

수학 I : 03 지수함수와 로그함수

2022년 1월 6일

차 례

차 례	1
1 복습	2
2 지수함수의 그래프	5
3 로그함수의 그래프	10
4 지수방정식과 로그방정식	14
5 지수부등식과 로그부등식	15
* 답	18
* 요약	20

1 복습

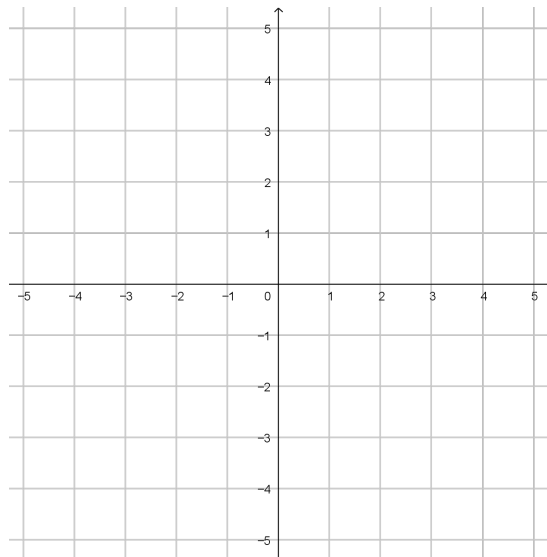
복습 1) 도형의 평행이동과 대칭이동

도형 $f(x, y) = 0$ 을

- (1) x 축, y 축의 방향으로 각각 a, b 만큼 평행이동시키면 $f(x-a, y-b) = 0$
- (2) x 축을 기준으로 대칭이동시키면 $f(x, -y) = 0$
- (3) y 축을 기준으로 대칭이동시키면 $f(-x, y) = 0$
- (4) 원점을 기준으로 대칭이동시키면 $f(-x, -y) = 0$
- (5) 직선 $y = x$ 를 기준으로 대칭이동시키면 $f(y, x) = 0$

문제 2) 무리함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 그리고, 이 그래프를 다음과 같이 이동시킨 도형의 방정식을 구해 그려라.

- (1) x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동
- (2) x 축에 대하여 대칭이동
- (3) y 축에 대하여 대칭이동



복습 3) 함수, 일대일함수, 일대일대응, 역함수

(1) 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 의 모든 원소 x 가 집합 Y 의 한 원소 y 에 대응되는 것을 함수라고 한다.

(2) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

이면 f 를 일대일함수라고 부른다. (단, $x_1, x_2 \in X$)

(3) 함수 f 가 일대일함수이고, 공역과 치역이 같으면 f 를 일대일대응이라고 부른다.

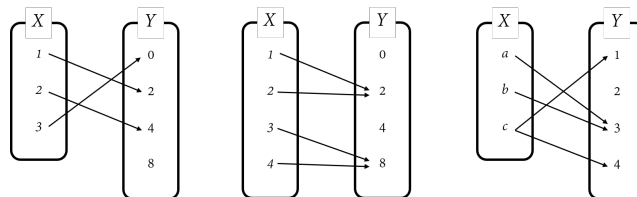
(4) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응일 때, f 의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 는

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

를 만족시키는 함수이다. f 의 그래프와 f^{-1} 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

문제 4)

다음 세 개의 대응 중 함수의 개수를 a , 일대일함수의 개수를 b , 일대일대응의 개수를 c 라고 할 때, a, b, c 의 값을 각각 구하여라.



정의 5) 증가함수, 감소함수

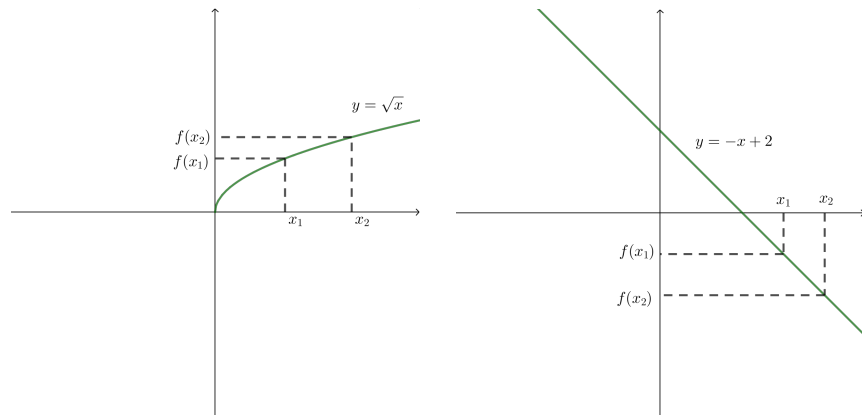
함수 $f : X \rightarrow Y$ 가

- (1) $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ 이면 f 를 증가함수라고 부른다.
- (2) $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ 이면 f 를 감소함수라고 부른다.

