미적분 1 : 04 연속함수

2018년 1월 27일

차 례

차 례 1

1 한 점에서의 연속 2

2 구간에서의 연속 5

3 연속함수의 성질 8

4 최대 · 최소의 정리와 사이값 정리 10

1 한 점에서의 연속

정의 1)
함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

가 성립하면

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 연속이다

라고 말한다.

따라서 다음 세 가지를 만족시켜야만 $f(x)$가 $x = a$에서 연속이다.

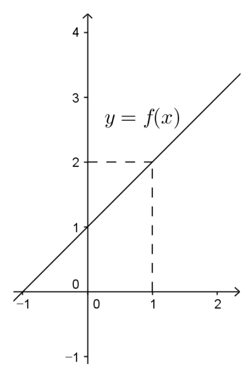
1. $f(a)$가 존재한다.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$가 성립한다.

예시 2)

함수 $f(x) = x + 1$와 실수 1에 대해

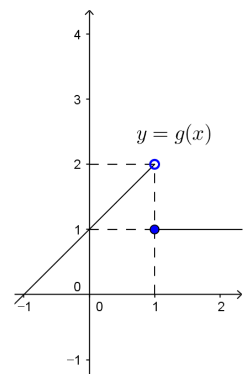
1. $f(1)$이 존재한다$(= 2)$.
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$가 존재한다$(= 2)$.
3. $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$가 성립한다.

따라서 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.



예시 3)

함수 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x<1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 와 실수 1에 대해

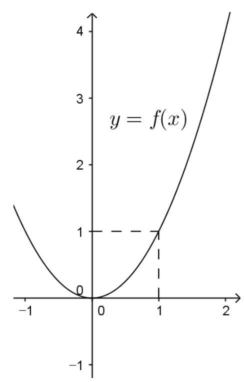


1. $f(1)$이 존재한다 $(=2)$.
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$가 존재하지 않는다.
   (좌극한과 우극한이 일치하지 않기 때문이다.)
3. $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$가 성립하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이 아니다.

문제 4)

함수 $f(x) = x^2$ 와 실수 1에 대해

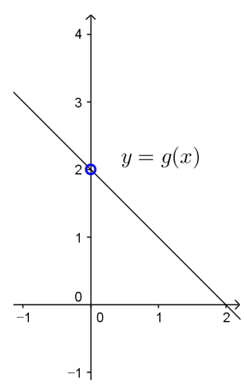


1. $f(1)$이 존재한다 $(=\square)$ / 존재하지 않는다.
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$가 존재한다 $(=\square)$ / 존재하지 않는다.
3. $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$가 성립한다 / 성립하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다 / 연속이 아니다.

문제 5)

함수 $f(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x}$ 와 실수 0에 대해

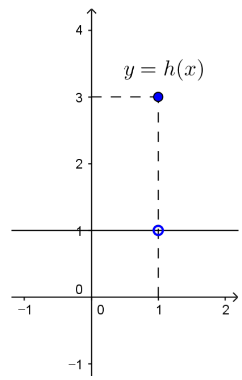


1. $f(0)$이 존재한다 $(=\square)$ / 존재하지 않는다.
2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$가 존재한다 $(=\square)$ / 존재하지 않는다.
3. $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$가 성립한다 / 성립하지 않는다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다 / 연속이 아니다.

문제 6)

함수 $h(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 1) \\ 3 & (x = 1) \end{cases}$ 와 실수 1에 대해



1. $h(1)$ 이 존재한다 $(= \boxed{})$ / 존재하지 않는다.
2. $\lim_{x \to 1} h(x)$ 가 존재한다 $(= \boxed{})$ / 존재하지 않는다.
3. $h(1) = \lim_{x \to 1} h(x)$ 가 성립한다 / 성립하지 않는다.

