미적분 1 : 01 수열의 극한

2016년 12월 30일

차 례

1 수열의 수렴과 발산

정의 1) 수열의 수렴

수열 $\{a_n\}$ 에서 n 이 커질 때, a_n 의 값이 일정한 값 α 에 가까워지면

수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 **수렴**한다

라고 말하고 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

로 나타낸다. 이때 α 를 수열 $\{a_n\}$ 의 **극한값**이라고 부른다.

예시 2)

$a_n = \frac{1}{n}$ 이면 이 수열은

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 점점 감소하여 0 으로 가까워지는 수열이다. 따라서

수열 $\{a_n\}$ 은 0 에 수렴한다.

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다.

예시 3)

$b_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이면 이 수열은

$$1-\frac{1}{2}, \quad 1-\frac{1}{4}, \quad 1-\frac{1}{8}, \quad 1-\frac{1}{16}, \quad 1-\frac{1}{32}, \quad 1-\frac{1}{64}, \quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 점점 증가하여 1 로 가까워지는 수열이다. 따라서

수열 $\{b_n\}$ 은 1 에 수렴한다.

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

이다.

문제 4)

(1) $a_n = 2 + (\frac{1}{3})^n$ 이면 이 수열은

$$2+\frac{1}{3},\quad 2+\frac{1}{9},\quad \boxed{\phantom{2+\frac{1}{27}}},\quad 2+\frac{1}{81},\quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 점점 $\boxed{}$하여 2로 가까워지는 수열이다. 따라서

수열 $\{a_n\}$은 2에 수렴한다.

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{}$$

이다.

(2) $b_n = \frac{1}{2n-1}$ 이면 이 수열은

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{7},\quad \boxed{},\quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 점점 감소하여 0으로 가까워지는 수열이다. 따라서

수열 $\{b_n\}$은 0에 $\boxed{}$한다.

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{\boxed{}} b_n = 0$$

이다.

(3) $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이면 이 수열은

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \boxed{},\quad \frac{5}{6},\quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 점점 증가하여 $\boxed{}$로 가까워지는 수열이다. 따라서

수열 $\{c_n\}$은 $\boxed{}$에 수렴한다.

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \boxed{}$$

이다.

정의 5) 수열의 발산

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으면

$$\text{수열 } \{a_n\}\text{은 발산한다.}$$

라고 말한다. 이때

(1) n이 커질 때, a_n의 값이 한없이 커지면

$$\text{수열 } \{a_n\}\text{은 양의 무한대로 발산한다.}$$

라고 말하고 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

로 나타낸다.

(2) n이 커질 때, a_n의 값이 한없이 작아지면

$$\text{수열 } \{a_n\}\text{은 음의 무한대로 발산한다.}$$

라고 말하고 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

로 나타낸다.

(3) $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면

$$\text{수열 } \{a_n\}\text{은 진동한다.}$$

라고 말한다.

예시 6)

$a_n = 2n + 1$이면 이 수열은

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 한없이 증가하는 수열이다. 따라서

$$\text{수열 } \{a_n\}\text{은 양의 무한대로 발산한다.}$$

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

이다.

예시 7)

$b_n = -2^n$ 이면 이 수열은

$$-2, \quad -4, \quad -8, \quad -16, \quad -32, \quad -64, \quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 한없이 감소하는 수열이다. 따라서

수열 $\{b_n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

이다.

예시 8)

$c_n = (-1)^n$ 이면 이 수열은

$$-1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad \cdots$$

와 같이 나타나므로 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 따라서

수열 $\{c_n\}$ 은 진동한다.

예시 9)

$d_n = (-1)^n \cdot n$ 이면 이 수열은

$$-1, \quad 2, \quad -3, \quad 4, \quad -5, \quad 6, \quad \cdots$$

와 같이 나타나므로 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 따라서

수열 $\{d_n\}$ 은 진동한다.

문제 10)

(1) $a_n = -3n + 5$ 이면 이 수열은

$$2, \quad \boxed{}, \quad -4, \quad -7, \quad -10, \quad -13, \quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 한없이 $\boxed{}$하는 수열이다. 따라서

$$\text{수열 } \{a_n\} \text{은 } \boxed{} \text{로 } \boxed{} \text{한다.}$$

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{}$$

이다.

