준영 : 04 수열 (2)

2016 년 11 월 2 일

차 례

1 지수법칙

정의 1) 자연수지수
n이 자연수일 때, a의 거듭제곱 a^n은

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

이다.

예시 2)

(1) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

(2) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

(3) $(-\frac{2}{3})^3 = (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{27}$

정의 3) 정수지수
$a \neq 0$일 때, $a^0 = 1$이고,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

이다.

예시 4)

(1) $1^0 = 5^0 = 7^0 = (-2)^0 = (\frac{1}{2})^0 = 1$

(2) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

(3) $(\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

정리 5) 지수법칙

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x b^x$

(5) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

예시 6)

(1) $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$.

(2) $2^5 \div 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

(3) $(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$.

(4) $(2 \times 3^2)^2 = 2^{1\times 2} \times 3^{2\times 2} = 2 \times 3^4$.

(5) $\left(\frac{3}{2^2}\right)^3 = \frac{3^3}{(2^2)^3} = \frac{3^3}{2^{2\times 3}} = \frac{3^3}{2^6}$.

문제 7)

다음을 계산하여라(자연수나 분수의 꼴로 나타내시오).

(1) $(-5)^0 =$

(2) $3^{-2} =$

(3) $(-3)^2 =$

(4) $(-3)^{-2} =$

(5) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

(6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} =$

문제 8)

다음을 간단히 계산하여라(3^n 의 꼴로 나타내시오).

(1) $3^5 \times 3^2 =$

(2) $3^5 \times 3^{-2} =$

(3) $3^5 \div 3^2 =$

(4) $3^5 \div 3^{-2} =$

(5) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} =$

문제 9)
다음을 간단히 하여라(2^n 의 꼴로 나타내시오).

(1) $8^{-3} \div 4^{-5} =$

(2) $2^3 \times 4^2 =$

(3) $2^3 \times 4^{-2} =$

(4) $2^3 \div 4^2 =$

(5) $2^3 \div 4^{-2} =$

(6) $8^{-3} \times 4^5 =$

(7) $8^{-3} \times 4^{-5} =$

(8) $8^{-3} \div 4^5 =$

문제 10)
다음을 간단히 하여라($a^m b^n$ 의 꼴로 나타내시오).

(1) $(ab^2)^3 =$

(2) $(ab)^2 \times a^4 =$

(3) $a^3 \times a^4 \div a^9 =$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \times 5a^2b^4 =$

(5) $\frac{(a^3b^2)^2}{a^2} =$

2 등비수열

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \quad 243 \quad 729 \qquad \cdots\cdots \quad \{a_n\}$$

이 수열은 항 사이의 비가 3으로 일정하다;

$$\frac{a_2}{a_1}=3, \quad \frac{a_3}{a_2}=3, \quad \frac{a_4}{a_3}=3, \quad \frac{a_5}{a_4}=3, \quad \frac{a_6}{a_5}=3, \qquad \cdots$$

이처럼, 인접한 항 사이의 비가 일정한 수열을 **등비수열**이라고 부른다. 이때, 등비수열에서 인접한 항 사이의 비를 **공비**라고 부른다. 공비는 보통 r로 쓴다.

정의 11) 등비수열
수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키면 이 수열은 등비수열이다.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r. \quad (n\text{은 자연수})$$

문제 12)
다음 수열들 중 등비수열인 것을 고르고, 등비수열인 경우 공차 r를 구하여라.

(1) $1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(2) $2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(3) $3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad 96 \quad 192$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(4) $-10 \quad -7 \quad -4 \quad -1 \quad 2 \quad 5$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(5) $5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(6) $1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(7) $1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(8) $2 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 2$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(9) $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(10) $10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10000 \quad 100000$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(11) $9 \quad 99 \quad 999 \quad 9999 \quad 99999$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

(12) $8 \quad 4\sqrt{2} \quad 4 \quad 2\sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{2} \quad 1$ 등비수열이다/아니다 : $r = \boxed{}$

문제 13)

다음 등비수열의 여섯 번째 항을 구하여라.

