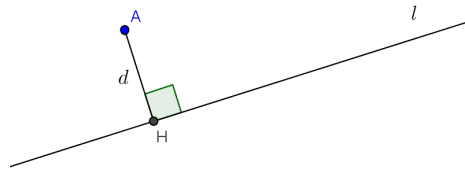


그림 4: 점과 직선 사이의 거리

풀이)

(1) 기울기가 1 이고  $y$  절편이  $-3$  이다. 기울기가 1 이므로  $x$  가 1 만큼 증가할 때마다  $y$  도 1 만큼 증가한다. 그리고  $y$  절편이  $-3$  이므로  $(0, -3)$  을 지난다. 따라서 그림 5와 같은 그래프가 그려진다.

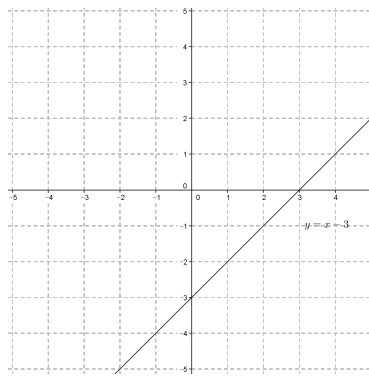


그림 5:  $y = x - 3$  의 그래프

(2) 주어진 식을  $y = mx + n$  의 형태로 고치면  $y = -\frac{1}{3}x + 3$  이 된다. 기울기가  $-\frac{1}{3}$  이므로  $x$  가 3 만큼 증가할 때마다  $y$  는 1 만큼 감소한다. 그리고  $y$  절편이 3 이므로  $(0, 3)$  을 지난다. 따라서 그림 6과 같은 그래프가 그려진다.

(3) 주어진 식을 변형하면  $y = -3$  이 되고 이것은  $y = 0x - 3$  이라고 생각할 수 있다. 기울기가 0 이므로  $x$  가 증가하더라도  $y$  는 변화하지 않는다. 그리고  $y$  절편이  $-3$  이므로  $(0, -3)$  을 지난다. 따라서 그림 7과 같은 그래프가 그려진다.

사실, 주어진 식이  $y = -3$  이므로  $y$  좌표가  $-3$  인 모든 점들을 찍어 표시하라는 의미이다. 그런 의미에서 그림 7에 그려진 직선은 잘 그려졌다고 볼 수 있다.

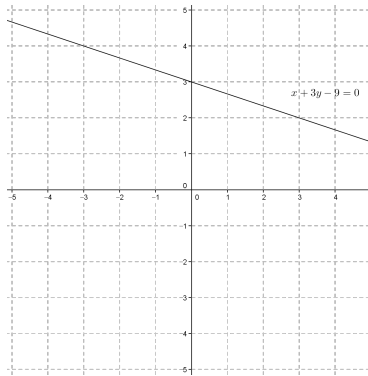


그림 6:  $x + 3y - 9 = 0$ 의 그래프

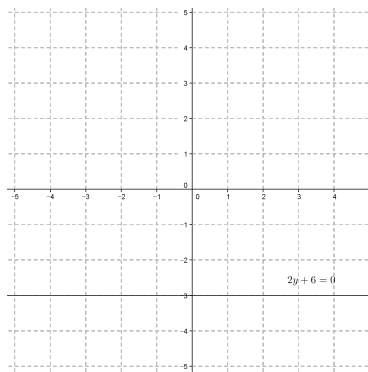


그림 7:  $2y + 6 = 0$ 의 그래프

(4) 이번에는 주어진 식을 변형해  $y = mx + n$  꼴로 나타내는 것이 불가능하다. 하지만 주어진 식이  $x = 7$  이므로  $x$  좌표가 7인 모든 점들을 찍어 표시하라는 의미이다. 따라서 그림 8과 같이 그래프가 그려진다.

#### 문제 19)

다음 직선의 방정식을 좌표평면 위에 나타내어라.

- (1)  $y = 2x + 1$
- (2)  $y = -3x$
- (3)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- (4)  $y = -\frac{3}{2}x + 2$
- (5)  $x + y + 1 = 0$
- (6)  $2x - 4y - 8 = 0$

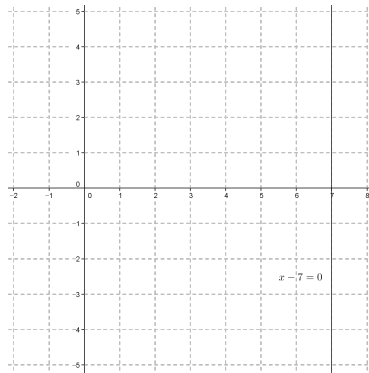


그림 8:  $x - 7 = 0$ 의 그래프

(7)  $3x - 5 = 0$

(8)  $2y - 2 = 0$

답 : 생략

예제 20)

점  $(4, 1)$ 을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이)

공식  $y - y_1 = m(x - x_1)$ 에  $m = 3$ ,  $(x_1, y_1) = (4, 1)$ 을 대입하면  $y - 1 = 3(x - 4)$ 이다. 이것을 보기 좋게 정리하면  $y = 3x - 11$ 이 된다. 그래프를 그리면 그림 9과 같이 나타나며, 점  $(4, 1)$ 을 지나는 것을 확인할 수 있다.

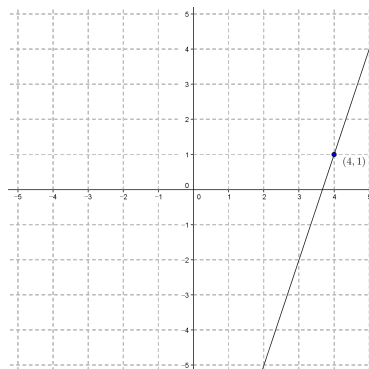


그림 9: 기울기가 3이고  $(4, 1)$ 을 지나는 직선

문제 21)

다음 직선의 방정식을 구하여라.

- (1) 원점을 지나고 기울기가  $-2$  인 직선
- (2) 점  $(3, 5)$  를 지나고 기울기가  $3$  인 직선
- (3)  $x$  절편이  $-4$  이고 기울기가  $2$  인 직선
- (4) 점  $(-2, 1)$  을 지나고  $x$  축에 평행한 직선
- (5) 점  $(5, -6)$  을 지나고  $y$  축에 평행한 직선

답 : (1)  $y = -2x$  (2)  $y = 3x - 14$  (3)  $y = 2x + 8$  (4)  $y = 1$  (5)  $x = 5$

예제 22)

다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

- (1)  $(3, -2)$ ,  $(1, 4)$
- (2)  $(2, -3)$ ,  $(2, 5)$

풀이)

(1) 공식  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$  에  $(x_1, y_1) = (3, -2)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 4)$  를 대입하면  $y - (-2) = \frac{4 - (-2)}{1 - 3}(x - 3)$  이다. 따라서  $y + 2 = -3(x - 3)$  이고  $y = 3x + 7$  이다(그림 10).

