

## 현빈 : 04 p158의 예제14-14에 대한 다른 풀이

December 29, 2014

### 예제 14-14

$a, b, c, d$ 는 실수,  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $c^2 + d^2 = 1$ ,  $ac + bd = 0$  일 때 다음 식이 성립함을 증명하여라.

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

먼저 다음이 성립한다.

$$d = ak, \quad c = -bk \text{를 만족시키는 실수 } k \text{가 존재한다.} \quad (1)$$

i) 만약  $a \neq 0, b \neq 0$  이면  $\frac{d}{a} = -\frac{c}{b}$  이다.  $k$ 를

$$k = \frac{d}{a} = -\frac{c}{b}$$

로 잡으면 (1)이 성립한다.

ii)  $a = 0$  이면 첫 번째 가정에서  $b = \pm 1$  이다. 따라서 어느 경우건  $d = 0$  이다 (세 번째 가정). 만약  $b = 1$  이면  $k$ 를  $-c$ 로, 만약  $b = -1$  이면  $k$ 를  $c$ 로 택하면 된다.

iii)  $b = 0$  이면 첫 번째 가정에서  $a = \pm 1$  이다. 따라서 어느 경우건  $c = 0$  이다 (세 번째 가정). 만약  $a = 1$  이면  $k$ 를  $d$ 로, 만약  $a = -1$  이면  $k$ 를  $-d$ 로 택하면 된다.

따라서 (1)이 증명되었다. (1)의 두 식을 두 번째 가정에 넣으면  $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)k^2 = k^2 = 1$ . 따라서  $k = \pm 1$ .

$k = 1$  이면  $d = a$ 이고  $c = -b$ 이다. 따라서 세 식 모두 성립한다. 마찬가지로  $k = -1$  이면  $d = -a, c = b$ 이다. 따라서 세 식 모두 성립한다.