

준영 : 09 모의고사(2016년 3월) 해설 및 유사문제

2017년 1월 13일

# 2016학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

## 수학 나형 정답

1	㉓	2	㉒	3	㉓	4	㉕	5	㉔
6	㉒	7	㉑	8	㉒	9	㉑	10	㉔
11	㉕	12	㉓	13	㉔	14	㉕	15	㉑
16	㉔	17	㉒	18	㉑	19	㉓	20	㉕
21	㉕	22	24	23	3	24	7	25	40
26	16	27	36	28	26	29	11	30	435

## 해설

### 1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식  $A=x^2-y^2$ ,  $B=2x^2+y^2$ 에서  
 $A+B=(x^2-y^2)+(2x^2+y^2)=3x^2$

### 2. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$i(1+i)=i+i^2=i+(-1)=-1+i$

### 3. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})} = 3^0 = 1$

### 4. [출제의도] 내분점의 좌표를 구한다.

두 점  $O(0, 0)$ ,  $A(8, 0)$ 을 3:1로 내분하는 점의 좌표는  
 $(\frac{3 \times 8 + 1 \times 0}{3+1}, \frac{3 \times 0 + 1 \times 0}{3+1})$ 이므로  $(6, 0)$

### 5. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$f^{-1}(2)=a$ 라 하면 역함수의 성질에 의하여  
 $f(a)=2$ 이므로  
 $f(a)=3a-1=2$   
 따라서  $a=1$ 이므로

$f^{-1}(2)=1$

[다른풀이]

$y=3x-1$ 에서

$3x=y+1$

$x=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$

위의 식에서  $x$ 와  $y$ 를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ 이고,

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ 이므로

$f^{-1}(2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$   
 $=1$

### 6. [출제의도] 등비수열의 항의 값을 구한다.

등비수열  $\{a_n\}$ 에서  $a_3$ 은  $a_2$ 와  $a_4$ 의 등비중항이므로

$a_3^2=a_2 \times a_4$   
 $=2 \times 18$   
 $=36$

이고,  $a_3 > 0$ 이므로

$a_3=6$

[다른풀이]

등비수열의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$a_2=ar=2$  ..... ㉑

$a_4=ar^3=18$  ..... ㉒

㉑  $\div$  ㉒에서

$r^2=9$

이고,  $r > 0$ 이므로

$r=3$

㉑에 대입하면

$3a=2$ ,  $a=\frac{2}{3}$

이므로

$a_3=ar^2$   
 $=\frac{2}{3} \times 3^2$   
 $=6$

### 7. [출제의도] 연립이차방정식의 해를 구한다.

$\begin{cases} x-y=3 & \text{..... ㉑} \\ xy+x+1=0 & \text{..... ㉒} \end{cases}$

이라 하면 ㉑에서

$y=x-3$  ..... ㉓

이고, ㉓을 ㉒에 대입하면

$x(x-3)+x+1=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$x=1$ 을 ㉓에 대입하면

$y=-2$

따라서  $a=1$ ,  $b=-2$ 이므로

$a+b=-1$

### 8. [출제의도] 무리함수의 평행이동을 이용하여 상수의 값을 구한다.

무리함수  $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}-2$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\sqrt{a \times (-1)}-2$

$\sqrt{-a}=2$

$-a=4$

$a=-4$

### 9. [출제의도] 로그의 계산을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

100개의 자료를 처리할 때의 시간복잡도  $T_1$ 은

$\frac{T_1}{100}=\log 100$

에서

$T_1=200$

1000개의 자료를 처리할 때의 시간복잡도  $T_2$ 는

$\frac{T_2}{1000}=\log 1000$

에서

$T_2=3000$

따라서

$\frac{T_2}{T_1}=\frac{3000}{200}=15$

### 10. [출제의도] 삼차방정식의 허근을 구한다.

방정식  $x^3+8=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

이므로

$x=-2$  또는  $x^2-2x+4=0$

$x^2-2x+4=0$ 의 근을 구하면

$x=1 \pm \sqrt{3}i$

따라서 방정식  $x^3+8=0$ 의 근은

$x=-2$  또는  $x=1+\sqrt{3}i$  또는  $x=1-\sqrt{3}i$

이때

$x=-2+0i$ 의 허수부분은 0,

$x=1+\sqrt{3}i$ 의 허수부분은  $\sqrt{3}$ ,

$x=1-\sqrt{3}i$ 의 허수부분은  $-\sqrt{3}$

이다.

따라서  $\alpha$ 의 값은  $1+\sqrt{3}i$ 이므로

$\bar{\alpha}=1-\sqrt{3}i$

$\alpha-\bar{\alpha}=1+\sqrt{3}i-(1-\sqrt{3}i)$

$=1+\sqrt{3}i-(1-\sqrt{3}i)$

$=2\sqrt{3}i$

### 11. [출제의도] 필요충분조건을 이용하여 실수의 값을 구한다.

두 조건  $p$ ,  $q$ 의 진리집합을 각각  $P$ ,  $Q$ 라 하자.