(1) $2 \quad 4 \quad 8 \quad \cdots$

(2) $2 \quad 6 \quad 18 \quad \cdots$

(3) $1 \quad -1 \quad 1 \quad \cdots$

(4) $6 \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad \cdots$

(5) $4 \quad -2 \quad 1 \quad \cdots$

문제 14)

문제 11에 제시된 등비수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_n = \boxed{}$

(2) $b_n = \boxed{}$

(3) $c_n = \boxed{}$,

(4) $d_n = \boxed{}$,

(5) $e_n = \boxed{}$

정리 15)

첫번째 항(=a_1)이 a이고 공비가 r인 등비수열의 일반항은

$$a_n = ar^{n-1}$$

이다.

증명)
첫번째 항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 항을 나열해보면

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a_1 \times r = ar \\ a_3 &= a_2 \times r = ar^2 \\ a_4 &= a_3 \times r = ar^3 \\ a_5 &= a_4 \times r = ar^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$a_n = ar^{n-1}$$

이다. □

문제 16)
문제 11에서

(1) $a = 2,\ r = 2$이므로 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = \boxed{}$ 이다.

(2) $a = 2,\ r = 3$이므로 $a_n = \boxed{}$ 이다.

(3) $a = \boxed{},\ r = -1$이므로 $a_n = \boxed{} \cdot (-1)^{n-1} = \boxed{}$ 이다.

(4) $a = 6,\ r = \boxed{}$이므로 $a_n = 6 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{3}{\boxed{}}$ 이다.

(5) $a = \boxed{},\ r = \boxed{}$이므로 $a_n = 4 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1} = -\frac{8}{(-2)^n}$ 이다.

문제 17)
다음 등비수열들의 일반항 a_n을 구하시오.

(1) $25, \quad 50, \quad 100, \quad 200, \quad \cdots$

(2) $5, \quad 15, \quad 45, \quad 135, \quad \cdots$

(3) $\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad 1, \quad -2, \quad \cdots$

(4) $9, \quad 6, \quad 4, \quad \frac{8}{3}, \quad \cdots$

문제 18)
다음 등비수열

$$128, \quad 32, \quad 8, \quad 2, \cdots$$

의 일반항 a_n 이 다음을 만족할 때, 빈칸을 채우시오.

$$a_n = 2^{\boxed{}}$$

정리 19) 등비중항
세 숫자 a, b, c 가 등비수열을 이룰 때, b 를 a 와 c 의 **등비중항**이라고 한다. 이때 등비중항 b 는 다음 조건을 만족한다.

$$b^2 = ac$$

증명)
a, b, c 가 등비수열을 이루므로, 인접한 항 사이의 비가 같다. 즉

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

이다. 양 변에 ab 를 곱하면

$$b^2 = ac$$

이다. □

예시 20)

(1) 세 숫자

$$3, \quad x, \quad 6$$

이 등비수열을 이룬다면, $x^2 = 18$ 이다. 따라서 $x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ 이다.

(2) 네 숫자

$$3, \quad 2, \quad x, \quad y$$

가 등비수열을 이룬다면,

$$3, \quad 2, \quad x$$

가 등비수열을 이루므로 $4 = 3x$ 이고, $x = \frac{4}{3}$ 이다. 또,

$$2, \quad x\left(= \frac{4}{3}\right), \quad y$$

가 등비수열을 이루므로 $\frac{16}{9} = 2y$ 이고, $y = \frac{8}{9}$ 이다.

문제 21)

(1) 세 숫자

$$2, \quad x, \quad 18$$

가 등비수열을 이룰 때, x 의 값을 구하시오.

(2) 다섯 숫자

$$x, \quad -9, \quad 18, \quad y, \quad z$$

가 등비수열을 이룰 때, x, y, z 의 값을 구하시오.

답 : (1) $x = \boxed{}$, (2) $x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$, $z = \boxed{}$

3 등비수열의 합

문제 22)

다음을 계산하시오.

(1) $4+8+16+32=\boxed{}$

(2) $2+6+18+54+162=\boxed{}$

(3) $1+2+4+8+\cdots+1024=\boxed{}$

예시 23)

문제 19은 다음과 같이 계산할 수도 있다. (3)을 다시 계산해보자. 먼저 구하려는 값을 $S=1+2+4+8+\cdots+1024$라고 놓자. 이제 이 식과 이 식의 양변에 2를 곱한 식을 나란히 놓고,

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} 2S & = & & & 2 & + & 4 & + & 8 & +\cdots+ & 512 & + & 1024 & + & 2048 \\ S & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & +\cdots+ & 512 & + & 1024 & & \end{array}$$

두 식을 빼자.

$$2S-S=-1+2048$$

따라서 $S=2047$이다.

