수학(하) : 10 함수

2018년 10월 29일

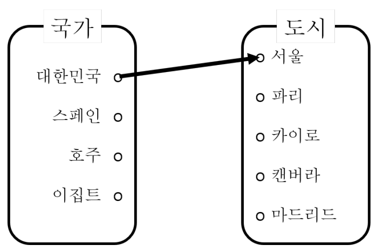
차 례

1 함수

정의 1) 함수
두 집합 X, Y에 대하여, X의 모든 원소 x가 Y의 한 원소 y에 대응되는 것을 $\boxed{\text{함수}}$라고 한다.*

예시 2)

(1) 다음 그림에서 각 국가를 그 국가에 속한 도시에 연결하여라.



(2) 위의 그림은 하나의 함수를 나타낸다. 집합 '국가'의 모든 원소들은 집합 '도시'의 한 원소에 대응되었다. '대한민국'이 '서울'에 대응된 것을

$$f(\text{대한민국}) = \text{서울}$$

와 같이 나타내고 '서울'을 '대한민국'의 $\boxed{\text{함숫값}}$이라고 말한다. 마찬가지로 $f(\text{스페인}) = \boxed{\phantom{\text{캔버라}}}$, $f(\text{호주}) = \boxed{\phantom{\text{캔버라}}}$, $f(\text{이집트}) = \boxed{\phantom{\text{캔버라}}}$ 이다.

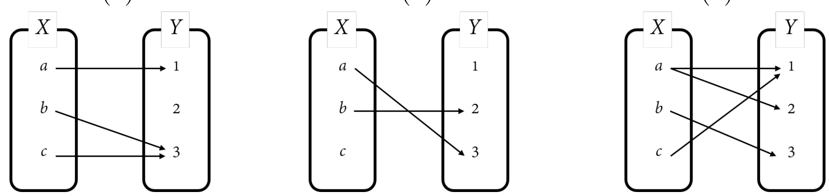
(3) 집합 '국가'를 $\boxed{\text{정의역}}$, 집합 '도시'를 $\boxed{\text{공역}}$이라고 한다. 한편, 함숫값들의 집합을 $\boxed{\text{치역}}$이라고 한다.** 따라서

$$\begin{aligned} \text{정의역} &= \{\text{대한민국, 스페인, 호주, 이집트}\} \\ \text{공역} &= \{\text{서울, 파리, 카이로, 캔버라, 마드리드}\} \\ \text{치역} &= \{\text{서울, 카이로, 캔버라, 마드리드}\} \end{aligned}$$

*이것을 기호로 $f : X \to Y$로 나타낸다.
**그러므로 치역은 공역의 부분집합이다.

문제 3)
다음 대응들 중 함수인 것을 골라라.

(1) (2) (3)

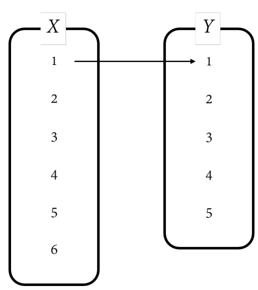


문제 4) 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여
함수 $f : X \to Y$ 를

$$f(x) = x\text{의 약수의 개수}$$

라고 하자. 예를 들어 1 의 약수는 1 개이므로 $f(1) = 1$ 이다.

(1) 다음 대응을 완성하여라.



(2) 정의역=
공역=
치역=

문제 5) 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여
함수 $f : X \to Y$ 를

$$f(x) = x\text{를 4로 나누었을 때의 나머지}$$

라고 하자. 이때, $f(3)$, $f(8)$, $f(10)$ 의 값을 차례로 구하여라.

정의역(공역)에 대한 별도의 언급이 없으면 정의역(공역)은 실수전체의 집합이다.

예시 6) 다음 함수들의 정의역, 공역, 치역을 각각 구하여라.

(1) x가 자연수의 집합일 때,

$$f(x) = x\text{를 3으로 나누었을 때의 나머지}$$

(2) $y = 2x - 4$

(3) $y = x^2$

(1) x는 자연수이므로 정의역은 자연수 전체의 집합이다. 공역에 대해서는 별도의 언급이 없으므로 공역은 실수 전체의 집합이다. 또

$$\begin{array}{llll} f(1) = 1 & f(4) = 1 & f(7) = 1 & \\ f(2) = 2 & f(5) = 2 & f(8) = 2 & \cdots \\ f(3) = 0 & f(6) = 0 & f(9) = 0 & \end{array}$$

이므로 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.

(2) 정의역과 공역에 대한 말이 없으므로 실수 전체의 집합이다.
함숫값 $2x - 4$는 모든 실수가 될 수 있다. 따라서, 치역은
실수 전체의 집합이다.

(3) 정의역과 공역에 대한 말이 없으므로 실수 전체의 집합이다.
함숫값 x^2은 모든 음이 아닌 실수가 될 수는 있으나 음수가 될 수는 없다. 따라서 치역은 $\{x \mid x \geq 0\}$이다.

답 :

(1)	정의역=자연수 전체의 집합	공역=실수 전체의 집합	치역=$\{0, 1, 2\}$
(2)	정의역=실수 전체의 집합	공역=실수 전체의 집합	치역=실수 전체의 집합
(3)	정의역=실수 전체의 집합	공역=실수 전체의 집합	치역=$\{x \mid x \geq 0\}$

문제 7) 다음 함수들의 정의역, 공역, 치역을 각각 구하여라.

(1) $f(x) = x$를 넘지 않는 최대의 정수

(2) $y = -x^2 + 3$

정의 8) 두 함수 f, g가

(1) 정의역과 공역이 각각 같고

(2) 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$

이면 두 함수가 같다고 말하고 $f = g$라고 나타낸다.

예시 9)

(1) 정의역이 $\{0, 1\}$인 두 함수 f, g가

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2$$

를 만족시킬 때, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$이므로 $f = g$이다.

(2) 정의역이 $\{1, 2, 3\}$인 두 함수 f, g가

$$f(x) = x^2 - x \quad g(x) = 2x - 2$$

를 만족시킬 때, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$이지만 $f(3) \neq g(3)$이므로 $f \neq g$이다.