조건  $p: x^2-2x-3 \leq 0$ 에서

$(x-3)(x+1) \leq 0$ 이므로

$P=\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$

조건  $q: |x-a| \leq b$ 에서

$-b \leq x-a \leq b$

$a-b \leq x \leq a+b$ 이므로

$Q=\{x \mid a-b \leq x \leq a+b\}$

$p$ 는  $q$ 이기 위한 필요충분조건이므로  $P=Q$ 이어야 한다. 따라서 두 등식  $a-b=-1$ ,  $a+b=3$ 을 연립하여 풀면  $a=1$ ,  $b=2$ 이므로

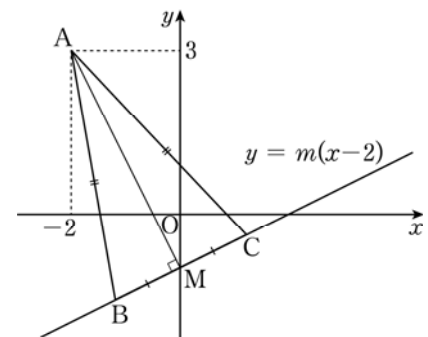
$ab=2$

### 12. [출제의도] 두 직선이 서로 수직이 되는 기울기를 구한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하자.

삼각형 ABC는  $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고 밑변 BC의 중점이 M이므로 두 선분 AM, BC는 서로 수직이다.

점 M은 직선  $y=m(x-2)$ 와  $y$ 축이 만나는 점이므로 M(0,  $-2m$ )이다.



직선 BC의 기울기는  $m$ 이고,

두 점 A(-2, 3), M(0,  $-2m$ )에서

(직선 AM의 기울기)  $= \frac{-2m-3}{0-(-2)}$   
 $= \frac{-2m-3}{2}$

두 직선이 서로 수직일 때 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로

$m \times \frac{-2m-3}{2} = -1$

$2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$m > 0$ 이므로

$m=\frac{1}{2}$

### 13. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 점근선의 교점을 구한다.

$f(x)=\frac{x+1}{2x-1}$

$=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{2x-1}$

$=\frac{\frac{3}{2}}{2x-1}+\frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

이므로 유리함수  $f(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$  의 그래프는 유

리함수  $y = \frac{\frac{3}{4}}{x}$  의 그래프를  $x$  축의 방향으로  $\frac{1}{2}$  만  
큼,  $y$  축의 방향으로  $\frac{1}{2}$  만큼 평행이동한 그래프이다.

유리함수  $f(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$  의 그래프는 두 점근선

의 교점  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이므로  $p = \frac{1}{2}$ ,  
 $q = \frac{1}{2}$  이다.

따라서  $p + q = 1$

[참고]

유리함수  $y = \frac{cx + d}{ax + b}$  (단,  $a \neq 0$ ,  $ad - bc \neq 0$ )의 그  
래프의 점근선의 방정식은  $x = -\frac{b}{a}$ ,  $y = \frac{c}{a}$  이고, 그  
래프는 두 점근선의 교점  $\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ 에 대하여 대칭  
이다.

14. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 상용로그를 계  
산한다.

$$f(\log_3 6) = \frac{\log_3 6 + 1}{2\log_3 6 - 1} \text{에서}$$

$$\log_3 6 + 1 = \log_3 6 + \log_3 3 = \log_3 18$$

$$2\log_3 6 - 1 = \log_3 6^2 - \log_3 3 = \log_3 12$$

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$f(\log_3 6) = \frac{\log_3 18}{\log_3 12}$$

$$= \frac{\log 18}{\log 12}$$

$$= \frac{\log 18}{\log 12}$$

$$= \frac{\log(2 \times 3^2)}{\log(2^2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log 2 + 2\log 3}{2\log 2 + \log 3}$$

$$= \frac{a + 2b}{2a + b}$$

[다른풀이]

$$\log_3 6 = \frac{\log 6}{\log 3}$$

$$= \frac{\log(2 \times 3)}{\log 3}$$

$$= \frac{\log 2 + \log 3}{\log 3}$$

$$= \frac{a + b}{b}$$

$$f(\log_3 6) = f\left(\frac{a + b}{b}\right)$$

$$= \frac{\frac{a + b}{b} + 1}{2 \times \frac{a + b}{b} - 1}$$

$$= \frac{\frac{a + 2b}{b}}{\frac{2a + b}{b}}$$

$$= \frac{\frac{a + 2b}{b} \times b}{\frac{2a + b}{b} \times b}$$

$$= \frac{a + 2b}{2a + b}$$

15. [출제의도] 이차함수와 직선의 위치 관계를 이용하  
여 이차함수의 최댓값을 구한다.

이차방정식  $h(x) = 0$ 의 두 근이 2와 6이므로 인수  
정리에 의하여  $h(x) = k(x - 2)(x - 6)$  이다.

