# 수학 I : 04 삼각함수

2022 년 1 월 26 일

## 차 례

## 1 호도법

**문제 1)** 단위 변환

'인치(in)'는 미국에서 주로 사용되는 길이 단위로 1 in는 약 2, 54 cm에 해당한다.

$$1 \text{ in} \approx 2.54 \text{ cm}$$

다음 빈 칸에 알맞은 숫자 혹은 식을 써넣으시오.

(1) $3 \text{ in} \approx \boxed{\phantom{00}}$ cm

(2) $1 \text{ cm} \approx \boxed{\phantom{00}}$ in

(3) $4 \text{ cm} \approx \boxed{\phantom{00}}$ in

지금까지 각의 크기를 나타낼 때, $30°$, $90°$, $120°$와 같이 도(°)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다. 이제 각의 크기를 나타내는 새로운 단위를 알아보자.

**정의 2) 호도법**

반지름의 길이가 $r$이고 호의 길이도 $r$인 부채꼴의 중심각의 크기를 1rad으로 정한다. rad는 각을 나타내는 단위로 '라디안(radian)'이라고 읽는다.

**참고 3)**

(1) 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 $r : 2\pi r = 1\text{rad} : 360°$ 이다. 따라서

$$1\text{rad} = \frac{180°}{\pi} \qquad (*)$$

$\pi$의 값에 $\pi = 3.14\cdots$을 대입하면 1rad은 약 57.29° 정도이다.

$$1\text{rad} \approx 57.29°$$

(2) $(*)$의 양변에 $\pi$를 곱하면 $\pi$ rad $= 180°$ 이다. 이때, 단위인 라디안은 생략하는 것이 보통이다. 따라서

$$\pi = 180°$$

라고 쓴다.

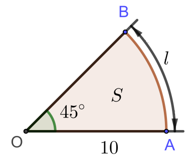
(3) 90°는 180°의 절반이므로 $90° = \frac{\pi}{2}$ 이다.
30°는 180°의 $\frac{1}{6}$ 이므로 $30° = \frac{\pi}{6}$ 이다.
360°는 180°의 두 배이므로 $360° = 2\pi$ 이다.

**문제 4)** 다음 표를 완성하여라.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 30° | 45° | | 90° | 120° | | 150° | 180° | 270° | 360° |
| 0 | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3}{4}\pi$ | | $\pi$ | | |

## 2 부채꼴의 호의 길이와 넓이

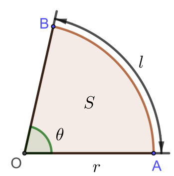
**문제 5)** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10 이고 중심각의 크기가 45° 인 부채꼴의 호의 길이 $l$ 과 넓이 $S$ 를 각각 구하여라.




**참고 6)**
위 문제에서 $l$ 과 $S$ 를 구하는 식은 각각

$$l = 2\pi \times 10 \times \frac{45}{360}$$
$$S = \pi \times 10^2 \times \frac{45}{360}$$

이다. 이와 같은 원리를 이용하여, 이번에는 반지름의 길이가 $r$ 이고 중심각의 크기가 $\theta$(rad) 인 부채꼴의 호의 길이 $l$ 과 넓이 $S$ 를 구해보자.*




$$l = 2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$
$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$

따라서 $l = r\theta$ 이고 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ 이다. 한편, $S$ 를 구하는 식을 조금 변형하면

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times r \times r\theta = \frac{1}{2}rl$$

을 얻을 수도 있다.

*$\theta$ 는 8번째 그리스어 문자로 세타(theta) 라고 읽는다. 주로 각도를 표시할 때 쓰인다.

이것들을 정리하면 다음과 같다.

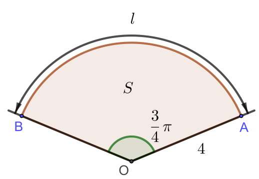
**정리 7) 부채꼴의 호의 길이와 넓이**

반지름의 길이가 $r$ 이고 중심각의 크기가 $\theta$(라디안) 인 부채꼴의 호의 길이를 $l$, 넓이를 $S$ 라고 하면

$$l = r\theta \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad S = \frac{1}{2}rl$$

**예시 8)** 반지름의 길이가 4 이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$ 인 부채꼴에서

$$l = 4 \times \frac{3}{4}\pi = 3\pi$$
$$S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$$

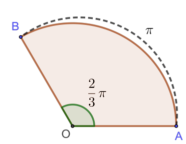



**문제 9)** 다음 부채꼴에서 호의 길이 $l$ 과 넓이 $S$ 를 구하여라.

(1) 반지름의 길이가 6 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 인 부채꼴

(2) 반지름의 길이가 10 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴

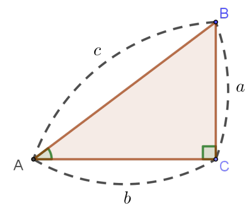
**문제 10)** 호의 길이가 $\pi$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴의 넓이를 구하여라.



## 3 복습(삼각비)

**정의 11) 삼각비**

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

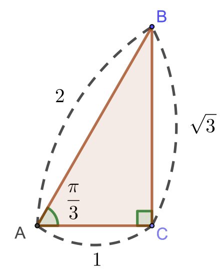



**예시 12)** $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$의 삼각비를 구하여라.

오른쪽 그림에서

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

이다.




**문제 13)** 다음 삼각비의 값들을 구하여라.

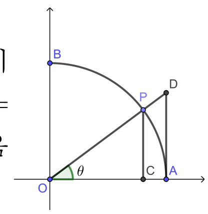
(1) $\sin\frac{\pi}{6} =$ $\quad \cos\frac{\pi}{6} =$ $\quad \tan\frac{\pi}{6} =$

(2) $\sin\frac{\pi}{4} =$ $\quad \cos\frac{\pi}{4} =$ $\quad \tan\frac{\pi}{4} =$

**문제 14)** 다음 값을 계산하여라.

$$(\sin\tfrac{\pi}{6})^2 + (\cos\tfrac{\pi}{6})^2 =$$
$$(\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\cos\tfrac{\pi}{4})^2 =$$

**문제 15)** 다음 그림에서 $\overset{\frown}{AB}$ 는 중심이 원점이고 반지름이 1 인 원의 일부이다. $\overset{\frown}{AB}$ 위의 한 점 $P$ 에 대하여 $\angle POA = \theta$ 라고 할 때, 다음 빈칸에 알맞은 선분을 써넣고 다음 물음에 답하여라.




$$\sin\theta = \frac{\overline{\boxed{(가)}}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{\boxed{(나)}}}{\overline{OD}} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{\boxed{(다)}}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} \qquad \tan\theta = \frac{\overline{\boxed{(가)}}}{\overline{\boxed{(다)}}} = \frac{\overline{\boxed{(나)}}}{\overline{OA}}$$

따라서

$$\sin\theta = \boxed{(가)} \qquad \cos\theta = \boxed{(다)} \qquad \tan\theta = \boxed{(나)}$$

(1) $\theta = 0$ 의 삼각비를 구하려면 $P = A$ 인 상황을 생각하면 된다. 그러므로

$$\sin 0 = \qquad \cos 0 = \qquad \tan 0 =$$

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 의 삼각비를 구하려면 $P = B$ 인 상황을 생각하면 된다. 그러므로

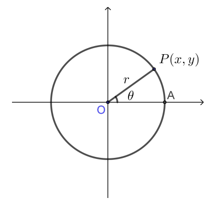
$$\sin\frac{\pi}{2} = \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \qquad \tan\frac{\pi}{2} =$$

# 4 삼각함수

**정의 16) 삼각함수의 값**

양수 $r$ 에 대하여 점 $A = (r, 0)$ 을 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 을 따라 시계 반대 방향* 으로 $\theta$ 만큼 회전시킨 점을 $P(x, y)$ 라고 할 때,

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

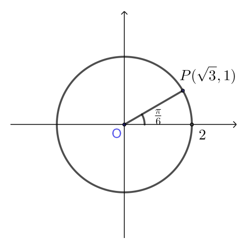



이다. 이때, 반직선 $OA$ 를 시초선, 반직선 $OP$ 를 동경이라고 부른다.

