

영석 : 05 이차부등식

May 16, 2015

Contents

1	연립 일차 부등식	2
2	절댓값이 포함된 부등식	3
3	이차부등식	9

1 연립 일차 부등식

문제 1)

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad (5)$$

문제 2)

$$\begin{cases} x > -2 \\ x < 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad (3)$$

숙제 3)

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x > 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \geq 3 \\ x < 5 \end{cases} \quad (3)$$

2 절댓값이 포함된 부등식

정의 4) 절댓값

실수 a 에 대해 $|a|$ 를

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

로 정의하자. 읽을 때에는 ‘절댓값 a ’라고 읽는다.

예시 5)

1은 $1 \geq 0$ 이므로 $|1| = 1$ 이다.

0도 $0 \geq 0$ 이므로 $|0| = 0$ 이다.

-1 은 $-1 < 0$ 이므로 $|-1| = -(-1) = 1$ 이다.

마찬가지의 논리에 의해

$$|12| = 12$$

$$|100| = 100$$

$$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$|-5| = 5$$

$$|-512| = 512$$

$$|-\pi| = \pi$$

$$\left|-\frac{4}{2\sqrt{5}}\right| = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

등이 성립한다.

문제 6)

$$|-3| = \tag{4}$$

$$|2.4| = \tag{5}$$

$$\left|\frac{19}{2}\right| = \tag{6}$$

$$|\sqrt{2} - 1| = \tag{7}$$

$$|\sqrt{3} - 3| = \tag{8}$$

$$\left|\frac{\sqrt{5} - 2}{2}\right| = \tag{9}$$

$$|-3| + |4| - |-2| = \tag{10}$$

$$\frac{|2| - |-4|}{|-3|} = \tag{11}$$

숙제 7)

$$|2| = \quad (1)$$

$$|-2.14| = \quad (2)$$

$$\left| -\frac{21}{5} \right| = \quad (3)$$

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \quad (4)$$

$$|\sqrt{50} - 7| = \quad (5)$$

$$\left| \frac{\sqrt{7} - 9}{3} \right| = \quad (6)$$

$$-|-2| + |-3| - |1| = \quad (7)$$

$$\frac{|3| + |-4|}{|-7|} = \quad (8)$$

문제 8)

$$(1) a > 3 \text{ 일 때, } |a - 3| =$$

$$(2) a < -2 \text{ 일 때, } |a + 2| =$$

문제 9)

$$(1) a \geq -1 \text{ 일 때, } |a + 1| =$$

$$(2) a \leq 4 \text{ 일 때, } |a - 4| =$$

$$(3) a > 1 \text{ 일 때, } |a + 2| =$$

$$(4) a < -4 \text{ 일 때, } |a| =$$

숙제 10)

$$(1) a \geq -2 \text{ 일 때, } |a + 2| =$$

$$(2) a \leq 3 \text{ 일 때, } |a - 3| =$$

$$(3) a > 5 \text{ 일 때, } |a + 1| =$$

$$(4) a < -10 \text{ 일 때, } |a + 5| =$$

문제 11)

$$(1) -3 < a < 2 \text{ 일 때}$$

$$|a + 3| - |a - 2|$$

를 간단히하시오.

(2) $a > 100$ 일 때

$$|a + 10| + |a - 10|$$

을 간단히하시오.

문제 12)

(1) $2 \leq a \leq 4$ 일 때, $|a - 2| - |a - 4| =$

(2) $-4 < a \leq -2$ 일 때, $-|a + 2| + 2|a + 4| =$

(3) $a < -5$ 일 때, $|a + 2| + |a - 3| =$

숙제 13)

(1) $3 < a < 5$ 일 때, $|a - 3| + |a - 5| =$

(2) $a > 100$ 일 때, $|a + 15| - 2|a - 25| =$

예시 14)

(1) $|a|$ 는 수직선 상에서 ‘원점 (0)에서부터 a 를 나타내는 점까지의 거리’와 같음을 알 수 있다. 예를 들어 $|2|$ 은 0에서 1까지의 거리인 2이고 $|-3|$ 은 0에서 -3까지의 거리인 3이다. 또 $|0|$ 은 0에서 0까지의 거리인 0이다. 그렇기 때문에 부등식

$$|x| < 1$$

은 원점에서부터의 거리가 1보다 작은 x 의 범위를 나타낸다고 볼 수 있다. 따라서

$$-1 < x < 1$$

이다.

(2) 마찬가지로 부등식

$$|x| > 1$$

은 원점으로부터의 거리가 1보다 큰 x 의 범위를 나타낸다고 볼 수 있다. 따라서

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1$$

이다.

정리 15)

일반적으로 양의 실수 $a(a > 0)$ 에 대해

$$|x| < a$$

의 해는

$$-a < x < a$$

이다. 또,

$$|x| > a$$

의 해는

$$x < -a \text{ 또는 } x > a$$

이다.