따라서 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

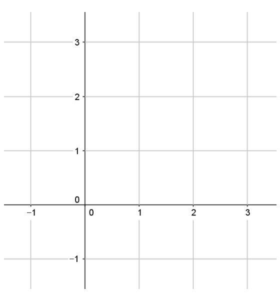
문제 7)

다음 함수의 그래프를 그리고 연속성을 조사하여라.

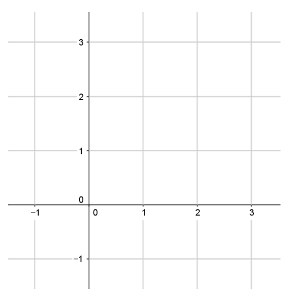
(1) $y = |2x - 2|$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

(2) $y = [x]$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

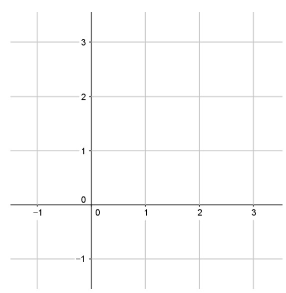
(3) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 2|}$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.



(1)



(2)



(3)

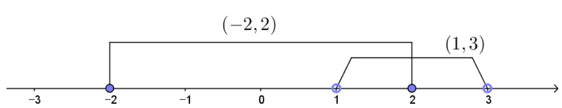
2 구간에서의 연속

정의 8) 구간
두 실수 a, b $(a < b)$에 대하여 다음과 같은 기호를 쓴다.

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\} \quad \cdots\cdots \quad \text{열린 구간}$$
$$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\} \quad \cdots\cdots \quad \text{닫힌 구간}$$
$$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$$

예시 9)

(1) 예를 들어, 열린 구간 $(1,3)$은 집합 $\{x|1 < x < 3\}$을 뜻한다. 또한, 닫힌구간 $[-2,2]$는 집합 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$를 뜻한다.



(2) $(2,5]$이나 $[-3,\sqrt{2})$와 같이 한쪽이 닫혀있고, 한쪽은 열려있는 구간은 반열린구간, 혹은 반닫힌 구간이라고 불린다.

(3) $\{x \mid x > 2\}$와 같은 집합은 $(2,\infty)$와 같이 쓴다. 마찬가지로 $\{x \mid x \le 5\} = (-\infty,5]$가 성립하며, 실수 전체 집합은 $(-\infty,\infty)$와 같이 쓰기도 한다.

문제 10)
다음 부등식 혹은 등식의 해를 구간으로 나타내어라.

(1) $x^2 - 6x + 5 < 0$

(2) $x^2 - 10x \le 0$

(3) $2x + 4 \ge 0$

(4) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

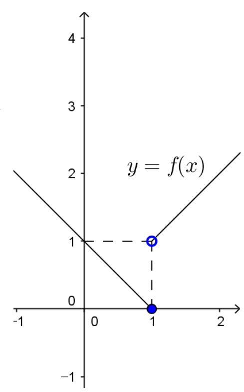
정의 11)
함수 $f(x)$와 구간 I에 대하여, 구간 I의 모든 실수 a에 대해 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 연속이면

함수 $f(x)$가 구간 I에서 연속이다

라고 말한다.

예시 12)

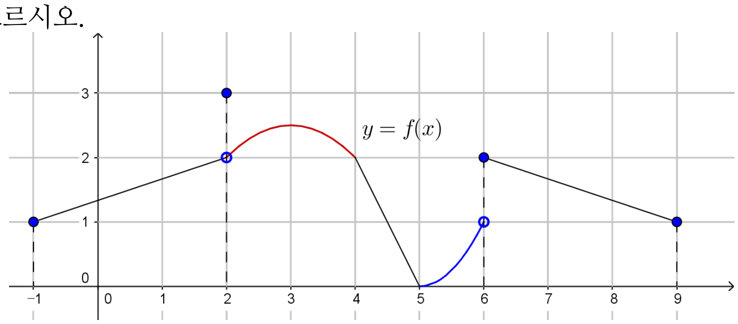
함수 $f(x) = \begin{cases} -x+1 & (x \le 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$에 대해



(1) $f(x)$는 $(-1, 0)$에서 연속이다. $-1 < a < 0$인 모든 실수 a에 대해 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이기 때문이다.