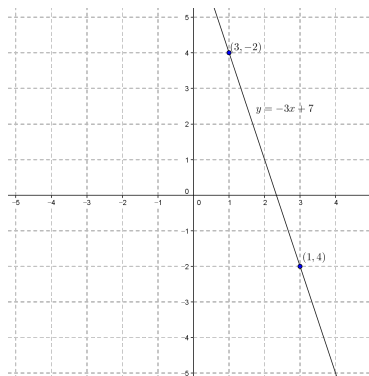


그림 10:  $(3, -2)$ ,  $(1, 4)$  를 지나는 직선

(2) 이 경우에는 (1) 번에서 사용한 공식을 쓸 수 없다.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2$  이므로 기울기의 분모가  $0$  이 되기 때문이다. 하지만 좌표평면에 두 점을 찍고 두 점을 지나는 직선을 생각해보면 이 직선은  $x = 2$  가 되어야 함을 쉽게 알 수 있다.

문제 23)

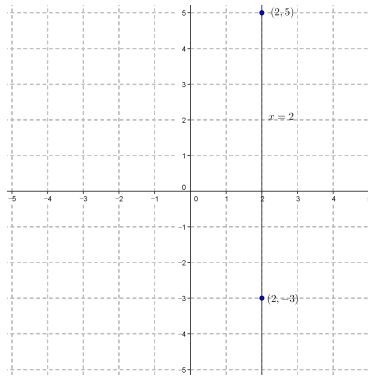


그림 11:  $(2, -3)$ ,  $(2, 5)$ 를 지나는 직선

다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

- (1)  $(-1, 6)$ ,  $(3, 2)$
- (2)  $(0, -3)$ ,  $(2, 0)$
- (3)  $(4, -1)$ ,  $(3, -1)$
- (4)  $(-2, 5)$ ,  $(-2, 4)$

답 : (1)  $y = -x + 5$  (2)  $y = \frac{3}{2}x - 3$  (3)  $y = -1$  (4)  $x = -2$

#### 예제 24)

다음 직선의 방정식을 구하여라.

- (1)  $(4, 2)$ 를 지나고 직선  $y = 2x - 3$ 에 평행한 직선
- (2)  $(3, -2)$ 를 지나고 직선  $3x - y + 2 = 0$ 에 수직인 직선

#### 풀이)

(1) 주어진 직선의 기울기가 2이므로 새로 구하려는 직선의 기울기도 2이다. 기울기가 2이고  $(4, 2)$ 를 지나는 직선이므로  $y - 2 = 2(x - 4)$ 이다. 이를 정리하면  $y = 2x - 6$ 이 된다(그림 12).

(2) 주어진 식을 정리하면  $y = 3x + 2$ 가 되므로 주어진 직선의 기울기는 3이다. 새로 구하려는 직선의 기울기를  $m$ 이라고 하면  $3 \times m = -1$ 이므로  $m = -\frac{1}{3}$ 이다. (혹은, 3에 역수를 취한  $\frac{1}{3}$ 에 마이너스를 붙인  $-\frac{1}{3}$ 이 새로 구할 직선의 기울기라고 해도 된다.) 기울기가  $-\frac{1}{3}$ 이고  $(3, -2)$ 를 지나는 직선이므로  $y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 3)$ 이다. 이를 정리하면  $y = -\frac{1}{3}x - 1$ 이 된다(그림 13).

#### 문제 25)

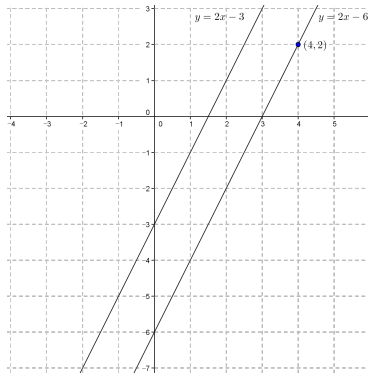


그림 12:  $y = 2x - 3$ 에 평행하고  $(4, 2)$ 를 지나는 직선

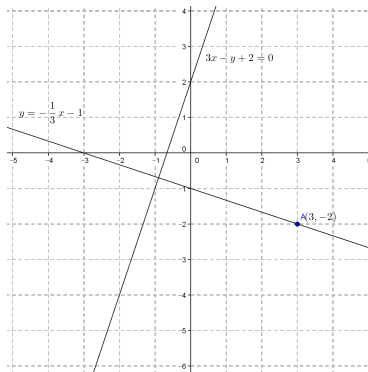


그림 13:  $3x - y + 2 = 0$ 에 수직하고  $(3, -2)$ 를 지나는 직선

점  $(3, -4)$ 를 지나고 다음 직선에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

- (1)  $y = 2x - 1$
- (2)  $2x + 3y = 5$
- (3)  $y - 3 = 0$
- (4)  $x + 5 = 0$

답 : (1)  $y = 2x - 10$  (2)  $y = -\frac{2}{3}x - 2$  (3)  $y = -4$  (4)  $x = 3$

#### 문제 26)

점  $(1, -4)$ 를 지나고 다음 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

- (1)  $y = 5x - 3$
- (2)  $x + 3y - 2 = 0$

답 : (1)  $y = -\frac{1}{5}x - \frac{19}{5}$  (2)  $y = 3x - 7$

**예제 27)**

두 직선  $x - y + 2 = 0$  과  $3x + y - 6 = 0$  사이의 교점을 구하여라.

**풀이)**

두 식을 변형하면  $x - y = -2$ ,  $3x + y = 6$  이다. 두 식을 서로 더하면  $4x = 4$  이고 따라서  $x = 1$  이다.  $x = 1$  을 첫번째 식에 대입하면  $1 - y + 2 = 0$  이 되어  $y = 3$  이다. 따라서  $(1, 3)$  이 구하려는 교점이다.

실제로 두 그래프를 그려보면 교점이  $(1, 3)$  이라는 것을 알 수 있다(그림 14).

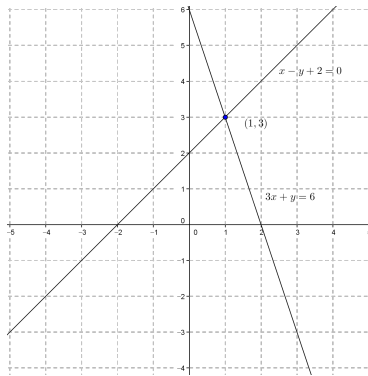


그림 14:  $x - y + 2 = 0$  과  $3x + y - 6 = 0$  사이의 교점

**문제 28)**

두 직선  $2x + y - 3 = 0$ ,  $x - 2y - 4 = 0$  의 교점을 구하고, 이 교점과 점  $(3, 0)$  을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

답 :  $x - y - 3 = 0$

**예제 29)**

다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) 점  $(-2, 1)$ , 직선  $3x + 4y + 12 = 0$

(2) 원점, 직선  $y = x + 1$

**풀이)**

(1) 공식  $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  에  $a = 3, b = 4, c = 12, (x_1, y_1) = (-2, 1)$  을 대입하면

$$d = \frac{|3 \times (-2) + 4 \times 1 + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

이다(그림 15).