따라서 증가함수와 감소함수는 일대일함수이다.

예시 6)

- (1) $f(x) = \sqrt{x}$ 는, $0 \leq x_1 < x_2$ 일 때 $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ 이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
따라서 f 는 증가함수이다.
- (2) $g(x) = -x + 2$ 는, $x_1 < x_2$ 일 때 $-x_1 > -x_2$, $-x_1 + 2 > -x_2 + 2$ 이므로 $g(x_1) > g(x_2)$ 이다. 따라서 f 는 감소함수이다.



문제 7) 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

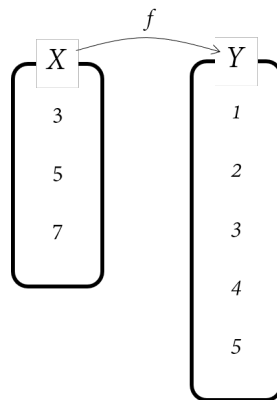
- (1) 함수 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 은 함수이다.
- (2) 함수 $y = -\sqrt{-x+3} + 1$ 는 함수이다.
- (3) 함수 $y = x^2$ 은 $x \leq 0$ 에서 함수이고 $x \geq 0$ 에서는 함수이다.

문제 8) 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

- (1) 함수 $f(x) = 2x + 4$ 는 일대일대응이고 f 의 역함수는 $f^{-1}(x) = \boxed{}$ 이다. 이때 f 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 f 의 공역도 실수 전체의 집합이다.
- (2) 함수 $g(x) = \frac{1}{x+2} + 3$ 는 일대일대응이고 g 의 역함수는 $g^{-1}(x) = \frac{1}{x-3} - 2$ 이다. 이때 g 의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2\}$ 이고 g 의 공역은 $\boxed{}$ 이다.
- (3) 함수 $h(x) = \sqrt{x-2} - 1$ 는 일대일대응이고 h 의 역함수는 $h^{-1}(x) = (x+1)^2 + 2 (x \geq -1)$ 이다. 이때 h 의 정의역은 $\boxed{}$ 이고 h 의 공역은 $\{y \mid y \geq -1\}$ 이다.

문제 9) 두 집합 $X = \{3, 5, 7\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수
- (2) 일대일함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수
- (3) 증가함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수
- (4) 감소함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수



2 지수함수의 그래프

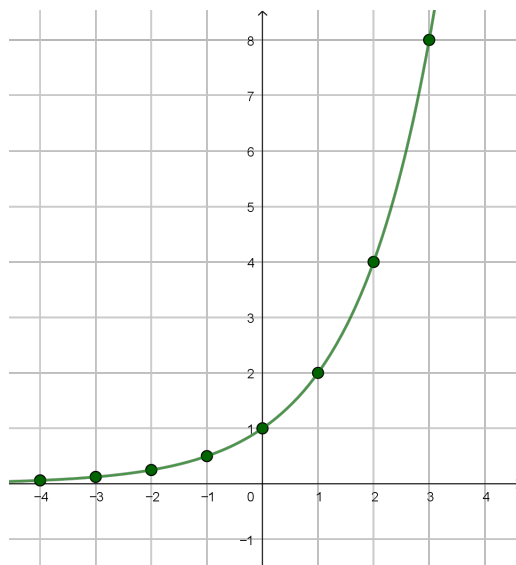
예시 10) $y = 2^x$ 의 그래프를 그려라.

$y = 2^x$ 를 만족시키는 모든 점 (x, y) 를 표시하면 된다. $x = 1$ 이면 $y = 2$ 이고 $x = 2$ 이면 $y = 4$ 이다. 따라서 $y = 2^x$ 의 그래프는 $(1, 2)$, $(2, 4)$ 와 같은 점들을 포함한다. 이밖에도

$$(x, y) = (1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16), \dots$$

$$(0, 1), (-1, \frac{1}{2}), (-2, \frac{1}{4}), (-3, \frac{1}{8}) \dots$$

와 같은 점들을 찍을 수 있다. 이 점들을 자연스럽게 이으면 다음과 같은 곡선이 나온다.

