

## 수학(상) : 01 다항식의 연산

2018년 2월 22일

### 차 례

차 례 . . . . .	1
1 다항식 . . . . .	2
2 다항식의 덧셈, 뺄셈 . . . . .	4
3 다항식의 곱셈 . . . . .	5
4 다항식의 나눗셈 . . . . .	9
4.1 정수의 나눗셈 . . . . .	9
4.2 다항식의 나눗셈 . . . . .	11
4.3 조립제법 . . . . .	13

## 1 다항식

**예시 1)**  $x^2 - 3x + 4$

- (1)  $x$ 에 대한 다항식  $x^2 - 3x + 4$ 은 세 개의 항  $x^2$ ,  $-3x$ ,  $4$ 로 이루어져 있다.
- (2)  $x^2$ 의 차수는 2이고 이차항이라고 부른다. 이차항의 계수는 1이다.
- (3)  $-3x$ 의 차수는 1이고 일차항이라고 부른다. 일차항의 계수는  $-3$ 이다.
- (4)  $4$ 의 차수는 0이고 상수항이라고 부른다.
- (5) 최고차항의 차수가 2이므로 이 다항식  $x^2 + 3x + 4$ 는 이차식이다.
- (6) 이 다항식은 내림차순으로 정리되어 있다. 이것을 오름차순으로 정리하면  $4 + 3x + x^2$ 이다.

**예시 2)**  $x^3 + 2x^2y - x - 2y$

- (1)  $x, y$ 에 대한 다항식  $x^3 + 2x^2y - x - 2y$ 은 네 개의 항으로 이루어져 있다.
- (2)  $x^3$ 의 차수는  $x$ 에 대하여 3차이고, 계수는 1이다.
- (3)  $2x^2y$ 의 차수는  $x$ 에 대하여 2차,  $y$ 에 대하여 1차이며 계수는 2이다.
- (4) 이 다항식을  $x$ 에 대해 내림차순으로 정리하면  $x^3 + 2yx^2 - x - 2y$ 이고,  $y$ 에 대해 내림차순으로 정리하면  $(2x^2 - 2)y + (x^3 - x)$ 이다.
- (5) 이 다항식은  $x$ 에 대하여 삼차식,  $y$ 에 대하여 일차식이다.

**문제 3)** 다항식  $x^3 - 6x + 4$ 에 대한 다음 설명 중 틀린 것을 고르시오.

- ① 세 개의 항으로 이루어져 있다.
- ② 일차항의 계수는 6이다.
- ③ 상수항은 4이다.
- ④ 3차 다항식이다.
- ⑤ 오름차순으로 정리하면  $4 - 6x + x^3$ 이다.

**문제 4)** 다음 다항식에 대한 설명 중 틀린 것을 고르시오.

- ①  $\sqrt{x+1}$ ,  $\frac{1}{x^2} + 3$ 은 다항식이 아니다.
- ②  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ 는  $x, y, z$ 에 대한 다항식이다.
- ③  $x^2 + 3xy + 2y^2$ 은  $x, y$ 에 대한 이차식이다.
- ④  $x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4$ 에서  $x^2y^2$ 의 계수는  $-4$ 이다.
- ⑤  $2x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x + 4y - 3$ 을  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하면  $2x^2 - (3y - 2)x + 3y^2 - 4y - 3$ 이다.

## 2 다항식의 덧셈, 뺄셈

다항식  $A, B, C$ 에 대하여 다음 법칙들이 성립한다.

정의 5)

1. 교환법칙 :  $A + B = B + A$                        $AB = BA$
2. 결합법칙 :  $(A + B) + C = A + (B + C)$        $(AB)C = A(BC)$
3. 분배법칙 :  $A(B + C) = AB + AC$

예시 6)

- (1)  $(3x + 2y) + (4x - 3y) = (3x + 4x) + (2y - 3y) = (3 + 4)x + (2 - 3)y = 7x - y$
- (2)  $3(x^2 - x + 1) + 2(-x^2 + 2x - 3) = (3x^2 - 3x + 3) + (-2x^2 + 4x - 6)$   
 $= (3x^2 - 2x^2) + (-3x + 4x) + (3 - 6) = (3 - 2)x^2 + (-3 + 4)x + (-3)$   
 $= x^2 + x - 3.$

문제 7)

$A = 3x^2 + 3xy - 5y^2$ ,  $B = x^2 - xy - 3y^2$  일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1)  $2A - B$ 를 계산하여라.
- (2)  $A - 2X = B$ 를 만족시키는 다항식  $X$ 를 구하여라.

