준수-01: 거듭제곱근식과 지수

December 20, 2014

정의 1) 자연수 지수

실수 a와 자연수 n에 대해 a^n을

$$
\begin{aligned}
a^1 &= a \\
a^2 &= a \times a \\
a^3 &= a \times a \times a \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

등으로 정의한다.

정의 2) 정수 지수

실수 a와 정수 n에 대해 a^n을 다음과 같이 정의한다. 만약 $n > 0$이면 정의 1에서처럼 정의한다. 만약 $n = 0$이면 $a^n = a^0 = 1$로 정의한다. 만약 $n < 0$이면 $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$로 정의한다. 세 번째 경우 $-n > 0$이므로 a^{-n}가 정의되는 데는 문제가 없다는 점에 주목하자.

정리 3) 지수법칙(정수)

실수 a, b, 정수 m, n에 대해

(1) $a^m b^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m} (b \neq 0)$

증명. 증명은 생략한다. m, n이 각각 자연수일 때 네 법칙을 먼저 증명한 후 이를 토대로 정수 지수에 대해서 다시 증명하면 된다. □

정의 4) 거듭제곱근

a가 실수이고 n이 자연수일 때 $x^n = a$를 만족시키는 실수 x를 a **의** n **제곱근**이라고 부른다.

정리 5) 거듭제곱근의 존재

정의 4에서

(1) $a > 0$ 이면 x 는 유일하게 하나 존재한다.

(2) $a < 0$ 이고 n 이 짝수이면 x 는 존재하지 않는다.

(3) $a < 0$ 이고 n 이 홀수이면 x 는 유일하게 하나 존재한다.

증명. (2) 는 당연하다. 실수의 짝수승은 음수가 될 수 없기 때문이다. (1) 과 (3) 의 증명은 생략한다. $\square$

정의 6)

정리 5의 (1) 번의 경우, a 의 n 제곱근을 $\sqrt[n]{a}$ 라고 표기한다.

정의 7) 유리수 지수

양의 실수 x 와 유리수 $t = \frac{m}{n}$ 에 대해 (m, n 는 정수, $n \neq 0$) x^t 를 다음과 같이 정의한다. 만약 $m = 1$ 이면 $x^t = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 로 정의한다. 일반적으로 m 이 정수이면 $x^t = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ 으로 정의한다.

x 가 음수이면 지수를 정의하기가 어려우므로 생각하지 않는다.

정리 8) 지수법칙 (유리수)

양의 실수 a, b, 유리수 s, t 에 대해

(1) $a^s b^t = a^{s+t}$

(2) $(a^s)^t = a^{st}$

(3) $(ab)^s = a^s b^s$

(4) $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s} (b \neq 0)$

증명. 정리 3를 사용하여 약간의 계산을 거치면 어렵지 않게 증명할 수 있다. $\square$

정리 9) 실수 지수

고등학교 과정의 극한 개념을 이용하면 실수 지수도 정의할 수 있다. 예를 들어, $3^{\sqrt{2}}$ 를 정의해보자. $\sqrt{2} = 1.414213 \cdots$ 이다. 따라서 다음과 같은 수의 열을

생각해보자.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3^1 = 3 \\
x_2 &= 3^{1.4} = 4.65553672175\cdots \\
x_3 &= 3^{1.41} = 4.70696500172\cdots \\
x_4 &= 3^{1.414} = 4.72769503527\cdots \\
x_5 &= 3^{1.4142} = 4.72873393017\cdots \\
x_6 &= 3^{1.41421} = 4.72878588091\cdots \\
x_7 &= 3^{1.414213} = 4.72880146624\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

위 식들의 우변은 정의 7에 의하여 잘 정의되어 있다는 점에 주목하자. 이 수열 (=수의 열) 인 $\{x_n\}$ 은 n 이 증가할수록 일정한 값에 가까워지는 것처럼 보인다. 이 값을 이 수열의 '극한' 이라고 부른다. 그리고 이 극한값을 $3^{\sqrt{2}}$ 로 정의한다.

정리 10) 지수법칙 (실수)

양의 실수 a, b, 실수 s, t 에 대해

(1) $a^s b^t = a^{s+t}$

(2) $(a^s)^t = a^{st}$

(3) $(ab)^s = a^s b^s$

(4) $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s} (b \neq 0)$

증명. 정리 8와 극한의 성질을 사용하여 증명할 수 있다. □