문제 16)

$$|x| < 2 \quad (1)$$

$$|x| \leq \frac{1}{5} \quad (2)$$

$$|x| > 1.2 \quad (3)$$

$$|x| \geq 5 \quad (4)$$

숙제 17)

$$|x| > 10 \quad (1)$$

$$|x| < 3.5 \quad (2)$$

$$|x| \leq 3 \quad (3)$$

$$|x| \geq 2 \quad (4)$$

문제 18)

$$|-x| > 3 \quad (1)$$

$$|2x| < 4 \quad (2)$$

$$|-3x| \leq -6 \quad (3)$$

$$\left| \frac{1}{2}x \right| \geq 3 \quad (4)$$

$$|x| < |2x| + 3 \quad (5)$$

문제 19)

$$|x + 3x| < 8 \quad (1)$$

$$2|x| \geq 6 \quad (2)$$

$$-3| - x| \leq -9 \quad (3)$$

$$\left| \frac{1}{3}x \right| \geq 1 \quad (4)$$

숙제 20)

$$| - x| < 2 \quad (1)$$

$$|3x| > 9 \quad (2)$$

$$| - 2x| \geq -8 \quad (3)$$

$$\left| \frac{2}{3}x \right| \leq 4 \quad (4)$$

$$|4x| > |2x| + 2 \quad (5)$$

문제 21)

$$|x - 3| \leq 5 \quad (1)$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$|2x - 4| \geq 6 \quad (3)$$

$$|x + 5| > 1 \quad (4)$$

문제 22)

$$|x - 1| \leq \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\left| x - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$|4 - 2x| \geq 3 \quad (3)$$

$$\left| 1 - \frac{x}{2} \right| > 1 \quad (4)$$

숙제 23)

$$|x - 1| < 3 \quad (1)$$

$$|x - \sqrt{2}| < \sqrt{2} \quad (2)$$

$$|3x - 9| \geq 15 \quad (3)$$

$$|x + 2| \leq 4 \quad (4)$$

3 이차부등식

정의 24)

이항했을 때

$$ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0$$

꼴로 표시되는 부등식을 이차부등식이라고 한다.

예시 25)

(1) $x^2 + 2x + 3 > 0$ 은 이차부등식이다. (2) $-3x + 5 < 0$ 은 이차부등식이 아니다. (3) $(x - 3)^2 \geq 2(x - 1)^2$ 은 이차부등식이다. (4) $\frac{1}{2}x + 3 < x - 7$ 은 이차부등식이 아니다.

문제 26)

다음 중 이차부등식을 고르시오.

$$2x + 4 > 0 \quad (5)$$

$$-2x^2 + 5 < 0 \quad (6)$$

$$(x - 4)^2 < 7 \quad (7)$$

$$(x + 3)^2 + (x - 1)^2 < 2(x - 4)^2 \quad (8)$$

숙제 27)

다음 중 이차부등식을 고르시오.

$$x^2 < 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{x} > 0 \quad (10)$$

$$x^3 + 7x < 7 \quad (11)$$

$$2x^2 + (x - 1)^2 < 3(x - 2)^2 \quad (12)$$

이차부등식을 푸는 방법은 인수분해를 사용한 방법과 그래프를 사용한 방법이 있으나 여기서는 인수분해를 사용한 방법을 소개하겠다.

두 실수 A, B 에 대해 $AB < 0$ 이기 위해서는 A, B 의 부호가 서로 달라야 한다. 즉

$$\begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{이거나} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

이어야 한다.

한편 $AB > 0$ 이기 위해서는 A, B 의 부호가 서로 같아야 한다. 즉

$$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \quad \text{이거나} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

이어야 한다.

이를 토대로 이차부등식을 풀 수 있다.

예시 28)

이차부등식

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

을 풀어보자. 인수분해하면

$$(x - 1)(x - 3) < 0$$

이 된다. 따라서 $x - 1$ 과 $x - 3$ 의 부호는 서로 다르다. 즉

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \quad \text{이거나} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

이어야 한다. 조금 더 정리하면

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \quad \text{이거나} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

이어야 한다. 앞의 것은 정리하면 $1 < x < 3$ 이 되고, 뒤의 것은 발생할 수 없다.
따라서 답은

$$1 < x < 3$$

이 된다.

예시 29)

이차부등식

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

을 풀어보자. 인수분해하면

$$(x - 1)(x - 3) > 0$$

이 된다. 따라서 $x - 1$ 과 $x - 3$ 의 부호는 서로 같다. 즉

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \quad \text{이거나} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

이어야 한다. 조금 더 정리하면

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \quad \text{이거나} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x < 3 \end{cases}$$

이어야 한다. 더 정리하면

$$x > 3 \text{ 이거나 } x < 1$$

이 된다.

같은 방법으로

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

도 풀 수 있다.

정리 30)

두 실수 α, β 에 대해 $\alpha < \beta$ 가 성립할 때,

(1) $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ 의 해는 $\alpha < x < \beta$ 이다.

(2) $(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0$ 의 해는 $\alpha \leq x \leq \beta$ 이다.

(3) $(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ 의 해는 $x < \alpha$ 혹은 $x > \beta$ 이다.

(4) $(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0$ 의 해는 $x \leq \alpha$ 혹은 $x \geq \beta$ 이다.

문제 31)

다음 이차 부등식을 풀어라.

$$x^2 + 5x + 6 > 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 3x + 4 \geq 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad (3)$$

$$-2x^2 - 6x + 8 \leq 0 \quad (4)$$

문제 32)

다음 이차 부등식을 풀어라.

$$-x^2 + x + 2 > 0 \quad (1)$$

$$2x^2 + x - 1 \geq 0 \quad (2)$$

$$3x^2 - x - 4 < 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0 \quad (4)$$

$$x(x - 2) < 0 \quad (5)$$

숙제 33)

다음 이차 부등식을 풀어라.

$$-x^2 + 2x > 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0 \quad (2)$$

$$2x^2 - 2x - 4 < 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 2x - 8 \leq 0 \quad (4)$$

문제 34)

다음 이차 연립 부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0 \\ x^2 + 3x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 - 6x + 8 \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

숙제 35)

다음 이차 연립 부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 + 2x - 8 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ x^2 + x - 6 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$