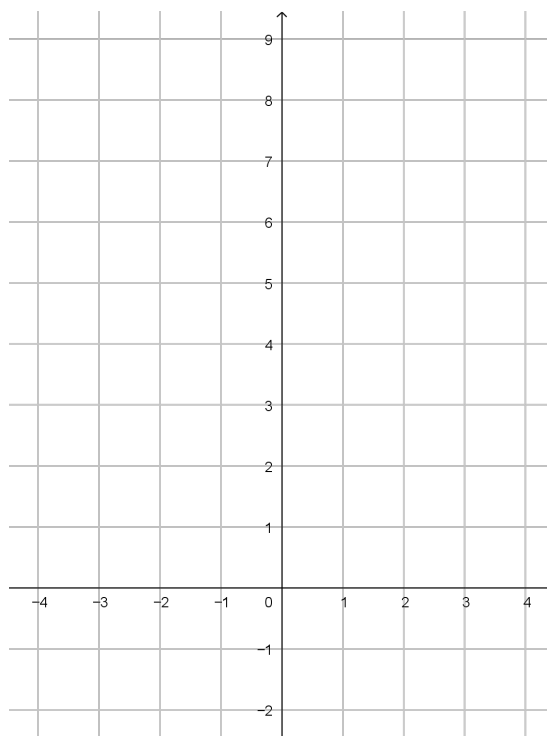


문제 11) 다음 지수함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = 3^x$

(2) $y = (\frac{1}{2})^x$

(3) $y = (\frac{1}{3})^x$

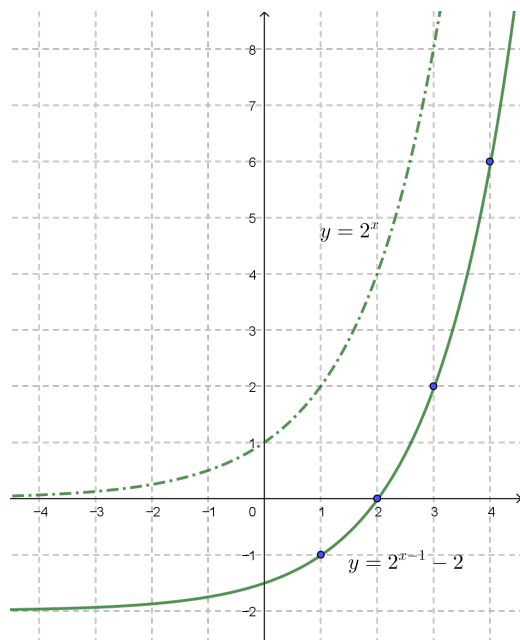


정리 12) 지수함수 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 의 성질

- 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
- $a > 1$ 이면 증가함수이고 $0 < a < 1$ 이면 감소함수이다.
- 그래프는 $(0, 1)$ 을 지나고, x 축을 점근선으로 갖는다.

예시 13) 함수 $y = 2^{x-1} - 2$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 된다. 따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.

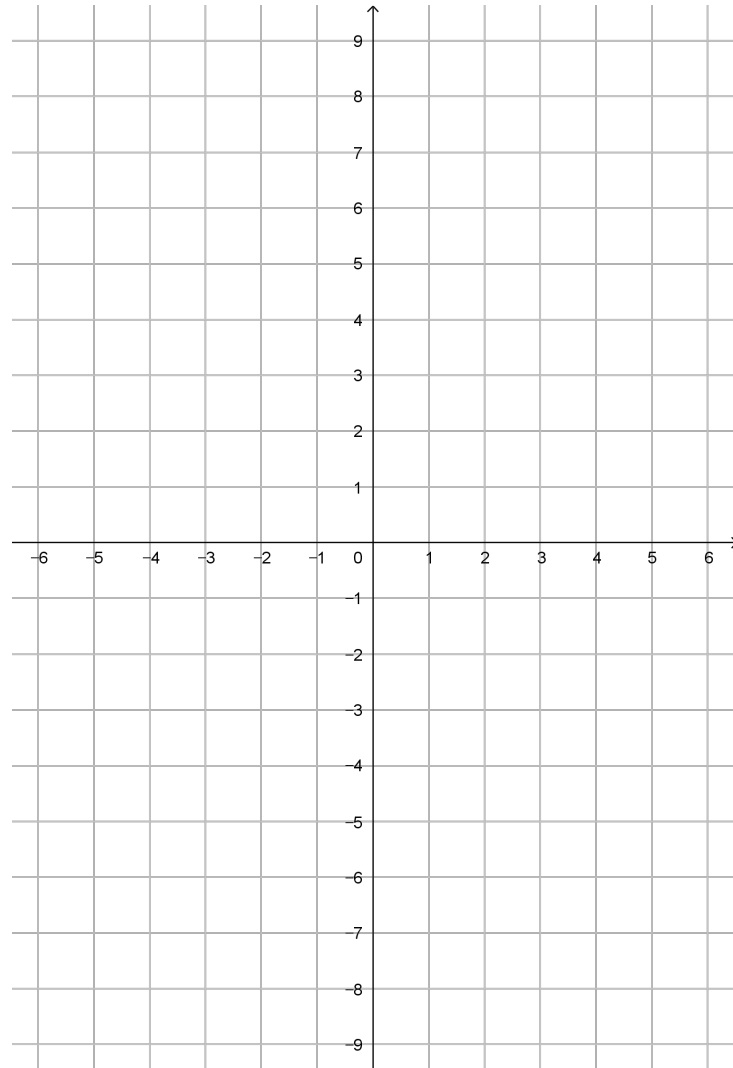


이때 점근선의 방정식은 $y = -2$ 이다.

