수학 I : 03 지수함수와 로그함수

2022년 3월 19일

차 례

1 복습

복습 1) 도형의 평행이동과 대칭이동

도형 $f(x,y)=0$을

(1) x축, y축의 방향으로 각각 a, b만큼 평행이동시키면 $f(x-a,y-b)=0$

(2) x축을 기준으로 대칭이동시키면 $f(x,-y)=0$

(3) y축을 기준으로 대칭이동시키면 $f(-x,y)=0$

(4) 원점을 기준으로 대칭이동시키면 $f(-x,-y)=0$

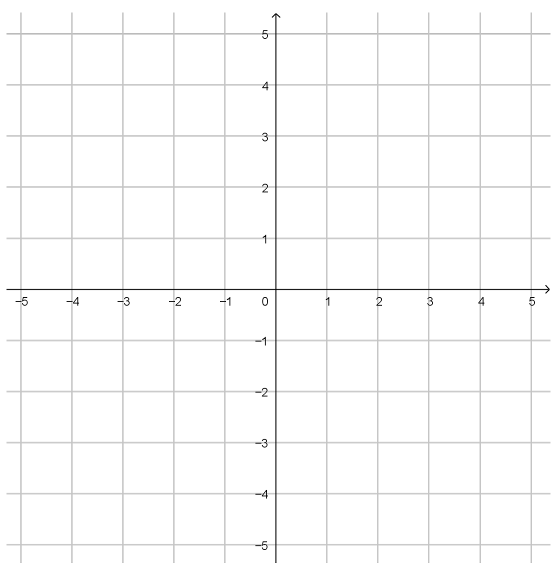
(5) 직선 $y=x$를 기준으로 대칭이동시키면 $f(y,x)=0$

문제 2) 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그리고, 이 그래프를 다음과 같이 이동시킨 도형의 방정식을 구해 그려라.

(1) x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동

(2) x축에 대하여 대칭이동

(3) y축에 대하여 대칭이동



복습 3) 함수, 일대일함수, 일대일대응, 역함수

(1) 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 모든 원소 x가 집합 Y의 한 원소 y에 대응되는 것을 함수라고 한다.

(2) 함수 $f: X \to Y$가

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

이면 f를 일대일함수라고 부른다. (단, $x_1, x_2 \in X$)

(3) 함수 f가 일대일함수이고, 공역과 치역이 같으면 f를 일대일대응이라고 부른다.

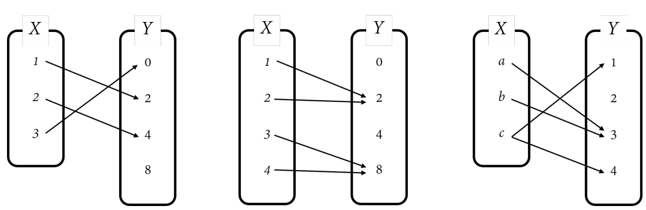
(4) 함수 $f: X \to Y$가 일대일대응일 때, f의 역함수 $f^{-1}: Y \to X$는

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

를 만족시키는 함수이다. f의 그래프와 f^{-1}의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

문제 4)

다음 세 개의 대응 중 함수의 개수를 a, 일대일함수의 개수를 b, 일대일대응의 개수를 c라고 할 때, a, b, c의 값을 각각 구하여라.



정의 5) 증가함수, 감소함수
함수 $f : X \to Y$가

(1) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 이면 f를 증가함수라고 부른다.

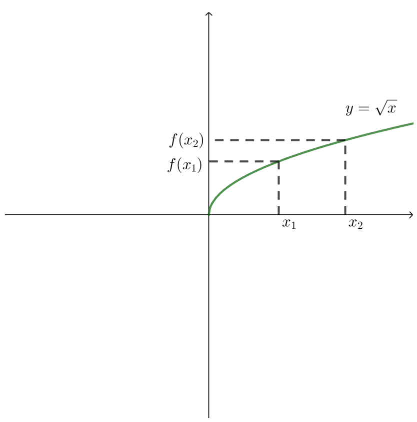
(2) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ 이면 f를 감소함수라고 부른다.

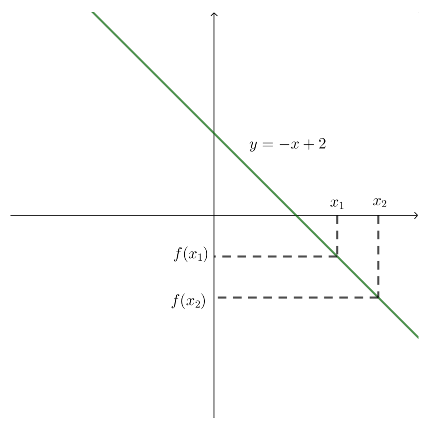
따라서 증가함수와 감소함수는 일대일함수이다.

