

01 다항식의 연산

2016년 11월 19일

차 례

차 례	1
1 다항식의 정리	2
2 다항식의 덧셈과 뺄셈	4
3 다항식의 곱셈	6
4 다항식의 나눗셈	10

1 다항식의 정리

예시 1)

(1)

$$2x^2 + 3x + 1, \quad x + 5, \quad x^4 + 4x^2 + 1, \quad x^2 + 3xy + 9y^2$$

과 같이 숫자와 문자의 곱이 합해져있는 것을 **다항식**이라고 부른다.

(2)

$$\frac{1}{x^2 + 2}, \quad \sqrt{x + 2} + 1$$

와 같은 식들은 다항식이라고 부르지 않는다.

(3) 다항식

$$2x^2 + 3x + 1$$

에서 식을 이루는 $2x^2$, $3x$, 1 을 **항**이라고 부른다.

각 항에서 숫자부분을 **계수**라고 부른다. 예를 들어 $2x^2$ 의 계수는 2이고 $3x$ 의 계수는 3이다.

각 항의 문자가 곱해진 개수를 **차수**라고 부른다. 따라서 $2x^2$ 은 2차항이고 $3x$ 는 1차항이다. 1은 숫자로만 이루어진 항으로 이런 것을 **상수항**이라고 부른다. 위의 다항식 $2x^2 + 3x + 1$ 은 차수가 가장 높은 항(**최고차항**)이 2차항이므로 2차 다항식이라고 부른다.

문제 2)

다항식 $\frac{1}{3}x^3 + 2x + 7$ 에 대한 설명 중 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 세 개의 항으로 이루어져 있다.
- ② 일차항의 계수는 2이다.
- ③ 상수항은 7이다.
- ④ 최고차항의 계수는 3이다
- ⑤ 3차 다항식이다

예시 3)

다항식을 정리할 때에는 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서(**내림차순**)로 정리하거나 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서(**오름차순**)로 정리하면 다항식을 계산할 때 편리하다.

$$-4x + 2 + 3x^2$$

를 내림차순으로 정리하면

$$3x^2 - 4x + 2$$

이고, 오름차순으로 정리하면

$$2 - 4x + 3x^2$$

이다.

문제 4)

다음 다항식을 x 에 관한 내림차순으로 정리하여라.

(1) $3x^3 - x + 4x^2 - 5 =$

(2) $x^3 + 4y^3 - 3x^2y + y + 2x =$

2 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 덧셈에 대해서 다음 법칙이 성립한다.

정리 5) 다항식의 덧셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C 에 대하여

(1) 교환법칙 : $A + B = B + A$

(2) 결합법칙 : $(A + B) + C = A + (B + C)$

다항식을 더하거나 뺄 때에는 각 항을 차수가 같은 항(동류항)으로 묶어 정리한다.

예시 6)

다음 다항식 A, B 에 대하여 $A + B$ 와 $A - B$ 를 각각 구하여라.

$$A = 2x^3 + x^2 - 3, \quad B = -5x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$\begin{aligned} A + B &= (2x^3 + x^2 - 3) + (-5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) \\ &= (2 - 5)x^3 + (1 + 3)x^2 - 2x + (-3 + 4) \\ &= -3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\ A - B &= (2x^3 + x^2 - 3) - (-5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) \\ &= (2 + 5)x^3 + (1 - 3)x^2 + 2x + (-3 - 4) \\ &= 7x^3 - 2x^2 + 2x - 7 \end{aligned}$$

$$\text{답 : } A + B = -3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad A - B = 7x^3 - 2x^2 + 2x - 7$$

문제 7)

다음 다항식 A, B 에 대하여 $A + B$ 와 $A - B$ 를 각각 구하여라.

$$A = 6x^3 + 4x^2 - x - 3, \quad B = -4x^2 - x + 2$$

답 : $A + B =$, $A - B =$

3 다항식의 곱셈

다항식의 곱셈과 나눗셈을 하기 전에, 중학교에서 배웠던 지수법칙을 복습하자.

정리 8) 지수법칙

m, n 이 자연수일 때

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n \text{ 일 때}) \\ 1 & (m = n \text{ 일 때}) \\ a^{n-m} & (m < n \text{ 일 때}) \end{cases} = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

문제 9)

다음 식을 전개하여라.

$$(1) (-a)^3 \times (-a)^5$$

$$(2) (6a^4b^5c^3)^2 \times (-2ab^2)^3$$

$$(3) \{(a^l)^m\}^n$$

$$(4) (-x^2y^3z)^5 \div (-xy^2z^4)^3$$

$$(5) \left(\frac{q^2}{p^3}\right)^4 \div \left(\frac{q^4}{p^2}\right)^3$$

다항식을 곱할 때는 다음과 같은 성질을 사용한다.