(2) $b_n = 2^n - 1$ 이면 이 수열은

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 15, \quad \boxed{}, \quad 63, \quad \cdots$$

와 같이 나타나고, 한없이 $\boxed{}$하는 수열이다. 따라서

$$\text{수열 } \{b_n\} \text{은 } \boxed{} \text{로 } \boxed{} \text{한다.}$$

이것을 기호로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{}$$

이다.

(3) $c_n = (-2)^{n-1}$ 이면 이 수열은

$$1, \quad -2, \quad 4, \quad -8, \quad 16, \quad -32, \quad \cdots$$

와 같이 나타나므로 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 따라서

$$\text{수열 } \{c_n\} \text{은 } \boxed{} \text{한다.}$$

2 극한값의 계산

예시 11)
$a_n = 3$ 이면 이 수열은

$$3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad 3, \quad \cdots$$

와 같이 3 으로 일정한 수열이다. 따라서 3 에 수렴한다고 볼 수있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

상수 c 에 대하여 $a_n = c$ 이면 $$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

예시 12)
$a_n = 2 + \frac{2}{n}$ 이면 이 수열은 2 에 가까워지는 수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

이다. 한편

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2 + 0 = 2$$

로 계산할 수도 있을 것이다.

두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 수렴하면 $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

이 성질은 덧셈 말고도 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에서도 똑같이 성립한다.

정리 13) 수열의 기본 성질

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴할 때,

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad \left(\text{단, } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right)$

또한, k 가 상수이면

(5) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$

예시 14)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 을 이용하여 다음 계산들을 해보자.

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \overset{(5)}{=} 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 \times 0 = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2}{n}\right) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} 3 - 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 - 2 \times 0 = 3$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{3}{n}} \overset{(4)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}}$

$= \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$

문제 15)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-4\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+2}$

답 : (1) , (2) , (3) , (4) , (5)

3 수열의 극한값과 대소관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\boxed{a_n \le b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n}$$

가 성립한다. 하지만,

$$\boxed{a_n < b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n}$$

가 성립하지는 않는다.

예를 들어, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ 이면 $a_n < b_n$ 이지만,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

이다. 대신

$$\boxed{a_n < b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n}$$

는 성립한다.

예시 16)

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대해

$$1 - \frac{2}{n} < a_n < 1 + \frac{1}{n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

$1 - \frac{2}{n} < a_n$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \le \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$1 \le \lim_{n\to\infty} a_n \tag{1}$$

이다. 또, $a_n < 1 + \frac{1}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le 1 \tag{2}$$

이다. (1), (2)에서

$$1 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 1$$

이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

문제 17)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대해

$$\frac{3n-4}{n-1} < a_n < \frac{3n+2}{n-1}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

답 : (   )

4 등비수열의 극한

예시 18)

다음 수열들의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $a_n = 2^n$, (2) $b_n = (-\frac{1}{3})^n$, (3) $c_n = 1^n$

(1) $a_n = 2^n$ 이면 이 수열은

$$2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32,\quad 64,\quad \cdots$$

와 같이 나타난다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

이다.

(2) $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 이면 이 수열은

$$-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{9},\quad -\frac{1}{27},\quad \frac{1}{81},\quad \cdots$$

와 같이 나타난다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

이다.

(3) $c_n = 1^n$ 이면 $c_n = 1$ 이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

이다.

답 : (1) 양의 무한대로 발산, (2) 0으로 수렴, (3) 1로 수렴

문제 19)

다음 수열들의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $a_n = (-3)^n$, (2) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, (3) $c_n = (-1)^n$

답 : (1) , (2) , (3)

위의 결과들을 종합하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

정리 20) 등비수열의 수렴과 발산

등비수열 $\{r^n\}$에 대하여

(1) $r > 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ $\Longrightarrow$ 양의 무한대로 발산

(2) $r = 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ $\Longrightarrow$ 1에 수렴

(3) $-1 < r < 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ $\Longrightarrow$ 0에 수렴

(4) $r \leq -1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} r^n$ 는 진동 $\Longrightarrow$ 발산(진동)

답

문제 4)

(1) $2 + \frac{1}{27}$, 증가, 2

(2) $\frac{1}{9}$, 수렴, $n \to \infty$

(3) $\frac{4}{5}$, 1, 1, 1

문제 10)

(1) -1, 감소, 음의 무한대, 발산, $-\infty$

(2) 31, 증가, 양의 무한대, 발산, ∞

(3) 진동

문제 15)

(1) 0

(2) -4

(3) 5

(4) 0

(5) 3

문제 17)
3

문제 19)

(1) 진동

(2) 0으로 수렴

(3) 진동