이때  $g(x)$ 는 일차함수이고  $f(x)$ 는 이차항의 계수가  
 $-1$ 인 이차함수이므로 함수  $h(x)$ 는 이차함수이고  
이차항의 계수는  $-1$ 이다.

$$h(x) = -(x - 2)(x - 6)$$

$$= -x^2 + 8x - 12$$

$$= -(x - 4)^2 + 4$$

이므로 함수  $h(x)$ 는  $x = 4$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

$$p = 4, \quad q = 4 \text{ 이므로}$$

$$p + q = 8$$

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반  
항을 증명한다.

(i)  $n = 1$  일 때,

$$a_1 = \frac{a_1^2 + 1}{2a_1} \text{에서}$$

$$a_1^2 = 1$$

$$a_1 > 0 \text{이므로}$$

$$(\text{좌변}) = a_1 = 1,$$

$$(\text{우변}) = 1 - 0 = 1$$

따라서  $n = 1$  일 때 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n = m$  일 때 (\*)이 성립한다고 가정하면

$$a_m = \sqrt{m} - \sqrt{m - 1} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^m (\sqrt{k} - \sqrt{k - 1}) + a_{m+1}$$

$$= (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) +$$

$$\cdots + (\sqrt{m} - \sqrt{m - 1}) + a_{m+1}$$

$$= \boxed{\sqrt{m}} + a_{m+1}$$

주어진 조건에서

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{a_{m+1}^2 + 1}{2a_{m+1}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{a_{m+1}^2 + 1}{2a_{m+1}} = \sqrt{m} + a_{m+1}$$

즉,

$$a_{m+1}^2 + 2\sqrt{m} \times a_{m+1} - 1 = 0$$

$$a_{m+1} = -\sqrt{m} \pm \sqrt{m + 1}$$

이고,  $a_{m+1} > 0$ 이므로

$$a_{m+1} = \boxed{\sqrt{m + 1}} - \sqrt{m}$$

이다. 따라서  $n = m + 1$  일 때도 (\*)이 성립한  
다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n - 1} \text{ 이다.}$$

$$f(m) = \sqrt{m}, \quad g(m) = \sqrt{m + 1} \text{ 이므로}$$

$$f(25) + g(35) = 5 + 6 = 11$$

17. [출제의도] 인수분해를 이용하여 자연수의 값을 구  
한다.

$a^2b + 2ab + a^2 + 2a + b + 1$ 을  $b$ 에 대하여 내림차순으  
로 정리하여 인수분해하면

$$(a^2 + 2a + 1)b + a^2 + 2a + 1$$

$$= (a + 1)^2b + (a + 1)^2$$

$$= (a + 1)^2(b + 1)$$

위의 식의 값이  $245 = 7^2 \times 5$ 이므로

$$(a + 1)^2(b + 1) = 7^2 \times 5$$

$a, b$ 는 자연수이므로

$$a + 1 = 7, \quad b + 1 = 5$$

따라서  $a = 6, \quad b = 4$ 이므로

$$a + b = 10$$

[다른풀이]

$a^2b + 2ab + a^2 + 2a + b + 1$ 을  $a$ 에 대하여 내림차순으  
로 정리하여 인수분해하면

$$(b + 1)a^2 + 2(b + 1)a + (b + 1)$$

$$= (b + 1)(a^2 + 2a + 1)$$

$$= (a + 1)^2(b + 1)$$

위의 식의 값이  $245 = 7^2 \times 5$ 이므로

$$(a + 1)^2(b + 1) = 7^2 \times 5$$

$a, b$ 는 자연수이므로

$$a + 1 = 7, \quad b + 1 = 5$$

따라서  $a = 6, \quad b = 4$ 이므로

$$a + b = 10$$

18. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점  
의 좌표를 구한다.

세 점  $O(0, 0)$ ,  $A(8, 4)$ ,  $B(7, a)$ 를 꼭짓점으로 하  
는 삼각형  $OAB$ 의 무게중심  $G$ 의 좌표는

$$\left(\frac{0 + 8 + 7}{3}, \frac{0 + 4 + a}{3}\right) \text{ 즉, } \left(5, \frac{4 + a}{3}\right)$$

이므로

$$b = \frac{4 + a}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 직선  $OA$ 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \text{ 즉, } x - 2y = 0$$

점  $G(5, b)$ 와 직선  $x - 2y = 0$  사이의 거리가  $\sqrt{5}$   
이므로

$$\frac{|5 - 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|5 - 2b| = 5$$

$$5 - 2b = 5 \text{ 또는 } 5 - 2b = -5$$

$$b = 0 \text{ 또는 } b = 5$$

$a > 0$ 이므로  $\textcircled{1}$ 에서  $b > 0$ 이다.