문제 10)

(1) 두 함수 $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$가

$$f(x) = |x| \quad g(x) = x^2$$

를 만족시킬 때, 두 함수는 서로 (같다 / 다르다).

(2) 두 함수 $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$, $g : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3, 4\}$가

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = |x| + 1$$

를 만족시킬 때, f와 g는 서로 (같다 / 다르다).

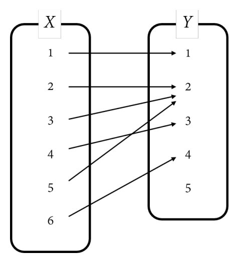
2 함수의 그래프

정의 11) 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 집합

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

을 함수 f 의 $\boxed{\text{그래프}}$라고 한다.

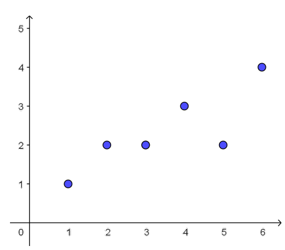
예시 12) 문제 4) 에서의 함수



의 그래프는

$$\begin{aligned}&\{(x, f(x)) \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\\ =&\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4)), (5, f(5)), (6, f(6))\}\\ =&\{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 2), (6, 4)\}\end{aligned}$$

이다. 이것을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



문제 13)

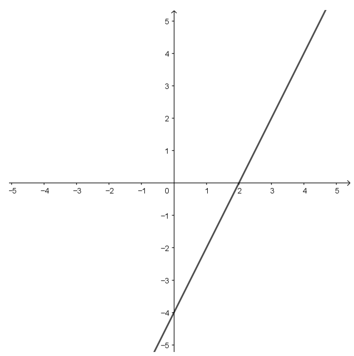
문제 5) 에서의 함수 f 의 그래프를 그려라.

예시 14)
함수 $y = 2x - 4$의 그래프를 그려라.

정의역은 실수 전체이므로 그래프는

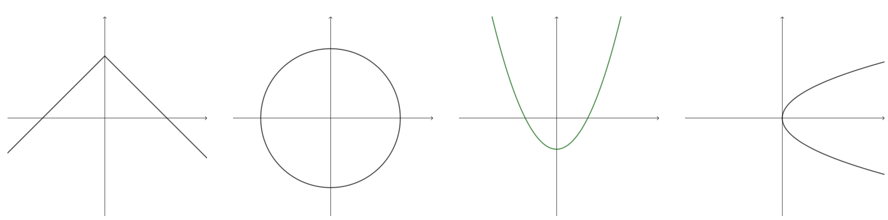
$$\{(x, 2x-4) \mid x\text{는 실수}\}$$

이다. 따라서 $(0, -4)$, $(1, -2)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$ 등의 점들을 포함한다. 이것들을 모두 이으면 다음과 같은 직선이 된다.



이것은 평소에 그리던 $y = 2x - 4$의 그래프이다.

문제 15) 다음 중 함수의 그래프인 것을 모두 골라라.



(1) (2) (3) (4)

3 여러가지 함수

어떤 대응이 함수이려면, 각각의 x값이 y값에 한 개씩 대응되어야 했었다. 그래서 x값이 두 개 이상의 y값에 대응되는 (가)와 같은 경우는 함수라고 하지 않았다. 이때 y에 대응되는 x값이 두 개 이상이어도 상관없었다. 즉 (나)와 같은 경우도 함수라고 했었다. y에 대응되는 x값이 최대 한 개뿐인 (다)와 같은 함수를 $\boxed{\text{일대일함수}}$라고 한다.

정의 16) 일대일함수
함수 $f : X \to Y$에서 $x_1, x_2 \in X$일 때,

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)^*$$

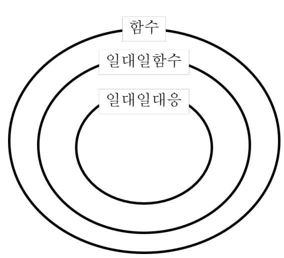
이면 f를 일대일함수라고 부른다.

(다)의 경우, 모든 y값이 어떤 x값으로부터 대응되는 건 아니었다. 1, 2, 3에 대응되는 x값은 하나씩 있었지만 4에 대응되는 x값은 없었다. 모든 y값이 x로부터 대응되는 (라)와 같은 경우를 $\boxed{\text{일대일대응}}$이라고 한다.

정의 17) 일대일대응
함수 $f : X \to Y$가 다음 두 조건을 만족시키면 일대일대응이라고 부른다.

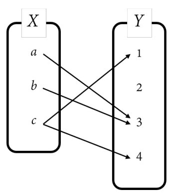
i) f가 일대일함수이다.

ii) 공역과 치역이 같다.



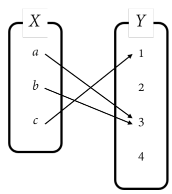
*이것의 대우인 $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ 를 만족시켜도 된다.

(가)



함수가 아니다.

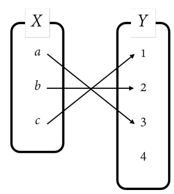
(나)



함수이다.

일대일함수가 아니다.

(다)

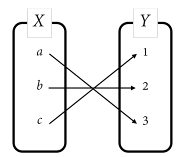


함수이다.

일대일함수이다.

일대일대응이 아니다.

(라)



함수이다.

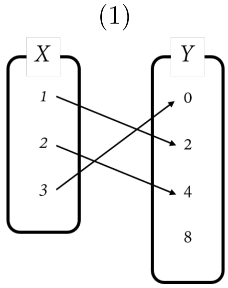
일대일함수이다.

일대일대응이다.

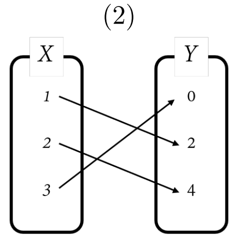
문제 18)

다음 여섯 개의 대응 중 함수의 개수를 a, 일대일함수의 개수를 b, 일대일대응의 개수를 c라고 할 때, a, b, c의 값을 각각 구하여라.

