병건, 적분단원 개념정리

2014년 8월 5일

차 례

1 부정적분

1.1 부정적분

정의) $F'(x) = f(x)$ 이면 $F(x)$ 는 $f(x)$ 의 부정적분이다.

구하는 방법) 역미분.

기호) $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

용어) 피적분함수, 적분변수, 적분상수.

성질) 부정적분은 선형적(linear)이다; 임의의 두 함수 f, g 와 임의의 두 실수 p, q 에 대해,

$$\int (pf(x) + qg(x))\,dx = p\int f(x)\,dx + q\int g(x)\,dx.$$

특히,

(1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
(2) $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.
(3) $\int (kf(x))\,dx = k\int f(x)\,dx$.

증명) (1) 과 (3) 을 증명한 후 조합하면 된다.

1.2 치환적분법

정리) x 를 미분가능한 함수 $g(t)$ 로 치환하면 $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$ 이다.

증명) $F'(x) = f(x)$ 라고 하면 합성함수의 미분법(연쇄법칙)에 의해

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int \frac{d}{dt}F(g(t))\,dt = F(g(t))+C = F(x)+C = \int f(x)\,dx.$$

혹은,

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(x)\,dx$$

와 같이 생각할 수도 있다.

예시) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$.

1.3 부분적분법

정리) $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모두 미분가능하면, $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$.

증명) 곱의 미분법과 부분적분의 성질 (2) 에 의해 $\int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)$.

2 정적분

2.1 구분구적법

정의) 평면 혹은 공간의 일정한 영역을 직사각형, 직육면체 등으로 일정하게 잘라 해당 영역의 넓이, 부피 따위를 어림하는 방법. 극한을 사용.

2.2 정적분

정의) $f(x)$ 는 $[a,b]$ 에서 정의된 연속 함수라고 하자.
$f(x) \geq 0$ 일 때, $\int_a^b f(x)\,dx$ 는 "$x = a$", "$x = b$", "$y = 0$", "$y = f(x)$" 로 둘러싸인 영역의 넓이이다. 구분구적법을 이용하면,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}.$$

$f(x) < 0$ 일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b (-f)(x)\,dx.$$

$f(x)$ 가 $[a,b]$ 내에서 양의 값과 음의 값을 모두 가지면, 구간을 나눠서 정적분을 정의하면 된다. 예를 들어 $[a,m]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $(m,c]$ 에서 $f(x) < 0$ 이면,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx.$$

용어) 위끝, 아래끝.

참고) 정적분은 고정된 실수이므로 적분변수는 의미를 가지지 않는다(dummy variable);

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds = \cdots.$$

정리) 미적분의 기본정리 (1) $[a,b]$에서 $f(x)$가 연속일 때 $a \le x \le b$에 대해,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

증명) $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$라고 하자. $S(x)$의 미분을 생각하기 위해 x의 증분인 Δx와 S의 증분인 $\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$를 고려하자.

(a) $f(x) \ge 0$일 때

$\Delta x > 0$이면 연속함수 $f(x)$는 구간 $[x, x+\Delta x]$에서 최대값 M과 최소값 m을 갖는다. 따라서

$$m\Delta x \le S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \le M\Delta x.$$

각변을 Δx로 나누고 Δx를 0으로 보내는 극한을 취하면 m과 M은 모두 $f(x)$로 수렴하므로

$$f(x) = m \le \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \le M = f(x).$$

따라서

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x).$$

$\Delta x<0$이면 마찬가지로 $[x+\Delta x, x]$에서

$$m(-\Delta x) \le -S(x+\Delta x) + S(x) \le M(-\Delta x).$$

같은 논리에 의해

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x).$$

따라서 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = S'(x) = f(x)$.

(b) $f(x) < 0$일 때

$(-f)(x) = -f(x)$로 정의된 함수 $-f$는 $(-f)(x) \ge 0$를 만족하므로 (a)에 의해,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (-f)(t)\,dt = (-f)(x).$$

따라서

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_a^x (-f)(t)\,dt = -(-f)(x) = f(x).$$

(c) $f(x)$가 어떤 구간에서는 양수를, 어떤 구간에서는 음수를 취할 때, 구간을 나누어 생각하면 같은 결과를 얻을 수 있다.

미적분의 기본정리 (2) $[a,b]$에서 $f(x)$가 연속이고 $F'(x) = f(x)$라고 하면,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

증명) 미적분의 기본정리 (1)에 의해,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

$x = a$를 대입하면 $C = -F(a)$를 얻고, 다시 $x = b$를 대입하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

기호) 정적분을 나타낼 때, 경우에 따라 다양한 기호들 중 하나를 선택해서 사용하면 된다;

$$\begin{aligned} &[F(x)]_a^b = F(x)]_a^b = F(x)|_a^b \\ =&[F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(x)|_{x=a}^{x=b}. \end{aligned}$$

2.3 정적분의 계산

성질) 부정적분과 마찬가지로 정적분도 선형적(linear)이다; 임의의 두 함수 f, g와 임의의 두 실수 p, q에 대해,

$$\int_a^b (pf(x) + qg(x))\,dx = p\int_a^b f(x)\,dx + q\int_a^b g(x)\,dx.$$

특히,

(1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
(2) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$

(3) $\int_a^b (kf(x))\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.