따라서  $b = 5, \quad a = 11$ 이므로

$$a + b = 16$$

19. [출제의도]  $\sum$ 의 성질을 이용하여 수열의 합을 추  
론한다.

$$\sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 2n^2 + 2 \quad (n \geq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 에  $n = 2$ 를 대입하면

$$a_2 - a_1 = 10$$

두 식  $a_1 + a_2 = 8, \quad a_2 - a_1 = 10$ 을 연립하여 풀면

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 9$$

2 이상인 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

$$= a_n - a_1$$

$$= a_n + 1$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$a_n + 1 = 2n^2 + 2$$

$$a_n = 2n^2 + 1 \quad (n \geq 2)$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 은

$$a_1 = -1, \quad a_n = 2n^2 + 1 \quad (n \geq 2)$$

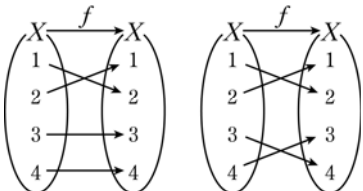
$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k$$

$$= -1 + \sum_{k=2}^{10} (2k^2 + 1)$$

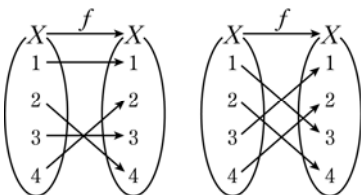
$$\begin{aligned}
&= -1 + \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1) - 3 \\
&= -4 + 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 1 \times 10 \\
&= -4 + 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 10 \\
&= 776
\end{aligned}$$

20. [출제의도] ‘모든’과 ‘어떤’의 의미를 이해하여 함수의 개수를 추론한다.

- ㄱ. 함수  $f$ 가 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다. 조건 (가)에서 집합  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $(f \circ f)(x) = x$ 이므로 집합  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다. 따라서  $f(3) = f^{-1}(3)$  (참)
- ㄴ. 조건 (나)에서 집합  $X$ 의 어떤 원소  $x$ 에 대하여  $f(x) = 2x$ 이므로 집합  $X$ 의 원소 중  $f(x) = 2x$ 를 만족하는 원소  $x$ 가 적어도 하나 존재한다. 따라서  $f(1) = 2$ 와  $f(2) = 4$  중 적어도 하나는 성립한다. 따라서  $f(1) = 3 (\neq 2)$ 이면  $f(2) = 4$ 이다. (참)
- ㄷ. 조건 (나)에서  $f(1) = 2$ 와  $f(2) = 4$  중 적어도 하나는 성립하므로  $f(1) = 2$ 이고  $f(2) \neq 4$ 일 때,  $f(2) = 4$ 이고  $f(1) \neq 2$ 일 때,  $f(1) = 2$ 이고  $f(2) = 4$ 일 때로 나눌 수 있다.
- (i)  $f(1) = 2$ 이고  $f(2) \neq 4$ 일 때, 조건 (가)에 의하여  $(f \circ f)(1) = 1$ 이므로  $f(f(1)) = f(2) = 1$  이때 조건 (가)에 의하여  $f(3) = 3, f(4) = 4$  또는  $f(3) = 4, f(4) = 3$ 이므로 함수  $f$ 의 개수는 2이다.

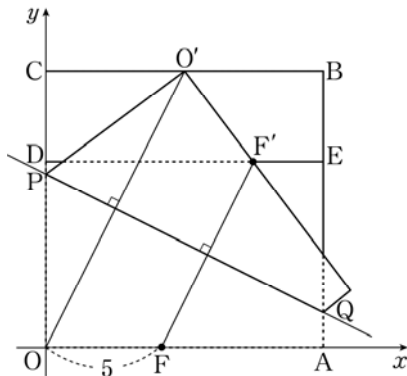


- (ii)  $f(2) = 4$ 이고  $f(1) \neq 2$ 일 때, 조건 (가)에 의하여  $(f \circ f)(2) = 2$ 이므로  $f(f(2)) = f(4) = 2$  이때 조건 (가)에 의하여  $f(1) = 1, f(3) = 3$  또는  $f(1) = 3, f(3) = 1$ 이므로 함수  $f$ 의 개수는 2이다.



- (iii)  $f(1) = 2$ 이고  $f(2) = 4$ 일 때,  $f(f(1)) = f(2) = 4 (\neq 1)$ 이므로  $(f \circ f)(1) = 1$ 이 성립하지 않는다. (i), (ii), (iii)에서 가능한 함수  $f$ 의 개수는 4이다. (참)
- 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

21. [출제의도] 두 직선의 평행과 수직을 이용하여 중이접기에 대한 문제를 해결한다.

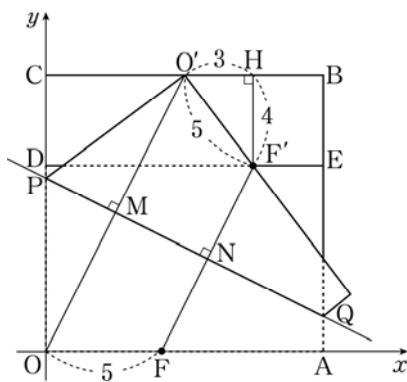


좌표평면 위의 점  $O, A, B, C, F$ 의 좌표는 각각  $(0, 0), (12, 0), (12, 12), (0, 12), (5, 0)$ 이다. 점  $O'$ 은 선분  $BC$  위의 점이므로 점  $O'$ 의 좌표를  $(a, 12)$ 로 놓을 수 있다. 또 점  $F'$ 은 선분  $DE$  위의 점이고, 두 점  $D, E$ 는 각각 두 선분  $OC, AB$ 를 2:1로 내분하는 점이므로 점  $F'$ 의 좌표를  $(b, 8)$ 로 놓을 수 있다. 직선  $OO'$ 과 직선  $FF'$ 은 모두 직선  $PQ$ 와 수직이므로 직선  $OO'$ 과 직선  $FF'$ 은 서로 평행하다. 따라서 두 직선의 기울기가 같으므로