예시 6)

(1) $f(x) = \sqrt{x}$는, $0 \le x_1 < x_2$일 때 $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$이므로 $f(x_1) < f(x_2)$이다. 따라서 f는 증가함수이다.

(2) $g(x) = -x + 2$는, $x_1 < x_2$일 때 $-x_1 > -x_2$, $-x_1 + 2 > -x_2 + 2$이므로 $g(x_1) > g(x_2)$이다. 따라서 f는 감소함수이다.





문제 7) 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) 함수 $y = \frac{1}{2}x - 1$은 $\square$함수이다.

(2) 함수 $y = -\sqrt{-x+3} + 1$는 $\square$함수이다.

(3) 함수 $y = x^2$은 $x \le 0$에서 $\square$함수이고 $x \ge 0$에서는 $\square$함수이다.

문제 8) 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) 함수 $f(x) = 2x + 4$는 일대일대응이고 f의 역함수는 $f^{-1}(x) = \boxed{\quad\quad}$ 이다. 이때 f의 정의역은 실수 전체의 집합이고 f의 공역도 실수 전체의 집합이다.

(2) 함수 $g(x) = \frac{1}{x+2} + 3$는 일대일대응이고 g의 역함수는 $g^{-1}(x) = \frac{1}{x-3} - 2$ 이다. 이때 g의 정의역은 $\{x \,|\, x \neq -2\}$이고 g의 공역은 $\boxed{\quad\quad\quad}$이다.

(3) 함수 $h(x) = \sqrt{x-2} - 1$는 일대일대응이고 h의 역함수는 $h^{-1}(x) = (x+1)^2 + 2(x \geq -1)$이다. 이때 h의 정의역은 $\boxed{\quad\quad\quad}$이고 h의 공역은 $\{y \,|\, y \geq -1\}$이다.

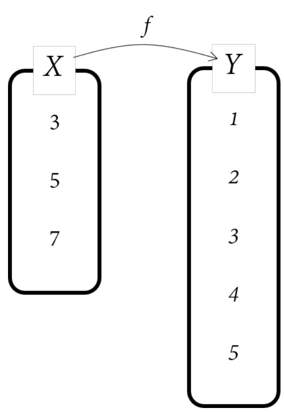
문제 9) 두 집합 $X = \{3, 5, 7\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 함수 $f : X \to Y$의 개수

(2) 일대일함수 $f : X \to Y$의 개수

(3) 증가함수 $f : X \to Y$의 개수

(4) 감소함수 $f : X \to Y$의 개수



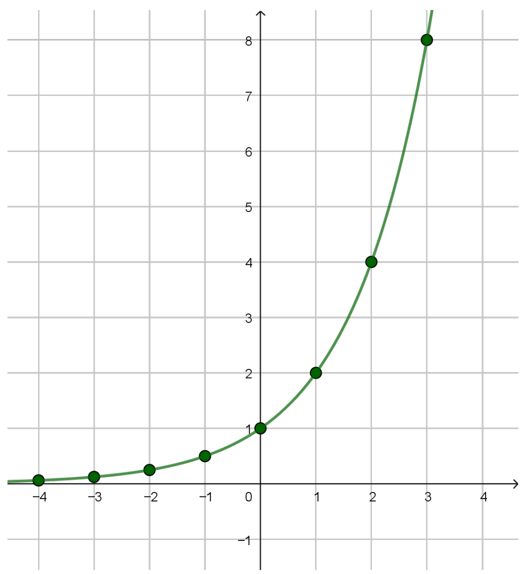
2 지수함수의 그래프

예시 10) $y = 2^x$의 그래프를 그려라.

$y = 2^x$를 만족시키는 모든 점 (x, y)를 표시하면 된다. $x = 1$이면 $y = 2$이고 $x = 2$이면 $y = 4$이다. 따라서 $y = 2^x$의 그래프는 $(1, 2)$, $(2, 4)$와 같은 점들을 포함한다. 이밖에도

$$\begin{aligned}(x, y) =&(1, 2),\ (2, 4),\ (3, 8),\ (4, 16),\ \cdots\\ &(0, 1),\ (-1, \tfrac{1}{2}),\ (-2, \tfrac{1}{4}),\ (-3, \tfrac{1}{8})\ \cdots\end{aligned}$$

와 같은 점들을 찍을 수 있다. 이 점들을 자연스럽게 이으면 다음과 같은 곡선이 나온다.