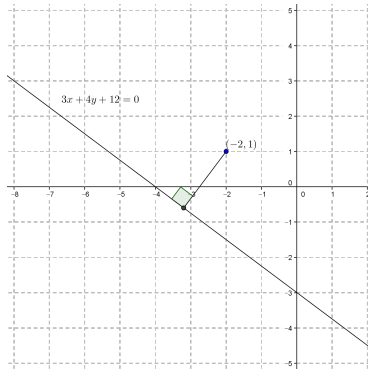


그림 15:  $(-2, 1)$  에서  $3x + 4y + 12 = 0$  까지의 거리

(2) 공식에 대입하기 전에 주어진 직선을  $ax+by+c = 0$  꼴로 고치면  $x-y+1 = 0$  이므로  $a = 1, b = -1, c = 1$  이다. 또  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  이므로

$$d = \frac{|1 \times 0 + (-1) \times 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다(그림 16).

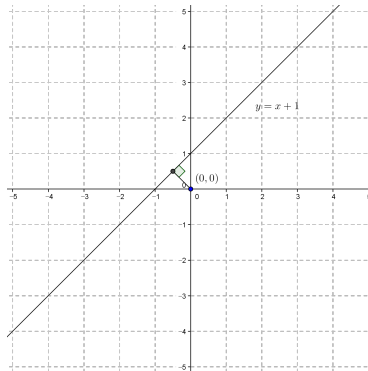


그림 16:  $(0, 0)$  에서  $y = x + 1$  까지의 거리

문제 30)



다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) 점  $(4, 1)$ , 직선  $5x - 12y - 2 = 0$

(2) 원점, 직선  $2x - 3y + 13 = 0$

답 : (1)  $\frac{6}{13}$  (2)  $\sqrt{13}$

### 예제 31)

직선  $3x + 4y + 1$ 에 평행하고 점  $(3, -2)$ 까지의 거리가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이)

주어진 직선의 기울기가  $-\frac{3}{4}$ 이므로 새로 구할 직선의 방정식도  $-\frac{3}{4}$ 이다. 따라서 새로 구할 직선의 방정식을  $y = -\frac{3}{4}x + k$ 라고 놓자. 이 식을 변형하면  $3x + 4y - 4k = 0$ 이 된다. 이제 주어진 조건을 사용하면 ( $a = 3, b = 4, c = -4k, (x_1, y_1) = (3, -2)$ )

$$2 = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 3 + 4 \times (-2) - 4k|}{\sqrt{25}} = \frac{|1 - 4k|}{5}$$

이다. 따라서  $|1 - 4k| = 10$ 이고  $1 - 4k = \pm 10$ 이다.

$1 - 4k = 10$ 이면  $k = -\frac{9}{4}$ 이고 이 때의 답은  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$ 이다.

$1 - 4k = -10$ 이면  $k = \frac{11}{4}$ 이다 이 때의 답은  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ 이다.

### 문제 32)

직선  $y = 2x + 1$ 에 평행하고 원점까지의 거리가  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 인 직선의 방정식을 구하여라.

답 :  $y = 2x + 2$  또는  $y = 2x - 2$

### 예제 33)

원점과  $x + y + c = 0$  사이의 거리가  $\sqrt{2}$ 일 때, 실수  $c$ 의 값을 구하여라.

풀이)

공식에 그대로 대입하면

$$\sqrt{2} = d = \frac{1 \times 0 + 1 \times 0 + c}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{2}}$$

이므로  $|c| = 2$ 이다. 따라서  $c = \pm 2$ 이다.

$c = 2$ 이면 답은  $x + y + 2 = 0$ 이고  $c = -2$ 이면 답은  $x + y - 2 = 0$ 이다.

문제 34)

점  $(-3, 4)$ 와 직선  $y = mx - 5$  사이의 거리가  $3\sqrt{5}$  일 때, 실수  $m$ 의 값을 구하여라.

답 :  $m = -\frac{1}{2}$  또는  $m = 2$

## 4 원의 방정식 (1)

요약 35)

1. 중심이  $C(a, b)$ 이고 반지름이  $r$ 인 원의 방정식은  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이다.

요약 36) 원과 직선 사이의 위치관계

1. 직선과 원의 교점은 최대 두 개까지 존재할 수 있다. 교점이 2개면 이 직선을 할선이라고 부른다, 교점이 1개면 이 직선을 접선이라고 부르며, 이때의 교점을 접점이라고 부른다.
2. 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 과 직선  $ax + by + c = 0$ 의 교점의 개수는 다음 두 방법을 사용해 판별할 수 있다(그림 20).
  - (a) 판별식을 이용하는 방법 : 두 도형 사이의 교점의 갯수는 두 식으로 만들어지는 연립방정식의 해의 갯수와 같으므로, 두 식을 연립하여 푼다. 연립할 때에 나타나는 이차방정식에서 (1)  $D > 0$ 이면 교점의 갯수가 두 개이고, (2)  $D = 0$ 이면 교점의 갯수가 한 개이며, (3)  $D < 0$ 이면 교점이 없다.
  - (b) 점과 직선사이의 거리를 이용하는 방법 : 원의 중심과 직선사이의 거리를  $d$ 라고 하자. (1)  $d < r$ 이면 교점의 갯수가 두 개이고, (2)  $d = r$ 이면 교점의 갯수가 한 개이며, (3)  $d < r$ 이면 교점이 없다.

요약 37)

1. 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은  $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 이다.

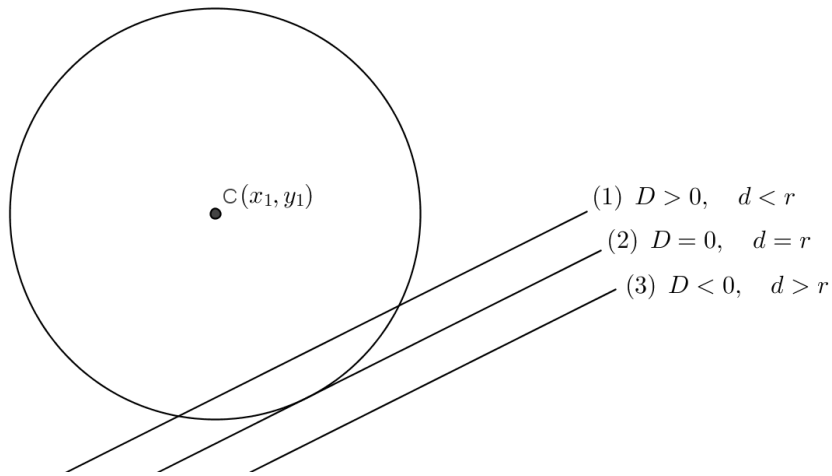


그림 17: 원과 직선 사이의 위치 관계

2. 원  $x^2 + y^2 = r^2$  위의 점  $(x_1, y_1)$  에서 그은 접선의 방정식은  $x_1x + y_1y = r^2$  이다.