$$\begin{aligned}
\frac{12-0}{a-0} &= \frac{8-0}{b-5} \\
2a &= 3b-15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
\overline{O'F'} &= \overline{OF} = 5 \text{ 이므로} \\
\sqrt{(b-a)^2 + (8-12)^2} &= 5 \\
(b-a)^2 &= 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 } 0 \leq a \leq 12, \quad 0 \leq b \leq 12 \text{의 범위} \\
\text{에서 해를 구하면} \\
a &= 6, \quad b = 9 \\
\text{직선 PQ는 선분 OO'의 중점 (3, 6)과 선분 FF'의 중점 (7, 4)를 지나는 직선이므로 직선 PQ의 방정식은} \\
y &= \frac{6-4}{3-7}(x-3)+6 \\
&= -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

따라서  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{15}{2}$ 이므로  $m+n=7$

[다른풀이]  
좌표평면 위의 점  $O, A, B, C, F$ 의 좌표는 각각  $(0, 0), (12, 0), (12, 12), (0, 12), (5, 0)$ 이다. 점  $O'$ 은 선분  $BC$  위의 점이므로 점  $O'$ 의 좌표를  $(a, 12)$ 로 놓을 수 있다.



$\overline{O'F'} = \overline{OF} = 5$ 이고  $\overline{HF'} = 4$ 이므로  $\overline{OH} = \sqrt{O'F'^2 - HF'^2} = 3$  따라서 점  $F'$ 의 좌표를  $(a+3, 8)$ 로 놓을 수 있다. 선분  $OO'$ 의 중점을  $M$ , 선분  $FF'$ 의 중점을  $N$ 이라 하면  $M\left(\frac{a}{2}, 6\right), N\left(\frac{a+8}{2}, 4\right)$ 이고, 두 점  $M, N$ 은 직선  $PQ$  위의 점이므로 직선  $PQ$ 의 기울기는

$$\begin{aligned}
\frac{4-6}{\frac{a+8}{2}-\frac{a}{2}} &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\
\text{직선 OO'과 직선 PQ는 수직이므로 직선 OO'의 기울기는 2이다.} \\
\frac{12-0}{a-0} &= \frac{12}{a} = 2 \\
a &= 6 \text{ 이므로} \\
M(3, 6) \\
\text{따라서 직선 PQ의 방정식은} \\
y &= -\frac{1}{2}(x-3)+6 \\
&= -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \\
\text{따라서 } m &= -\frac{1}{2}, n = \frac{15}{2} \text{ 이므로} \\
m+n &= 7
\end{aligned}$$

22. [출제의도] 합집합의 모든 원소의 합을 구한다.

두 집합  $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6, 9\}$ 에서  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$  따라서 집합  $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은  $2+3+4+6+9=24$

23. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 계수의 값을 구한다.

주어진 등식은  $x$ 에 대한 항등식이므로 양변에  $x=2$ 를 대입하면  $8-4-10+a=0$  따라서  $a=6$ 이므로 이를 주어진 등식에 대입하여 정리하면  $x^3-x^2-5x+6=(x-2)(x^2+x+b)$   $=x^3-x^2+(b-2)x-2b$  양변의 계수를 비교하면  $b=-3$ 이므로  $a+b=3$ 이다.

[다른풀이]  
주어진 등식이  $x^3-x^2-5x+a=(x-2)(x^2+x+b)$ 이므로  $x^3-x^2-5x+a$ 를  $x-2$ 로 나누면 몫이  $x^2+x+b$ 이고 나머지가 0이다. 조립제법을 이용하여 계산하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & -5 & a \\
& & 2 & 2 & -6 \\
\hline
& 1 & 1 & -3 & a-6
\end{array}$$

따라서 몫은  $x^2+x-3$ 이고 나머지는  $a-6$ 에서  $a=6, b=-3$ 이므로  $a+b=3$ 이다.

24. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

이차방정식  $x^2-ax+a-3=0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여  $\alpha+\beta=a, \alpha\beta=a-3$  두 근의 합이 10이므로  $a=10$  따라서 두 근의 곱은  $a-3=7$ 이다.

25. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

나머지정리에 의하여 다항식  $P(x)$ 를  $x-k$ 로 나눈 나머지는  $P(k)=k^3+k^2+k+1$  다항식  $P(x)$ 를  $x+k$ 로 나눈 나머지는  $P(-k)=-k^3+k^2-k+1$  나머지의 합이 8이므로  $P(k)+P(-k)=k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)$   $=2k^2+2$   $=8$   $k^2=3$

$$\begin{aligned} & \text{다항식 } P(x) \text{ 를 } x-k^2 \text{ 으로 나눈 나머지는} \\ P(k^2) &= (k^2)^3 + (k^2)^2 + k^2 + 1 \\ &= 3^3 + 3^2 + 3 + 1 \\ &= 40 \end{aligned}$$

26. [출제의도] 집합의 연산법칙과 집합의 포함 관계를 이용하여 부분집합의 개수를 구한다.

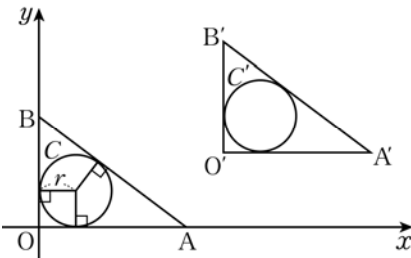
$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\} \text{ 에서} \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{2, 3\} \text{ 이므로} \\ P &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{1, 4, 5\} \\ P \subset X \subset U \text{ 이므로} \\ \{1, 4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ \text{집합 } X \text{ 는 } 1, 4, 5 \text{ 를 반드시 원소로 갖는 전체집합 } U \text{ 의 부분집합이다.} \\ \text{이를 만족시키는 집합 } X \text{ 의 개수는} \\ 2^{7-3} &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

27. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt[n]{a} &= n \quad (n \text{ 은 자연수}) \text{ 라 하고 양변을 네제곱 하면} \\ \frac{9}{4} a &= n^4 \quad \text{ 즉,} \\ \frac{3^2}{4} a &= n^4 \\ \text{등식의 좌변이 자연수 } n \text{ 의 네제곱이 되려면} \\ a &= 4 \times 3^2 \times k^4 \quad (k \text{ 는 자연수}) \\ \text{의 꼴이어야 한다.} \\ k &= 1 \text{ 일 때 } a \text{ 의 최솟값은 } 36 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

28. [출제의도] 평행이동을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

두 삼각형 OAB, O'A'B' 에 내접하는 원을 각각 C, C' 이라 하자.  
원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C는 x축, y축에 모두 접하고 제1사분면에 중심이 있으므로 중심의 좌표는 (r, r) 이다.



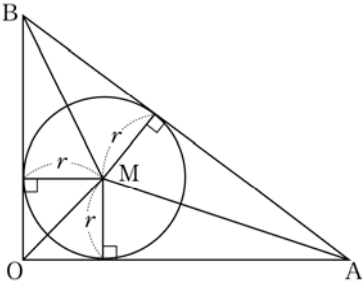
또한 두 점 A(4, 0), B(0, 3) 에 대하여 직선 AB의 방정식은

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} &= 1 \\ \text{즉 } 3x + 4y - 12 &= 0 \text{ 이고 원 } C \text{ 가 직선 AB 에 접하므로 원의 중심 } (r, r) \text{ 와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 } r \text{ 와 같으므로} \\ \frac{|3r + 4r - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} &= r \\ |7r - 12| &= 5r \\ 7r - 12 = 5r \text{ 또는 } 7r - 12 &= -5r \\ r &= 6, \quad r = 1 \\ 0 < r < 3 \text{ 이므로} \\ r &= 1 \\ \text{따라서 원 } C \text{ 의 방정식은} \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 1 \\ \text{점 A(4, 0) 을 } x \text{ 축의 방향으로 5만큼, } y \text{ 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A'(9, 2) 가 되므로 이 평행이동에 의하여 원 } C \text{ 가 평행이동한 원 } C' \text{ 의 방정식은} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-5-1)^2 + (y-2-1)^2 &= 1 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 &= 0 \\ a &= -12, \quad b = -6, \quad c = 44 \text{ 이므로} \\ a + b + c &= 26 \end{aligned}$$

[참고]

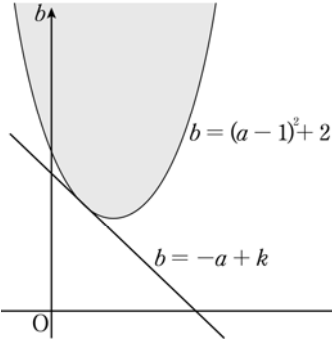
내접원 C의 반지름의 길이 r를 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.



