현빈 : 12 등차수열과 등비수열

March 26, 2015

정의 1) 수열

$3, 6, 9, 12, \cdots$ 와 같이 어떤 일정한 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 수열 (sequence) 이라고 하고 나열된 각각의 수를 항 (term) 이라 한다.

정의 2) 수열의 일반항

수열을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 으로 나타낼 때 각각의 수를 항이라 하고 처음부터 차례로 a_1 을 첫째항, a_2 를 둘째항, $\cdots$, a_n 을 n 째항 이라고 한다. 특히 n 째항인 a_n 을 일반항이라고 한다. 수열을 나타낼 때에는 $\{a_n\}$ 과 같이 나타낸다.

예를 들어, 앞서 언급한 $3, 6, 9, 12, \cdots$ 에서 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 이므로 수열의 일반항은 $a_n = 3n$ 이다.

1 등차수열

정의 3) 등차수열

수열 $3, 6, 9, 12, \cdots$ 와 같이, 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해서 얻어지는 수열을 등차수열 (Arithmetic Progression) 이라고 하고 그 일정한 수를 공차라고 한다.

예시 4) 등차수열의 예

다음 수열들은 모두 등차수열이다.

$$3, 6, 9, 12, \cdots ; \quad \text{첫째항}=3 ; \quad \text{공차}=3 ; \quad a_n = 3n \tag{1}$$

$$1, 3, 5, 7, \cdots ; \quad \text{첫째항}=1 ; \quad \text{공차}=2 ; \quad a_n = 2n-1 \tag{2}$$

$$1, 1, 1, 1, \cdots ; \quad \text{첫째항}=1 ; \quad \text{공차}=0 ; \quad a_n = 1 \tag{3}$$

$$-1, -2, -3, -4, \cdots ; \quad \text{첫째항}=-1 ; \quad \text{공차}=-1 ; \quad a_n = -n \tag{4}$$

$$-4, -2, 0, 2, \cdots ; \quad \text{첫째항}=-4 ; \quad \text{공차}=2 ; \quad a_n = 2n-6 \tag{5}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \cdots ; \quad \text{첫째항}=\frac{2}{3} ; \quad \text{공차}=-\frac{1}{3} ; \quad a_n = -\frac{1}{3}+1 \tag{6}$$

예시 5) 등차수열의 합

$a_n = 3n+1$로 주어진 등차수열 $\{a_n\}$에 대해 10항까지의 합을 S라고 하자 (S=$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$). 그러면 S는 다음과 같이 구할 수 있다.

일단 S를 정의에 맞게 쓰면

$$S = 4 + 7 + 10 + \cdots + 25 + 28 + 31$$

이다. 이 식에서 나열된 수의 순서를 바꾸면

$$S = 31 + 28 + 25 + \cdots + 10 + 7 + 4$$

이다. 이 두 식을 더하면

$$\begin{aligned} 2S &= (4+31) + (7+28) + (10+25) + \cdots + (25+10) + (28+7) + (31+4) \\ &= 35 + 35 + \cdots + 35 \\ &= 35 \times 10 = 350 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$S = 175.$$

———————— 예 제 ————————

02. 다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $-11,\ -8,\ -5,\ -2,\ \cdots$

(2) $6,\ 3,\ 0,\ -3,\ \cdots$

09. 다음 등차수열의 합을 구하여라.

(1) $a_n = 2n + 1$, 10째항까지

(3) $a_n = 2n + 5$, 33항까지

———————— 연습 문제 ————————

194. 다음은 등차수열이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) 6, 0, -6, □, □

(2) □, 15, □, 27

(3) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, □, □

(4) □, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, □

195. 다음 등차수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

(1) 3, 6, 9, $\cdots$

(2) 10, 7, 4, 1, $\cdots$

196. 일반항 a_n 이 다음과 같은 등차수열의 첫째항과 공차를 구하여라.

(1) $a_n = 3n + 5$

(2) $a_n = -7n + 9$

196*. 일반항 a_n 이 다음과 같은 등차수열의 10항까지의 합을 구하여라.

(1) $a_n = 3n + 5$

(2) $a_n = -7n + 9$

———————— 추가문제 ————————

217. 어느 프로야구 투수는 시즌 개막 한 달 전부터 개막전에 대비해 매일 투구 수를 늘려가며 연습을 해왔다고 한다. 첫째 날 50개, 둘째 날 52개, 셋재 날 54개, $\cdots$와 같이 매일 2개씩 늘려가며 30일간 연습을 했다면 연습한 투구 수는 총 몇 개인가?

220. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_5 + a_{15} = 10$일 때, $a_3 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{17}$의 값을 구하여라.

232. 다음 그림에서 가로줄과 세로줄에 있는 세 수가 각각 등차수열을 이룬다. 예를 들어 a, b, 2는 이 순서대로 등차수열을 이루고, b, c, 6은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 $a + b - (d + f)$의 값을 구하여라.

a	b	2
1	c	d
e	6	f

2 등비수열

정의 6) 등비수열

수열 1, 2, 4, 8, $\cdots$와 같이, 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱해서 얻어지는 수열을 등비수열 (Geometric Progression) 이라고 하고 그 일정한 수를 공비라고 한다.

