

미적분2 : 삼각함수의 덧셈공식과 활용

July 26, 2015

1 삼각함수의 덧셈공식

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (5)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (6)$$

증명. 생략.

□

2 삼각함수의 배각(삼배각) 공식

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (7)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (8)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (9)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (10)$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad (11)$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^3 \alpha} \quad (12)$$

증명. (1), (3), (5)에 β 대신 α 혹은 2α 를 넣어 정리하면 얻어진다.

□

3 삼각함수의 반각공식

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (13)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (14)$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (15)$$

증명. (13), (14) 은 (8) 으로부터 당연하다. (15) 은 (13) 에서 (14) 을 나누면 얻어진다. \square

4 곱을 합으로 바꾸는 공식

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (16)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad (17)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (18)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \quad (19)$$

증명. (1), (2) 을 더하거나 빼고 2로 나누면 (16), (17) 이 얻어진다. (3), (4) 을 더하거나 빼고 2로 나누어 잘 정리하면 (18), (19) 이 얻어진다. \square

5 합을 곱으로 바꾸는 공식

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (20)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (21)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (22)$$

$$\sin A + \sin B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (23)$$

증명. (16)–(19) 식에 $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ 로 치환해 정리한다. 다시말해, $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ 를 대입해 정리한다. \square