정리 10) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C 에 대하여

(1) 교환법칙 : $AB = BA$

(2) 결합법칙 : $(AB)C = A(BC)$

(3) 분배법칙 : $A(B + C) = AB + AC$

예시 11)

$(x^2 - x + 5)(3x - 4)$ 를 전개하여라.

$$\begin{aligned}(x^2 - x + 5)(3x - 4) &= (x^2 - x + 5)3x + (x^2 - x + 5)(-4) \\ &= (3x^3 - 3x^2 + 15x) + (-4x^2 + 4x - 20) \\ &= 3x^3 - 7x^2 + 19x - 20\end{aligned}$$

답 : $3x^3 - 7x^2 + 19x - 20$

문제 12)

다음 식을 전개하여라.

(1) $(x^2 + 3x - 4)(x + 2)$

(2) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(3) $(x - a)(x - b)(x - c)$

예시 13)

다음 식을 전개하여라.

(1) $(a + b + c)^2$

(2) $(a + b)^3$

$$\begin{aligned} (1) \quad (a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ (2) \quad (a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)b \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

답 : (1) $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ (2) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

문제 14)

다음 식을 전개하여라.

(1) $\frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$ (2) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

이상으로부터 다음 공식들을 얻을 수 있다.

정리 15) 곱셈공식

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(4) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$(5) (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(6) (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$(7) (x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$(8) (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$(9) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(10) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(11) (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(12) (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(13) (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$(14) (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4$$

4 다항식의 나눗셈

정리 16) 다항식의 나눗셈

다항식 A 를 다항식 $B(\neq 0)$ 로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 이라고 하면

$$A = BQ + R$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 R 의 차수는 B 의 차수보다 낮다. 특히, $R = 0$ 이면 A 는 B 로 나누어떨어진다고 한다.

예시 17)

(1)

$$x^2 + 2 = (x - 1)(x + 1) + 3$$

에서

$$A = x^2 + 2, \quad B = x - 1, \quad Q = x + 1, \quad R = 3$$

이다. R 의 차수($= 0$)는 B 의 차수($= 1$)보다 낮다.

(2)

$$x^2 + 3x + 4 = (x + 1)(x + 3) + 0$$

에서

$$A = x^2 + 3x + 4, \quad B = x + 1, \quad Q = x + 3, \quad R = 0$$

이다. R 의 차수($= 0$)는 B 의 차수($= 1$)보다 낮고, $x^2 + 3x + 4$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다.

(3)

$$x^3 + x = (x^2 - x + 1)(x + 1) + x - 1$$

에서

$$A = x^3 + x, \quad B = x^2 - x + 1, \quad Q = x + 1, \quad R = x - 1$$

이다. R 의 차수($= 1$)는 B 의 차수($= 2$)보다 낮다.

다항식을 나눌 때는 아래와 같이 한다.

예시 18)

$2x^3 + 3x + 1$ 을 $x + 2$ 로 나눈 몫과 나머지를 구하고 나눗셈 식으로 나타내어라.

(1) 직접 나눗셈을 하는 방법

$$\begin{array}{r}
 \overline{8x^2-2x-3} \\
 x-1) \overline{8x^3-10x^2-x+3} \\
 \underline{8x^3-8x^2} \\
 \underline{-2x^2-x} \\
 \underline{-2x^2+2x} \\
 \underline{-3x+3} \\
 \underline{-3x+3} \\
 \underline{0}
 \end{array}$$

(2) 조립제법을 사용하는 방법

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 8 & -10 & -1 & 3 \\
 1 & & 8 & -2 & -3 \\
 \hline
 & 8 & -2 & -3 & 0
 \end{array}$$

몫 : $8x^2 - 2x - 3$, 나머지 : 0

나눗셈 식 : $2x^3 + 3x + 1 = (x + 2)(8x^2 - 2x - 3) + 0$

문제 19)

다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하고 나눗셈 식으로 나타내어라.

(1) $(3x^3 - 2x^2 - 3x - 5) \div (x - 2)$

(2) $(4x^3 + 7x^2 - 12x + 3) \div (x + 3)$

답

문제 2)

④

문제 4)

(1) $3x^3 + 4x^2 - x - 5$

(2) $x^3 - 3yx^2 + 2x + 4y^3 + y$

문제 7)

(1) $A + B = 6x^3 - 2x - 1$

(2) $A - B = 6x^3 + 8x^2 - 5$

문제 9)

(1) a^8

(2) $-288a^{11}b^{16}c^6$

(3) a^{lmn}

(4) $\frac{x^7y^9}{z^7}$

(5) $\frac{1}{p^6q^4}$

문제 12)

(1) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$

(2) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(3) $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$

문제 14)

(1) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

(2) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

문제 19)

(1) 몫 : $3x^2 + 4x + 5$, 나머지 : 5

나눗셈식 : $3x^3 - 2x^2 - 3x - 5 = (x - 2)(3x^2 + 4x + 5) + 5$

(2) 몫 : $4x^2 - 5x + 3$, 나머지 : -6

나눗셈식 : $4x^3 + 7x^2 - 12x + 3 = (x + 3)(4x^2 - 4x + 3) - 6$