문제 14) 다음 지수함수들의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y = 3^{x+1} - 2$

(2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$



3 로그함수의 그래프

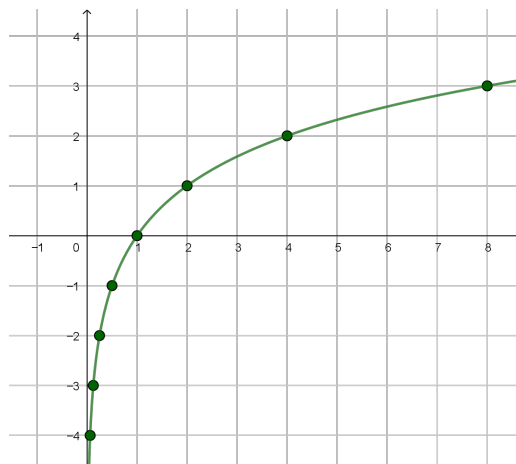
예시 15) $y = \log_2 x$ 의 그래프를 그려라.

$y = \log_2 x$ 를 만족시키는 모든 점 (x, y) 를 표시하면 된다. 이때 x 는 진수이므로 x 에는 양수만 대입할 수 있다. $x = 2$ 이면 $y = 1$ 이고 $x = 4$ 이면 $y = 2$ 이다. 따라서 $y = 2^x$ 의 그래프는 $(2, 1)$, $(4, 2)$ 와 같은 점들을 포함한다. 이 밖에도

$$(x, y) = (2, 1), (4, 2), (8, 3), (16, 4), \dots$$

$$(1, 0), (\frac{1}{2}, -1), (\frac{1}{4}, -2), (\frac{1}{8}, -3) \dots$$

와 같은 점들을 찍을 수 있다. 이 점들을 자연스럽게 이으면 다음과 같은 곡선이 나온다.



함수 $y = \log_2 x$ 는 지수함수 $y = 2^x$ 의 역함수이기도 하다. 따라서 $y = 2^x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시켜서 얻을 수도 있다.

문제 16) 다음은 지수함수 $y = 2^x$ 의 역함수를 구하는 과정이다. $\boxed{(A)}$ 에 알맞은 집합을 고르시오.

함수 $f(x) = 2^x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\boxed{(A)}$ 이다. 따라서 f 의 공역을 $\boxed{(A)}$ 로 잡으면 f 는 일대일대응이 되고, 역함수가 존재한다. f 의 역함수를 구하기 위해

$$x = 2^y$$

로 놓으면

$$y = \log_2 x$$

가 된다. 즉 $f^{-1}(x) = \log_2 x$ 이다. 이때 f^{-1} 의 정의역은 $\boxed{(A)}$ 이고 공역은 실수 전체의 집합이다.

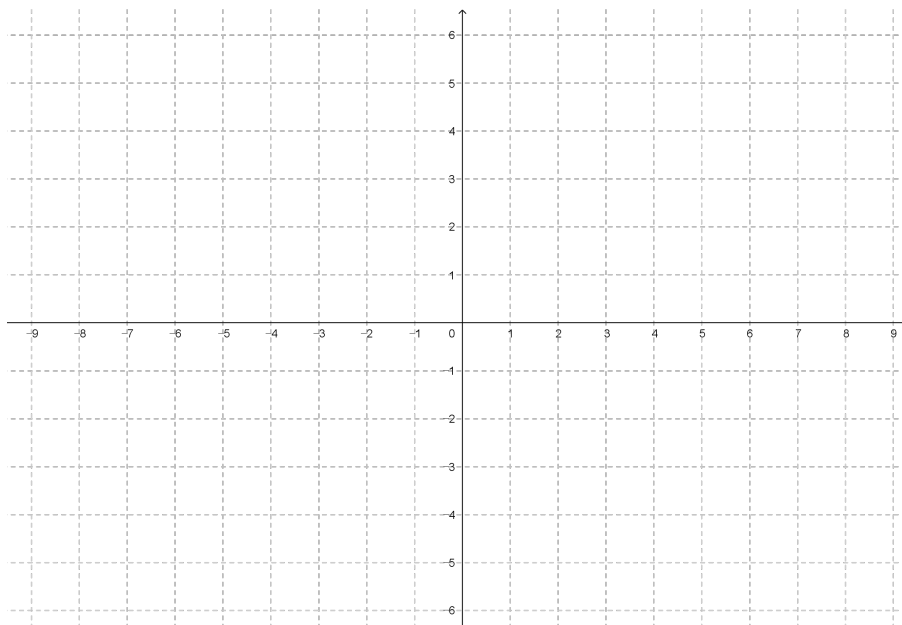
- ① 실수 전체의 집합 ② $\{y \mid y < 0\}$ ③ $\{y \mid y \leq 0\}$
 ④ $\{y \mid y > 0\}$ ⑤ $\{y \mid y \geq 0\}$