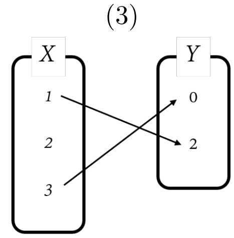
(1)



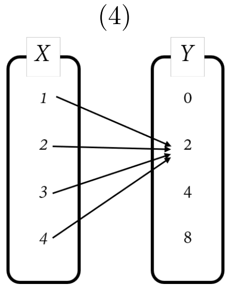
(2)



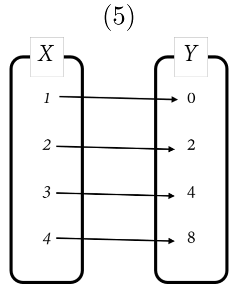
(3)



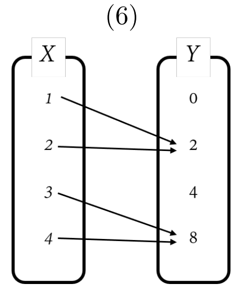
(4)



(5)



(6)

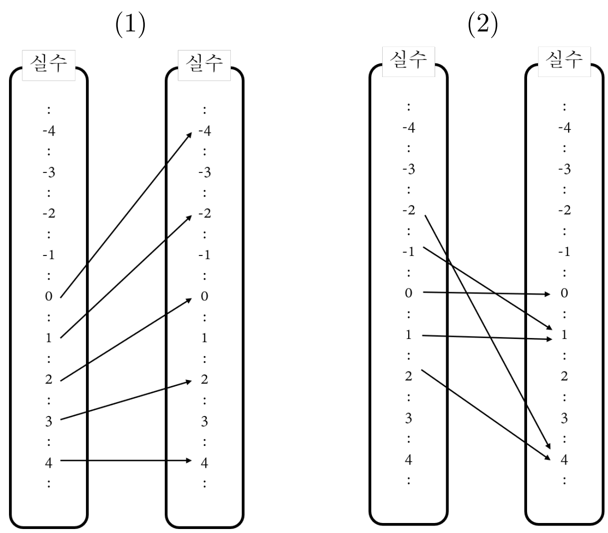


예시 19) 다음 함수들의 종류를 조사하여라.

(1) $y = 2x - 4$ (2) $y = x^2$

방법1

두 함수의 정의역과 공역은 모두 실수전체의 집합이다. 모든 실수의 대응관계를 다 나타낸다는 것은 불가능한 일이므로 몇 개의 정수에 대해서만 대응관계를 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 개 이상의 x값이 하나의 y값에 대응되지 않는다. 따라서 일대일함수이다.* 정의역과 공역이 무한집합이라 화살표로 다 표시할 수는 없지만, 모든 실수들은 함숫값이다. 따라서 치역은 실수 전체의 집합이고 이 함수는 일대일대응이다.

(2) 두 개의 x값이 하나의 y값에 대응되는 경우가 있다. 예를 들어 -2와 2는 모두 4로 대응된다. 따라서 일대일함수가 아니다.**

---

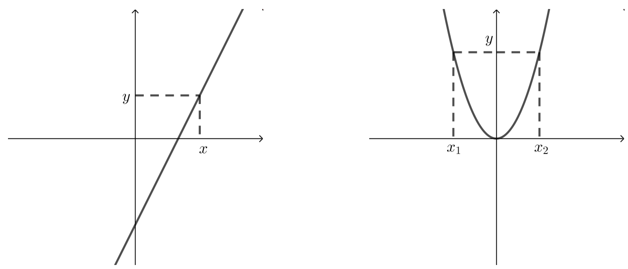
*다음과 같이 해도 된다 ;
$f(x_1) = f(x_2)$이면, $2x_1 - 4 = 2x_2 - 4$이고 $2x_1 = 2x_2$이다. 따라서 $x_1 = x_2$이다. [정리 16)]

**$x_1 = -2$, $x_2 = 2$는 명제 $x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$의 반례가 된다.

방법2

두 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

(1) (2)



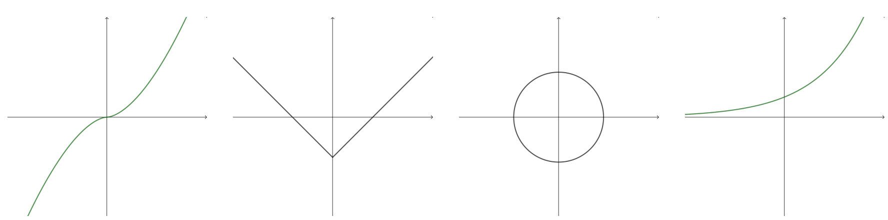
(1) 두 개 이상의 x값이 하나의 y값에 대응되는 일이 없다. 따라서 일대일함수이다. 또한 치역은 실수 전체의 집합이어서 공역과 같다. 따라서 일대일대응이다.

(2) 양수 y에 대해, y로 대응되는 x값은 두 개 존재한다. 따라서 일대일함수가 아니다.

답 : (1) 일대일대응이다.
(2) 일대일함수가 아닌 함수이다.

문제 20)

다음 네 개의 그래프가 나타내는 대응에 대하여, 함수의 개수를 a, 일대일함수의 개수를 b, 일대일대응의 개수를 c라고 할 때 a, b, c의 값을 각각 구하여라.



(1) (2) (3) (4)

정의 21) 항등함수
정의역과 공역이 같은 함수 $f : X \to X$ 가

$$f(x) = x$$

로 정의되면 이 함수를 $\boxed{\text{항등함수}}$라고 부른다.

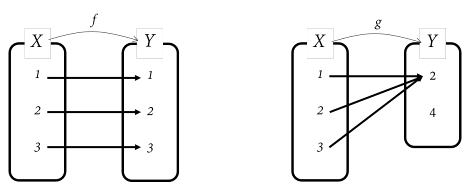
항등함수는 기호로 I 라고 쓰기도 한다. 또한, 정의역과 공역이 X 임을 강조하기 위해 I_X 라고 쓰기도 한다.