**예제 38)**

방정식  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$  이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

**풀이)**

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 11 - 5 &= 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

이므로 원의 중심은  $(1, 2)$  이고 반지름의 길이는 4 이다.

**문제 39)**

다음 방정식이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

- (1)  $x^2 + y^2 - 10x = 0$
- (2)  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$

$$(3) x^2 + y^2 - 6x + 3 = 0$$

$$(4) x^2 + y^2 + 4x + 12y + 36 = 0$$

답 : (1) 중심 : (5, 0), 반지름의 길이 : 5

(2) 중심 : (-4, 1), 반지름의 길이 : 3

(3) 중심 : (3, 0), 반지름의 길이 :  $\sqrt{6}$

(4) 중심 : (-2, -6), 반지름의 길이 : 2

#### 예제 40)

세 점  $A(1, -1)$ ,  $B(0, 6)$ ,  $C(2, 2)$  를 지나는 원의 방정식을 구하여라.

풀이)

구하는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

이라고 놓으면 세 점이 원 위에 있다는 조건으로부터

$$1^2 + (-1)^2 + A - B + C = 0$$

$$0^2 + 6^2 + 0 + 6B + C = 0$$

$$2^2 + 2^2 + 2A + 2B + C = 0$$

이다. 혹은

$$A - B + C = -2 \quad (1)$$

$$6B + C = -36 \quad (2)$$

$$2A + 2B + C = -8 \quad (3)$$

이다. (3) - (1)  $\times 2$  을 하면

$$4B - C = -4 \quad (4)$$

이 되고, 다시 (2) + (4) 를 하면

$$10B = -40$$

이므로  $B = -4$  이다. (2) 에 대입하면  $C = -12$  이고, 다시 (1) 에 대입하면  $A = 6$  이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

이다(그림 18).

(다른 방식의 풀이) 구하려는 원의 중심을  $P(a, b)$  라고 놓으면  $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$ 가 성립해야 하므로  $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$  으로부터

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-6)^2 \quad (5)$$

을 얻고,  $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$  으로부터

$$a^2 + (b-6)^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 \quad (6)$$

을 얻는다. (5) 번 식을 정리하면

$$2a - 14b = -34 \quad (7)$$

이고, (6) 번 식을 정리하면

$$4a - 8b = -28 \quad (8)$$

이다. 이들을 더 정리하면

$$a - 7b = -17 \quad (9)$$

$$a - 2b = -7 \quad (10)$$

이다. (10) - (9) 에서

$$5b = 10$$

이 되어  $b = 2$  이고, (10) 에 다시 대입하면  $a = -3$  이다. 즉 구하려는 원의 중심은  $(-3, 2)$  이다. 한편 반지름의 길이는  $\overline{AP}$  와 같은데

$$\overline{AP} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

이므로 반지름의 길이는 5 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

이다. 이것은 아까 구한 원의 방정식과 정확히 일치한다.

문제 41)

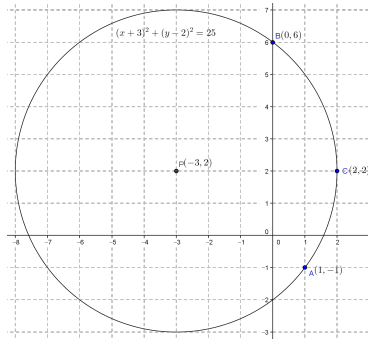


그림 18: 세 점  $A(1, -1)$ ,  $B(0, 6)$ ,  $C(2, 2)$ 를 지나는 원

다음 세 점을 지나는 원의 방정식을 구하여라.

- (1)  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 3)$   
 (2)  $(-1, 5)$ ,  $(-5, 3)$ ,  $(2, -4)$

답 : (1)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$   
 (2)  $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$

#### 예제 42) 아폴로니우스의 원

두 점  $A(-3, 0)$ ,  $B(2, 0)$ 에 대하여  $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ 인 점  $P$ 가 나타내는 도형을 구하여라.

풀이)

점  $P$ 의 좌표를  $(x, y)$ 라고 가정하고, 주어진 조건으로부터  $x$ 와  $y$ 사이의 관계식을 도출하자.

주어진 조건을 변형하면  $3\overline{AP} = 2\overline{BP}$ 이고 양변을 제곱하면  $9\overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$ 이다. 따라서

$$9[(x+3)^2 + y^2] = 4[(x-2)^2 + y^2]$$

이다. 양변을 전개한 후 모든 항을 좌변으로 이항시키면

$$5x^2 + 5y^2 + 70x - 65 = 0$$

다시 양변을 5로 나누면

$$x^2 + y^2 + 14x - 13 = 0$$

이다. 이것이 점  $P$ 가 나타내는 도형이다. 조금 더 정리하면

$$(x+7)^2 + y^2 = 36$$

이다. 즉 원의 중심이  $(-7, 0)$ 에 있고, 반지름의 길이가 6인 원이다(그림 19).

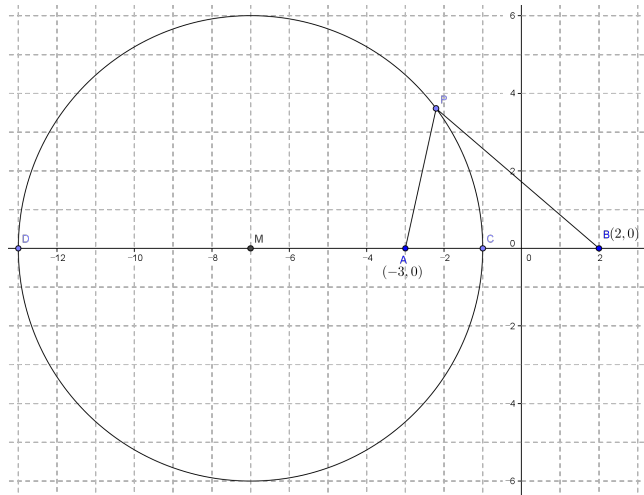


그림 19:  $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ 인 점  $P$ 의 자취

(다른 방식의 풀이) 선분  $AB$ 에서  $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 3$ 인 내분점을  $C$ 라고 하고,  $\overline{AD} : \overline{BD} = 2 : 3$ 인 외분점을  $D$ 라고 하자. 그러면

$$C = \left( \frac{2 \times 2 + 3 \times (-3)}{2 + 3}, \frac{2 \times 0 + 3 \times 0}{2 + 3} \right) = (-1, 0)$$

$$D = \left( \frac{2 \times 2 - 3 \times (-3)}{2 - 3}, \frac{2 \times 0 - 3 \times 0}{2 - 3} \right) = (-13, 0)$$

이고, 이 두 점은 우리가 구하려는 도형 위의 점들이다.