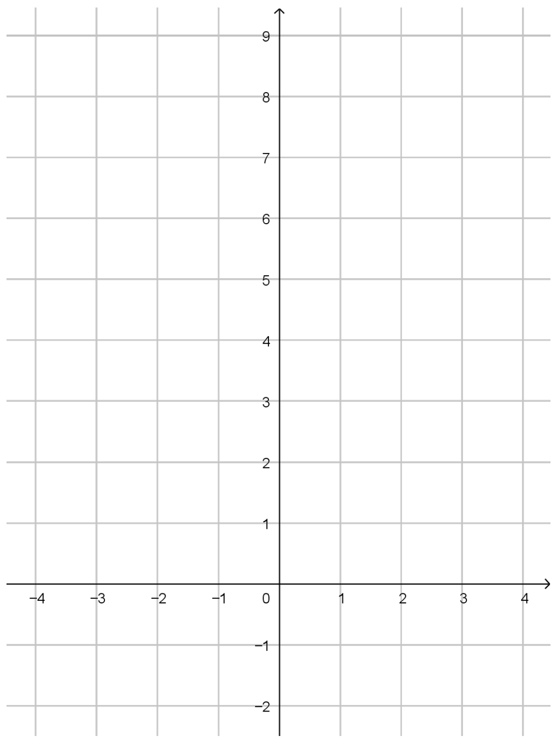


문제 11) 다음 지수함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = 3^x$

(2) $y = (\frac{1}{2})^x$

(3) $y = (\frac{1}{3})^x$

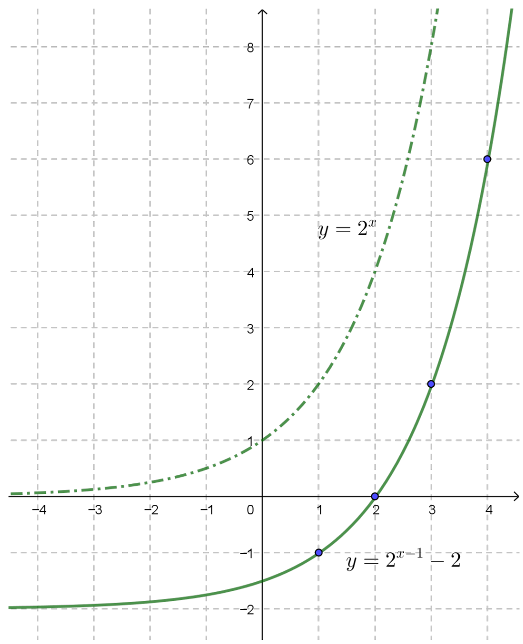


정리 12) 지수함수 $y = a^x (a > 0,\ a \neq 1)$의 성질

- 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
- $a > 1$이면 증가함수이고 $0 < a < 1$이면 감소함수이다.
- 그래프는 $(0, 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 갖는다.

예시 13) 함수 $y = 2^{x-1} - 2$의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

함수 $y = 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 된다. 따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.

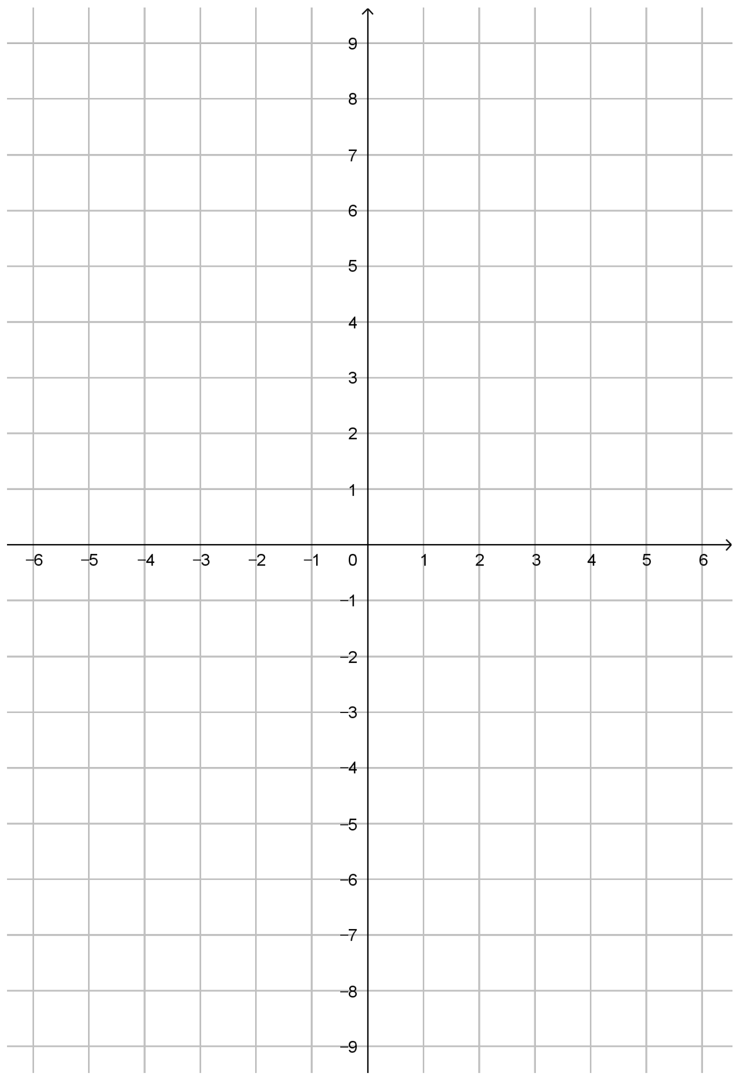


이때 점근선의 방정식은 $y = -2$이다.