문제 17) 다음 로그함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

(3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



정리 18) 로그함수 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 의 성질

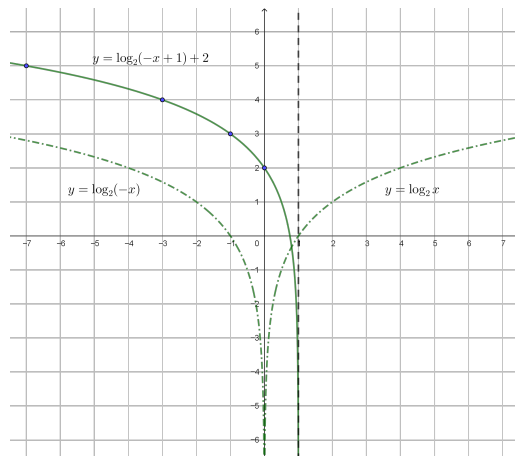
- 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
- $a > 1$ 이면 증가함수이고 $0 < a < 1$ 이면 감소함수이다.
- 그래프는 $(1, 0)$ 을 지나고, y 축을 점근선으로 갖는다.

예시 19) 함수 $y = \log_2(-x + 1) + 2$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축을 기준으로 대칭시켜 $y = \log_2(-x)$ 의 그래프를 얻고, 이것을 다시 x 축의 방향으로 1만큼 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 된다.

$$y = \log_2 x \xrightarrow[\Gamma_{mt}]{y} y = \log_2(-x) \xrightarrow[t]{\begin{matrix} \boxed{x} : 1, \\ \boxed{y} : 2 \end{matrix}} y = \log_2(-x + 1) + 2$$

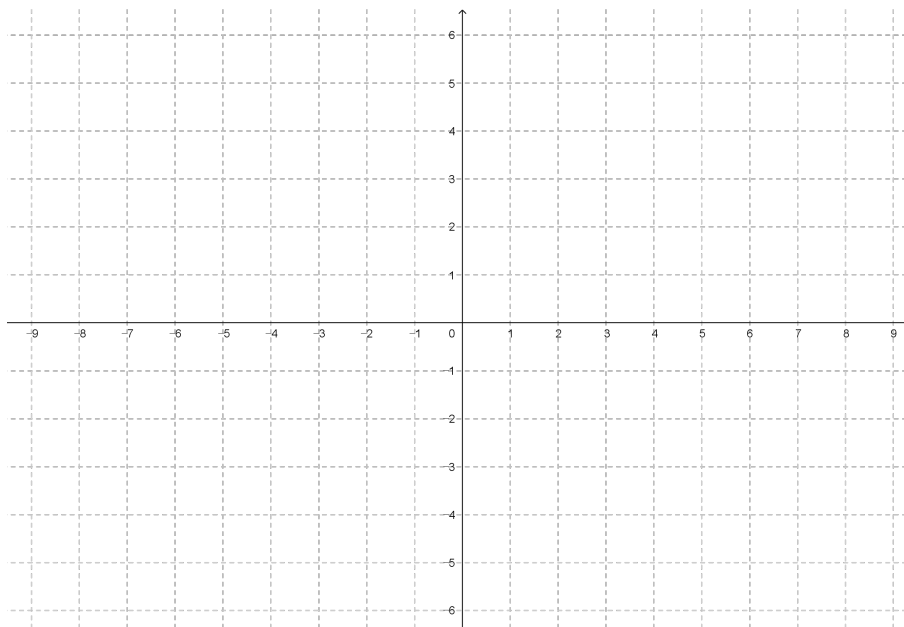
따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.