정의 22) 상수함수
함수 $f : X \to Y$ 가

$$f(x) = c \quad (c\text{는 상수})$$

로 정의되면 이 함수를 $\boxed{\text{상수함수}}$라고 부른다.

예시 23) 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 4\}$ 에 대하여
두 함수 $f : X \to X$ 와 $g : X \to Y$ 가



와 같이 주어지면

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \qquad & g(1) &= 2 \\ f(2) &= 2, \qquad & g(2) &= 2 \\ f(3) &= 3, \qquad & g(3) &= 2 \end{aligned}$$

이므로 함수 f 는 항등함수이고* 함수 g 는 상수함수이다.

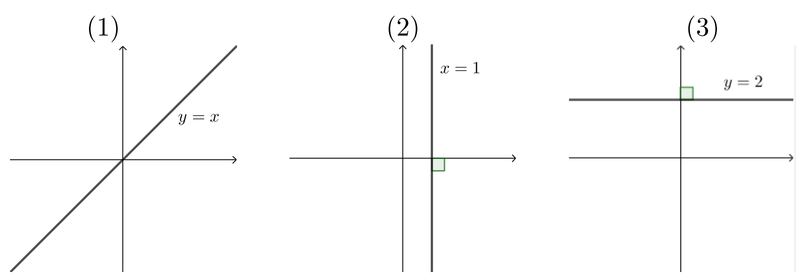
---

*$f = I = I_X$ 이다. 따라서 $\begin{aligned} I(1) &= 1, \quad & I_X(1) &= 1 \\ I(2) &= 2 & I_X(2) &= 2 \\ I(3) &= 3 & I_X(3) &= 3 \end{aligned}$ 이라고 쓸 수 있다.

문제 24) 예시 23) 에서

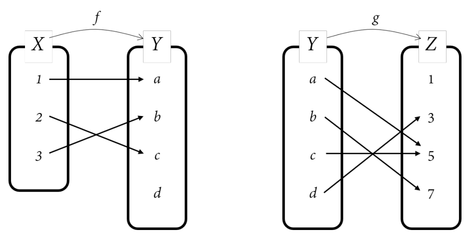
- f 는 (일대일함수이다 / 일대일함수가 아니다)
- f 는 (일대일대응이다 / 일대일대응이 아니다)
- g 는 (일대일함수이다 / 일대일함수가 아니다)
- g 는 (일대일대응이다 / 일대일대응이 아니다)

문제 25) 다음 중에서 항등함수와 상수함수의 그래프를 각각 찾으시오.

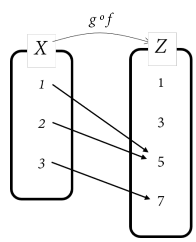


4 합성함수

예시 26) 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$가 주어져 있을 때,



새로운 함수 $g \circ f : X \to Z$를 다음과 같이 만들 수 있다.



정의 27) 합성함수
두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$에 대하여 새로운 함수 $g \circ f : X \to Z$를

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

로 정의하자. 이 함수를 f와 g의 $\boxed{\text{합성함수}}$라고 부른다.

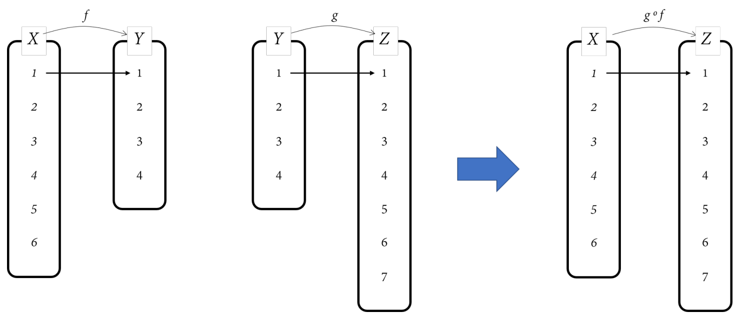
예시 28) 예시 26)에서

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 5$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = 5$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = 7$$

문제 29) 세 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$를

$$f(x) = x\text{의 약수의 개수}$$
$$g(x) = 2x - 1$$

로 정의하자. 아래 그림의 화살표를 채우고 $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(6)$의 값을 각각 구하여라.



문제 30) 두 함수 f, g가

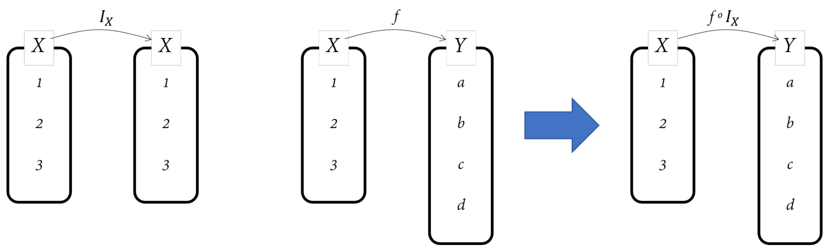
$$f(x) = 2x - 2, \qquad g(x) = x^2$$

로 정의될 때, $(g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

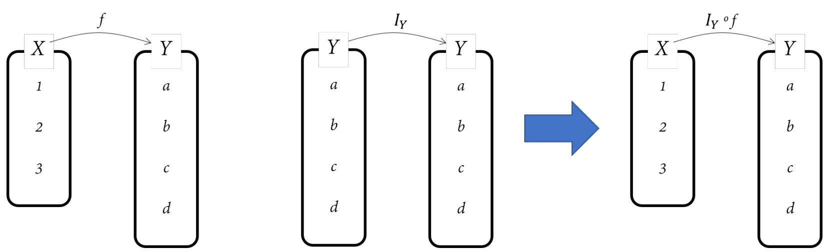
예시 31) 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$를

$$f(1) = a, \quad f(2) = c, \quad f(3) = d$$

로 정의하자. X의 항등함수 I_X에 대하여 $f \circ I_X$를 구하면,



이다. 따라서 $\boxed{f \circ I_X = f}$이다. 또 Y의 항등함수 I_Y에 대하여 $I_Y \circ f$를 구하면,



이다. 따라서 $\boxed{I_Y \circ f = f}$이다. 즉

$$\boxed{f \circ I = I \circ f = f}$$

로 나타내기도 한다.