문제 24)

예시 20의 방법을 이용해 다음 계산을 하여라.

(1) $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 729 = \boxed{}$

(2) $-1 + 2 - 4 + 8 - \cdots - 256 + 512 = \boxed{}$

풀이 :

정리 25) 등비수열의 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫번째 항을 a, 공비를 r라고 할 때, 첫째항부터 제n항까지의 합 $S(= a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$은

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

이다. 혹은

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

이라고 쓸 수도 있다. (단, $r = 1$이면 이 식들을 쓸 수 없다.)

증명)

예시 20과 같이 S를 나열한 식과, 그 식의 양 변에 r을 곱한 식을 나란히 놓으면

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} rS & = & & & ra_1 & + & ra_2 & + & ra_3 & + \cdots + & ra_{n-2} & + & ra_{n-1} & + & ra_n \\ S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + \cdots + & a_{n-1} & + & a_n & & \end{array}$$

이다. 좀 더 자세하게 쓰면

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} rS & = & & & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & + \cdots + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\ S & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & + \cdots + & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \end{array}$$

이다. 두 식을 빼면

$$rS - S = ar^n - a$$

$$(r-1)S = a(r^n - 1)$$

따라서

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

이다.

또한, 이 식을 변형해

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

로 쓸 수도 있다. □

예시 26)

문제 22의 (1) 에서 $a = 4$, $r = 2$, $n = 4$ 이므로

$$S = \frac{4(2^4 - 1)}{2 - 1} = 60$$

이다.

문제 27)

등비수열의 합 공식을 이용하여 다음 계산을 하여라.

(1) $2 + 6 + 18 + 54 + 162 =$

(2) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 =$

(3) $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 729 =$

(4) $-1 + 2 - 4 + 8 - \cdots - 256 + 512 =$

풀이 :

(1) $a = \boxed{}$, $r = 2$, $n = 11$ 이므로

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{\boxed{}(2^{\boxed{}} - 1)}{2 - 1} = \boxed{}$$

이다.

(2) $a = 1$, $r = 2$, $n = 11$ 이므로

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047$$

이다.

(3) $a = 1$, $r = \boxed{}$, $n = 7$ 이므로

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (\boxed{}^7 - 1)}{\boxed{} - 1} = \boxed{}$$

이다.

(1) $a = \boxed{}$, $r = \boxed{}$, $n = \boxed{}$ 이므로

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{\boxed{}}{1 - (-2)} = \boxed{}$$

이다.

(문제 22, 24의 결과와 비교해보자.)

4 등비수열의 활용

예시 28)

자연수 n에 대해, a_n을 $\{1, 2, \cdots, n\}$의 부분집합의 개수로 정의할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$의 값을 구하여라.

풀이 : $a_n = 2^n$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이루며, $a = 2$, $r = 2$이다. 등비수열의 합 공식에 대입하면

$$S_8 = \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} = 510$$

이다.

답 : (510)

문제 29)

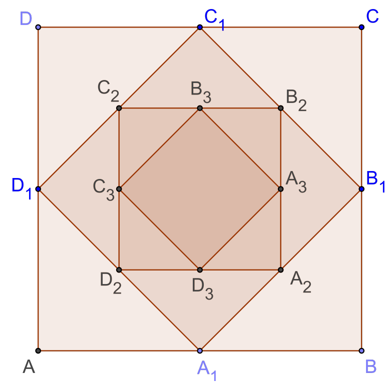
자연수 n에 대해, a_n을 정의역이 $\{1, 2, \cdots, n\}$이고 공역이 $\{1, 3, 5\}$인 함수의 개수로 정의할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_5$의 값을 구하여라.

풀이 :

답 : ( )

예시 30)

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $ABCD$ 에서 AB 의 중점을 A_1, BC 의 중점을 B_1, CD 의 중점을 C_1, DA 의 중점을 D_1 이라고 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 넓이를 S_1 이라고 하자. 또 A_1B_1 의 중점을 A_2, B_1C_1 의 중점을 B_2, C_1D_1 의 중점을 C_2, D_1A_1 의 중점을 D_2 라고 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이를 S_2 라고 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 수열 $\{S_n\}$ 을 만들 때, S_n 이 처음으로 0.01 보다 작아지는 n 의 값을 구하시오.