**예시 17)** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{6}$ 의 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 각각 구하여라.

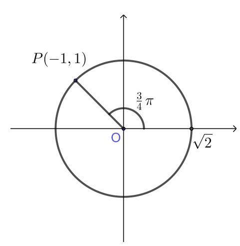
(1) $r = 2$ 로 두고 $A(2, 0)$ 를 시계반대방향으로 $\frac{\pi}{6}(= 30°)$ 만큼 회전시키면 $P = (\sqrt{3}, 1)$ 이다. 따라서

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$




(2) $r = \sqrt{2}$ 로 두고 $A(\sqrt{2}, 0)$ 를 시계반대방향으로 $\frac{3}{4}\pi(= 135°)$ 만큼 회전시키면 $P = (-1, \sqrt{2})$ 이다. 따라서

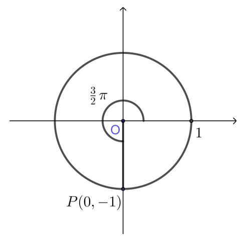
$$\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{3}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{-1} = -1$$




*시계 반대 방향은 시계 바늘이 도는 방향의 반대방향을 의미한다. $\theta < 0$ 이면 시계 방향으로 회전시킨다. 따라서 시계 반대 방향을 $\boxed{\text{양의 방향}}$, 시계 방향을 $\boxed{\text{음의 방향}}$ 이라고 부른다.

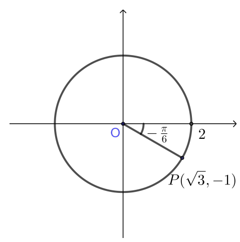
(3) $r = 1$ 로 두고 $A(1, 0)$ 를 시계반대방향으로 $\frac{3}{2}\pi(= 270°)$ 만큼 회전시키면 $P = (0, -1)$ 이다. 따라서

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \frac{0}{1} = 0$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi = \frac{-1}{1} = -1$$
$$\tan\frac{3}{2}\pi = \frac{-1}{0}\text{(존재하지 않는다.)}$$




(4) $r = 2$ 로 두고 $A(2, 0)$ 를 시계방향으로 $\frac{\pi}{6}(= 30°)$ 만큼 회전시키면 $P = (\sqrt{3}, -1)$ 이다. 따라서

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

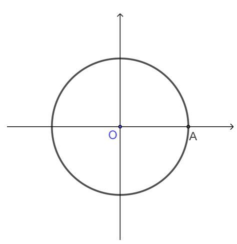



**문제 18)** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $-\pi$ 의 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 각각 구하여라.

$\sin\frac{\pi}{4} =$

$\cos\frac{\pi}{4} =$

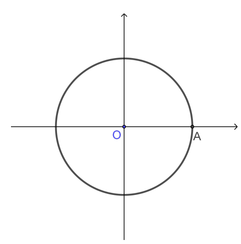
$\tan\frac{\pi}{4} =$




$\sin\frac{2}{3}\pi =$

$\cos\frac{2}{3}\pi =$

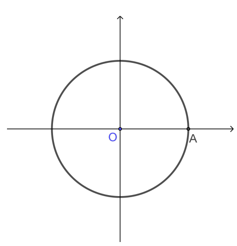
$\tan\frac{2}{3}\pi =$




$\sin\frac{7}{3}\pi =$

$\cos\frac{7}{3}\pi =$

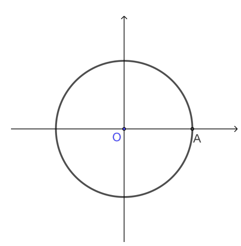
$\tan\frac{7}{3}\pi =$



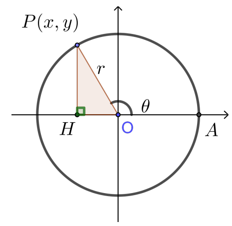

$\sin(-\pi) =$

$\cos(-\pi) =$

$\tan(-\pi) =$



## 5 삼각함수의 성질




오른쪽 그림에서 $-r \le x \le r$, $-r \le y \le r$ 이다.
두 식의 양변을 $r$ 로 나누면

$$-1 \le \cos\theta \le 1, \quad -1 \le \sin\theta \le 1$$

이다. 또한, 식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에서 양변을 $r^2$ 으로 나누어주면*

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

이다. 한편,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

도 성립한다.

**정의 19) 삼각함수의 기본 성질**

(1) $-1 \le \sin\theta \le 1, -1 \le \cos\theta \le 1$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(3) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

**문제 20)**

(1) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값을 구하시오.

(2) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값으로 가능한 것을 모두 구하시오.

(3) $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하시오.

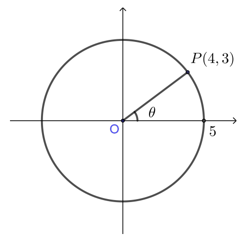
(4) $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$ 이고, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하여라.

---

* $(\sin\theta)^2$ 은 $\sin^2\theta$ 로 표기한다.

**예시 21)** 각도 $\theta$의 동경을 $OP$ 라고 할 때, $P = (4, 3)$ 이다.

$$\sin\theta = \tfrac{3}{5}$$
$$\cos\theta = \tfrac{4}{5}$$
$$\tan\theta = \tfrac{3}{4}$$

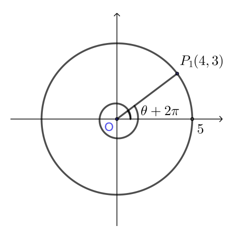



이때 다음 각도들에 대한 삼각비의 값을 차례로 구하여라.