(2) $f(x)$는 $[0, 2]$에서 연속이 아니다. $f(x)$는 $x = 1$에서 불연속이기 때문이다.

문제 13)
구간 $[-1, 9]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같이 주어질 때, 옳은 것을 모두 고르시오.



ㄱ. $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x)$

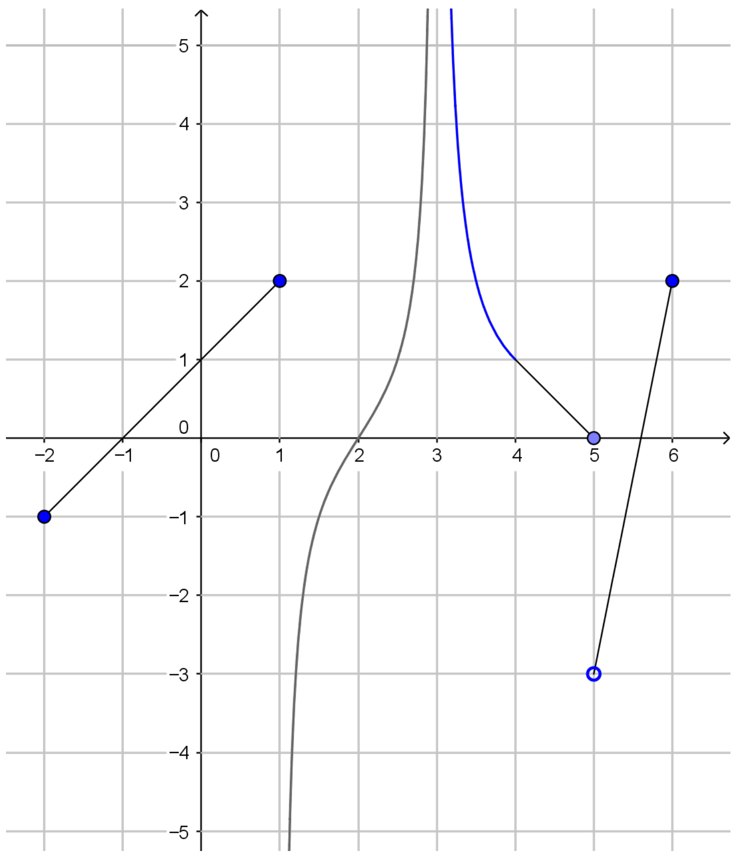
ㄴ. $f(x)$는 $x = 6$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 $[3, 5]$에서 연속이다.

ㄹ. 불연속인 점은 3개이다.

문제 14)

$-2 \leq x < 3,\ 3 < x \leq 6$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같이 주어질 때, 옳은 것을 모두 고르시오.



ㄱ. $f(x)$는 $[4,6]$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

ㄷ. $f(x)$는 $x = 3$에서 연속이다.

3 연속함수의 성질

예시 15)

함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 함수 $f(x)+g(x)$도 $x=a$에서 연속임을 증명하여라.

$f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\\ &= f(a)+g(a)\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

문제 16)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, $kf(x)$도 $x=a$에서 연속임을 증명하여라.

문제 17)
함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = a$에서 연속일 때, $f(x)g(x)$도 $x = a$에서 연속임을 증명하여라.

일반적으로 다음 정리가 성립한다

정리 18)
함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = a$에서 연속이면 다음 함수들도 $x = a$에서 연속이다.