풀이 : $\overline{BA_1}$=1, $\overline{BB_1}$=1 에서 $\overline{A_1B_1} = \sqrt{2}$ 이다. 따라서 $S_1 = (\sqrt{2})^2 = 2$ 이다. 또, $\overline{B_1A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{B_1B_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $\overline{A_1B_1} = 1$ 이다. 따라서 $S_2 = 1^2 = 1$ 이다. 마찬가지로 계산하면 $S_3 = \frac{1}{2}$, $S_4 = \frac{1}{4}$ 등이다. 그러므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫항이 2 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다. 일반항을 계산하면

$$S_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \times 2^{1-n} = 2^{2-n}$$

이 된다. 따라서

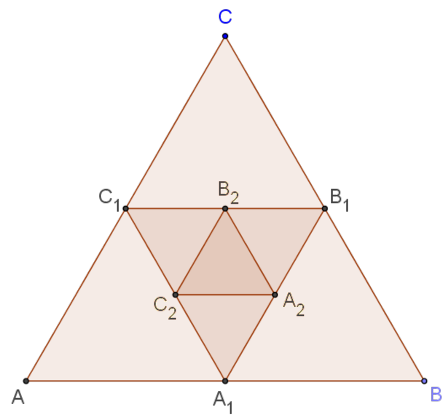
$$\begin{aligned} S_n &< 0.01 \\ 2^{2-n} &< \frac{1}{100} \\ 2^{n-2} &> 100 \end{aligned}$$

에서, n 의 최솟값은 9 이다.

답 : ($n = 9$)

문제 31)

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 ABC 에서 AB 의 중점을 A_1, BC 의 중점을 B_1, CA 의 중점을 C_1 이라고 하고, 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이를 S_1 이라고 하자. 또 A_1B_1 의 중점을 A_2, B_1C_1 의 중점을 B_2, C_1A_1 의 중점을 C_2 라고 하고, 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이를 S_2 라고 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 수열 $\{S_n\}$ 을 만들 때, S_5 의 값을 구하시오. (단, 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이다.)



풀이 :

답 : (**)**

예시 32) 예금

연이율이 10%인 은행에 100만 원을 예금한다고 하자. 1년 후에 받을 수 있는 돈은 원래 맡겨놓았던 100만 원과 이자인

$$100\text{만원} \times \frac{10}{100} = 10\text{만원}$$

을 합친 금액인 110만 원이 된다.

정의 33) 원금, 이자, 원리합계, 이율

은행에 돈을 맡길 때, 원래 맡겨놓은 금액을 **원금**, 늘어난 금액을 **이자**라고 한다. 원금과 이자를 합친 금액은 **원리합계**라고 부르며, 이자가 붙는 비율인 10%는 **이율**이라고 부른다. 이율은 보통 r로 쓰며, 이율에는 연이율, 월이율 등이 있다. 위의 예에서

$$\begin{aligned}
\text{원금} &= 100\text{만원} \\
\text{이자} &= 10\text{만원} \\
\text{원리합계} &= 110\text{만원} \\
\text{이율} &= r = \frac{10}{100} = 0.1
\end{aligned}$$

예시 34)

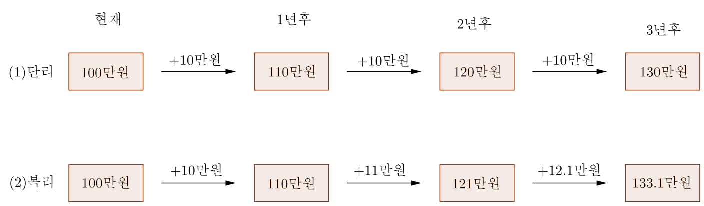
예시 32에서 2년 후에 받을 수 있는 돈은 얼마일까? 다음 두 가지의 방법을 생각해볼 수 있다.

(1) 원금은 100만 원이었으니, 추가로 받을 수 있는 이자는 여전히 10만 원이다. 따라서 원리합계는 $100 + 10 + 10 = 120$만 원이다.