(1) $\theta + 2\pi$ (2) $-\theta$ (3) $\theta + \pi$ (4) $\frac{\pi}{2} - \theta$

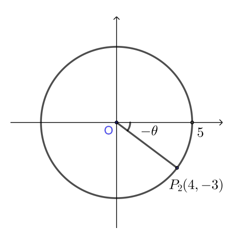
(1) $\theta + 2\pi$ 의 동경을 $OP_1$ 이라고 하면, $P_1$ 은 $A$를 $\theta$만큼 시계 반대 방향으로 회전시킨 후(= $P$) 같은 방향으로 $2\pi$ 만큼 더 회전시킨 점이다. 따라서 $P_1 = P = (4, 3)$ 이다.

$$\sin(\theta + 2\pi) = \tfrac{3}{5}$$
$$\cos(\theta + 2\pi) = \tfrac{4}{5}$$
$$\tan(\theta + 2\pi) = \tfrac{3}{4}$$



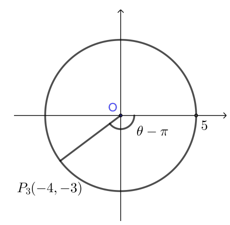

(2) $-\theta$의 동경을 $OP_2$ 이라고 하면, $P_2$ 는 $A$를 시계 방향으로 $\theta$만큼 회전시킨 점이므로 $P_1 = (4, -3)$ 이다.

$$\sin(-\theta) = -\tfrac{3}{5}$$
$$\cos(-\theta) = \tfrac{4}{5}$$
$$\tan(-\theta) = -\tfrac{3}{4}$$



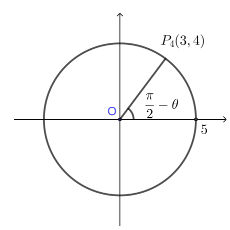
(3) $\theta - \pi$ 의 동경을 $OP_3$ 이라고 하면, $P_3$ 는 $A$ 를 시계 반대 방향으로 $\theta$ 만큼 회전시킨 후(= $P$), 다시 시계방향으로 $\pi$ 만큼 회전시킨 점이다. 따라서 $P = (-4, -3)$ 이다.

$$\sin(\theta - \pi) = -\frac{3}{5}$$
$$\cos(\theta - \pi) = -\frac{4}{5}$$
$$\tan(\theta - \pi) = \frac{3}{4}$$



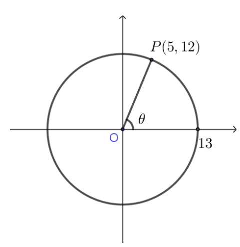

(4) $\frac{\pi}{2} - \theta$ 의 동경을 $OP_4$ 이라고 하면, $P_4$ 는 $A$ 를 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전시킨 후, 다시 시계방향으로 $\theta$ 만큼 회전시킨 점이다. 따라서 $P = (3, 4)$ 이다.

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{4}{5}$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{3}{5}$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{4}{3}$$




**문제 22)** 각도 $\theta$ 의 동경을 $OP$ 라고 할 때, $P = (5, 12)$ 이다.

$$\sin\theta = \frac{12}{13}$$
$$\cos\theta = \frac{5}{13}$$
$$\tan\theta = \frac{12}{5}$$

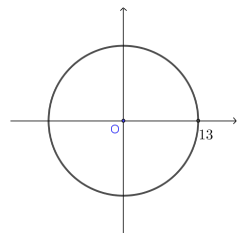



이때 다음 각도들에 대한 삼각비의 값을 차례로 구하여라.

(1) $\theta + 4\pi$ (2) $-\theta$ (3) $\theta + \pi$ (4) $\frac{\pi}{2} - \theta$

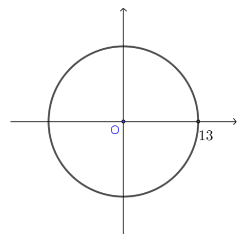
(1)

$$\sin(\theta + 4\pi) =$$
$$\cos(\theta + 4\pi) =$$
$$\tan(\theta + 4\pi) =$$



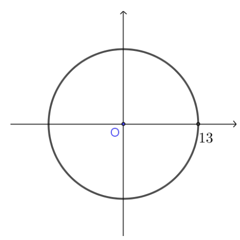

(2)

$$\sin(-\theta) =$$
$$\cos(-\theta) =$$
$$\tan(-\theta) =$$



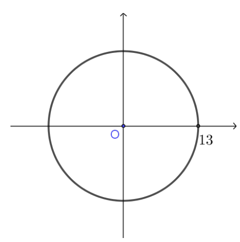

(3)

$$\sin(\theta + \pi) =$$
$$\cos(\theta + \pi) =$$
$$\tan(\theta + \pi) =$$




(4)

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$

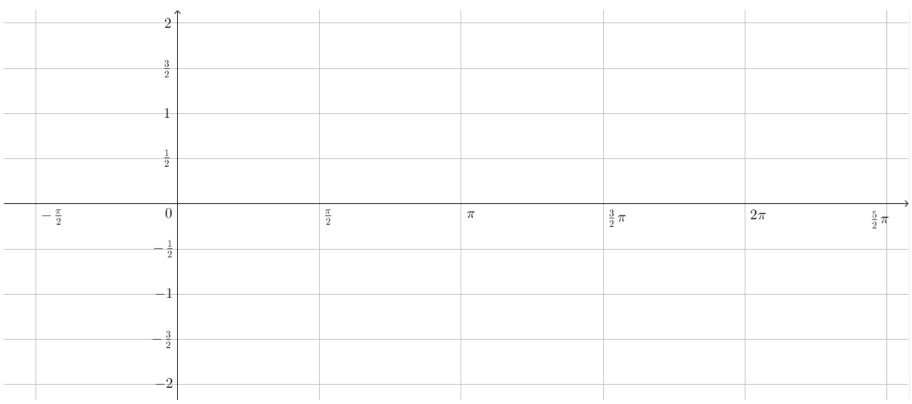


## 6 삼각함수의 그래프

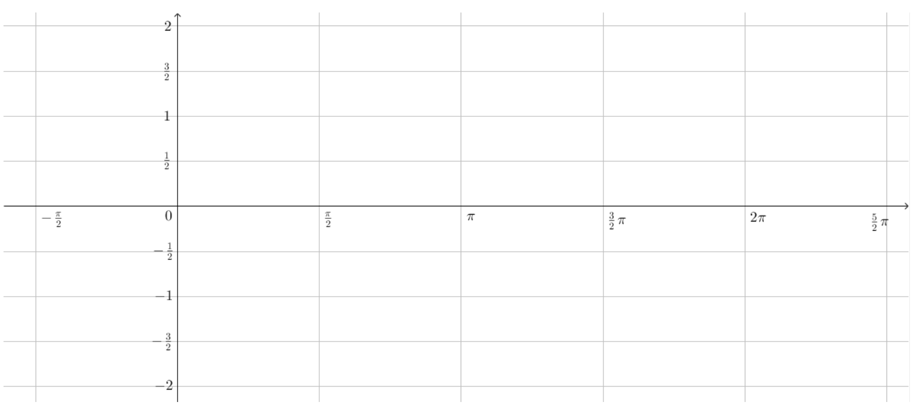
**문제 23)** 다음 표를 완성하여라.