### 3 다항식의 곱셈

#### 정리 8) 곱셈공식 (1)

$$(1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(4) (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(5) (ax + b)(bx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

문제 9) 다음 식을 전개하여라.

$$(1) (2x + 1)^2 =$$

$$(2) (3x - 1)^2 =$$

$$(3) (x + 3)(x + 4) =$$

$$(4) (x + 2)(3x + 2) =$$

#### 문제 10)

(1)  $x + y = 5$ ,  $xy = 6$  일 때  $x^2 + y^2$  의 값을 구하여라.

(2)  $x - y = 2$ ,  $x^2 + y^2 = 34$  일 때,  $xy$  의 값을 구하여라.

문제 11)  $x + \frac{1}{x} = 4$  일 때, 다음 식의 값을 구하여라 (단,  $x > 1$ ).

$$(1) x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$(2) x - \frac{1}{x} =$$

**정리 12) 곱셈공식 (2)**

$$(6) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(7) \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(8) \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(9) \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(10) \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(11) \quad (x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$$

**예시 13)** (6), (8), (10)의 식을 유도해보면

$$\begin{aligned}(6) \quad (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = (a^3 + 2a^2b + 2ab^2) + (a^2b + 2ab^2 + b^3) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8) \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a^3 - a^2b + ab^2) + (a^2b - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10) \quad (a + b + c)^2 &= \{(a + b) + c\}^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\end{aligned}$$

**문제 14)** (7), (9), (11)의 식을 유도하여라.

**문제 15)** 다음 식을 전개하여라.

(1)  $(x + 2)^3 =$

(2)  $(x - 1)^3 =$

(3)  $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) =$

(4)  $(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1) =$

(5)  $(a + 2b - c)^2 =$

(6)  $(x + 2)(x - 4)(x + 5) =$

**문제 16)**

$a + b = 3$ ,  $ab = -2$  일 때,  $a^3 + b^3$  의 값을 구하여라.

**문제 17)**

$a - b = 1$ ,  $ab = 4$  일 때,  $a^3 - b^3$  의 값을 구하여라.

**문제 18)**

$a + b + c = 9$ ,  $ab + bc + ca = 8$  일 때,  $a^2 + b^2 + c^2$  의 값을 구하여라.

**정리 19) 곱셈공식 (3)**

$$(12) \quad (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$(13) \quad (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$$

**예시 20)** (13)의 식을 유도해보면

$$\begin{aligned} (10) \quad (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) &= \{(a^2 + b^2) + ab\}\{(a^2 + b^2) - ab\} \\ &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = a^4 + a^2b^2 + b^4 \end{aligned}$$

**문제 21)** (12)의 식을 유도하여라.

**문제 22)** 다음 식을 전개하여라.

$$(1) \quad (2a + b - c)(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + bc + 2ca) =$$

$$(2) \quad (x - y - 1)(x^2 + y^2 + xy + x - y + 1) =$$

$$(3) \quad (4x^2 + 2xy + y^2)(4x^2 - 2xy + y^2) =$$

**문제 23)**

$a + b + c = 3$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ ,  $abc = -4$  일 때,  $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하여라.



## 4 다항식의 나눗셈

### 4.1 정수의 나눗셈

예시 24)

32을 5로 나누면 몫은 6이고 나머지는 2이다.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 5 \overline{) 32} \\ \underline{30} \\ 2 \end{array}$$

이것을

$$32 = 5 \times 6 + 2$$

로 표현할 수 있다. 하지만

$$32 = 5 \times 5 + 7$$

이라고 해서 몫이 5이고 나머지가 7이라고 말하지는 않는다. 또한,

$$32 = 5 \times 7 + (-3)$$

라고 해서 몫이 7이고 나머지가  $-3$ 이라고 말하지는 않는다.

**정의 25)**

$a$ 가 정수이고,  $b$ 가 자연수일 때,

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b)$$

가 성립하면,  $a$ 를  $b$ 로 나누었을 때의 몫은  $q$ , 나머지는  $r$ 이다.

**예시 26)**

- (1) 32을 4로 나누면 ( $28 = 4 \times 8 + 0$ ) 몫이 8이고 나머지가 0이다. 이때 32는 4으로 나누어떨어진다고 한다. 또한 4은 32의 약수, 32는 4의 배수이다.
- (2) -32는 5으로 나누면 ( $-32 = 5 \times (-7) + 3$ ) 몫이 -7이고 나머지가 3이다.
- (3) 2로 나누어떨어지는 정수를 짝수, 2로 나누었을 때 나머지가 1인 정수를 홀수라고 한다. 따라서 5는 홀수, 0은 짝수, -4는 짝수이다.

**예시 27)** 주어진  $a, b$ 에 대하여,  $a$ 를  $b$ 로 나누었을 때의 몫  $q$ 와 나머지  $r$ 을 각각 구하여라.

- (1)  $a = 50, \quad b = 4$
- (2)  $a = 50, \quad b = 5$
- (3)  $a = 50, \quad b = 12$
- (4)  $a = 0, \quad b = 4$
- (5)  $a = -14, \quad b = 5$
- (6)  $a = -14, \quad b = 2$

## 4.2 다항식의 나눗셈

정수와 마찬가지로 다항식도 나눌 수 있다.