실수 a와 집합 A에 대하여

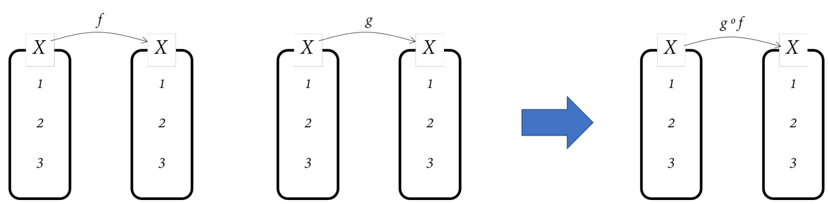
$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a \times 1 = 1 \times a = a$$
$$A \cap U = U \cap A = A$$
$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

인것과 비슷하다.

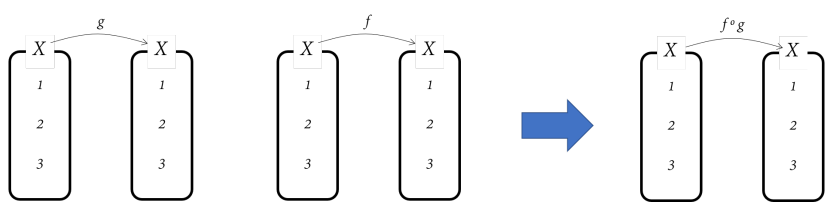
예시 32) 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$, $g : X \to X$를

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 2, \qquad & g(1) &= 1 \\
f(2) &= 3, \qquad & g(2) &= 2 \\
f(3) &= 1, \qquad & g(3) &= 2
\end{aligned}
$$

로 정의하자. $g \circ f$를 구하면



이고, $f \circ g$를 구하면



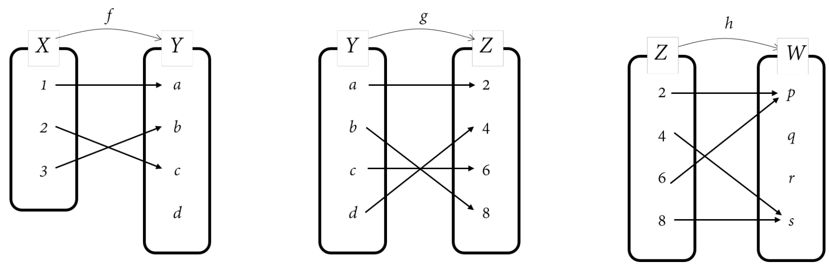
이다. 따라서,

$$\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

이다.* 즉 함수의 합성에 대해서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

*가끔씩은 $g \circ f = f \circ g$인 경우도 있다. 하지만 일반적으로 $g \circ f$와 $f \circ g$는 서로 다르다.

예시 33) 세 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$가 아래와 같이 주어져있다고 하자.



$((h \circ g) \circ f)(1)$과 $(h \circ (g \circ f))(1)$을 계산하면

$$((h \circ g) \circ f)(1) = (h \circ g)(f(1)) = (h \circ g)(a) = p$$
$$(h \circ (g \circ f))(1) = h((g \circ f)(1)) = h(2) = p$$

이다. 따라서

$$((h \circ g) \circ f)(1) = p = (h \circ (g \circ f))(1)$$

마찬가지로

$$((h \circ g) \circ f)(2) = \boxed{} = (h \circ (g \circ f))(2)$$
$$((h \circ g) \circ f)(3) = \boxed{} = (h \circ (g \circ f))(3)$$

이다. 그러므로

$$\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$$

이다. 즉, 함수의 합성에 대해서 결합법칙이 성립한다.

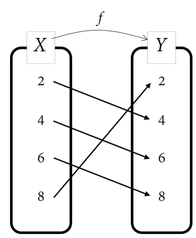
정리 34) 합성함수의 성질

(a) $I \circ f = f \circ I = f$

(b) $g \circ f \neq f \circ g$

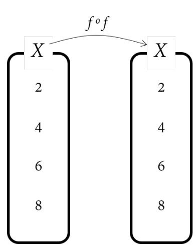
(c) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

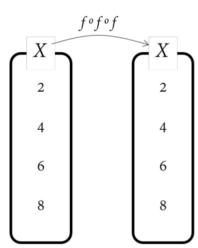
문제 35) 함수 $f : X \to X$가 다음과 같이 주어져있을 때,

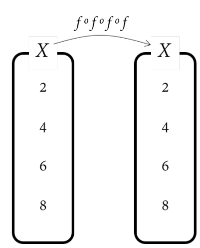


다음 함수들을 각각 구하여라.

(1) $f \circ f$ (2) $f \circ f \circ f$ (3) $f \circ f \circ f \circ f$



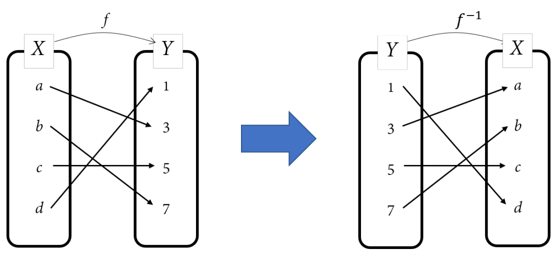




5 역함수

함수란, 모든 x값이 하나의 y값에 대응되는 것을 말했다. 또 일대일대응이란, 모든 y값들이 하나의 x값들로부터 대응되는 것을 말했다. 따라서 어떤 함수가 일대일대응이면, y를 x로 보내는 함수를 만들 수 있다.

예시 36) 일대일대응인 함수 $f : X \to Y$가 주어져있을 때,
새로운 함수 $f^{-1} : Y \to X$를 다음과 같이 만들자.