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | | | | | |
| $\cos\theta$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | | | | | | | | | | |
| $\tan\theta$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | | | | | | | | | | |

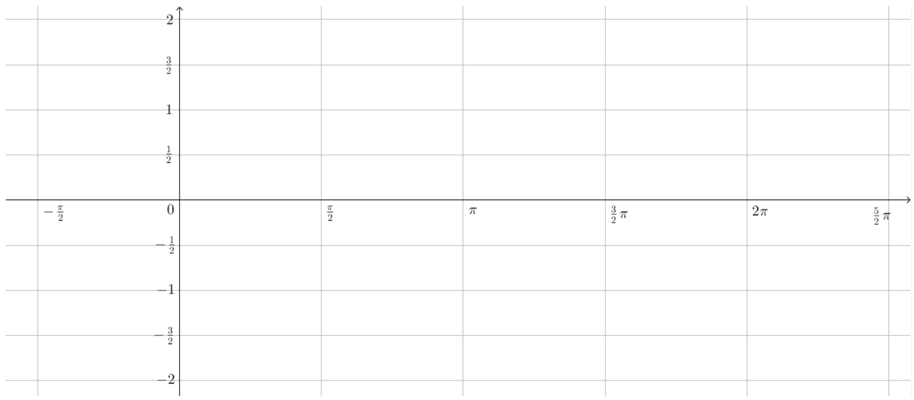
위의 표를 참고하여 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 의 그래프를 그려라.




$y = \sin x$




$y = \cos x$




$y = \tan x$

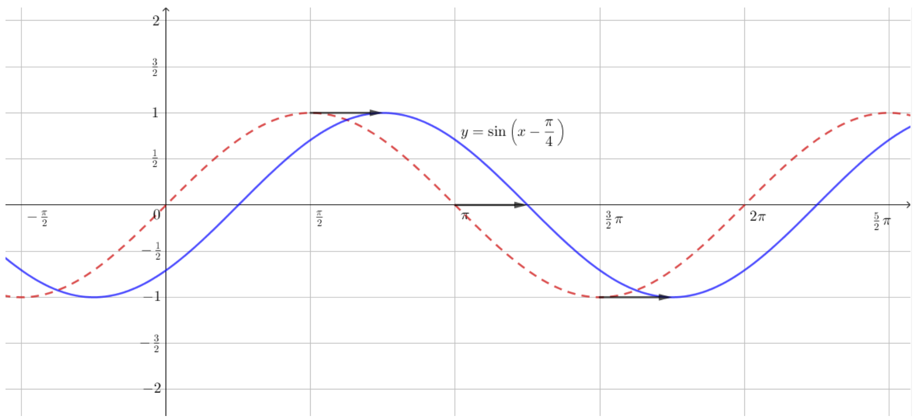
**정리 24) 삼각함수의 그래프**

| $y = \sin x$ | $y = \cos x$ | $y = \tan x$ |
|---|---|---|
| 정의역은 실수 전체의 집합이다. | | 정의역은 $\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\}$ 이다. |
| 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다. | | 치역은 실수 전체의 집합이다. |
| 최댓값이 $1$ 이고 최솟값이 $-1$ 이다. | | 최댓값과 최솟값이 없다. |
| $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ | $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ | $\tan(x + \pi) = \tan x$ |
| 주기가 $2\pi$ 인 함수이다. | | 주기가 $\pi$ 인 함수이다. |
| $\sin(-x) = -\sin x$ | $\cos(-x) = \cos x$ | $\tan(-x) = -\tan x$ |
| 원점 대칭이다. | $y$ 축 대칭이다. | 원점 대칭이다. |
| 기함수이다. | 우함수이다. | 기함수이다. |
| 점근선이 없다. | | 점근선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 을 가진다. |

**예시 25)** 다음 삼각함수들의 그래프를 그려라.

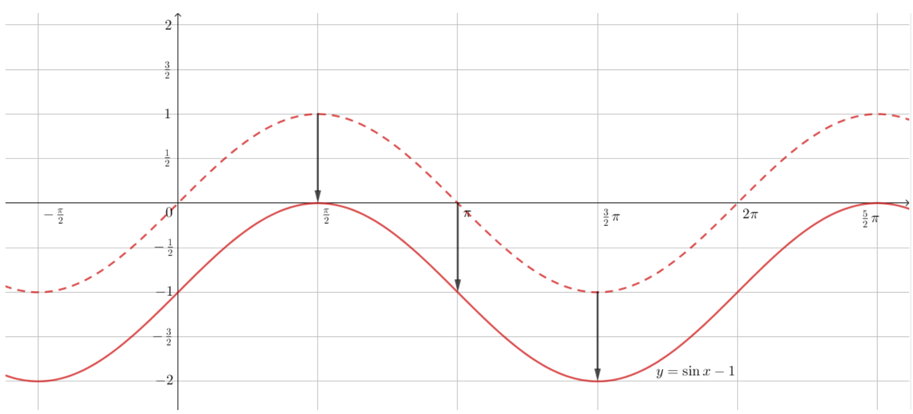
(1) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$y = \sin x$ 의 그래프를 $x$ 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동시키면 된다. 따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.




(2) $y = \sin x - 1$

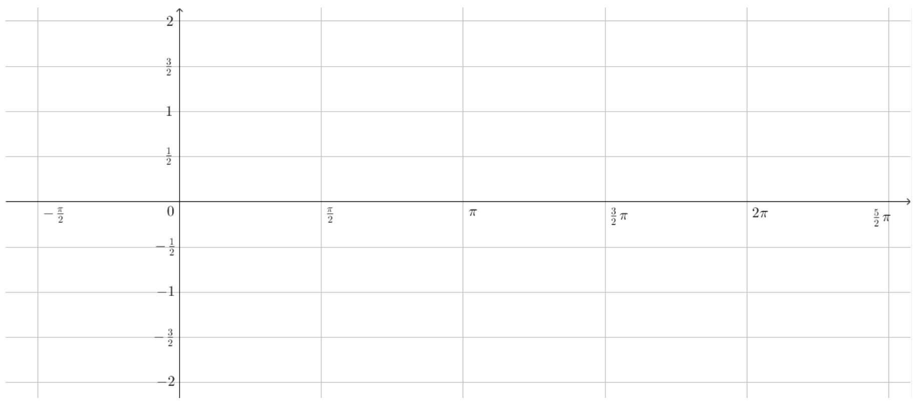
$y = \sin x$ 의 그래프를 $y$ 축의 방향으로 $-1$ 만큼 평행이동시키면 된다. 따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.



**문제 26)** 다음 삼각함수들의 그래프를 그려라.

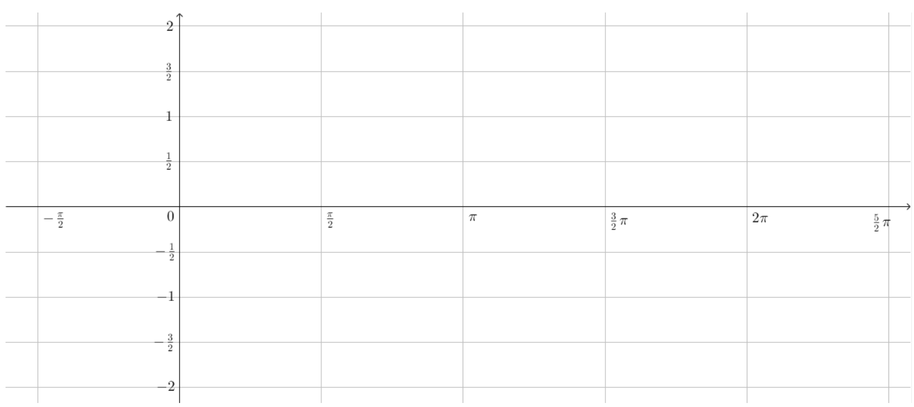
(1) $y = 2\sin x$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\sin x$ | | | | | | | | | | | | | |




(2) $y = \sin 2x$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin 2x$ | | | | | | | | | | | | | |



예시 21)과 문제 22)에서 우리는 다음과 같은 성질들을 유추할 수 있었다.