예시 7) 등비수열의 예

다음 수열들은 모두 등차수열이다.

$$1, 2, 4, 8, \cdots ; \quad \text{첫째항}=1 ; \quad \text{공비}=2 ; \quad a_n = 2^{n-1} \tag{7}$$

$$3, 9, 27, 81, \cdots ; \quad \text{첫째항}=3 ; \quad \text{공비}=3 ; \quad a_n = 3^n \tag{8}$$

$$3, 6, 12, 24, \cdots ; \quad \text{첫째항}=3 ; \quad \text{공비}=2 ; \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \tag{9}$$

$$2, -4, 8, -16, \cdots ; \quad \text{첫째항}=2 ; \quad \text{공비}=-2 ; \quad a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1} \tag{10}$$

$$-1, 1, -1, 1, \cdots ; \quad \text{첫째항}=-1 ; \quad \text{공비}=-1 ; \quad a_n = (-1)^n \tag{11}$$

$$\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \cdots ; \quad \text{첫째항}=\frac{2}{3} ; \quad \text{공차}=\frac{3}{2} ; \quad a_n = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \tag{12}$$

예시 8) 등비수열의 합

$a_n = 3^n$ 로 주어진 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대해 10 항까지의 합을 S 라고 하자 (S=$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$). 그러면 S 는 다음과 같이 구할 수 있다.

일단 S 를 정의에 맞게 쓰면

$$S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^8 + 3^9 + 3^{10}$$

이다. 이 식의 양변에 공비 (=3) 을 곱하면

$$3S = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}$$

이다. 이 두 식의 차이를 계산하면

$$\begin{aligned} 2S &= (3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^8 + 3^9 + 3^{10}) \\ &= 3^{11} - 3 \end{aligned}$$

따라서

$$S = \frac{1}{2}(3^{11} - 3)$$

——— 예 제 ———

16. 다음 등비수열의 일반항 a_n 을 구하여라.
   (1) $-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots$
   (2) $9,\ -3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \cdots$
   (3) $1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{3},\ \cdots$

17. 다음 물음에 답하여라.
   (1) 등비수열 $4,\ -12,\ 36,\ -108,\ \cdots$ 에서 -972 는 몇 번째 항인지 구하여라.
   (2) 공비가 -2, $a_6 = -160$ 인 등비수열의 첫째항을 구하여라.

18. $a_n = 3 \cdot 2^{1-2n}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 구하여라.

24. 다음 수열의 합을 구하여라.
   (1) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots$ (제 10 항까지)
   (2) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$ (제 n 항까지)
   (3) $1 - 2 + 4 - \cdots - 512$

——— 연습문제 ———

215. 다음 등비수열 $\{a_n\}$ 의 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.
   (1) $\square,\ \square,\ 18,\ -54,\ \cdots$
   (2) $\sqrt{2},\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \square,\ \square,\ \cdots$

217. 등비수열 $1,\ -4,\ 16,\ -64,\ \cdots$ 에서 -1024 는 몇 번째 항인지 구하여라.

218. $a_n = 2^{2-n}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비를 구하여라.

226. 다음 수열의 합을 구하여라.
(1) $1,\ -3,\ 9,\ -27,\ \cdots$ (제 n 항까지)
(2) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ \cdots,$ (제 10 항까지)
(3) $3 + 6 + 12 + \cdots + 96$

——————— 추가문제 ———————

246. 다음을 계산하여라.

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots + 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

247. 다음 등비수열의 합을 구하여라.

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + \cdots + 2^{-8}$$

3 멱급수

정의 9) 멱급수

수열의 합을 '급수' 라고 한다. 그 중에서

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \cdots n + \cdot 3^n + \cdots$$

와 같이 등차수열 $(1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 과 등비수열 $(3,\ 3^2,\ 3^3,\ \cdots)$ 이 곱해진 수열의 합을 일컫어 멱급수라고 한다.

예시 10) 멱급수 구하기

위에 정의된 멱급수에서 10항까지의 합을 구해보자.

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + \cdots + 10 \cdot 3^{10}$$

이라고 하자. 등비급수의 합을 구할 때와 마찬가지로, 등비급수의 공비인 3을 양변에 곱하면

$$3S = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^5 + \cdots + 10 \cdot 3^{11}$$

이다.

양변의 차를 구하면

$$-2S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10} - 10 \cdot 3^{11}$$

이다.

$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10} = \frac{1}{2}(3^{11} - 3)$$

이므로

$$-2S = \frac{1}{2}(3^{11} - 3) - 10 \cdot 3^{11}$$

이다. 이것을 정리하면

$$S = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3^{11} - 3) - 10 \cdot 3^{11}\right]$$