문제 14) 다음 지수함수들의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y = 3^{x+1} - 2$

(2) $y = -(\frac{1}{3})^{-x}$



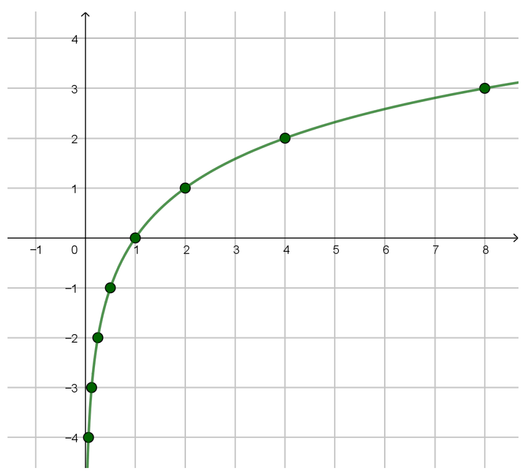
3 로그함수의 그래프

예시 15) $y = \log_2 x$의 그래프를 그려라.

$y = \log_2 x$를 만족시키는 모든 점 (x, y)를 표시하면 된다. 이때 x는 진수이므로 x에는 양수만 대입할 수 있다. $x = 2$이면 $y = 1$이고 $x = 4$이면 $y = 2$이다. 따라서 $y = 2^x$의 그래프는 $(2, 1)$, $(4, 2)$와 같은 점들을 포함한다. 이 밖에도

$$\begin{aligned}(x, y) =&(2, 1),\ (4, 2),\ (8, 3),\ (16, 4),\ \cdots\\ &(1, 0),\ (\tfrac{1}{2}, -1),\ (\tfrac{1}{4}, -2),\ (\tfrac{1}{8}, -3)\ \cdots\end{aligned}$$

와 같은 점들을 찍을 수 있다. 이 점들을 자연스럽게 이으면 다음과 같은 곡선이 나온다.



함수 $y = \log_2 x$는 지수함수 $y = 2^x$의 역함수이기도 하다. 따라서 $y = 2^x$의 그래프를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동시켜서 얻을 수도 있다.

문제 16) 다음은 지수함수 $y = 2^x$의 역함수를 구하는 과정이다. $\boxed{\text{(A)}}$에 알맞은 집합을 고르시오.

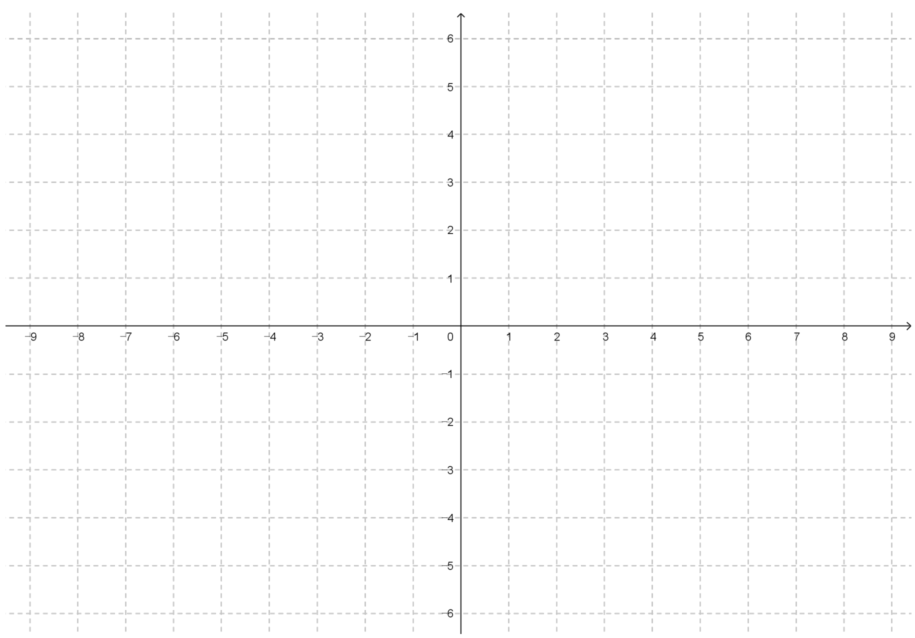
> 함수 $f(x) = 2^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\boxed{\text{(A)}}$이다. 따라서 f의 공역을 $\boxed{\text{(A)}}$로 잡으면 f는 일대일대응이 되고, 역함수가 존재한다. f의 역함수를 구하기 위해
>
> $$x = 2^y$$
>
> 로 놓으면
>
> $$y = \log_2 x$$
>
> 가 된다. 즉 $f^{-1}(x) = \log_2 x$이다. 이때 f^{-1}의 정의역은 $\boxed{\text{(A)}}$이고 공역은 실수 전체의 집합이다.