**정리 27)**

(1) $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\tan(x+2\pi) = \tan x$

(2) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$

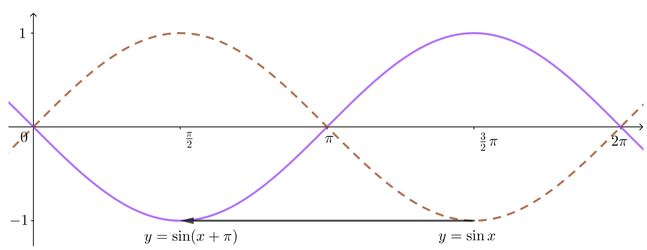
(3) $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\tan(x+\pi) = \tan x$

(4) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

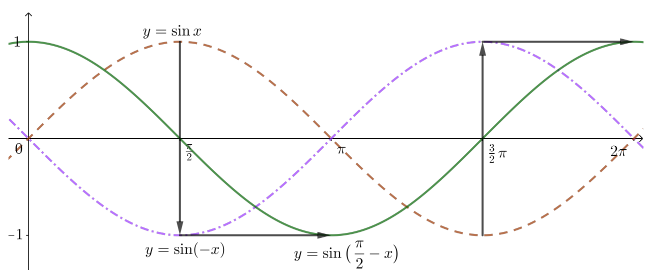
이 성질들은 삼각함수의 그래프를 통해서 보면 더 명확하게 보인다.

(1)은 삼각함수가 일정한 주기를 가진다는 사실로부터, (2)는 삼각함수가 원점 혹은 $y$축을 기준으로 대칭성이 있다는 사실로부터 당연하다.

한편 $y = \sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 이동시켜 $y = \sin(x+\pi)$의 그래프를 그리면, 정확히 $y = -\sin x$의 그래프와 일치한다. 코사인과 탄젠트의 경우도 마찬가지이다. 따라서 (3)이 성립한다.

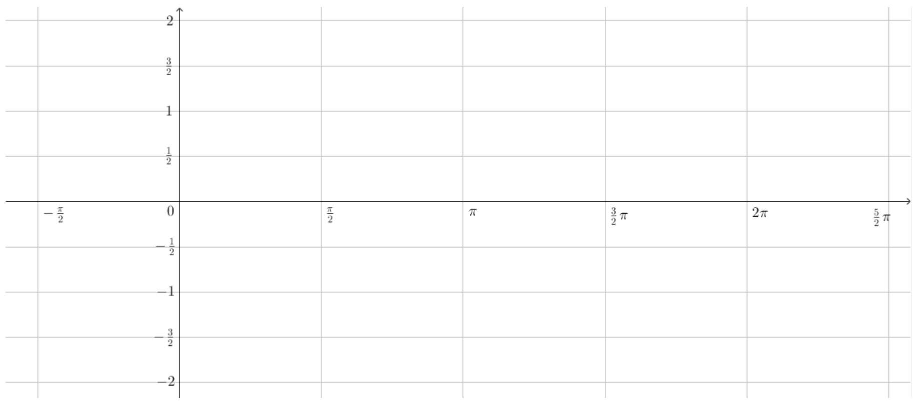



또한 $y = \sin x$의 그래프를 $y$축 대칭이동시켜 $y = \sin(-x)$ 그래프를 얻고, 이것을 다시 $x$축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 이동시켜 $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$의 그래프를 얻으면, 정확히 $y = \cos x$의 그래프와 일치한다. 코사인의 경우도 마찬가지이다. 따라서 (4)가 성립한다.

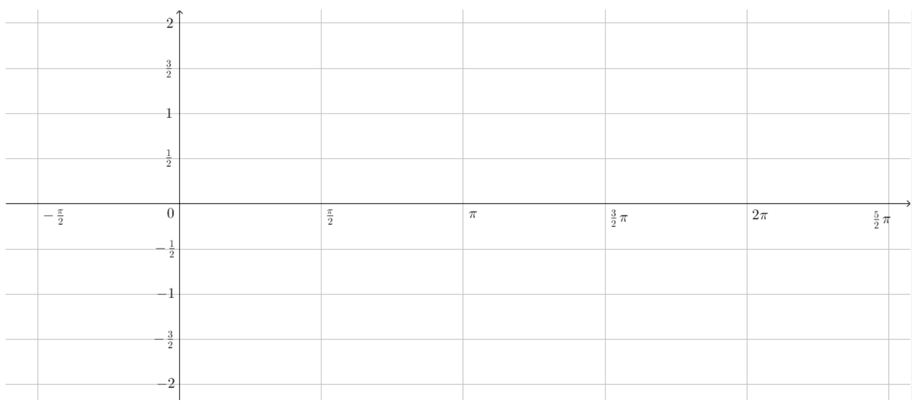


**문제 28)** 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$




(2) $\sin(\pi - x) = \sin x$



# 7 삼각방정식

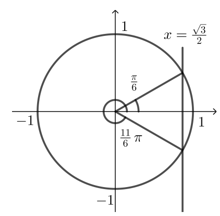
**예시 29)** $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 다음 방정식의 근을 구하여라.

(1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　　　　　(2) $\tan x = \sqrt{3}$

**삼각함수의 정의를 사용하는 방법**

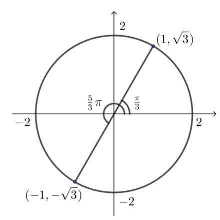
(1) 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점이 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$의 두 개이므로

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi$$



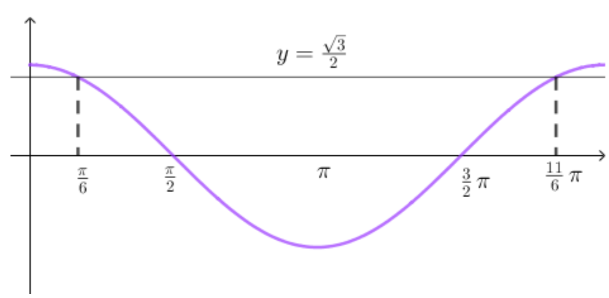

(2) 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $y = \sqrt{3}x$의 교점이 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$의 두 개이므로

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$$

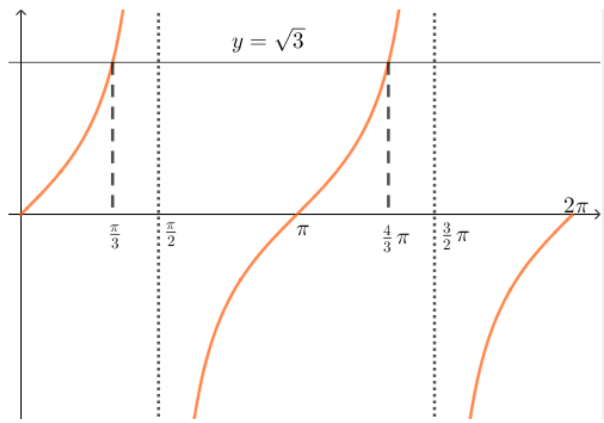



**그래프를 사용하는 방법**

(1) $y = \cos x$의 그래프와 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점을 구하면 $x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi$