$f(a) = 3$이기 때문에 $f^{-1}(3) = a$로 정했다. 마찬가지로

$$\begin{aligned} f(a) = 3 \quad &\Longrightarrow \quad f^{-1}(3) = a \\ f(b) = 7 \quad &\Longrightarrow \quad f^{-1}(7) = b \\ f(c) = 5 \quad &\Longrightarrow \quad f^{-1}(5) = c \\ f(d) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad f^{-1}(1) = d \end{aligned}$$

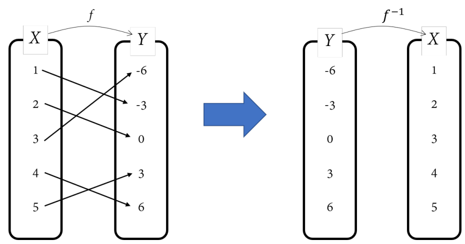
이다. 이와 같은 함수 f^{-1}를 함수 f의 $\boxed{\text{역함수}}$라고 부르고 'f inverse'라고 읽는다.

정의 37) 역함수
함수 $f : X \to Y$가 일대일대응일 때, f의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$는

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

를 만족시키는 함수이다.

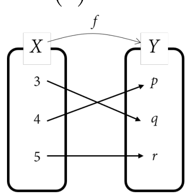
문제 38) 주어진 함수 f의 역함수 f^{-1}를 화살표로 나타내어라.



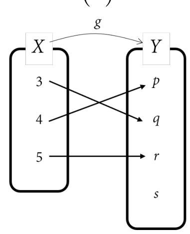
이때, $f^{-1}(-6) = \square$, $f^{-1}(6) = \square$이다.

문제 39) 다음 세 함수 f, g, h 중 역함수가 존재하는 함수를 골라라.

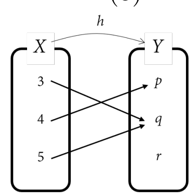
(1)



(2)



(3)



문제 40) 함수 $f(x) = 4x - 1$에 대하여 $f^{-1}(7) = k$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

예시 41) 함수 $f(x)=2x-3$의 역함수를 구하여라.

정의역과 공역에 대한 말이 없으므로 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이다. 따라서 역함수 f^{-1} 또한 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이다.

f는 x를 y로 대응시키는 함수이고, f^{-1}는 y를 x로 대응시키는 함수이다. 이때 $y=2x-3$이므로 $x=\frac{1}{2}(y+3)$이다. 다시 말해, f^{-1}는 y를 $\frac{1}{2}(y+3)$로 대응시키는 함수이다. 이것을 식으로 쓰면

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y+3)$$

이다. 이것을 간단히

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+3)$$

로 쓰기도 한다. 즉 $y=2x-3$의 역함수는 $y=\frac{1}{2}(x+3)$이다.

답 : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+3)$

문제 42) 다음 함수들의 역함수를 구하여라.

(1) $f(x)=3x+3$

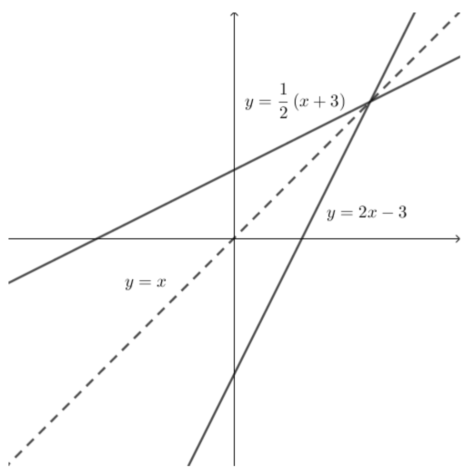
(2) $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$

예시 43)

예시 41) 에서 $y = 2x - 3$ 의 역함수는 $y = \frac{1}{2}(x+3)$ 이다. 이것은

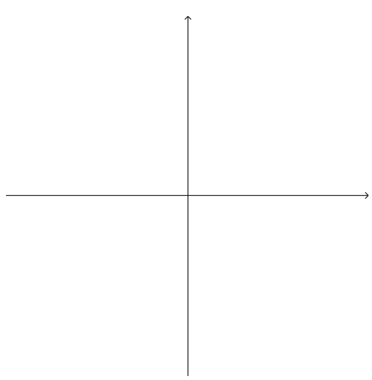
$$y = 2x - 3 \xrightarrow{\qquad\qquad} x = \frac{1}{2}(y+3) \xrightarrow{x \leftarrow y,\ y \leftarrow x\ \text{대입}} y = \frac{1}{2}(x+3)$$

의 과정을 통해 구한 것이다. 즉 x 대신에 y를 대입하고, y 대신에 x를 대입하여 정리하면 역함수가 나온다. 따라서 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y = x$에 대하여 대칭이다.

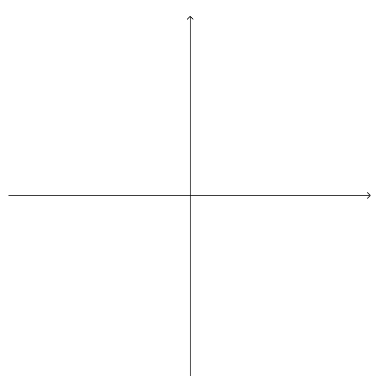


문제 44) 문제 42) 에서 함수와 역함수의 그래프들을 그려라.