$$\begin{aligned} \text{원의 중심을 M이라 하면, 점 M에서 세 변 OA, OB, AB에 내린 수선의 길이는 원의 반지름의 길이 } r \text{ 와 같으므로} \\ \triangle OAB &= \triangle MOA + \triangle MAB + \triangle MBO \text{ 이므로} \\ \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times r \\ 6 &= \frac{1}{2} r(4+5+3) \\ 6r &= 6 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 판별식과 부등식의 영역을 이용하여 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned} \text{모든 실수 } x \text{ 에 대하여} \\ x^2 - 2(a-1)x + b - 2 &\geq 0 \\ \text{이므로 이차방정식 } x^2 - 2(a-1)x + b - 2 &= 0 \text{ 의 판별식을 } D_1 \text{ 이라 하면} \\ \frac{D_1}{4} &= (a-1)^2 - b + 2 \leq 0 \\ \text{따라서 점 } (a, b) \text{ 는 그림과 같은 좌표평면에서 부등식} \\ b &\geq (a-1)^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \text{의 영역에 속한다.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a+b=k \text{ 라 하면 } b &= -a+k \text{ 이므로 기울기가 } -1 \text{ 인 직선이 } \textcircled{1} \text{ 의 영역을 지나면서 } b \text{ 절편이 최소일 때 } a+b \text{ 의 값이 최소이다.} \\ \text{이는 직선 } b = -a+k \text{ 와 이차함수 } b = (a-1)^2 + 2 \text{ 가 접할 때이므로 연립하면} \\ (a-1)^2 + 2 &= -a + k \\ a^2 - a + 3 - k &= 0 \\ \text{이차방정식 } a^2 - a + 3 - k &= 0 \text{ 의 판별식을 } D_2 \text{ 라 하면} \\ D_2 &= 1 - 4(3-k) = 0 \\ k &= \frac{11}{4} \\ \text{따라서 } m &= \frac{11}{4} \text{ 이므로} \\ 4m &= 11 \end{aligned}$$

30. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 집합의 원

소의 합을 추론한다.

$$\begin{aligned} \text{등차수열 } \{a_n\} \text{ 의 공차를 } d_1 \text{ 이라 하자.} \\ a_{10} &= a_1 + 9d_1 \text{ 이므로 조건 (가)에서} \\ 55 &= 1 + 9d_1 \\ d_1 &= 6 \\ \text{따라서} \\ a_n &= 1 + (n-1)6 \\ &= 6n - 5 \\ A &= \{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55\} \text{ 이므로} \\ n(A) &= 10 \\ \text{조건 (나)에서} \\ n(A \cap B) &= n(A \cap B^C) \text{ 이고,} \\ n(A) &= n(A \cap B) + n(A \cap B^C) \\ \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= 5 \\ \text{만약 집합 } A \text{ 의 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열했을 때, 인접한 두 수가 } A \cap B \text{ 의 원소이면 수열 } \{b_n\} \text{ 은 등차수열이므로 집합 } A \text{ 의 모든 원소는 집합 } B \text{ 의 원소가 된다. 따라서 } n(A \cap B) = 10 \text{ 이므로 } n(A \cap B) = 5 \text{ 에 모순이다.} \\ \text{인접하지 않은 항으로 5개의 원소를 선택하는 경우는 다음 두 가지 경우이다.} \\ \text{(i) } A \cap B &= \{7, 19, 31, 43, 55\} \text{ 인 경우} \\ \text{모든 원소의 합은 } \frac{5(7+55)}{2} &= 155 \text{ 이므로 조건 (다)에 모순이다.} \\ \text{(ii) } A \cap B &= \{1, 13, 25, 37, 49\} \text{ 인 경우} \\ \text{모든 원소의 합은 } \frac{5(1+49)}{2} &= 125 \text{ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } A \cap B &= \{1, 13, 25, 37, 49\} \text{ 이다.} \\ \text{한편, } n(A \cap B) &= \frac{1}{2} \times n(A^C \cap B) = 5 \text{ 이므로} \\ n(A^C \cap B) &= 10 \\ \text{따라서} \\ n(B) &= n(A \cap B) + n(A^C \cap B) \\ &= 5 + 10 \\ &= 15 \end{aligned}$$

공차가 6인 등차수열의 항을 원소로 갖는 집합 A의 원소의 개수가 10이므로 수열 {b\_n}의 공차가 6 이상이면 집합 B의 원소의 개수는 10 이하이다. 따라서 수열 {b\_n}의 공차는 6보다 작다.

$$\begin{aligned} \text{이때 } n(A \cap B) &= 5, \quad n(A^C \cap B) = 10 \text{ 이고,} \\ \text{수열 } \{b_n\} \text{ 은 등차수열이므로 집합 } B \text{ 의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을} \\ 1, c_1, c_2, 13, c_3, c_4, 25, c_5, c_6, 37, c_7, c_8, 49, c_9, c_{10} \\ \text{이라 할 수 있다.} \\ \text{등차수열 } \{b_n\} \text{ 의 공차를 } d_2 \text{ 라 하면} \\ 13 - 1 &= 12 \\ &= 3d_2 \text{ 이므로} \\ d_2 &= 4 \\ B &= \{1, 5, 9, 13, \dots, 53, 57\} \\ \text{따라서 집합 } B \text{ 의 모든 원소의 합은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열의 제1항부터 제15항까지의 합과 같으므로} \\ \frac{15(1+57)}{2} &= 435 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[참고]} \\ \text{두 등차수열이 3개 이상의 공통항을 가지면 그 공통항은 등차수열을 이룬다.} \end{aligned}$$

