현빈 : 09 산술–기하 부등식, 코시–슈바르츠 부등식

January 27, 2015

1 산술–기하 부등식

산술평균 (Arithmetic Mean), 기하평균 (Geometric Mean), 조화평균 (Harmonic Mean) 사이의 관계를 나타내는 부등식이다.

정의 1. 1) 산술평균, 기하평균, 조화평균
양수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 에 대해, 산술평균 A 는

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

이다. 또 기하평균 G 는

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$$

이다. 마지막으로 조화평균 H 는

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

을 만족시키는 값이다. 즉

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

이다.

정리 1. 2)

정의 1.1에서 정의한 세 평균에 대해

$$A \geq G \geq H$$

가 성립한다. 이때 등호는 $x_1 = \cdots = x_n$ 일 때 성립한다.

Proof. 일반적인 경우의 증명은 수학적 귀납법(Mathematical Induction) 등을 통해 증명할 수 있다. (cf. `http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_of_arithmetic_and_geometric_means`) 여기서는 $n = 2$ 일때, $n = 3$ 일 때의 증명만 간단하게 소개한다.

(1) $n = 2$

두 변량을 a, b 라고 할 때 $(a, b > 0)$

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} & A \geq G \\ \iff & a + b \leq 2\sqrt{ab} \\ \iff & (a+b)^2 \geq 4ab \\ \iff & (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

이다. 이때, 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다. 이는 증명과정에서 명백하다. 또

$$\begin{aligned} & G \geq H \\ \iff & 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \\ \iff & a + b \geq 2\sqrt{ab} \\ \iff & A \geq G \end{aligned}$$

이다. 이때 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

(2) $n = 3$

세 변량을 a, b, c 라고 할 때 $(a, b, c > 0)$

$$A = \frac{a+b+c}{3}, \quad G = \sqrt[3]{abc}, \quad H = \frac{3abc}{ab+bc+ca}$$

이다. $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$ 라고 하면

$$\begin{aligned} & A \geq G \\ \iff & a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \iff & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \\ \iff & (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

이다. 이때, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다. 이는 증명과정에서 명백하다.

또

$$\begin{aligned} & G \geq H \\ \iff & 1 \geq \frac{3(\sqrt[3]{abc})^2}{ab + bc + ca} \\ \iff & ab + bc + ca \geq 3(\sqrt[3]{abc})^2 \end{aligned}$$

인데 마지막 줄은 ab, bc, ca 에 대해 $A \geq G$ 를 쓰면 얻어진다. 이때 등호는 $ab = bc = ca$ 일 때, 즉 $a = b = c$ 일 때, 성립한다. □

2 코시-슈바르츠 부등식

수학자 Augustin-Louis Cauchy(프랑스, 1821), Hermann Amandus Schwarz(독일, 1888) 의 이름을 따서 명명한 중요한 부등식이다. 대개 두 사람의 이름만을 따서 Cauchy-Schwarz Inequality 라고 부르지만 경우에 따라서는 Viktor Bunyakovsky(러시아, 1859) 의 이름도 함께 붙여 Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Inequality 라고 부르기도 한다.

여기에서는 단순히 n 개의 변량에 관한 코시-슈바르츠 부등식을 다루지만, 일반적으로는 내적이 존재하는 벡터공간(vector space with inner product) 에서 항상 성립한다. 적분가능한 실함수의 집합도 벡터공간을 이룬다는 점에서 적분에 관한 코시-슈바르츠 부등식도 성립하는데 역시 아주 중요한 부등식 중의 하나이다.

정리 2. 1) 코시-슈바르츠 부등식

$x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 이 실수이면 다음이 성립한다.

$$({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)({y_1}^2 + \cdots + {y_n}^2) \geq (x_1y_1 + \cdots x_ny_n)^2$$

이때 등호는 $x_1 = ky_1, \cdots x_n = ky_n$ 을 만족하는 실수 k 가 존재할 때 (혹은 그 반대일 때) 성립한다. 즉 $x_1, \cdots, x_n$ 이 0이 아니라고 하면

$$\frac{y_1}{x_1} = \cdots = \frac{y_n}{x_n}$$

일 때 등호가 성립한다.

Proof. 산술-기하 부등식과 마찬가지로 일반적인 경우의 증명은 생략한다.