(2) $y=\tan x$ 의 그래프와 $y=\sqrt{3}$ 의 교점을 구하면 $x=\frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$




**예시 30)** $x$ 가 실수일 때, 다음 방정식의 근을 구하여라.

(1) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan x=\sqrt{3}$

(1) 코사인함수는 주기가 $2\pi$ 이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 이 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 근이면

$$x=\cdots, \quad \frac{\pi}{6}-2\pi, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6}+2\pi, \quad \frac{\pi}{6}+4\pi, \quad \cdots$$

의 값들도 근이 된다. 마찬가지로 $x=\frac{11}{6}$ 가 근이므로

$$x=\cdots, \quad \frac{11}{6}\pi-2\pi, \quad \frac{11}{6}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi+2\pi, \quad \frac{11}{6}\pi+4\pi, \quad \cdots$$

또한 근이 된다. 이것들을 정리하면

$$x=\frac{\pi}{6}+2n\pi, \quad \frac{11}{6}\pi+2n\pi \quad (n\text{은 정수})$$

(2) 탄젠트함수는 주기가 $\pi$ 이므로

$$x=\frac{\pi}{3}+n\pi, \quad \frac{4}{3}\pi+n\pi \quad (n\text{은 정수})$$

**문제 31)** $x$ 가 실수일 때, 다음 방정식의 근을 구하여라.

(1) $\sin x=-\frac{1}{2}$ (2) $\tan x=1$

## 8 삼각부등식

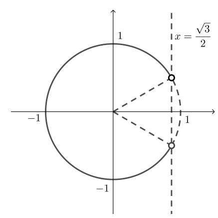
**예시 32)** $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 다음 부등식의 근을 구하여라.

(1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan x \ge \sqrt{3}$

**삼각함수의 정의를 사용하는 방법**

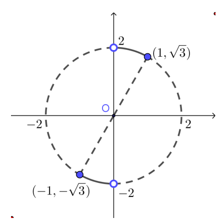
(1) 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(x, y)$ 중 $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 점들을 표시하면 오른쪽 그림과 같다. 따라서

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi$$



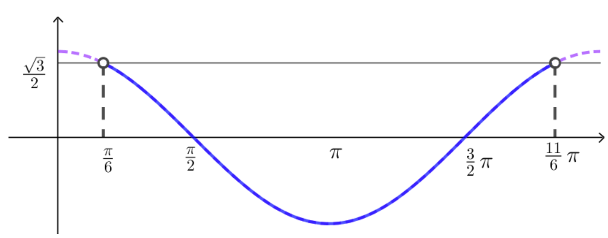

(2) 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(x, y)$ 중 직선 $OP$의 기울기가 $\sqrt{3}$보다 크거나 같은 점들을 표시하면 오른쪽 그림과 같다.

$$x = \frac{\pi}{3},\quad \frac{4}{3}\pi$$




**그래프를 사용하는 방법**

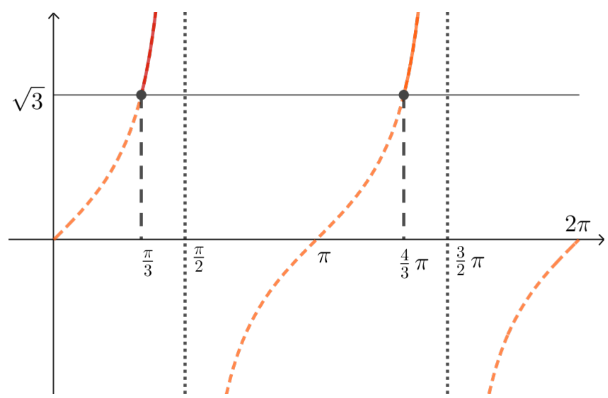
(1) $y = \cos x$ 의 그래프의 부분 중 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 부분을 표시하면 다음과 같다.



따라서

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi$$

(2) $y = \tan x$ 의 그래프의 부분 중 직선 $y = \sqrt{3}$ 보다 위에 있는 부분을 표시하면 다음과 같다.




따라서

$$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad \frac{4}{3}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$$

**문제 33)** $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 다음 부등식의 근을 구하여라.

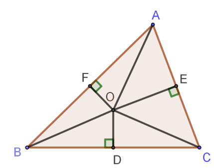
(1) $\sin x < -\frac{1}{2}$ (2) $\tan x \le 1$

## 9 사인법칙

**복습 34) 삼각형의 외심**

다음은 삼각형의 외심에 대한 설명이다. 문장들을 완성하여라.

- 삼각형 $ABC$의 외심 $O$는 삼각형의 ( 내접원 / 외접원 )의 중심을 말한다.
- 외심 $O$는 (세 각의 각이등분선의 교점 / 세 변의 수직이등분선의 교점 / 중선의 교점 ) 이기도 하다.
- 오른쪽 그림에서 $\triangle OBD$와 합동인 삼각형은 ( $\triangle OBF$ / $\triangle OCD$ ) 이다.

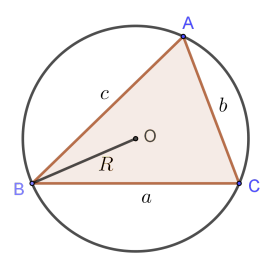



- $\triangle ABC$가 예각삼각형이면 점 $O$는 삼각형의 ( 내부 / 외부 ) 에 있다.
- $\triangle ABC$가 둔각삼각형이면 점 $O$는 삼각형의 ( 내부 / 외부 ) 에 있다.
- $\triangle ABC$가 직각삼각형이면 점 $O$는 $\boxed{\phantom{xxx}}$에 있다.

삼각형 $ABC$의 세 변의 길이를 각각 $a, b, c$라고 할 때, 외접원의 반지름의 길이를 $R$이라고 하면 다음 식이 성립한다.

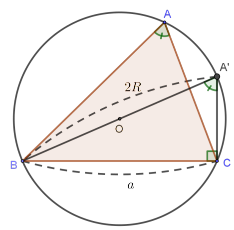
**정리 35) 사인법칙**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



**문제 36)** 다음은 삼각형 $ABC$ 가 예각삼각형일 때, 사인법칙을 증명하는 과정이다. 빈 칸에 알맞은 것을 써넣어라.

선분 $BO$ 의 연장선이 원과 만나는 점을 $A'$ 이라고 하면 $\angle A$ 와 $\angle A'$ 은 모두 호 $BC$ 에 대한 원주각이므로




$$\angle A = \angle A'$$

그러면 $\triangle A'BC$ 는 직각삼각형이므로

$$\sin A' = \frac{\boxed{(가)}}{2R}$$

따라서

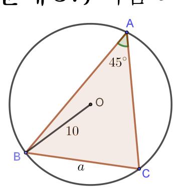
$$\frac{\boxed{(가)}}{\sin A} = 2R$$

이다. 마찬가지의 방법을 활용하면

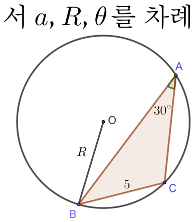
$$\frac{\boxed{(나)}}{\sin B} = 2R, \quad \frac{\boxed{(다)}}{\sin C} = 2R$$

이다. 따라서 사인법칙이 증명되었다.