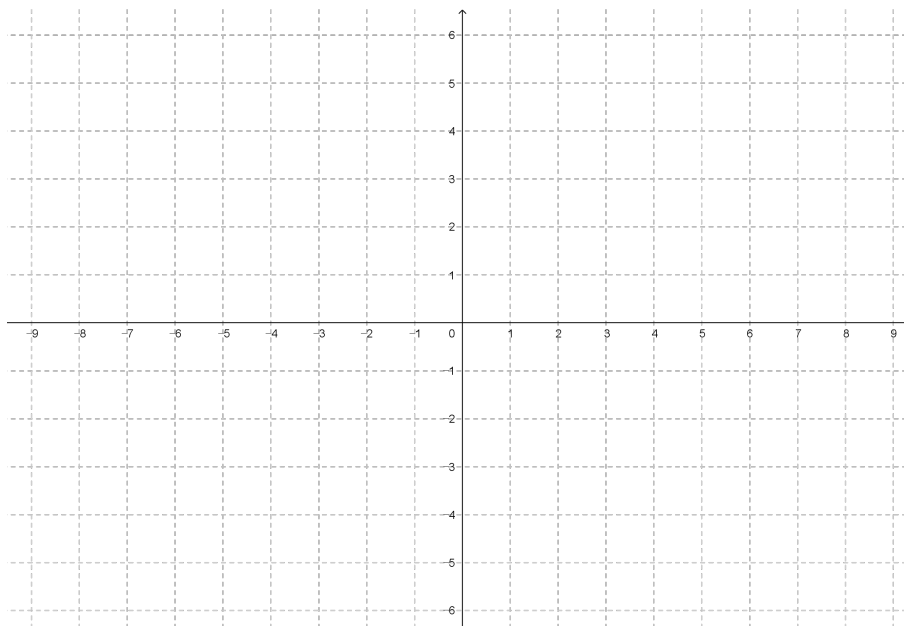
이때 점근선의 방정식은 $x = 1$ 이다.

문제 20) 다음 로그함수들의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y = \log_3(x + 1) - 1$



(2) $y = -\log_3(-x)$



4 지수방정식과 로그방정식

$f: X \rightarrow Y$ 가 함수이면 한 개의 x 가 두 개 이상의 y 에 대응되지 않는다. 따라서

$$x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

이다. f 가 일대일함수이면 두 개 이상의 x 가 한 개의 y 에 대응되지 않는다. 즉 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다. 이것의 대우를 쓰면

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

이다. 즉

$$x_1 = x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

이다. $a > 0, a \neq 1$ 일 때, 지수함수 $f(x) = a^x$ 는 일대일함수이므로

$$x_1 = x_2 \iff a^{x_1} = a^{x_2}$$

이다.

예시 21) $2^{5x-2} = 4^{x^2}$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하여라.

$2^{5x-2} = 2^{2x^2}$ 이므로 $5x-2 = 2x^2$ 이다. $2x^2 - 5x + 2 = 0, (2x-1)(x-2) = 0$
 으로부터 $x = \frac{1}{2}, 2$ 이다.

답 : $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$

문제 22) 다음 지수방정식을 푸시오.

(1) $3^x - \sqrt{3} = 0$

(2) $4^x = \frac{1}{32}$

로그함수 $f(x) = \log_a x$ 또한 일대일함수이므로

$$x_1 = x_2 \iff \log_a x_1 = \log_a x_2$$

이다. 지수방정식과는 달리 로그방정식을 풀 때에는 진수 조건에 유의하여 푼다.

예시 23) $\log_7(6-x) = \log_7(6-x^2) + \log_7 x$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하여라.

$$\log_7(6-x) = \log_7(6x-x^3)$$

이므로 $6-x = 6x-x^3$, $x^3-7x+6=0$, $(x-1)(x-2)(x+3)=0$ 이므로

$$x = 1, 2, -3$$

이다. 이때, 진수는 0보다 커야 하므로

$$6-x > 0, \quad 6-x^2 > 0, \quad x > 0$$

이다. 세 부등식을 연립하면 $0 < x < \sqrt{6}$ 이다. 따라서 가능한 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이다.

답 : $x = 1$ 또는 $x = 2$

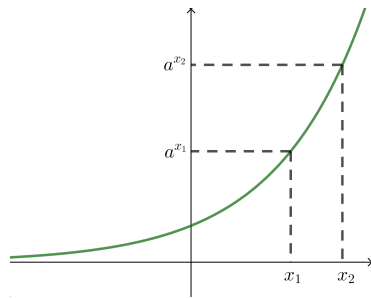
문제 24) 다음 로그방정식을 푸시오.

$$(1) \log_3(x^2 - 4x) = \log_3(5x - 14) \quad (2) \log_4(2x + 1) = \frac{1}{2}$$