평면 상에서 고정된 두 점으로부터의 길이의 비가 일정한 점이 그리는 도형이 원이라는 사실은 알려져있다. 따라서 우리가 구하려는 원은 두 점  $C, D$ 를 지나는 원이다. 또한 구하려는 원은 직선  $AB$ 에 대칭일 것이므로  $C$ 와  $D$ 는 지름의 양 끝점이어야 한다. 따라서 원의 중심은  $C$ 와  $D$ 의 중점인

$$M = \left( \frac{-1 - 13}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (-7, 0)$$

이고, 반지름은  $\overline{CM} = 6$ 이어야 한다. 그러므로  $P$ 가 그리는 도형은

$$(x+7)^2 + y^2 = 36$$

이다.

문제 43)

두 점  $A(-4, 0)$ ,  $B(6, 0)$  으로부터의 거리의 비가  $2 : 3$  인 점  $P$  가 나타내는 도형을 구하여라.

$$\text{답 : } (x + 12)^2 + y^2 = 144$$

## 5 원의 방정식 (2)

요약 44) 원과 직선 사이의 위치관계

1. 직선과 원의 교점은 최대 두 개까지 존재할 수 있다. 교점이 2개면 이 직선을 할선이라고 부른다, 교점이 1개면 이 직선을 접선이라고 부르며, 이때의 교점을 접점이라고 부른다.
2. 원  $x^2 + y^2 = r^2$  과 직선  $ax + by + c = 0$  의 교점의 개수는 다음 두 방법을 사용해 판별할 수 있다(그림 20).
  - (a) 판별식을 이용하는 방법 : 두 도형 사이의 교점의 갯수는 두 식으로 만들어지는 연립방정식의 해의 갯수와 같으므로, 두 식을 연립하여 푼다. 연립할 때에 나타나는 이차방정식에서 (1)  $D > 0$  이면 교점의 갯수가 두 개이고, (2)  $D = 0$  이면 교점의 갯수가 한 개이며, (3)  $D < 0$  이면 교점이 없다.
  - (b) 점과 직선사이의 거리를 이용하는 방법 : 원의 중심과 직선사이의 거리를  $d$  라고 하자. (1)  $d < r$  이면 교점의 갯수가 두 개이고, (2)  $d = r$  이면 교점의 갯수가 한 개이며, (3)  $d < r$  이면 교점이 없다.

요약 45)

1. 원  $x^2 + y^2 = r^2$  에 접하고 기울기가  $m$  인 접선의 방정식은  $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$  이다.
2. 원  $x^2 + y^2 = r^2$  위의 점  $(x_1, y_1)$  에서 그은 접선의 방정식은  $x_1x + y_1y = r^2$  이다.



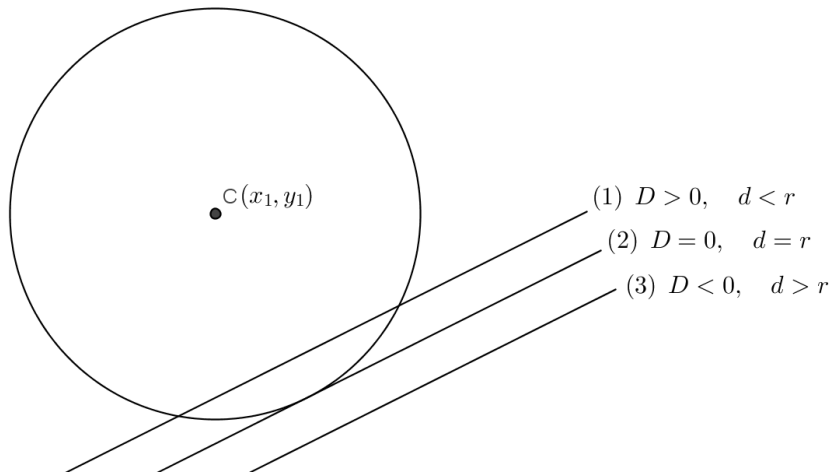


그림 20: 원과 직선 사이의 위치 관계

**예제 46)**

다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

- (1)  $x^2 + y^2 = 2, y = x + 1$
- (2)  $x^2 + y^2 = 2, y = x + 2$
- (3)  $x^2 + y^2 = 2, y = x + 3$

**풀이)**

(관별식을 이용하는 방법) (1) 주어진 두 식을 연립하기 위해서  $y = x + 1$ 을  $x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 2$$

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

이 된다. 이때  $D = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) > 0$  이므로 교점은 두 개이다.

(2) 마찬가지로의 방법을 쓰면

$$x^2 + (x + 2)^2 = 2$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

이 된다. 이때  $D = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$  이므로 교점은 한 개이다.

(3)

$$x^2 + (x+3)^2 = 2$$

$$2x^2 + 6x + 7 = 0$$

이 된다. 이때  $D = 6^2 - 4 \times 2 \times 7 < 0$  이므로 교점은 없다.

(점과 직선사이의 거리를 사용하는 방법) (1) 직선의 방정식을 변형하면  $x - y + 1 = 0$  이다. 원의 중심인 원점  $(0, 0)$  에서 이 직선까지의 거리는

$$d = \frac{0 - 0 + 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로 반지름  $r = \sqrt{2}$  과 비교했을 때  $d < r$  이다. 따라서 직선이 원에 충분히 가까이 있게 되어 교점이 두 개 존재한다.

(2) 마찬가지로의 방법을 쓰면

$$d = \frac{0 - 0 + 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

이므로  $d = r$  이다. 따라서 교점이 한 개 존재하며 직선은 원에 접하게 된다.

(3)

$$d = \frac{0 - 0 + 3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

이므로  $d > r$  이다. 따라서 직선이 원으로부터 멀리 떨어져 있게 되어 교점이 존재하지 않는다(그림 21).

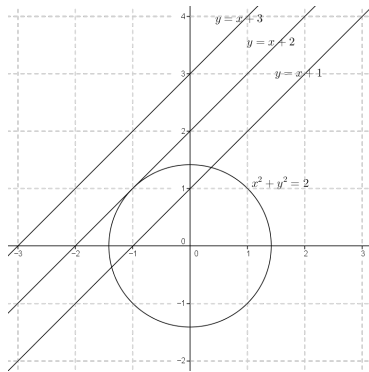


그림 21: 원  $x^2 + y^2 = 2$  와 세 직선 사이의 관계

문제 47)

다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

- (1)  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $y = -3x + 5$   
 (2)  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + 2y - 8 = 0$

답 : (1) 2개 (2) 0개

**예제 48)**

다음 접선의 방정식을 구하여라.