(2) 1년 후에는 통장에 110만 원이 있으니, 추가로 받을 수 있는 이자는 $110 \times 0.1 = 11$만 원이 된다. 따라서 원리합계는 $100 + 10 + 11 = 121$만 원이다.

정의 35) 예금, 단리, 복리

원금을 일정한 기간동안 은행에 맡기는 것을 **예금**이라고 한다. 이때 원리합계를 구하는 방법은 두 가지로, 예시 34의 (1)과 같은 방법을 **단리**, (2)와 같은 방법을 **복리**라고 한다.



문제 36)

원금 10만 원을 연이율 6%로 예금할 때, 10년 후의 원리합계를 단리법, 복리법으로 각각 구하여라. (단, $1.06^{10} = 1.79$로 계산한다.)

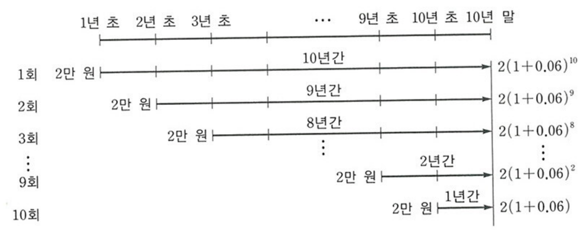
풀이 :

답 : (   )

예시 37) 적금

연이율 6%, 매년마다 복리로 매년 초에 20000원씩 적립할 때, 10년 말의 원리합계를 구하여라.

풀이 : 10년동안 적립한 돈을 도식으로 나타내면 다음과 같다.



원리합계를 S(만 원)이라고 하면,

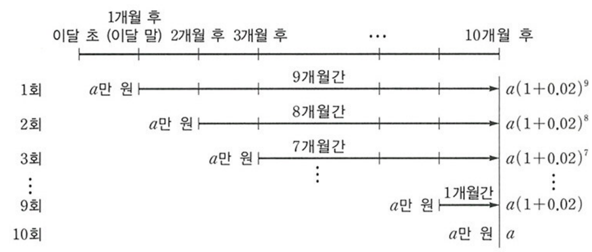
$$
\begin{aligned}
S &= 2(1+0.06) + 2(1+0.06)^2 + 2(1+0.06)^3 + \cdots + 2(1+0.06)^{10} \\
&= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \\
&= \frac{2(1+0.06)(1.06^{10}-1)}{0.06} \\
&= \frac{2 \times 1.06 \times 0.8}{0.06} \\
&\approx 28.26
\end{aligned}
$$

따라서, 원리합계는 28만 2600원 정도이다.

예시 38) 상환

도현이는 140만 원짜리 컴퓨터를 이달 초에 구입하고, 이달 말부터 일정한 금액씩 10개월에 걸쳐 갚으려고 한다. 월이율 2%, 1개월마다 복리로 계산할 때, 매달 갚아야 할 금액을 구하여라. (단, $1.02^{10} = 1.22$로 계산한다.)

풀이 : 매달 갚는 금액을 a(만 원)이라고 가정하고, 10개월동안 적립하는 돈을 도식으로 나타내면 다음과 같다.



원리합계를 S(만 원)이라고 하면,

$$
\begin{aligned}
S &= a + a(1+1.02) + a(1+1.02)^2 + a(1+1.02)^3 + \cdots + a(1+1.02)^9 \\
&= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \\
&= \frac{a(1.02^{10}-1)}{0.02} \\
&= \frac{a \times 0.22}{0.02} \\
&= 11a
\end{aligned}
$$

따라서, 원리합계는 11a(만 원)이다. 이것이 140만 원과 같아야 하는데, 원리합계인 11a는 **10개월 후의 금액**이고, 140만 원은 **현재의 금액**이다. 현재의 140만 원의 가치는, 10개월 후의 140개월 후의 가치와 다르다. 만약 140만 원을 은행에 예금했다면, 10개월 후에는 $140 \times 1,02^{10} = 140 \times 1.22 =$ 170.8만 원이 되어 있을 것이므로 현재의 140만 원은 10개월 후에는 170.8만 원과 같다. 따라서

$$11a = 170.8$$

이 되고, $a \approx 15.53$이다.