(a) $kf(x)$

(b) $f(x) + g(x)$

(c) $f(x) - g(x)$

(d) $f(x)g(x)$

(e) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x) \neq 0$)

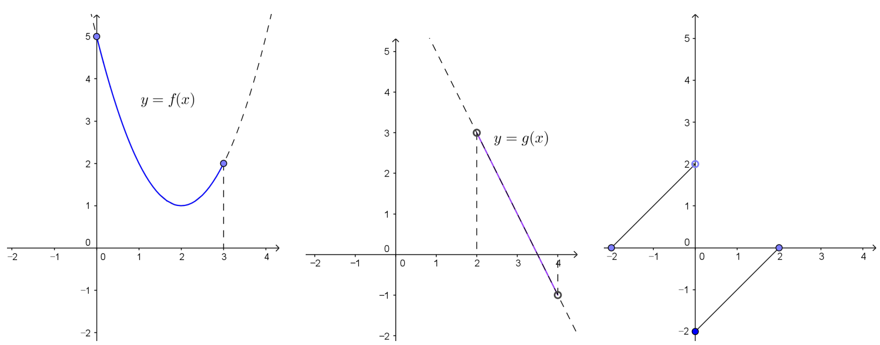
4 최대 · 최소의 정리와 사이값 정리

문제 19)
다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. 닫힌 구간 $[0,3]$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ 는 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.

ㄴ. 열린 구간 $(2,4)$ 에서 함수 $g(x) = -2x + 7$ 의 최솟값을 가진다.

ㄷ. 닫힌구간 $[-2,2]$ 에서 함수 $h(x) = \begin{cases} x+2 & (x<0) \\ x-2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 는 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.

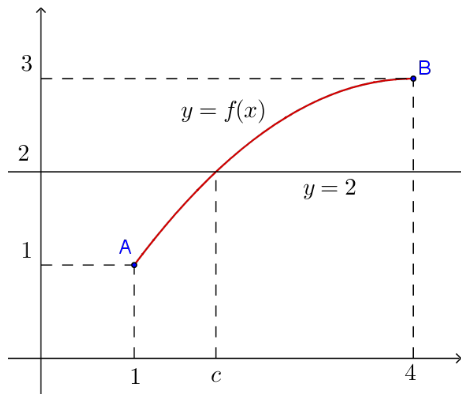


연속함수의 최솟값과 최댓값에 대해서는 다음 정리가 성립한다.

> **정리 20) 최대 · 최소의 정리**
> 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

예시 21)

연속 함수 $f(x)$가 $f(1)=1$, $f(4)=3$를 만족한다고 하자. $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $A(1,1)$, $B(4,3)$을 연속적으로 이은 선이므로 직선 $y=2$와 반드시 만나게 된다. 따라서 $f(c)=2$를 만족시키는 실수 c가 반드시 존재한다.



일반적으로 다음 정리가 성립한다.

정리 22) 사이값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이며, k가 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 실수일 때,

$$f(c)=k$$

를 만족시키는 실수 c가 존재한다. (단, $a<c<b$)

문제 23)

실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=1$, $f(0)=3$, $f(1)=-1$일 때, 다음 물음에 답하여라.

ㄱ. $f(x)=-\frac{1}{2}$를 만족시키는 x가 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $f(x)=2$를 만족시키는 x가 두 개 이상 존재한다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 해가 적어도 하나 존재한다.

답

문제 4)
존재한다, 1, 존재한다, 1, 성립한다, 연속이다.

문제 5)
존재하지 않는다, 존재한다, 2, 성립하지 않는다, 연속이 아니다.

문제 6)
존재한다, 3, 존재한다, 1, 성립하지 않는다, 연속이 아니다.

문제 7)

(1) 연속이다.

(2) 연속이 아니다.

(3) 연속이 아니다

문제 10)

(1) $(1, 5)$

(2) $[0, 10]$

(3) $[-2, \infty)$

(4) $(-\infty, \infty)$

문제 13)
ㄱ, ㄷ.

문제 14)
ㄴ.

문제 19)
ㄱ.

문제 23)
ㄱ, ㄴ, ㄷ.