① 실수 전체의 집합 ② $\{y \,|\, y < 0\}$ ③ $\{y \,|\, y \le 0\}$

④ $\{y \,|\, y > 0\}$ ⑤ $\{y \,|\, y \ge 0\}$

문제 17) 다음 로그함수들의 그래프를 그려라.

(1) $y = \log_3 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



정리 18) 로그함수 $y = \log_a x (a > 0,\ a \neq 1)$의 성질

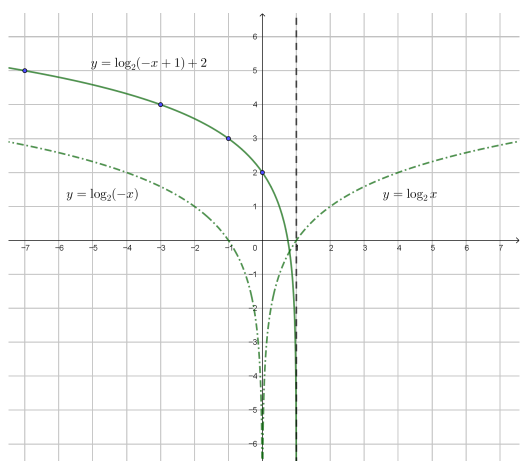
- 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
- $a > 1$이면 증가함수이고 $0 < a < 1$이면 감소함수이다.
- 그래프는 $(1, 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 갖는다.

예시 19) 함수 $y = \log_2(-x+1) + 2$의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

함수 $y = \log_2 x$의 그래프를 y축을 기준으로 대칭시켜 $y = \log_2(-x)$의 그래프를 얻고, 이것을 다시 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 된다.

$$y = \log_2 x \xrightarrow[\Gamma mt]{y} y = \log_2(-x) \xrightarrow[t]{\boxed{x}:1,\quad \boxed{y}:2} y = \log_2(-x+1) + 2$$

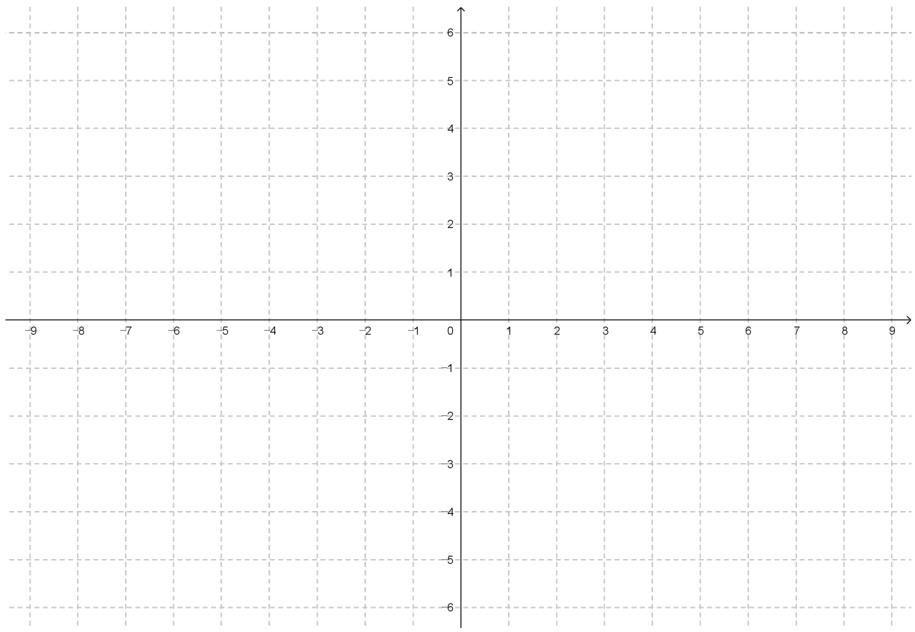
따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.