그러므로 매달 15만 5300원 정도를 갚으면 된다.

예시 39) 연금

올해부터 매년 말에 300만 원씩 10년 동안 받는 연금이 있다. 연이율 6%, 1년마다 복리로 계산할 때, 이 연금을 올해 초에 한꺼번에 받는다면 얼마를 받게 되는지 구하여라. (단, $1.06^{10} = 1.79$로 계산한다.)

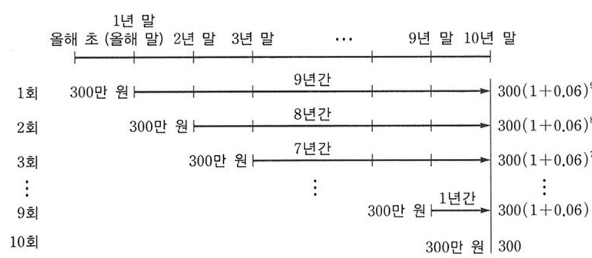
풀이 : 올해 초에 한꺼번에 받는 금액을 S(만 원)이라고 하자. 이 S는 300만 원을 열 번 더한 값이지만,

$$S = 300 + 300 + 300 + \cdots + 300$$

은 아니다. 정확히는

$$S_{\text{올해초}} = 300_{\text{올해말}} + 300_{\text{내년말}} + 300_{2\text{년말}} + \cdots + 300_{10\text{년말}}$$

이다. 도식으로 표현하면,



이다.

따라서 10년 말을 기준으로

$$S \times 1.06^{10} = 300 \times 1.06^{9} + 300 \times 1.06^{8} + 300 \times 1.06 + 300$$

이다. 이것을 계산하면

$$1.79S = 3950$$

이 되고, $S \approx 2206$이다.

그러므로 올해 초에 한꺼번에 받는 금액은 2206만 원이다.

5 보충 · 심화문제

5.1 복습

문제 40)

다음을 전개하여라.

(1) $(x+a)^3 =$

(2) $(x-a)^3 =$

(3) $(x+a)(x+b)(x+c) =$

(4) $(x-a)(x-b)(x-c) =$

(5) $(a+b+c)^2 =$

문제 41)

다항식 $f(x) = ax^2 + x + 4$에 대하여 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x+3$으로 나눈 나머지가 차례로 등차수열을 이룰 때, 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 42) 삼차방정식의 근과 계수와의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$ 이 세 근 α, β, γ 을 가질 때, 다음 빈칸을 채워라.

$$\alpha+\beta+\gamma=\boxed{}$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{}$$
$$\alpha\beta\gamma=\boxed{}$$

문제 43)

삼차방정식 $x^3-3x^2+kx+4=0$ 의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

5.2 등비수열

문제 44)

다음 등비수열 $\{a_n\}$에서, 공비 r을 구하고 넷째항 a_4의 값을 구하여라.

(1) $1,\ 2,\ 4,\ \boxed{},\ \cdots$

(2) $1,\ -2,\ 4,\ \boxed{},\ \cdots$

(3) $9,\ 3,\ 1,\ \boxed{},\ \cdots$

(4) $8,\ -4,\ 2,\ \boxed{},\ \cdots$

문제 45)

다음 등비수열의 일반항 a_n과 제7항을 각각 구하여라.

(1) $a = 2,\ r = \frac{1}{2}$

(2) $a = -2,\ r = -2$

(3) $4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots$

(4) $4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots$

(5) $\sqrt{2},\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2},\ \cdots$

문제 46)

각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $a_3 = 12,\ a_6 = -96$인 등비수열의 일반항

(2) $a_4 = 24,\ a_8 = 384$인 등비수열의 일반항

(3) $a_1 + a_2 = 5$, $a_3 + a_4 = 10$ 인 등비수열에 대하여 $a_5 + a_6$ 의 값

(4) $a_3 = -12$, $a_6 = 96$ 인 등비수열에 대하여 $a^2 + r^2$ 의 값

문제 47)

-4 와 32 사이에 두 개의 수를 넣어서 전체가 등비수열을 이루도록 할 때, 이 두 수의 곱을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 48)

3 과 48 사이에 세 개의 양수를 넣어서 전체가 등비수열을 이루도록 할 때, 이 세 수의 곱을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 49)

두 수 2와 162 사이에 세 양수 a, b, c를 넣어 5개의 수 2, a, b, c, 162가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

풀이 :

답 : (**)**

문제 50)

세 수 $a-2$, $a+1$, $a-5$가 등비수열을 이룰 때, a의 값을 구하여라.