- (1) 원  $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가  $-3$ 인 접선  
 (2) 원  $x^2 + y^2 = 25$  위의 점  $(3, -4)$ 에서의 접선

**풀이)**

(1) 공식

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

예  $m = -3$ ,  $r = 2$ 를 대입하면  $y = -3x \pm 2\sqrt{(-3)^2 + 1}$ 이다. 이것을 정리하면  $y = -3x \pm 2\sqrt{10}$ 이다(그림 22).

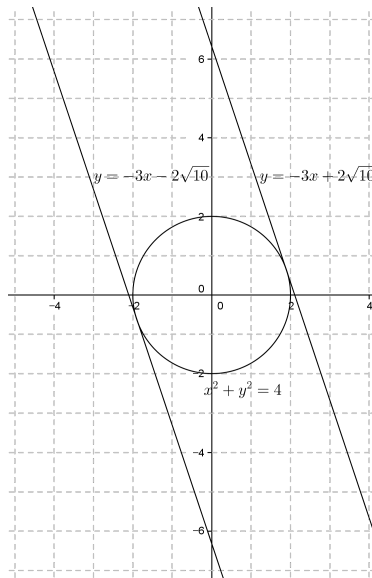


그림 22: 원  $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가  $-3$ 인 접선

(2) 공식

$$x_1x + y_1y = r^2$$

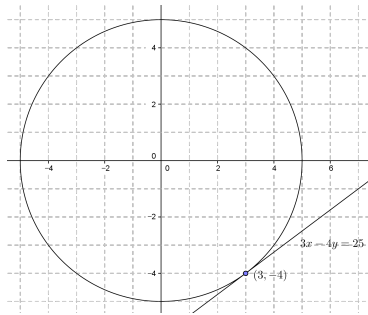


그림 23: 원  $x^2 + y^2 = 25$  위의 점  $(3, -4)$ 에서의 접선

에  $(x_1, y_1) = (3, -4)$ ,  $r = 5$ 를 대입하면  $3x - 4y = 25$ 이다.

**문제 49)**

다음 접선의 방정식을 구하여라.

- (1) 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고 기울기가  $-3$ 인 접선
- (2) 원  $x^2 + y^2 = 25$  위의 점  $(-3, 4)$ 에서 그은 접선

답 : (1)  $y = -3x \pm 5\sqrt{2}$   
 (2)  $-3x + 4y = 25$

**예제 50)**

점  $A(1, 3)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

**풀이)**

(공식  $x_1x + y_1y = r^2$ 을 이용하는 방법)

접점을  $P(x_1, y_1)$  이라고 하면  $P$ 는 원  $x^2 + y^2 = 5$  위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad (1)$$

가 성립한다. 또한 접선은  $x_1x + y_1y = 5$ 인데 이 접선이  $A(1, 3)$ 을 지나므로

$$x_1 + 3y_1 = 5 \quad (2)$$

가 성립한다. (1)과 (2)를 연립하면  $(x_1, y_1) = (2, 1), (-1, 2)$ 이다. 따라서 구하는 두 접선은  $2x + y = 5$ 와  $-x + 2y = 5$ 이다.

(공식  $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 을 이용하는 방법)

접선의 기울기를  $m$ 이라고 하면 구하려는 접선의 방정식은

$$y - 3 = m(x - 1) \quad (3)$$

이다. 즉

$$mx - y + 3 - m = 0$$

이다. 이 직선과 원의 중심  $(0, 0)$  까지의 거리가 반지름인  $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\sqrt{5} = \frac{|3 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

이 성립한다. 양변에  $\sqrt{m^2 + 1}$ 를 곱하면

$$\sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} = |3 - m|$$

이고 이 식의 양변을 제곱하면

$$5m^2 + 5 = m^2 - 6m + 9$$

가 된다. 이것을 다시 정리하면

$$4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$(m + 2)(2m - 1) = 0$$

이 되어  $m = -2$ 이거나  $m = \frac{1}{2}$ 이다.

이 값들을 (3)에 대입하면

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

을 얻는다. 이는 첫번째 방법으로 얻은 결과와 정확히 일치한다.

### 문제 51)

다음 점에서 주어진 원에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(1) 점  $(2, 0)$ ,  $x^2 + y^2 = 2$

(2) 점  $(7, 1)$ ,  $x^2 + y^2 = 25$

답 : (1)  $x + y = 2$  또는  $x - y = 2$

(2)  $3x + 4y = 25$  또는  $4x - 3y = 25$

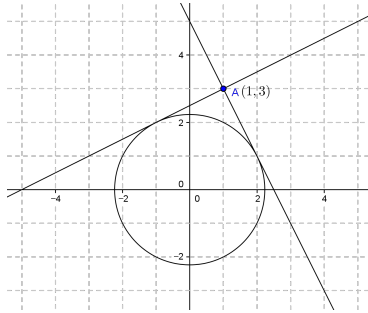


그림 24: 점  $(1,3)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선

## 6 도형의 이동

### 요약 52)

#### 1. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 를

- (a)  $x$ 축으로  $a$ 만큼,  $y$ 축으로  $b$ 만큼 평행이동 시키면  $(x+a, y+b)$ 이 된다.
- (b)  $x$ 축에 대해 대칭이동시키면  $(x, -y)$ 가 된다.
- (c)  $y$ 축에 대해 대칭이동시키면  $(-x, y)$ 가 된다.
- (d) 원점에 대해 대칭이동시키면  $(-x, -y)$ 가 된다.
- (e)  $y = x$ 에 대해 대칭이동시키면  $(y, x)$ 가 된다.

#### 2. 좌표평면 위의 도형 $f(x, y) = 0$ 을

- (a)  $x$ 축으로  $a$ 만큼,  $y$ 축으로  $b$ 만큼 평행이동 시키면  $f(x-a, y-b) = 0$ 이 된다. ( $x$  대신에  $x-a$ 를 대입하고  $y$  대신에  $y-b$ 를 대입한다.)
- (b)  $x$ 축에 대해 대칭이동시키면  $f(x, -y) = 0$ 가 된다. ( $y$  대신에  $-y$ 를 대입한다.)
- (c)  $y$ 축에 대해 대칭이동시키면  $f(-x, y) = 0$ 가 된다. ( $x$  대신에  $-x$ 를 대입한다.)
- (d) 원점에 대해 대칭이동시키면  $f(-x, -y) = 0$ 가 된다. ( $x$  대신에  $-x$ 를 대입하고  $y$  대신에  $-y$ 를 대입한다.)
- (e)  $y = x$ 에 대해 대칭이동시키면  $f(y, x) = 0$ 가 된다. ( $x$  대신에  $y$ 를 대입하고  $y$  대신에  $x$ 를 대입한다.)