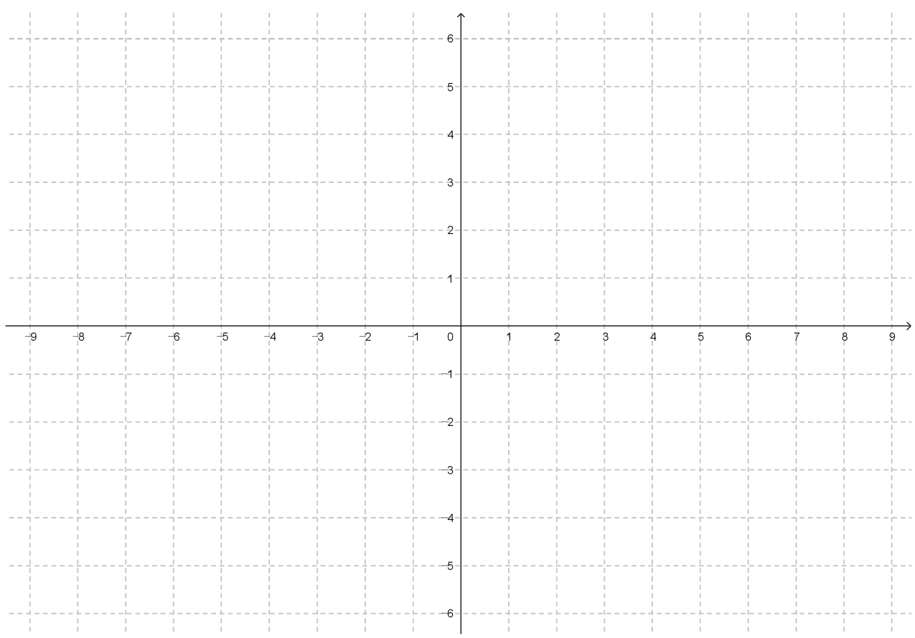
이때 점근선의 방정식은 $x = 1$이다.

문제 20) 다음 로그함수들의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y = \log_3(x+1) - 1$



(2) $y = -\log_3(-x)$



4 지수방정식과 로그방정식

$f : X \to Y$가 함수이면 한 개의 x가 두 개 이상의 y에 대응되지 않는다. 따라서

$$x_1 = x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

이다. f가 일대일함수이면 두 개 이상의 x가 한 개의 y에 대응되지 않는다. 즉 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. 이것의 대우를 쓰면

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

이다. 즉

$$x_1 = x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

이다. $a > 0$, $a \neq 1$일 때, 지수함수 $f(x) = a^x$는 일대일함수이므로

$$\boxed{x_1 = x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{x_1} = a^{x_2}}$$

이다.

예시 21) $2^{5x-2} = 4^{x^2}$을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

$2^{5x-2} = 2^{2x^2}$이므로 $5x-2 = 2x^2$이다. $2x^2-5x+2 = 0$, $(2x-1)(x-2) = 0$ 으로부터 $x = \frac{1}{2}$, 2이다.

답 : $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$

문제 22) 다음 지수방정식을 푸시오.

(1) $3^x - \sqrt{3} = 0$ (2) $4^x = \frac{1}{32}$

로그함수 $f(x) = \log_a x$ 또한 일대일함수이므로

$$x_1 = x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x_1 = \log_a x_2$$

이다. 지수방정식과는 달리 로그방정식을 풀 때에는 진수 조건에 유의하여 푼다.

예시 23) $\log_7(6-x) = \log_7(6-x^2) + \log_7 x$을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

$$\log_7(6-x) = \log_7(6x - x^3)$$

이므로 $6 - x = 6x - x^3$, $x^3 - 7x + 6 = 0$, $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ 이므로

$$x = 1,\ 2,\ -3$$

이다. 이때, 진수는 0보다 커야 하므로

$$6 - x > 0,\ \ 6 - x^2 > 0,\ \ x > 0$$

이다. 세 부등식을 연립하면 $0 < x < \sqrt{6}$이다. 따라서 가능한 x의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 2$이다.

답 : $x = 1$ 또는 $x = 2$

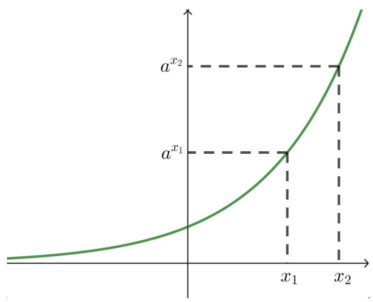
문제 24) 다음 로그방정식을 푸시오.

(1) $\log_3(x^2 - 4x) = \log_3(5x - 14)$ (2) $\log_4(2x+1) = \frac{1}{2}$

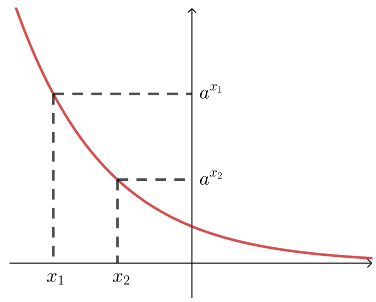
5 지수부등식과 로그부등식

지수함수 $y = a^x$는 $a > 1$일 때 증가함수, $0 < a < 1$일 때 감소함수이므로

$$a > 1\text{일 때}, \quad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$$
$$0 < a < 1\text{일 때}, \quad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$$



$a > 1$일 때



$0 < a < 1$일 때

예시 25) $0.04^x > 0.2^{x+3}$을 만족시키는 x의 범위를 구하여라.