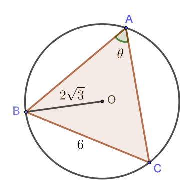
**문제 37)** 다음 그림에서 $a, R, \theta$를 차례로 구하여라.




$a =$

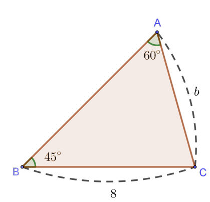



$R =$




$\theta =$

**문제 38)** 오른쪽 그림에서 $b$의 값을 구하여라.



## 10 코사인법칙

**복습 39) 피타고라스 정리의 역**

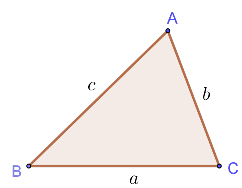
삼각형 $ABC$ 의 세 꼭짓점의 대변의 길이가 각각 $a, b, c$ 일 때, 다음 빈칸에 알맞은 등호(=) 혹은 부등호($<, >$)를 써넣어라.

- $\angle C$ 가 예각이면 $a^2 + b^2 \boxed{\phantom{=}}\, c^2$ 이다.
- $\angle C$ 가 직각이면 $a^2 + b^2 \boxed{\phantom{=}}\, c^2$ 이다.
- $\angle C$ 가 둔각이면 $a^2 + b^2 \boxed{\phantom{=}}\, c^2$ 이다.

삼각형 $ABC$ 에 대하여 다음 정리가 성립한다.

**정리 40) 코사인법칙**

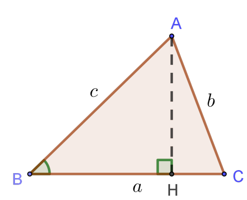
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$




**문제 41)** $\angle B$ 가 예각일 때, 코사인법칙을 증명하는 과정이다. 빈 칸에 알맞은 선을 써넣어라.

점 $A$ 에서 선분 $BC$ 에 내린 수선의 발을 $H$ 라 고 하면 $\sin B = \frac{\overline{AH}}{c}, \cos B = \frac{\overline{BH}}{c}$ 이다. 따라서

$$\overline{AH} = \boxed{(가)}, \quad \overline{BH} = \boxed{(나)}$$




한편 $\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH}$ 이므로

$$\overline{CH} = a - \boxed{(나)}$$

직각삼각형 $AHC$ 에 피타고라스의 정리를 적용시키면 $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$

으로부터

$$b^2 = \boxed{(가)}^2 + \left(a - \boxed{(나)}\right)^2$$

이 식을 정리하면

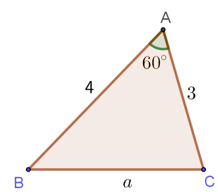
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

이 얻어진다. 마찬가지의 방법을 사용하면

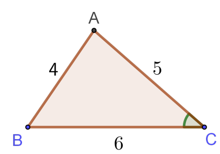
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

도 얻을 수 있다.

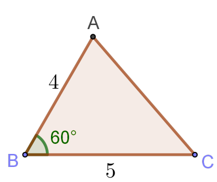
**문제 42)** 오른쪽 그림에서 $a$의 값을 구하여라.



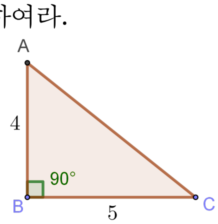

**문제 43)** 오른쪽 그림에서 $\cos C$ 의 값을 구하여라.



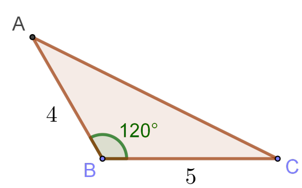

**문제 44)** 다음 그림에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$ 이다. $\angle B$ 가 각각 $60°$, $90°$, $120°$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이를 차례로 구하여라.




$\overline{AC} =$




$\overline{AC} =$




$\overline{AC} =$

## 답

**문제 1)** (1) $2.54 \times 3$ (2) $\frac{1}{2.54}$ (3) $\frac{4}{2.54}$

**문제 4)**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ | $270°$ | $360°$ |
| $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |

**문제 5)** $l = \frac{5}{2}\pi, S = \frac{25}{2}\pi$

**문제 9)** (1) $l = \pi, S = 3\pi$ (2) $l = \frac{20}{3}\pi, S = \frac{100}{3}\pi$

**문제 10)** $\frac{3}{4}\pi$

**문제 13)**

(1) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$

**문제 14)** 1, 1

**문제 15)** $\boxed{(\text{가})} = \overline{CP}$, $\boxed{(\text{나})} = \overline{AD}$, $\boxed{(\text{다})} = \overline{OC}$

(1) $\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \tan 0 = 0$

(2) $\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \tan\frac{\pi}{2} =$ (존재하지 않는다.)

**문제 18)**

$$\begin{array}{llll}
\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{7}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin(-\pi) = 0 \\
\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} & \cos\frac{7}{3}\pi = \frac{1}{2} & \cos(-\pi) = -1 \\
\tan\frac{\pi}{4} = 1 & \tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3} & \tan\frac{7}{3}\pi = \sqrt{3} & \tan(-\pi) = 0
\end{array}$$

**문제 20)** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\pm\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

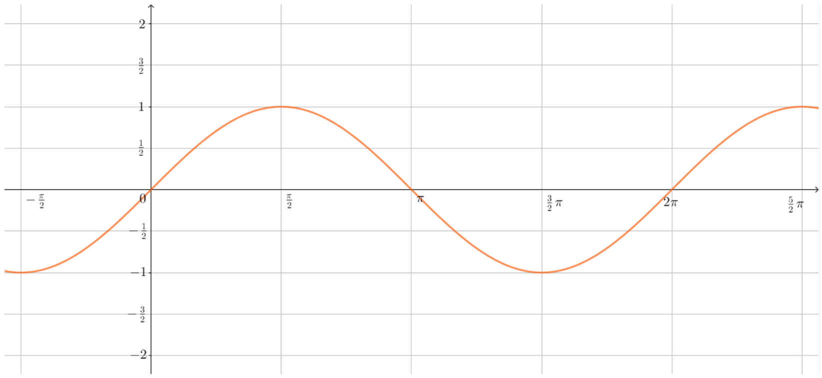
**문제 22)**

$$\sin(\theta+4\pi)=\tfrac{12}{13} \qquad \sin(-\theta)=-\tfrac{12}{13} \qquad \sin(\theta+\pi)=-\tfrac{12}{13} \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\tfrac{5}{13}$$
$$\cos(\theta+4\pi)=\tfrac{5}{13} \qquad \cos(-\theta)=\tfrac{5}{13} \qquad \cos(\theta+\pi)=-\tfrac{5}{13} \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\tfrac{12}{13}$$
$$\tan(\theta+4\pi)=\tfrac{12}{5} \qquad \tan(-\theta)=-\tfrac{12}{5} \qquad \tan(\theta+\pi)=\tfrac{12}{5} \qquad \tan(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\tfrac{5}{12}$$