**예제 53)**

점  $(3, 4)$ 를 다음과 같이 이동시켰을 때의 좌표를 구하여라.

- (1)  $x$  축 방향으로 2 만큼,  $y$  축 방향으로  $-3$  대칭이동
- (2)  $x$  축에 대해 대칭이동
- (3)  $y$  축에 대해 대칭이동
- (4) 원점에 대해 대칭이동
- (5)  $y = x$ 에 대해 대칭이동

**풀이)**

각각

- (1)  $(3 + 2, 4 - 3) = (5, 1)$
- (2)  $(3, -4)$
- (3)  $(-3, 4)$
- (4)  $(-3, -4)$
- (5)  $(4, 3)$

으로 이동된다.

**문제 54)**

점  $(-2, 5)$ 를 다음과 같이 이동시켰을 때의 좌표를 구하여라.

- (1)  $x$  축 방향으로 2 만큼,  $y$  축 방향으로  $-3$  대칭이동
- (2)  $x$  축에 대해 대칭이동
- (3)  $y$  축에 대해 대칭이동
- (4) 원점에 대해 대칭이동
- (5)  $y = x$ 에 대해 대칭이동

답 : (1)  $(0, 2)$  (2)  $(-2, -5)$  (3)  $(2, 5)$  (4)  $(2, -5)$  (5)  $(5, -2)$

**예제 55)**

직선  $2x - y + 1 = 0$ 을 다음과 같이 이동시켰을 때의 식을 구하여라.

- (1)  $x$  축 방향으로 2 만큼,  $y$  축 방향으로  $-3$  대칭이동
- (2)  $x$  축에 대해 대칭이동
- (3)  $y$  축에 대해 대칭이동
- (4) 원점에 대해 대칭이동
- (5)  $y = x$ 에 대해 대칭이동

**풀이)**

(1)  $x$  대신에  $x - 2$ 를,  $y$  대신에  $y + 3$ 을 넣으면 되므로

$$2(x - 2) - (y + 3) + 1 = 0$$

$$2x - y - 6 = 0$$

이다.

(2)  $y$  대신에  $-y$ 를 넣으면 되므로

$$2x - (-y) + 1 = 0$$

$$2x + y + 1 = 0$$

이다.

(3)  $x$  대신에  $-x$ 를 넣으면 되므로

$$2(-x) - y + 1 = 0$$

$$-2x - y + 1 = 0$$

이다.

(4)  $x$  대신에  $-x$ 를,  $y$  대신에  $-y$ 를 넣으면 되므로

$$2(-x) - (-y) + 1 = 0$$

$$-2x + y + 1 = 0$$

이다.

(5)  $x$  대신에  $y$ 를,  $y$  대신에  $x$ 를 넣으면 되므로

$$2(y) - (x) + 1 = 0$$

$$-x + 2y + 1 = 0$$

이다(그림 25).

#### 예제 56)

원  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 을 다음과 같이 이동시켰을 때의 식을 구하여라.

- (1)  $x$ 축 방향으로 2만큼,  $y$ 축 방향으로  $-3$ 대칭이동
- (2)  $x$ 축에 대해 대칭이동
- (3)  $y$ 축에 대해 대칭이동
- (4) 원점에 대해 대칭이동
- (5)  $y = x$ 에 대해 대칭이동



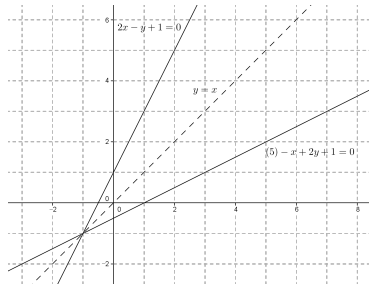


그림 25:  $2x - y + 1 = 0$ 를  $y = x$ 에 대해 대칭이동

풀이)

아까와 같은 방법으로 구하면

- (1)  $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 1$
- (2)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$
- (3)  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
- (4)  $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$
- (5)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$  이다(그림26).

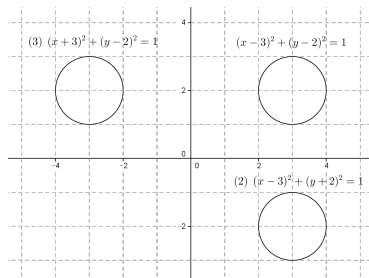


그림 26:  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 를  $x$ 축,  $y$ 축에 대해 대칭이동

예제 57)

좌표평면 위의 두 점  $A(1, 2)$ ,  $B(4, 6)$ 에 대하여 점  $P$ 가  $y$ 축 위를 움직일 때,  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

풀이)

$A$ 를  $y$ 축에 대해 대칭이동한 점을  $A'$ 이라고 하면  $A' = (-1, 2)$ 이다.  $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하는 대신,  $\overline{A'P} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면

된다. 그런데  $\overline{A'P} + \overline{BP}$ 는  $A'$ 에서  $x$ 축 위의 점  $P$ 를 거쳐  $B$ 로 가는 거리이므로  $A'$ 에서  $B$ 로 이은 직선거리가 최솟값이 된다. 따라서 구하고자 하는 최솟값은  $\overline{A'B} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$  이다(그림 27).

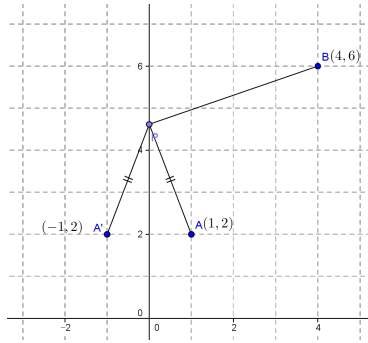
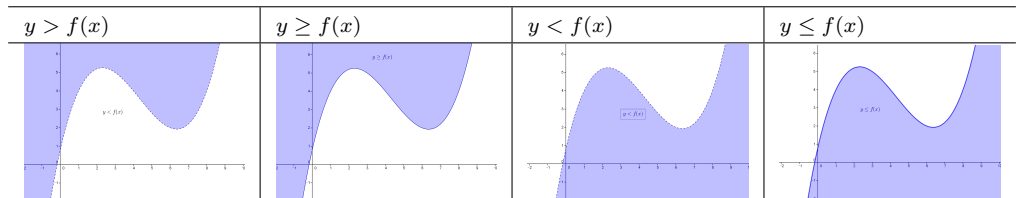


그림 27:  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값

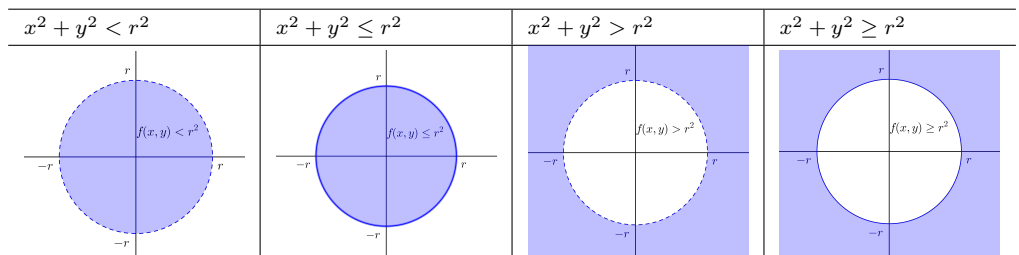
## 7 부등식의 영역

요약 58)

- 함수  $f$ 에 대해 부등식이 나타내는 영역은 다음과 같이 표시된다.