풀이 :

답 : (**)**

문제 51)

세 수 x, y, 24가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 4, 세 수 x, y가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x+y$의 값을 구하여라. (단, $xy>0$)

풀이 :

답 : (**)**

문제 52)

세 수 $1,\ a,\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a,\ b,\ 1$이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 실수 $a,\ b$의 값을 각각 구하여라.

풀이 :

답 : (**)**

예시 53)

한 시간마다 2개로 분열하는 세포가 있다. 예를 들어, 한 개의 세포는 한 시간 후에 2개로, 두 시간 후에는 4개로, 세 시간 후에는 8개로 바뀐다. 이 세포가 7개 있을 때, 8시간 후의 세포의 개수를 구하여라.

풀이 : n시간 후의 세포의 개수를 a_n이라고 하자. 1시간 후에 이 세포는 14개가 되므로 $a_1 = 14$이고, 2시간 후에 이 세포는 28개가 되므로 $a_2 = 28$이다. 또한 $a_3 = 56,\ a_5 = 112$ 이다. 이 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이루며, $a = 14,\ r = 2$이다. 따라서 $a_n = 14 \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^n$이고, $a_8 = 7 \cdot 2^8 = 1792$이다.

답 : (**1792 개** **)**

문제 54)

두 시간마다 3개로 분열하는 세포가 있다. 예를 들어, 한 개의 세포는 두 시간 후에 3개로, 네 시간 후에는 9개로, 여섯 시간 후에는 27개로 바뀐다. 이 세포가 4개 있을 때, 6시간 후의 세포의 개수를 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 55)

10년마다 인구가 10% 씩 증가하는 도시가 있다. 예를 들어 현재 이 도시의 인구가 100만명이었으면, 10년 후에는 100만명의 10%인 10만명이 증가하여 110만명이 된다. 또한 20년 후에는 110만명의 10%인 110만 $\times \frac{10}{100} =$ 11만명이 증가하여 110만명 + 11만명 = 121 만명이 된다.

2016년 현재 이 도시의 인구가 200만명이었다면, 100년 후인 2116년의 이 도시의 인구는 몇 명이겠는가? (단, 인구증가율은 일정하다고 가정하고, $1.1^{10} = 2.6$ 으로 계산한다.)

풀이 :

답 : (   )

5.3 등비수열의 합

문제 56)

다음을 계산하여라.

(1) $1+5+5^2+5^3+\cdots+5^n$

(2) $3\sqrt{2}+6+6\sqrt{2}+\cdots+3\times(\sqrt{2})^n$

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

(4) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\cdots+(-\frac{2}{3})^n$

문제 57)

첫째항부터 제4항까지의 합이 2, 첫째항부터 제8항까지의 합이 8인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제12항까지의 합을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 58)

모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21, 첫째항부터 제6항까지의 합이 189일 때, 첫째항부터 제8항까지의 합을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 59)

공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_4=3$, $a_4+a_7=24$가 성립한다. 이 수열의 첫째항부터 제7항까지의 합을 S라고 할 때, $3S$의 값은?

풀이 :

답 : (   )

문제 60)

첫째항이 5, 공비가 2 인 등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 처음으로 500 보다 크게 되는 자연수 n의 값을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

문제 61)

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이 있다. 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $|2 - S_n| < 0.01$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

풀이 :

답 : (   )

5.4 등비수열의 활용

문제 62)

연이율 6%의 복리로 매년 초에 30만원씩 적립하면 10년 말에는 적립 총액이 얼마나 되는지 구하여라. (단 $1.06^{1}0 = 1.79$로 계산한다.)

풀이 :

답 : (   )

문제 63)

매월 1일에 1만 원씩을 월이율 1%의 1개월마다의 복리로 적립해나간다. 올해 1월 1일에 첫 불입금을 내었을 때, 내년 12월 31일에 받는 원리합계를 구하여라. (단 $1.01^{1}0 = 1.28$로 계산한다.)

풀이 :

답 : (   )