$n = 2$ 이면 네 실수 a, b, x, y 에 대해

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

이 성립함을 보이면 된다;

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \\ \iff & a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\ \iff & (ay)^2 - 2(ay)(bx) + (bx)^2 \\ \iff & (ay - bx)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

이때 등호는 $ay = bx$ 일 때, 즉 $a = kx$, $b = ky$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재할 때 성립한다.

$n = 3$ 이면 여섯 개의 실수 a, b, c, x, y, z 에 대해

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

$n = 2$ 일 때와 마찬가지로 우변으로 이항하여 정리하면

$$(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$$

이 되어 성립한다. 이때 등호는 $ay = bx$, $az = cx$, $bz = cy$ 일 때, 즉 $a = kb$, $x = ky$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재할 때이다. $\square$

—————— 예 제 ——————

28. $x > 0$, $y > 0$, $xy = 1$ 일 때, $3x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

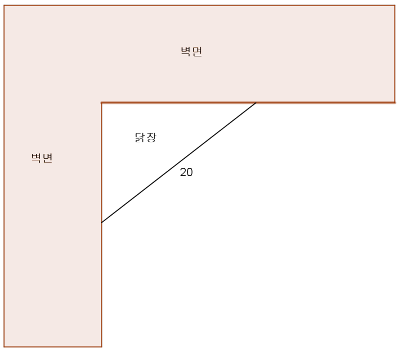
29. $x > 0$, $y > 0$ 이고 $3x + 2y = 16$ 일 때, $\sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ 의 최댓값을 구하여라.

30. $x > 1$ 일 때, $4x + \frac{1}{x-1}$ 의 최솟값을 구하여라.

31. $a > 0$, $b > 0$ 일 때, $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a})$ 의 최솟값을 구하여라.

32. x, y, z 가 실수일 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) $3x + 4y = 5$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하여라.
(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 일 때, $3x + 2y + z$ 값의 범위를 구하여라.

34. 수직인 두 벽면 사이를 길이가 20m 인 철망으로 막은 직각삼각형 모양의 닭장이 있다. 이 닭장의 넓이의 최댓값을 구하여라.



—————— 연습 문제 ——————

83. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.
(1) $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$
(2) $a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

84. $a > 0$, $b > 0$ 이고 $ab = 3$ 일 때, $3a + 4b$ 의 최솟값을 구하여라.

85. 두 양수 a, b 가 $9a^2 + b^2 = 36$ 을 만족시킬 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

86. 0 이 아닌 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 18$ 일 때, xy 의 최솟값을 구하여라.

87. $x > -2$ 일 때, $3x + 5 + \frac{3}{x+2}$ 의 최솟값을 구하여라.

88. $a > 0$, $b > 0$ 일 때, $(3a + 4b)(\frac{3}{a} + \frac{1}{b})$ 의 최솟값을 구하여라.

89. 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 4$ 일 때, $4x + 3y$ 의 값의 범위를 구하여라.

90. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2+b^2=2, x^2+y^2=3$ 일 때, $ax+by$ 의 최댓값을 구하여라.

91. 실수 a, b, c 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=2$ 일 때, $a+2b+3c$ 의 최솟값을 구하여라.

———————— 추가 문제 ————————

97. 다음 물음에 답하여라.

(1) $x>0$, $y>0$ 일 때, $(2x+\frac{1}{y})(\frac{1}{x}+8y)$ 의 최솟값을 m, 그 때의 xy 값을 n 이라 하자. 이 때 mn 의 값을 구하여라.

(2) $a \geq 0$, $b \geq 0$ 이고 $a+b=5$ 일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ 의 최댓값을 구하여라.

(3) 실수 x, y 에 대하여 $4x+3y=5$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하여라.

99. 다음 물음에 답하여라.

(2) 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a+b+3$ 의 값을 구하여라.

(3) $x>3$ 일 때, $3x-8+\frac{1}{x-3}$ 의 최솟값을 a, 그 때의 x 의 값을 b 라고 하자. 이때 $6b-a$ 의 값을 구하여라.

101. $a>0$, $b>0$, $c>0$ 일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

(1) $8a+\frac{4}{a^2}$

(2) $(1+\frac{2b}{a})(1+\frac{c}{b})(1+\frac{a}{2c})$

(3) $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c})$

104. 실수 x 에 대하여 $x^2-x+\frac{9}{x^2-x+1}$ 의 최솟값을 a, 그때의 모든 x 의 값의 합을 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.