$0.04 = 0.2^2$이므로

$$0.2^{2x} > 0.2^{x+3}$$

이다. $0 < 0.2 < 1$이므로

$$2x < x + 3$$

이다. 따라서 $x < 3$이다.

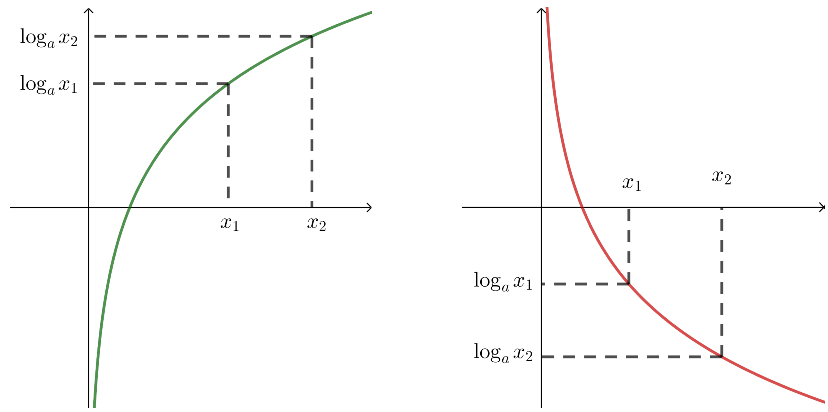
답 : $x < 3$

문제 26) 다음 지수부등식을 푸시오.

(1) $25^x \geq 625$ (2) $2^x > 3$

로그부등식도 마찬가지의 방법으로 생각할 수 있다. 로그함수 $y = \log_a x$는 $a > 1$일 때 증가함수, $0 < a < 1$일 때 감소함수이므로

$$a > 1\text{일 때}, \quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$$
$$0 < a < 1\text{일 때}, \quad x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2$$



$a > 1$일 때 $\qquad$ $0 < a < 1$일 때

예시 27) $\log_2 x + \log_2(x-1) < 1$을 만족시키는 x값의 범위를 구하여라.

주어진 식의 좌변과 우변을 각각 변형하면 $\log_2(x^2 - x) < \log_2 2$ 가 된다. 따라서 $x^2 - x < 2$, $x^2 - x - 2 < 0$, $(x-2)(x+1) < 0$이므로

$$-1 < x < 2 \tag{1}$$

이다. 이때, 진수는 0보다 커야하므로 $x > 0$, $x - 1 > 0$이다. 두 부등식을 연립하면

$$x > 1 \tag{2}$$

이므로, (1)과 (2)를 연립하면 $1 < x < 2$가 된다.

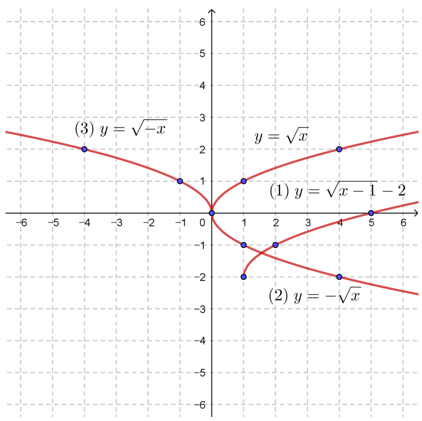
답 : $1 < x < 2$

문제 28) 다음 로그부등식을 푸시오.

(1) $\log_3(2x-1) \leq 2$ $\qquad$ (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(7-x)$

답

문제 2)



문제 4) $a=2,\ b=1,\ c=0$

문제 7)

(1) 증가

(2) 증가

(3) 감소, 증가

문제 8)

