미리 : 05 삼차방정식의 켤레근

January 1, 2015

개념원리 수1, p170

(1) 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$ 이면 켤레무리수 $p-q\sqrt{m}$ 도 근이다. (단 p, q, m 은 유리수, $\sqrt{m}$ 은 무리수)

(2) 계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$ 이면 켤레복소수 $p-qi$ 도 근이다. (단 p, q, m 은 실수)

Proof. 계산의 편의를 위해

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{a}$$

꼴의 삼차방정식만을 생각하자. 최고차항의 계수 $(\neq 0)$ 가 1 이 아닐 경우, 양변을 최고차항의 계수로 나누어 (a) 의 꼴로 바꿀 수 있다.

(1) 가정에 의해 a, b, c 는 유리수이다. (a) 의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$ 이면

$$(p+q\sqrt{m})^3 + a(p+q\sqrt{m})^2 + b(p+q\sqrt{m}) + c = 0$$

이다. 이를 전개하면

$$(p^3 + 3pq^2m + ap^2 + aq^2m + bp + c) + (3p^2q + q^3m + 2apq + bq)\sqrt{m} = 0$$

이다. 괄호안의 수들이 모두 유리수이므로

$$p^3 + 3pq^2m + ap^2 + aq^2m + bp + c = 0, \quad 3p^2q + q^3m + 2apq + bq = 0$$

이다.

이제 (a)에 $x=p-q\sqrt{m}$을 대입하면

$$\begin{aligned}&(p-q\sqrt{m})^3+a(p-q\sqrt{m})^2+b(p-q\sqrt{m})+c\\=&(p^3+3pq^2m+ap^2+aq^2m+bp+c)-(3p^2q+q^3m+2apq+bq)\sqrt{m}\\=&0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $p-q\sqrt{m}$은 (a)의 근이다.

(2) 가정에 의해 a, b, c는 실수이다. (a)의 한 근이 $p+qi$이면

$$(p+qi)^3+a(p+qi)^2+b(p+qi)+c=0$$

이다. 이를 전개하면

$$(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)+(3p^2q-q^3+2apq+bq)i=0$$

이다. 괄호안의 수들이 모두 실수이므로

$$p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c=0,\quad 3p^2q-q^3+2apq+bq=0$$

이다.

이제 (a)에 $x=p-qi$을 대입하면

$$\begin{aligned}&(p-qi)^3+a(p-qi)^2+b(p-qi)+c\\=&(p^3-3pq^2+ap^2-aq^2+bp+c)-(3p^2q-q^3+2apq+bq)i\\=&0\end{aligned}$$

이다. 따라서 $p-qi$은 (a)의 근이다. □

> 일반적으로 계수가 실수인 n차 다항식 $P(x)$에 대해 복소수 z가 $P(x)=0$의 근이면 켤레복소수 $\bar{z}$도 $P(x)=0$의 근이다.

Proof. $P(x)$를

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

로 놓자(a_1, $\cdots$, a_n은 실수). 가정에 의해 $P(z)=0$이다. 그러면 켤레복소수의

성질에 의해

$$\begin{aligned}
P(\bar{z}) &= a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 \\
&= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{P(z)} = \bar{0} = 0
\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\bar{z}$는 $P(x) = 0$의 근이다. $\square$