준수 : 02 사원수 (四元數, Quaternion)

May 15, 2015

Contents

1 군(群, Group)과 환(環, Ring)

정의 1) 군(群, Group)

다음 조건들을 만족시키면 집합 G는 연산 $\circ$에 대한 **군**이다.

1. $a \in G$, $b \in G$ 이면 $a \circ b \in G$ 이다.
2. $a \in G$, $b \in G$, $c \in G$ 이면 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 이다.
3. 임의의 $a \in G$에 대해 $a \circ e = e \circ a = e$를 만족시키는 $e \in G$가 존재한다.
4. 임의의 $a \in G$에 대해 $a \circ x = e$를 만족시키는 $x \in G$가 존재한다.

정의 2) 가환군(可換群, Abelian Group)

군 G가 다음 추가조건을 만족시키면 **가환군**이라고 부른다.

5. $a \in G$, $b \in G$ 이면 $a \circ b = b \circ a$ 이다.

정의 3)

정의 1, 2에서 1번 조건은, 'G가 연산 $\circ$에 대해 닫혀있다.' 라고도 말할 수 있다. 2번 조건은 **결합법칙(associative law)**이라고 부른다. 3번 조건을 만족시키는 원소 e는 **항등원**이라고 부른다. 4번 조건을 만족시키는 원소 x는 a의 **역원**이라고 부르며, a^{-1} 이라고 쓴다. 5번 조건은 **교환법칙(commutative law)**이라고 부른다.

예시 4)

(1) 자연수의 집합 $\mathbb{N}$은 덧셈에 대해 닫혀있다. 즉 $a \in \mathbb{N}$ 이고 $b \in \mathbb{N}$ 이면 $a + b \in \mathbb{N}$ 이다. 또 결합법칙이 성립한다. 즉 $a + (b + c) = (a + b) + c$ 이다. 하지만 항등원이 존재하지 않는다. 즉 임의의 $a \in \mathbb{N}$에 대해 $a + e = e + a = e$를 만족시키는 e의 값은 0 인데 $0 \notin \mathbb{N}$ 이기 때문이다.

따라서 $\mathbb{N}$은 덧셈에 대한 군이 아니다.

(2) 정수의 집합 $\mathbb{Z}$는 덧셈에 대해 닫혀있고 결합법칙이 성립한다. 또 항등원이 존재한다. $0 \in \mathbb{Z}$ 이기 때문이다. 또한 임의의 정수 a에 대해서 $a + x = 0$을 만족시키는 x는 $-a$ 이며, $-a \in \mathbb{Z}$ 이다.

따라서 $\mathbb{Z}$는 덧셈에 대한 군이다. 심지어 $\mathbb{Z}$는 덧셈에 대한 교환법칙을 만족시키므로 가환군이라고 볼 수 있다.

(3) 마찬가지로 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$, 실수의 집합 $\mathbb{R}$, 복소수의 집합 $\mathbb{C}$도 덧셈에 대한 가환군이라는 것을 쉽게 밝힐 수 있다.

(4) 정수의 집합 $\mathbb{Z}$는 곱셈에 대해 닫혀있다. 즉 $ab \in \mathbb{Z}$이다. 또 결합법칙이 성립한다. 즉 $a(bc) = (ab)c$이다. 또한 항등원이 존재한다. 즉 임의의 $a \in \mathbb{Z}$에 대해, $ae = ea = e$를 만족하는 e의 값은 1인데 $1 \in \mathbb{Z}$이다. 하지만 모든 $\mathbb{Z}$의 원소에 대해 역원이 존재하지는 않는다. 예를 들어 $2 \in \mathbb{Z}$에 대한 역원 x는 $2x = 1$을 만족시키는 값으로서 $x = \frac{1}{2}$인데 $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$이기 때문이다.

따라서 $\mathbb{Z}$는 곱셈에 대한 군이 아니다.

(5) 유리수의 집합에서 0을 뺀 집합인 $\mathbb{Q} - \{0\}$는 곱셈에 대해 닫혀있고, 결합법칙이 성립하며, 항등원이 존재한다. 이 때의 항등원은 1이다. 또 임의의 $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{0\}$에 대해 역원 x는 $\frac{p}{q}x = 1$를 만족시키는 값이다. 그런데 $p \neq 0$이고 $q \neq 0$이므로 x를 $x = \frac{q}{p}$로 잡으면

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$$

이 되어 성립하며, 이 때 $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q} - \{0\}$이다.

따라서 $\mathbb{Q} - \{0\}$은 곱셈에 대한 군이며, 교환법칙도 만족하므로 가환군이다.

(6) 마찬가지로 $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{C} - \{0\}$도 곱셈에 대한 가환군이라는 것을 쉽게 밝힐 수 있다.

예시 5)

실수의 집합 $\mathbb{R}$에 대해 연산 $\circ$를

$$a \circ b = a + b + ab$$

로 정의하자. 그러면 $a \circ b \in \mathbb{R}$이고 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$이며, $a \circ b = b \circ a$이다. 따라서 $\mathbb{R}$은 $\circ$에 대해 닫혀있고 결합법칙과 교환법칙이 성립한다.

항등원이 존재하려면 a의 값에 상관없이

$$a \circ e = a$$

를 만족시키는 e가 존재해야 하고 또 e가 실수여야 한다. 즉

$$a + e + ae = a$$

이고

$$e(1 + a) = 0$$

이다. 이 식이 a의 값에 상관없이 성립해야 하므로 $e = 0$이며 0은 실수이다. 따라서 항등원이 존재한다.

마지막 조건을 따지기 위해서는 임의의 실수 a에 대해서 $a \circ x = e$를 만족시키는 x가 존재하는 지 살펴야 한다. 식을 풀면

$$a + x + ax = 0$$

이다. 좀 더 정리하면

$$x = -\frac{a}{a+1}$$

이다. 따라서 역원이 항상 존재한다.

그러므로 $\mathbb{R}$은 연산 $\circ$에 대해 가환군이다.