(1) $\frac{1}{2}x-2$

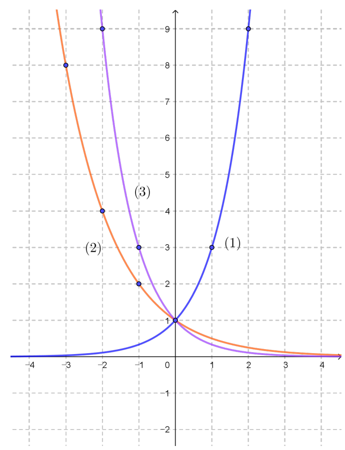
(2) $\{y\,|\,y\neq 3\}$

(3) $\{x\,|\,x\geq 2\}$

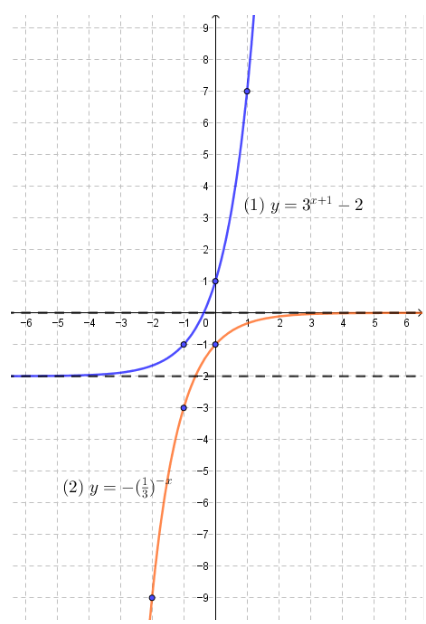
문제 9)

(1) 125 (2) 60 (3) 10 (4) 10

문제 11)



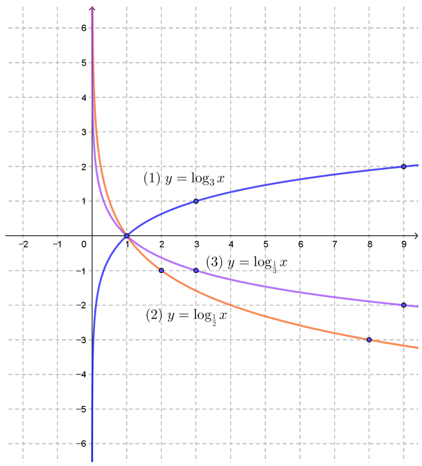
문제 14)



점근선 : (1) $y=-2$, (2) $y=0(x)$

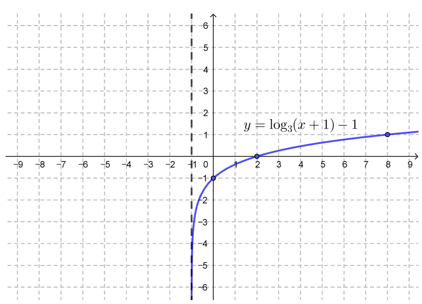
문제 16) ④

문제 17)

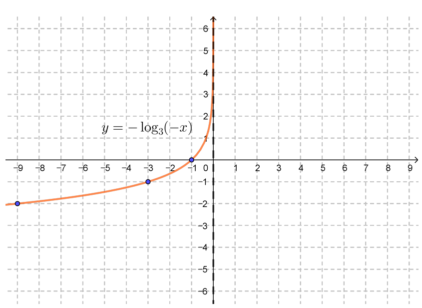


문제 20)

(1) 점근선 : $x = -1$



(2) 점근선 : $x = 0(y)$



문제 22)

(1) $x = \frac{1}{2}$

(2) $x = -\frac{5}{2}$

문제 24)

(1) $x = 7$

(2) $x = \frac{1}{2}$

문제 26)

(1) $x \geq 2$

(2) $x > \log_2 3$

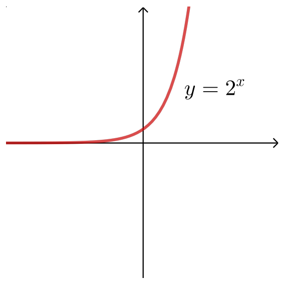
문제 28)

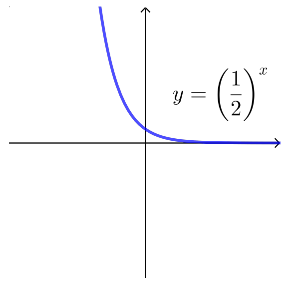
(1) $\frac{1}{2} < x \leq 5$

(2) $1 < x < 4$

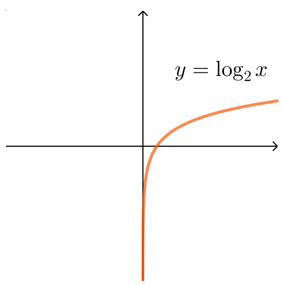
요약

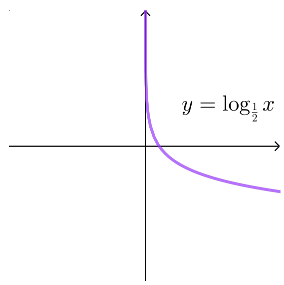
1. 지수함수의 그래프





2. 로그함수의 그래프





3. 지수방정식과 로그방정식

$$a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x_1 = \log_a x_2$$

4. 지수부등식과 로그부등식

$$a > 1\text{일 때, } a^{x_1} < a^{x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$$
$$0 < a < 1\text{일 때, } a^{x_1} > a^{x_2} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x_1 > \log_a x_2$$