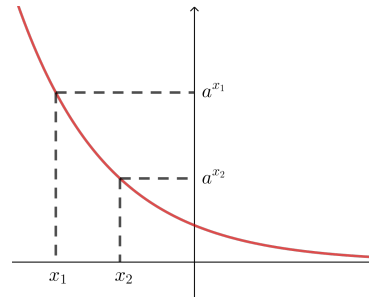
5 지수부등식과 로그부등식

지수함수 $y = a^x$ 는 $a > 1$ 일 때 증가함수, $0 < a < 1$ 일 때 감소함수이므로

$$\begin{aligned} a > 1 \text{ 일 때, } \quad x_1 < x_2 &\iff a^{x_1} < a^{x_2} \\ 0 < a < 1 \text{ 일 때, } \quad x_1 < x_2 &\iff a^{x_1} > a^{x_2} \end{aligned}$$



$a > 1$ 일 때



$0 < a < 1$ 일 때

예시 25) $0.04^x > 0.2^{x+3}$ 을 만족시키는 x 의 범위를 구하여라.

$0.04 = 0.2^2$ 이므로

$$0.2^{2x} > 0.2^{x+3}$$

이다. $0 < 0.2 < 1$ 이므로

$$2x < x + 3$$

이다. 따라서 $x < 3$ 이다.

답 : $x < 3$

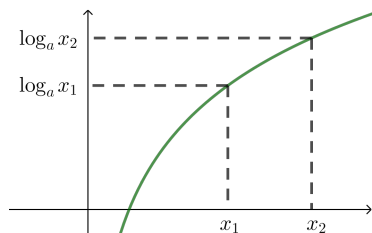
문제 26) 다음 지수부등식을 푸시오.

(1) $25^x \geq 625$

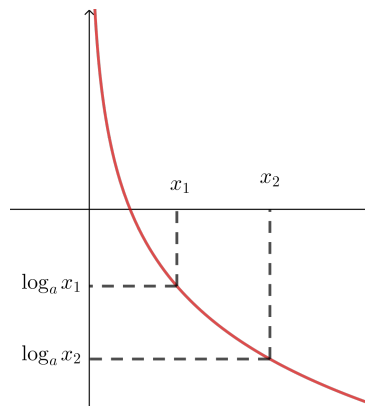
(2) $2^x > 3$

로그부등식도 마찬가지로의 방법으로 생각할 수 있다. 로그함수 $y = \log_a x$ 는 $a > 1$ 일 때 증가함수, $0 < a < 1$ 일 때 감소함수이므로

$$\begin{aligned} a > 1 \text{ 일 때, } & x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2 \\ 0 < a < 1 \text{ 일 때, } & x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2 \end{aligned}$$



$a > 1$ 일 때



$0 < a < 1$ 일 때

예시 27) $\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$ 을 만족시키는 x 값의 범위를 구하여라.

주어진 식의 좌변과 우변을 각각 변형하면 $\log_2(x^2 - x) < \log_2 2$ 가 된다.
따라서 $x^2 - x < 2$, $x^2 - x - 2 < 0$, $(x-2)(x+1) < 0$ 이므로

$$-1 < x < 2 \quad (1)$$

이다. 이때, 진수는 0보다 커야하므로 $x > 0$, $x-1 > 0$ 이다. 두 부등식을 연립하면

$$x > 1 \quad (2)$$

이므로, (1)과 (2)를 연립하면 $1 < x < 2$ 가 된다.

답 : $1 < x < 2$

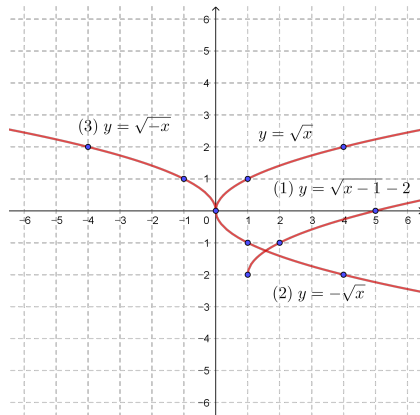
문제 28) 다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $\log_3(2x-1) \leq 2$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

답

문제 2)



문제 4) $a = 2, b = 1, c = 0$

문제 7)

- (1) 증가
- (2) 증가
- (3) 감소, 증가

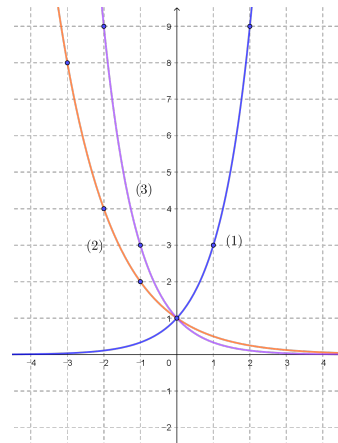
문제 8)