- 경계선이 원인 경우의 부등식의 영역은 다음과 같이 표시된다.



3. 연립 부등식의 경우, 두 부등식의 영역이 겹쳐지는 부분이 연립 부등식의 영역이다.

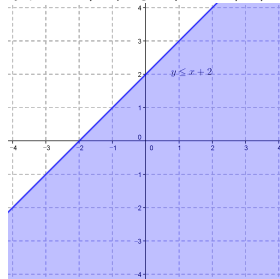
예제 59)

다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

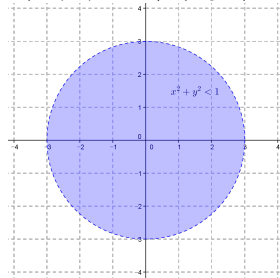
$$\begin{cases} y \leq x + 2 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

풀이)

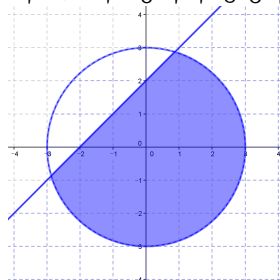
첫 번째 부등식을 나타내면



이고, 두 번째 부등식을 나타내면



이므로 두 영역의 공통부분인



가 답이 된다.

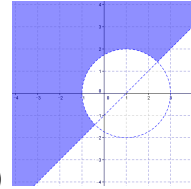
문제 60)

다음 연립 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

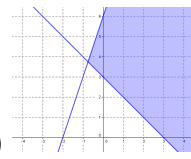
$$(1) \begin{cases} y > x - 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$(2) x - 1 \leq 2x + y - 4 \leq 5x + 2$$

답 : (1)



(2)



예제 61)

다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

$$(x + y + 4)(x^2 + y^2 + 8x) < 0$$

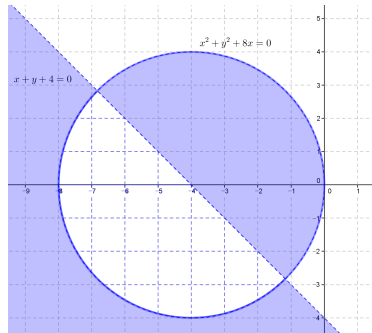
풀이)

$$AB < 0 \text{ 이면 } \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ 이거나 } \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 영역은 두 연립부등식

$$\begin{cases} x + y + 4 > 0 \\ x^2 + y^2 + 8x < 0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x + y + 4 < 0 \\ x^2 + y^2 + 8x > 0 \end{cases}$$

의 영역이다. 그러므로

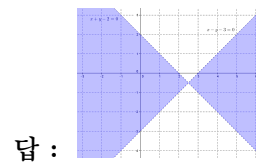


이 답이 된다.

**문제 62)**

다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

$$(x + y - 2)(x - y - 3) > 0$$

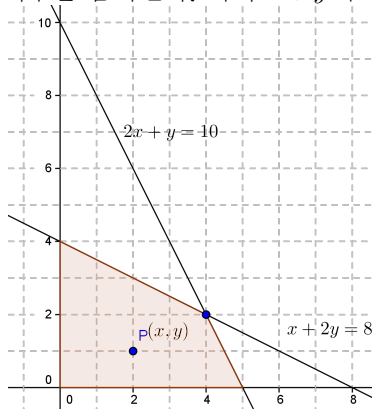


**예제 63)**

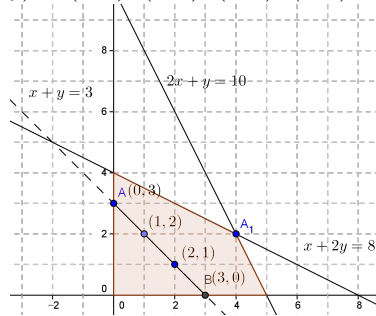
연립부등식  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + 2y \leq 8$ ,  $2x + y \leq 10$ 을 만족하는  $x, y$ 에 대해  $x + y$ 의 최댓값을 구하여라.

**풀이)**

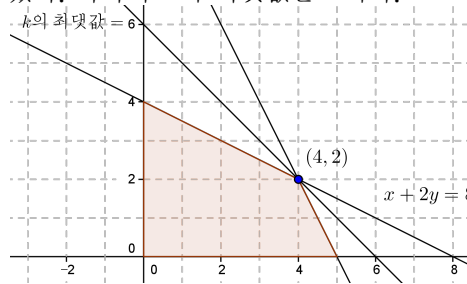
주어진 부등식의 영역  $D$ 는 아래 그림과 같이 표현될 수 있다. 점  $P(x, y)$ 는  $D$  내부를 움직인다. 이때  $x + y$ 의 최댓값을 찾으면 된다.



$x + y$ 의 값은 3일 수 있다. 왜냐하면,  $x + y = 3$ 이 나타내는 직선과 영역  $D$ 가 겹치기 때문이다. 겹치는 부분은 아래 그림에서 선분  $AB$ 이다. 예를 들어  $(x, y) = (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 인 경우에  $(x, y)$ 는  $D$  안에 있고  $x + y = 3$ 이다.



마찬가지의 논리로  $x + y$ 의 값은 4도 될 수 있고, 5도 될 수 있다. 즉 직선  $x + y = k$ 과 영역  $D$ 가 만나는 조건 하에서의  $k$ 의 최댓값을 구하면 된다.  $x + y = k$ 를 정리하면  $y = -x + k$ 이므로 이것은 기울기가  $-1$ 이고,  $y$ 절편이  $k$ 인 직선이다.  $y = -x + k$ 와 영역  $D$ 가 만나는 조건 하에  $y = -x + k$ 를 잘 움직여보면,  $y = -x + k$ 가  $(4, 2)$ 에 닿을 때  $k$ 가 최댓값을 가진다는 것을 확인할 수 있다. 따라서  $k$ 의 최댓값은 6이다.



#### 문제 64)

(1) 연립부등식  $x \geq 0, 2x + y \leq 4, 4x - 3y \leq 12$ 을 만족하는  $x, y$ 에 대해  $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(2) 연립부등식  $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$ 를 만족하는  $x, y$ 에 대해  $y - x$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

답 : (1) 최댓값 : 4, 최솟값  $-4$

(2) 최댓값 : 4, 최솟값  $-4$