신비, 지수와 로그 (간단히)

1 지수

a^x 와 같이 생긴 것을 $\boxed{\text{거듭제곱}}$이라고 부른다. 이때 a를 $\boxed{\text{밑}}$, x를 $\boxed{\text{지수}}$라고 부른다.

1.1 자연수 지수

$2 \times 2 \times 2$를 2^3으로 표현한다.

- $3^3 = \square$
- $2^4 = \square$
- $7^1 = \square$

1.2 정수 지수

$\frac{1}{5}$를 5^{-1}로 표시한다. 따라서 $\frac{1}{25}$는

$$\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = (5^{-1})^2 = 5^{-2}$$

이다.

- $3^3 = \square$
- $3^2 = \square$
- $3^1 = \square$
- $3^0 = \square$
- $3^{-1} = \square$
- $3^{-2} = \square$
- $3^{-3} = \square$

1.3 유리수 지수

$\sqrt{5}$을 $5^{\frac{1}{2}}$로 표시한다. 마찬가지로, $\sqrt[3]{5}$는 $5^{\frac{1}{3}}$로 표시한다.

- $2^{\frac{1}{2}} = \square$
- $6^{\frac{1}{2}} = \square$
- $7^{\frac{1}{3}} = \square$
- $10^{\frac{1}{5}} = \square$
- $3^{\frac{3}{2}} = \square$

1.4 지수 법칙

$a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때,

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x b^x$

- $5^3 \times 5^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5) = 5^5$
- $5^3 \div 5^2 = \frac{5\times5\times5}{5\times5} = 5 = 5^1$
- $(5^3)^2 = (5 \times 5 \times 5)^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^6$
- $(2 \times 3)^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 2^2 \times 3^2$

2 로그

2.1 로그의 정의

지수에서의 문제가

$$2^3 = \square$$

인 $\square$를 구하는 문제였다면, 로그에서의 문제는

$$2^\square = 8$$

인 $\square$를 구하는 문제이다. (즉, 지수와 로그는 서로 반대이다) 이러한 $\square$의 값을 $\log_2 8$이라고 쓴다. 따라서 $\log_2 8 = 3$이다.

- $\log_2 8 \quad \longrightarrow \quad 2^\square = 8 \quad \longrightarrow \quad \square = 3$

  $\therefore \log_2 8 = 3$
- $\log_3 9 \quad \longrightarrow \quad 3^\square = 9 \quad \longrightarrow \quad \square = 2$

  $\therefore \log_3 9 = 2$
- $\log_2 \sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad 2^\square = \sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad \square = \frac{1}{2}$

  $\therefore \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
- $\log_2 16 \quad \longrightarrow \quad \quad \longrightarrow \quad \square =$

  $\therefore \log_2 16 =$
- $\log_3 \frac{1}{3} \quad \longrightarrow \quad \quad \longrightarrow \quad \square =$

  $\therefore \log_3 \frac{1}{3} =$
- $\log_5 1 \quad \longrightarrow \quad \quad \longrightarrow \quad \square =$

  $\therefore \log_5 1 =$

- $\log_2 4 = \square$
- $\log_6 1 = \square$
- $\log_5 \frac{1}{25} = \square$
- $\log_4 16 = \square$

방금까지는 계산이 잘 되는 로그의 값들만을 나열해보았다. 하지만, 대부분의 경우에 로그의 값은 계산해내기 어렵다.

- $\log_2 7 \quad \longrightarrow \quad 2^\square = 7 \quad \longrightarrow \quad \square = ?$

이때의 $\square$값은 $2 < \square < 3$일 것이다. 왜냐하면 $2^2 < 7 < 2^3$이기 때문이다. 하지만 정확한 $\log_2 7$의 값은 계산기를 사용하지 않는 이상 구할 수 없다. 다시 말해, $\log_2 7$이란 $2^\square = 7$를 만족시키는 값을 나타내는 표현법이다.

2.2 로그의 (정확한) 정의

정리하면

$$a^\square = N$$

를 만족시키는 값 $\square$를 $\log_a N$이라고 쓴다. 이때 a를 $\boxed{\text{밑}}$, N을 $\boxed{\text{진수}}$라고 부른다.

한편, 실수 지수가 정의되려면 $a > 0$이어야 한다(따라서 $N > 0$이다). 또한 $a = 1$이면

$$1^\square = N$$

이 되어 이 문제가 의미 없어진다. 따라서 로그값 $\log_a N$을 정의할 때, 다음 두 가지 조건을 만족해야 한다.

- 밑조건 : $a > 0$, $a \neq 1$
- 진수조건 : $N > 0$

2.3 로그의 기본적인 성질

$a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$일 때,

(1) $\log_a 1 = 0$, $\quad \log_a a = 1$

(2) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

(3) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

(4) $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k는 실수)

- $3^0 = 1$이고 $(\frac{1}{5})^0 = 1$이다. 따라서

$$\boxed{\log_3 1 = 0} \qquad \boxed{\log_{\frac{1}{5}} 1 = 0}$$

한편, $3^1 = 3$이고 $(\frac{1}{5})^1 = \frac{1}{5}$이다. 따라서

$$\boxed{\log_3 3 = 1} \qquad \boxed{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 1}$$

- $\log_2 8 = 3$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 32 = 5$이다. $3 + 2 = 5$에서

$$\boxed{\log_2 8 + \log_2 4 = \log_2 32}$$

- 또, $\log_2 2 = 1$이므로 $3 - 2 = 1$에서

$$\boxed{\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2}$$

- $\log_2 32 = 5$, $\log_2 2 = 1$이므로

$$\boxed{\log_2 2^5 = 5 \log_2 2}$$

예제) 다음 식을 간단히 하시오.

- $\log_6 12 + \log_6 3$
- $\log_3 \sqrt{27}$
- $\log_2 3 - 2\log_2 \sqrt{6}$
- $\log_{10} \sqrt{5} + \frac{1}{2}\log_{10} 2$

풀이

- $\log_6 12 + \log_6 3 \overset{(2)}{=} \log_6 36 = 2$
- $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} \overset{(4)}{=} \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$
- $\log_2 3 - 2\log_2 \sqrt{6} \overset{(4)}{=} \log_2 3 - \log_2 6 \overset{(2)}{=} \log_2 \frac{1}{2} = -1$
- $\log_{10} \sqrt{5} + \frac{1}{2}\log_{10} 2 \overset{(4)}{=} \log_{10} \sqrt{5} + \log_{10} \sqrt{2} \overset{(2)}{=} \log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$

문제) 다음 식을 간단히 하시오.

- $\log_3 \sqrt[3]{81}$
- $\log_7 98 - \log_7 2$
- $\log_{\frac{2}{3}} 27 - \log_{\frac{2}{3}} 8$
- $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{5} + \log_3 45$
- $\log_2 12 + \log_2 6 - 2\log_2 3$
- $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{5} + \log_3 \sqrt{5}$

2.4 로그의 추가적인 성질

(5) $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{(밑의 변환 공식)}$$

(6) $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$일 때,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(7) $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$이고 m, n이 실수일 때,

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b$$

(8) $a^{\log_a b} = b$

(9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$