- (1) $\frac{1}{2}x - 2$
- (2) $\{y \mid y \neq 3\}$
- (3) $\{x \mid x \geq 2\}$

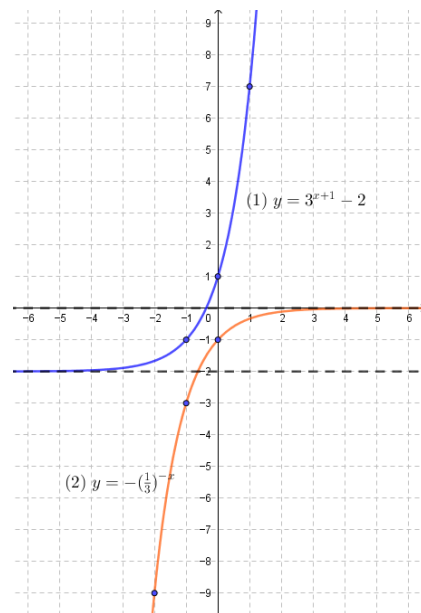
문제 9)

- (1) 125 (2) 60 (3) 10 (4) 10

문제 11)



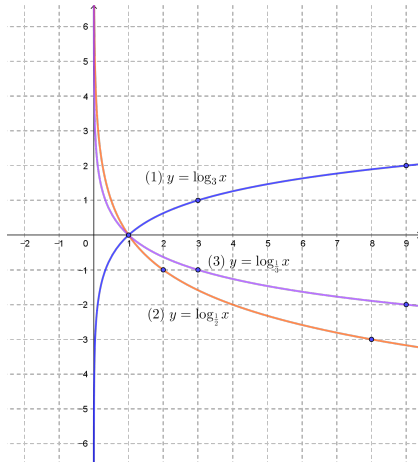
문제 14)



점근선 : (1) $y = -2$, (2) $y = 0(x)$

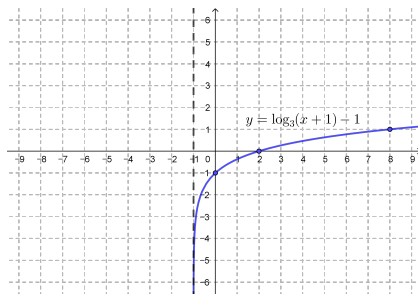
문제 16) ④

문제 17)

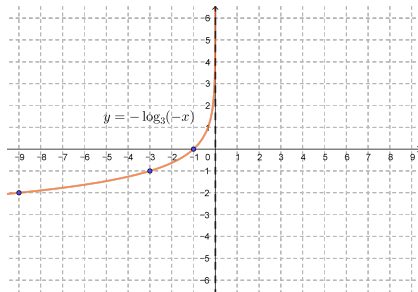


문제 20)

(1) 점근선 : $x = -1$



(2) 점근선 : $x = 0(y)$



문제 22)

(1) $x = \frac{1}{2}$

(2) $x = -\frac{5}{2}$

문제 24)

(1) $x = 7$

(2) $x = \frac{1}{2}$

문제 26)

(1) $x \geq 2$

(2) $x > \log_2 3$

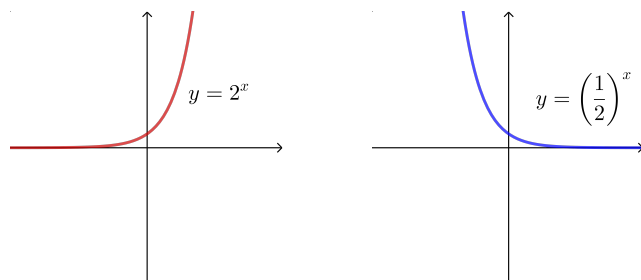
문제 28)

(1) $\frac{1}{2} < x \leq 5$

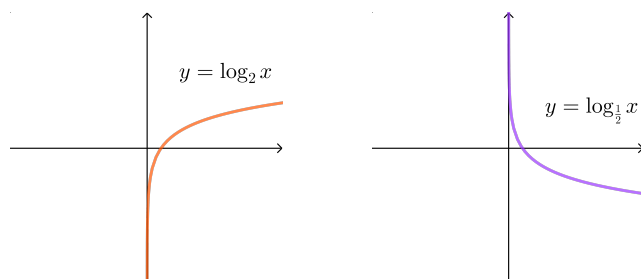
(2) $1 < x < 4$

요약

1. 지수함수의 그래프



2. 로그함수의 그래프



3. 지수방정식과 로그방정식

$$a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2 \iff \log_a x_1 = \log_a x_2$$

4. 지수부등식과 로그부등식

$$\begin{aligned} a > 1 \text{ 일 때, } a^{x_1} < a^{x_2} &\iff x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2 \\ 0 < a < 1 \text{ 일 때, } a^{x_1} > a^{x_2} &\iff x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2 \end{aligned}$$