민형 : 03 정적분

2016년 11월 13일

차 례

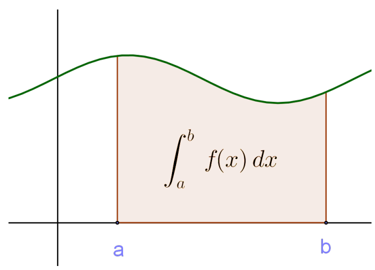
1 정적분의 정의와 미적분의 기본정리

정의 1) 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 연속일 때, 그래프 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이를 '구간 $[a,b]$에서 f의 **정적분**'이라고 부르고 기호로

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

라고 쓴다.



(1) 구간 $[a,b]$에서, $f(x)>0$이면 정적분값은 양수이고 $f(x)<0$이면 정적분값은 음수이다.

(2) 이때 a를 **아래끝**, b를 **위끝**, $f(x)$를 **피적분함수**, x를 **적분변수**라고 부른다.

(3) 구분구적법을 이용하면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

라는 관계식을 얻을 수도 있다.

(4)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

와 같은 성질을 가진다.

정적분을 계산할 때에는 피적분함수의 부정적분에 위끝과 아래끝을 넣어 그 차를 구한다;

정의 2) 미적분의 기본 정리

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

우변의 $F(b) - F(a)$는

$$\Big[F(x)\Big]_a^b, \quad \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

와 같이 표현하기도 한다.

예시 3)

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + x^{-2}\right)\,dx = \left[2\ln|x| - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \big(\sec^2 x - 1\big)\,dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

문제 4)

(1) $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

답 : (1) $\frac{14}{3} - 4\ln 2$, **(2)** $\frac{\pi}{2}$

2 정적분의 치환적분법

정리 5) 치환적분법

$t = g(x)$ 일 때,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

증명)

$f(t)$ 의 부정적분을 $F(t)$ 라고 하면 $f(g(x))g'(x)$ 의 부정적분은

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \big[F(g(x))\big]_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \big[F(t)\big]_{t=g(a)}^{t=g(b)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt\end{aligned}$$

□

예시 6)

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$t = x^2 + 1$ 이라고 하면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2}\cdot\frac{dt}{dx}\,dx \\ = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-2}\,dt &= \frac{1}{2}\big[-t^{-1}\big]_1^2 \\ = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1)\right] &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$t = 1+2\sin x$ 이라고 하면 $\frac{dt}{dx} = 2\cos x$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+2\sin x}\cdot 2\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{dx}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{t}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^3 = \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

문제 7)

(1) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{1} \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_2^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^e \ln \sqrt[x]{x}\,dx$

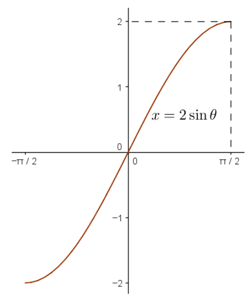
(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx$

답 : (1) $\frac{1}{2}\ln\frac{3(e-1)}{e+1}$, (2) $\frac{1}{3}$, (3) $\frac{26}{3}$, (4) $\frac{1}{2}$, (5) $\frac{11}{24}$, (6) $\frac{1}{2}$

예시 8)

(2) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$



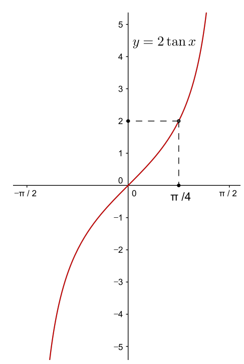
$x = 2\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ 로 놓으면

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$= 2|\cos\theta| = 2\cos\theta$$

이고 $dx = 2\cos\theta d\theta$ 이다. 따라서

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$



$x = 2\tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ 로 놓으면

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4+4\tan^2\theta} = \frac{1}{4\sec^2\theta} = \frac{1}{4}\cos^2\theta$$

이고 $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ 이다. 따라서

$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\cos^2 x\cdot 2\sec^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\,d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

문제 9)

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}\,dx$

답 : (1) $\frac{9}{4}\pi$, (2) $\frac{\pi}{6}$, (3) $\frac{\pi}{9}$

3 정적분의 부분적분법

정리 10) 부분적분법

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

증명)

$$\begin{aligned}\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b &= \int_a^b \{f(x)g(x)\}'\ dx \\ &= \int \left(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\right)\ dx \\ &= \int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\end{aligned}$$

이므로 이를 변형하면 위의 결과를 얻는다. □

예시 11)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ 를 계산하기 위해 $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ 라고 하자. $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)\,dx \\ &= [f(x)g(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)\,dx \\ &= [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$