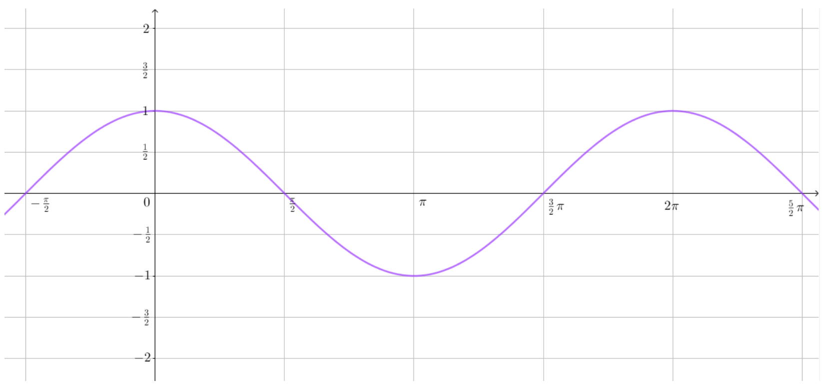
**문제 23)**

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\tan\theta$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\times$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\times$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

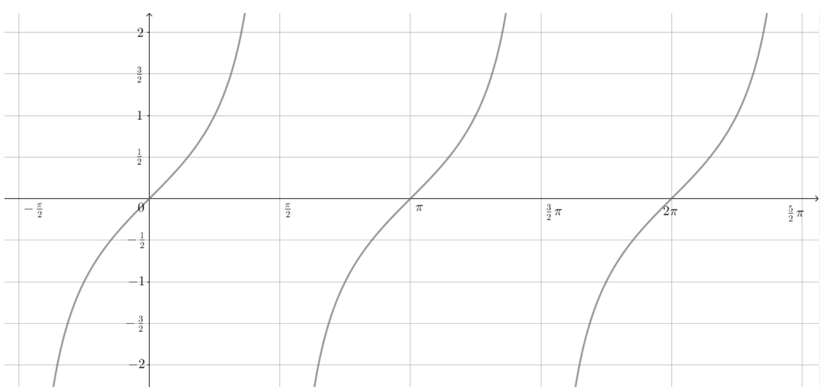
$\times$ : 존재하지 않음




$y = \sin x$




$y = \cos x$

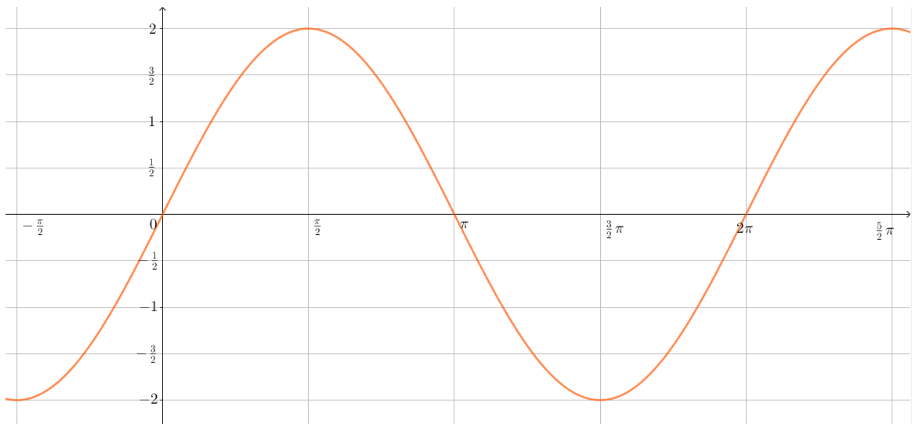



$y = \tan x$

**문제 26)**

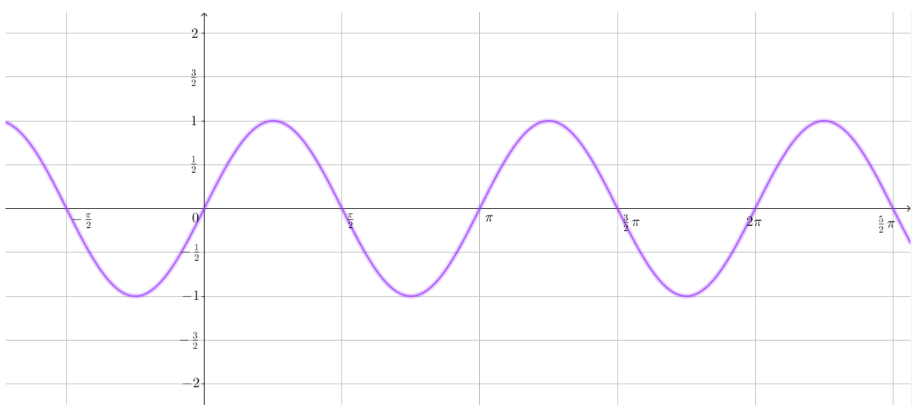
(1) $y = 2\sin x$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\sin x$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $2$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $-2$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ |




(2) $y = \sin 2x$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin 2x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ |



**문제 31)** (1) $x = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \frac{5}{4}\pi + n\pi$

**문제 33)** (1) $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ (2) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

**문제 34)**

- 외접원
- 세 변의 수직이등분선의 교점
- $\triangle OCD$
- 내부
- 외부
- 빗변의 중점

**문제 36)** $\boxed{(\text{가})} = a$, $\boxed{(\text{나})} = b$, $\boxed{(\text{다})} = c$

**문제 37)** (1) $10\sqrt{2}$ (2) 5 (3) $60°(= \frac{\pi}{3})$

**문제 37)** $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

**문제 39)** $>, =, <$

**문제 41)** $\boxed{\text{(가)}} = \overline{AH}, \boxed{\text{(나)}} = \overline{BH}$

**문제 42)** $\sqrt{13}$

**문제 43)** $\frac{3}{4}$

**문제 44)** $\sqrt{21}, \sqrt{41}, \sqrt{61}$

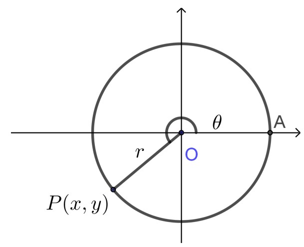
## 요약

2 부채꼴의 호의 길이와 넓이

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

4 삼각함수

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



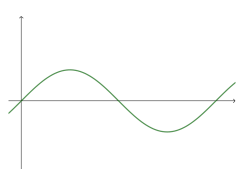

5 삼각함수의 성질

$$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1$$

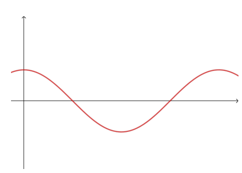
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

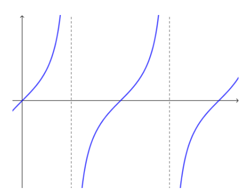
6 삼각함수의 그래프



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$

9 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

10 코사인법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$