증명) (1)과 (3)을 증명한 후 조합하면 된다.

성질) 임의의 세 실수 a, b, c에 대해,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

증명) $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대해

$$\text{좌변} = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a) = \text{우변}.$$

2.4 치환적분법과 부분적분법

치환적분법) $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대해 미분가능한 함수 $g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

증명) $F'(x) = f(x)$이면,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(g(t))\,dt \\ &= [F(g(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

부분적분법) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속이면,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

증명) 부정적분의 부분적분법 식을 적용해 곱의 미분법 식을 정적분하면 된다.

미분이 포함된 간단한 방정식

다음에서 $f(x)$는 미분가능한 함수, a, b는 실수, $g(x)$, $h(x)$는 연속함수이다.

(1) $f'(x) = af(x)$
$f(x) \neq 0$인 x에 대해 $\frac{f'(x)}{f(x)} = a$이고, 양변을 적분하면 $\ln|f(x)| = ax + C$. 따라서 $f(x) = \pm e^{ax+C} = Ae^{ax}(A \neq 0)$. $f(x)$의 연속성에 의해, 모든 x에 대해 $f(x) = 0$이거나 모든 x에 대해 $f(x) = Ae^{ax}(A \neq 0)$이다. 정리하면,

$$f(x) = Ae^{ax},$$

A는 임의의 실수.

(2) $f'(x) = af(x) + b(a \neq 0)$
$f(x) \neq -\frac{b}{a}$인 x에 대해 $\frac{f'(x)}{f(x)+\frac{b}{a}} = a$이고, 양변을 적분하면 $\ln|f(x) + \frac{b}{a}| = ax + C$. 따라서 $f(x) + \frac{b}{a} = \pm e^{ax+C} = Ae^{ax}(A \neq 0)$. $f(x) + \frac{b}{a}$의 연속성에 의해, 모든 x에 대해 $f(x) + \frac{b}{a} = 0$이거나 모든 x에 대해 $f(x) + \frac{b}{a} = Ae^{ax}(A \neq 0)$이다. 정리하면,

$$f(x) = Ae^{ax} - \frac{b}{a},$$

A는 임의의 실수.

(3) $f'(x) + g(x)f(x) = h(x)$.(적분인자integrating factor를 곱하는 방법)
양변에 $k(x)$를 곱했을 때 좌변이 $(f(x)k(x))'$와 같게 되도록 $k(x)$를 찾으면, 즉,

$$f'(x)k(x) + g(x)f(x)k(x) = f'(x)k(x) + f(x)k'(x)$$

에서

$$g(x)k(x) = k'(x).$$

가 성립해야 하므로 양변을 $k(x)$로 나누고 적분하면

$$\ln|k(x)| = \int g(x)\,dx.$$

$g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라고 하면

$$\ln|k(x)| = G(x) + C.$$

$C=0$, $k(x)>0$ 이라고 가정하면

$$k(x)=e^{G(x)}. \qquad (*)$$

로 택할 수 있다. 한편, 원래 식은

$$(f(x)k(x))'=h(x)k(x)$$

이었으므로 양변을 적분하면

$$f(x)k(x)=\int h(x)k(x)\,dx+C',$$

C' 는 임의의 실수. $(*)$ 를 넣어 정리하면 $k(x)\neq 0$ 이므로,

$$f(x)=\frac{1}{k(x)}\left[\int h(x)k(x)\,dx+C'\right]=e^{-G(x)}\left[\int h(x)k(x)\,dx+C'\right].$$

예제1 : $f'(x)+xf(x)=x$

$f'(x)k(x)+xf(x)k(x)=(xk(x))'$ 가 되는 $k(x)$ 를 찾으면

$$xk(x)=k'(x)$$

에서

$$\ln|k(x)|=\frac{1}{2}x^2+C.$$

$k(x)>0$, $C=0$ 을 가정하면

$$k(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

이제 원래 식인 $(f(x)k(x))'=xk(x)=xe^{\frac{1}{2}x^2}$ 에서

$$f(x)k(x)=\int xe^{\frac{1}{2}x^2}\,dx=e^{\frac{1}{2}x^2}+C',$$

이므로 (C' 는 임의의 실수)

$$f(x)=\frac{1}{k(x)}\left[e^{\frac{1}{2}x^2}+C'\right]=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left[e^{\frac{1}{2}x^2}+C'\right]=1+C'e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$