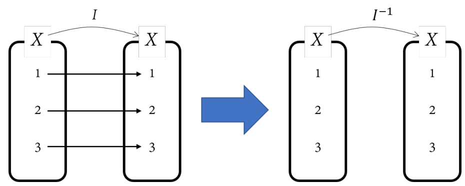
(1)



(2)

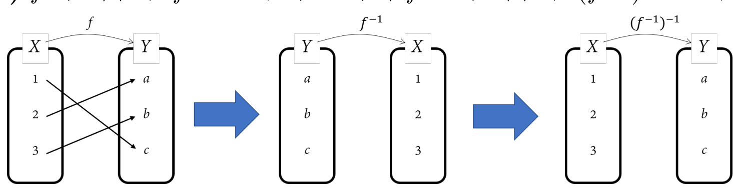


예시 45) 항등함수 I의 역함수 I^{-1}을 구하면



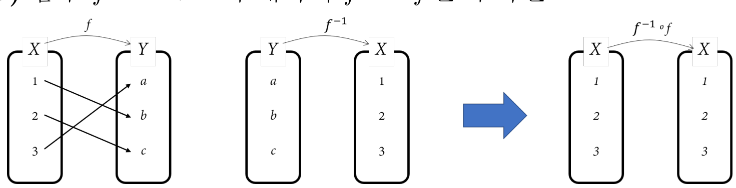
이다. 따라서 $\boxed{I^{-1} = I}$ 이다.

예시 46) f의 역함수 f^{-1}를 구하고 다시 f^{-1}의 역함수 $(f^{-1})^{-1}$를 구하면

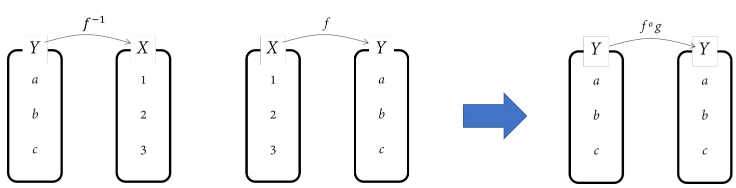


이다. 따라서 $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$ 이다.

예시 47) 함수 $f : X \to Y$에 대하여 $f^{-1} \circ f$를 구하면



이다. 따라서 $\boxed{f^{-1} \circ f = I_X}$ 이다. 또한, $f \circ f^{-1}$를 구하면



이다. 따라서 $\boxed{f \circ f^{-1} = I_Y}$ 이다. 이것들을 간단히

$$\boxed{f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I}$$

라고 쓰기도 한다.

예시 48) $f : X \to Y$와 $g : Y \to X$가 일대일대응일 때 다음을 증명하여라.

$$f \circ g = I \text{이면 } g\text{는 } f\text{의 역함수이다.}$$

f가 일대일대응이므로 f^{-1}가 존재한다.

$$f \circ g = I$$

의 양변에 f^{-1}를 왼쪽에 합성시키면*

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f \circ g &= f^{-1} \circ I \\ I \circ g &= f^{-1} \circ I \\ g &= f^{-1} \end{aligned}$$

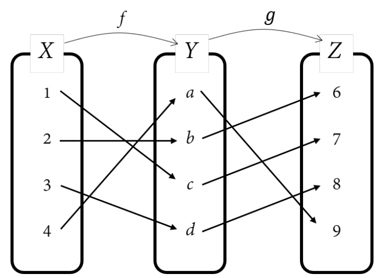
따라서 g는 f의 역함수이다.

문제 49) $f : X \to Y$와 $g : Y \to X$가 일대일대응일 때 다음을 증명하여라.

$$g \circ f = I \text{이면 } g\text{는 } f\text{의 역함수이다.}$$

*함수의 합성은 교환법칙을 만족시키지 않으므로 합성하는 함수를 같은 쪽에만 합성시킬 수 있다. 예를 들어, $\square = \triangle$가 주어져 있을 때 f를 왼쪽에 합성시켜 $f \circ \square = f \circ \triangle$을 얻을 수 있고, 오른쪽에 합성시켜 $\square \circ f = \triangle \circ f$를 얻을 수 있다. 하지만 $\square$에는 왼쪽에, $\triangle$에는 오른쪽에 합성시켜 $f \circ \square = \triangle \circ f$를 얻어낼 수는 없다.

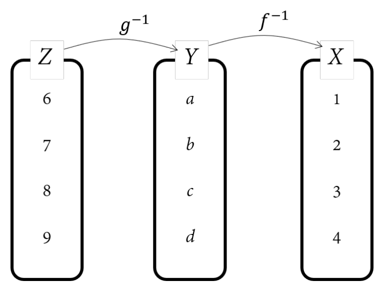
예시 50) 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$가 일대일대응이고, 다음과 같이 주어졌다고 하자.



$g \circ f : X \to Z$는 일대일대응이므로 역함수 $(g \circ f)^{-1} : Z \to X$가 존재한다. $(g \circ f)(2) = 6$이므로 $(g \circ f)^{-1}(6) = 2$이어야 한다. 그리고 이것은

$$(g \circ f)^{-1}(6) = (f^{-1} \circ g^{-1})(6) = f^{-1}(g^{-1}(6)) = f^{-1}(b) = 2$$

와 같이 계산한 것과 같다.



즉 $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$가 아니라

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

이 성립한다.

정리 51) 역함수의 성질

(a) $I^{-1} = I$

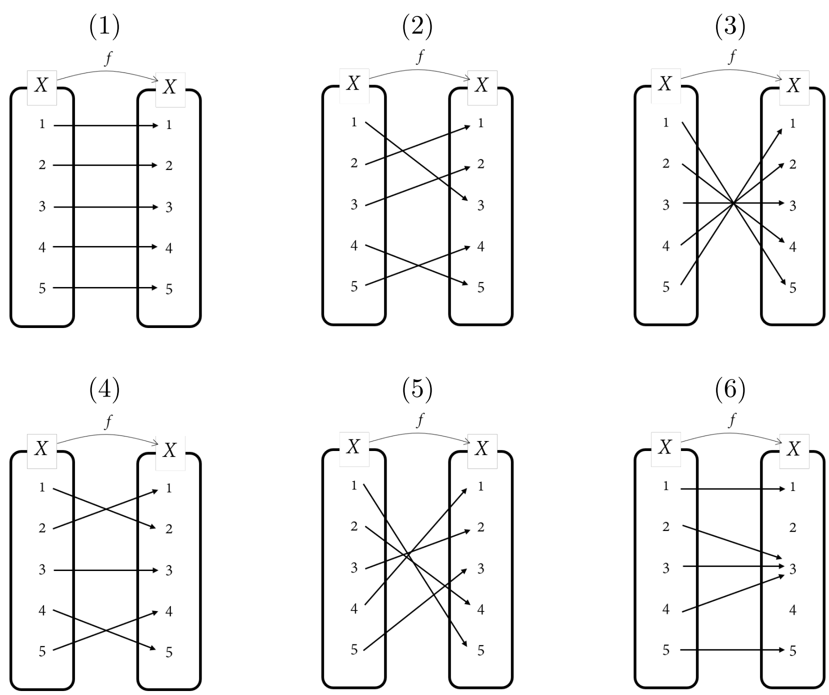
(b) $(f^{-1})^{-1} = f$

(c) $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$

(d) $g = f^{-1} \iff f \circ g = I \iff g \circ f = I$

(e) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

문제 52) 다음 중 $f \circ f = I$를 만족시키는 함수 f를 모두 골라라.