**예시 28)**

다항식  $x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ 을  $x^2 - 2x - 1$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 1 \overline{) \begin{array}{l} x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \\ x^3 - 2x^2 - x \\ \hline 4x^2 + 6x - 3 \\ 4x^2 - 8x - 4 \\ \hline 14x + 1 \end{array}} \\
 \end{array}$$

몫이  $x + 4$ 이고 나머지가  $14x + 1$ 이다.

이것을

$$x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(x + 4) + 14x + 1$$

로 표현한다. 한편

$$x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(x + 3) + x^2 + 12x$$

도 성립한다. 하지만 몫이  $x + 3$ 이고 나머지가  $x^2 + 12x$ 이라고 말하지는 않는다.

**정의 29)**

$A, B$ 가 다항식일 때,

$$A = BQ + R \quad (R \text{의 차수} < B \text{의 차수})$$

가 성립하면,  $A$ 를  $B$ 로 나누었을 때의 몫은  $Q$ , 나머지는  $R$ 이다.

**예시 30)**

- (1)  $x^3 + 11 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3$ 이므로  $x^3 + 11$ 을  $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫은  $x^2 - 2x + 4$ , 나머지는 3이다.
- (2)  $x^4 + 4x^2 + 16 = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$ 이므로  $x^4 + 4x^2 + 16$ 를  $x^2 + 2x + 4$ 로 나누었을 때의 몫은  $x^2 - 2x + 4$ 이고 나머지는 0이다. 이때,  $x^4 + 4x^2 + 16$ 는  $x^2 + 2x + 4$ 로 나누어떨어진다고 말한다.

**문제 31)** 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

- (1)  $(3x^3 - 2x^2 - 5x + 1) \div (x - 2)$
- (2)  $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1) \div (x^2 - 2x - 2)$

**문제 32)**

다항식  $A$ 는  $x^3 + 1$ 으로 나누어떨어지고 이 때의 몫이  $x + 1$ 이다. 다항식  $A$ 를 구하여라.

### 4.3 조립제법

나누는 수  $B$ 가 일차식일 때, 다음의 조립제법을 사용할 수 있다.

**예시 33)**

$3x^3 - 2x^2 - 5x + 1$ 를  $x - 2$ 로 나누는 과정은

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -2 & -5 & 1 \\ & & 6 & 8 & 6 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}$$

로 간단히 표시할 수 있다. 이때, 몫은  $3x^2 + 4x + 3$ 이고, 나머지는 7이다. 이것은 문제 31)의 (1)에서 구한 답과 일치한다.

**문제 34)** 조립제법을 사용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1)  $(x^3 - 2x^2 - 5x + 3) \div (x + 2)$

(2)  $(2x^3 + 3x^2 - 6x + 1) \div (x - \frac{1}{2})$

**문제 35)**

위의 결과를 이용하여  $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ 를  $2x - 1$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

답

문제 7)

(1)  $5x^2 + 7xy - 7y^2$

(2)  $x^2 + 2xy - y^2$

문제 9)

(1)  $4x^2 + 4x + 1$

(2)  $9x^2 - 6x + 1$

(3)  $x^2 + 7x + 12$

(4)  $3x^2 + 8x + 4$

문제 10)

(1) 13

(2) 15

문제 11)

(1) 14

(2)  $2\sqrt{3}$

문제 15)

(1)  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(2)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(3)  $x^3 + 8y^3$

(4)  $27a^3 - 1$

(5)  $a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab - 4bc - 2ca$

(6)  $x^3 + 3x^2 - 18x - 40$

문제 16)

45

문제 17)

13

문제 18)

65

문제 22)

(1)  $8a^3 + b^3 + b^3 + 6abc$

(2)  $x^3 - y^3 - 1 + xy + x - y$

(3)  $16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$

문제 23)

15

문제 27)

(1)  $q = 12, \quad r = 2$

(2)  $q = 10, \quad r = 0$

(3)  $q = 4, \quad r = 2$

(4)  $q = 0, \quad r = 0$

(5)  $q = -3, \quad r = 1$

(6)  $q = -7, \quad r = 0$

문제 31)

(1) 몫 :  $3x^2 + 4x + 3$ , 나머지 : 7

(2) 몫 :  $2x - 1$ , 나머지 :  $6x - 3$

문제 32)

$A = x^4 + x^3 + x + 1$

문제 34)

(1) 몫 :  $x^2 - 4x + 3$ , 나머지 : -3

(2) 몫 :  $2x^2 + 4x - 4$ , 나머지 : -1

문제 35)

몫 :  $x^2 + 2x - 2$ , 나머지 : -1