문제 1) 9번

어느 지역에서 1년동안 발생하는 규모  $M$  이상인 지진의 평균 발생 횟수  $N$ 은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log N = a - 0.9M \quad (\text{단, } a \text{는 양의 상수})$$

이 지역에서 규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생할 때, 규모  $x$  이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생한다.  $9x$ 의 값을 구하시오. (단,  $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

① 27

② 36

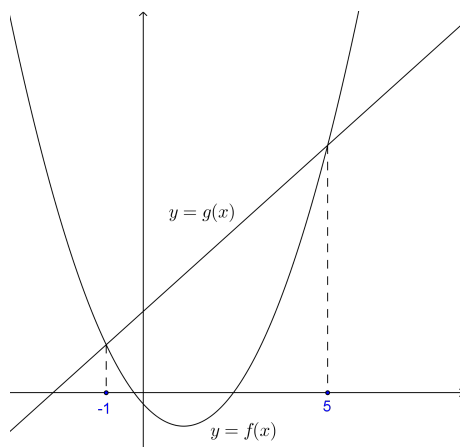
③ 45

④ 54

⑤ 63

문제 2) 15번

이차항의 계수가 1인 이차함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = g(x)$ 가 만나는 두 점의  $x$ 좌표는  $-1$ 과  $5$ 이다.  $h(x) = f(x) - g(x)$ 라고 할 때, 함수  $h(x)$ 는  $x = p$ 에서 최솟값  $q$ 를 갖는다.  $p + q$ 의 값은?



- ①  $-7$       ②  $-5$       ③  $-3$       ④  $-1$       ⑤  $1$

문제 3) 19번

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 + a_2 = 8$ 이고

$$\sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = n^2 \quad (n \geq 2)$$

를 만족시킨다.  $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은?

- ①  $388$       ②  $392$       ③  $396$       ④  $400$       ⑤  $404$

문제 4) 20번

집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $X$ 로의 일대일 대응인 함수  $f$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 집합  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $(f \circ f)(x) = x$ 이다.  
(나) 집합  $X$ 의 어떤 원소  $x$ 에 대하여  $f(x) = 5 - 2x$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

- ㄱ.  $f(2) = f^{-1}(2)$   
ㄴ.  $f(2) = 2$ 이면  $f(4) = 4$ 이다.  
ㄷ. 가능한 함수  $f$ 의 개수는 4이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



문제 5) 26번

전체 집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5\}$$

에 대하여 집합  $P$ 를

$$P = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

이라 하자.  $P \subset X \subset U$ 를 만족시키는 집합  $X$ 의 개수를 구하시오.

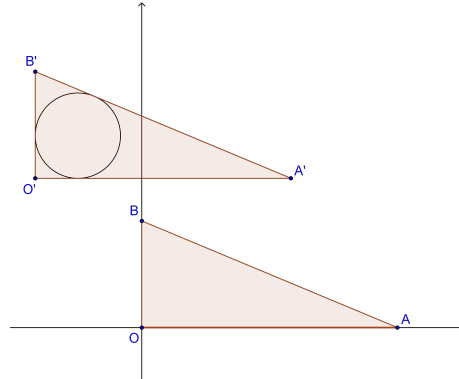
- ① 2                      ② 4                      ③ 8                      ④ 16                      ⑤ 32

문제 6) 27번

$\sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt[4]{a}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수  $a$ 의 최솟값을 구하시오.

문제 7) 28번

그림과 같이 좌표평면에서 세 점  $O(0, 0)$ ,  $A = (12, 0)$ ,  $B(0, 5)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형  $OAB$ 를 평행이동한 도형을 삼각형  $O'A'B'$ 이라 하자. 점  $A'$ 의 좌표가  $(8, 7)$ 일 때, 삼각형  $O'A'B'$ 에 내접하는 원의 방정식은  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다.  $a + b + c$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b, c$ 는 상수이다.)



문제 8) 29번

모든 실수  $x$ 에 대하여 이차부등식  $x^2 + 2(a-2)x - b^2 + 2b + 1 \geq 0$ 이 성립할 때,  $a+b$ 의 최솟값은  $m$ 이다.  $10m$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 상수이다.)

문제 9) 30번

두 등차수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  과 실수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A = \{a_k \mid 1 \leq a_k \leq 30, a_k \text{는 수열 } \{a_k\} \text{의 항}\}$$

$$B = \{b_k \mid 1 \leq b_k \leq 30, a_k \text{는 수열 } \{b_k\} \text{의 항}\}$$

다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ a_1 = 3, a_{10} = 30$$

$$(나) \ n(A \cap B) = n(A \cap B^c) = \frac{1}{2} \times n(A^c \cap B)$$

$$(다) \ \text{집합 } A \cap B \text{의 모든 원소의 합은 75이다.}$$

집합  $B$ 의 모든 원소의 합을 구하시오. (단, 수열  $\{b_n\}$ 의 항은 유한개가 아니다.)

답

1	2	3	4	5
④	①	⑤	⑤	③
6	7	8	9	
100	74	50	225	