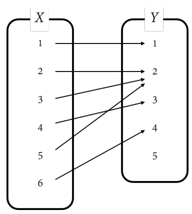


답

문제 3) (1)

문제 4)

(1)



(2) 정의역 $=\{1,2,3,4,5,6\}$
공역 $=\{1,2,3,4,5\}$
치역 $=\{1,2,3,4\}$

문제 5)
$f(3)=3,\ f(8)=0,\ f(10)=2$

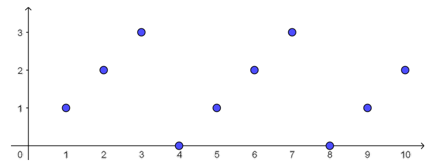
문제 7)

(1) 정의역=실수 전체의 집합
공역=실수 전체의 집합
치역=정수 전체의 집합

(2) 정의역=실수 전체의 집합
공역=실수 전체의 집합
치역=$\{x \,|\, x \le 3\}$

문제 10)
(1) 같다　　(2) 다르다

문제 13)



문제 15) (1), (3)

문제 18) $a=5,\ b=3,\ c=2$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
함수	○	○		○	○	○
일대일함수	○	○			○	
일대일대응		○			○	

문제 20) $a=3,\ b=2,\ c=1$

	(1)	(2)	(3)	(4)
함수	○	○		○
일대일함수	○			○
일대일대응	○			

문제 23)

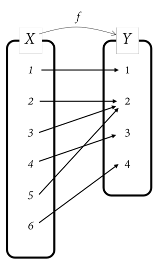
- 일대일함수이다
- 일대일대응이다
- 일대일함수가 아니다
- 일대일대응이 아니다

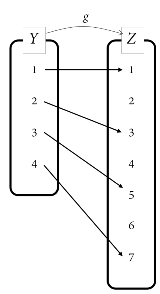
문제 24)

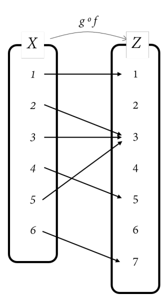
항등함수 : (1), 상수함수 : (3)

문제 29) $(g \circ f)(3) = 3$

$(g \circ f)(6) = 7$



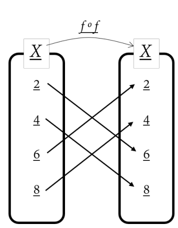




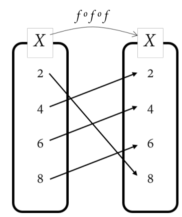
문제 30) $(g \circ f)(3) = 16$

문제 35)

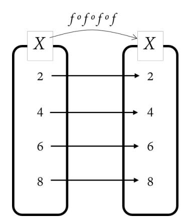
(1)



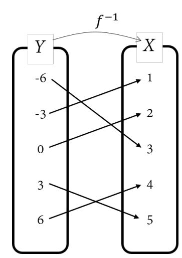
(2)



(3)



문제 38) $f^{-1}(-6) = 3,\ f^{-1}(6) = 4$



문제 39) (1)

문제 40) $k = 2$

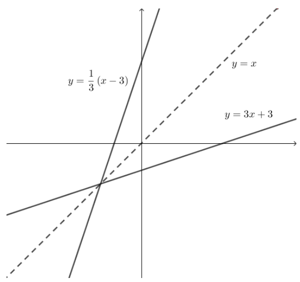
문제 42)

(1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-3)$

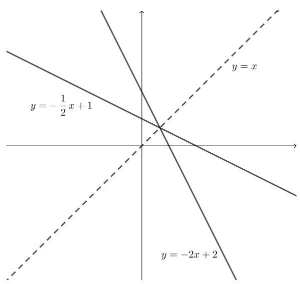
(2) $f^{-1}(x) = -2x + 2$

문제 44)

(1)



(2)



문제 49)

f가 일대일대응이므로 f^{-1}가 존재한다.

$$f \circ g = I$$

의 양변에 f^{-1}를 오른쪽에 합성시키면

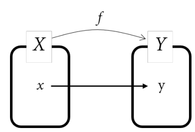
$$\begin{aligned} g \circ f \circ f^{-1} &= I \circ f^{-1} \\ g \circ I &= I \circ f^{-1} \\ g &= f^{-1} \end{aligned}$$

따라서 g는 f의 역함수이다.

문제 52) (1), (3), (4)

요약

1. 함수



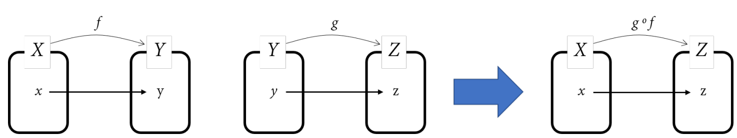
2. 함수의 그래프

$$\text{함수 } f\text{의 그래프} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

3. 여러가지 함수

- 함수 $\xrightarrow{x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$ 일대일함수 $\xrightarrow{\text{공역=치역}}$ 일대일대응
- 항등함수 : $f(x) = x \qquad (f = I)$
- 상수함수 : $f(x) = c \qquad$ (c는 상수)

4. 합성함수



5. 역함수