규현 : 06 수열(4)

2017년 1월 5일

차 례

차	례															1
1	수열의	귀납적	정의(1)													2
2	수열의	귀납적	정의(2)													7
3	수학적	귀납법														13

1 수열의 귀납적 정의(1)

예시 1)

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad \cdots$$

는 일반항 $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$ 로 나타내기도 하지만 첫째항 1부터 차례로 일정한 수 2를 더해서 얻어지는 수열이므로

$$a_1 = 1$$
, $a_{n+1} = a_n + 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

와 같이 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계식을 이용하여 수열을 정의하기도 한다.

정의 2) 수열의 귀납적 정의

일반적으로 a_1 의 값과 a_n 에서 a_{n+1} 을 구할 수 있는 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항 a_1, a_2, a_3, \cdots 이 정해진다. 이와 같이 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다. 이때, 이웃하는 항들 사이의 관계식을 **점화식**이라고 한다.

예시 3)

 $a_1=1,\; a_{n+1}=2a_n+1\; (n=1,2,3,\cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제 4항을 구하면

$$n=1$$
을 대입 : $a_2=2\cdot 1+1=3$

$$n=2$$
을 대입 : $a_3=2\cdot 3+1=7$

$$n=3$$
을 대입 : $a_4=2\cdot 7+1=15$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 제4항은 15이다.

문제 4)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제5항을 구하여라.

(1)
$$a_1 = 2$$
, $a_{n+1} = a_n + 3$

(2)
$$a_1 = 2$$
, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

문제 5)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제5항을 구하여라.

(1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$



답:(

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$



답:(

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2 (n = 1, 2, 3, \cdots)$

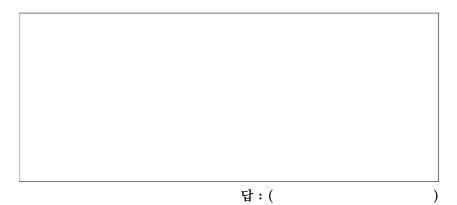


답:(

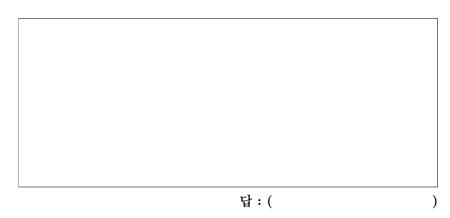
문제 6)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5+a_{10} 의 값을 구하여라.

(1) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$



(2) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_n + 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$



위 문제에서 (1)의 수열은 **피보나치 수열**이라고 불린다.

예시 7)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 8$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

 $a_{n+1}-a_n=8$ 에서 공차가 8인 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 a=5이므로

$$a_n = 5 + (n-1)8 = 8n - 3$$

답: $a_n = 8n - 3$

(2) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이다. 따라서 인접한 세 항은 등차수열을 이루고, 전체 수열도 등차수열임을 알수 있다. 첫항은 a=2이고 공차는 $d=a_2-a_1=4$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1)4 = 4n - 2$$

답: $a_n = 4n - 2$

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

 $rac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 에서 공비가 2인 등비수열임을 알 수 있다. 첫항은 a=1이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

답: $a_n = 2^{n-}$

(4) $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항이다. 따라서 인접한 세 항은 등차수열을 이루고, 전체 수열도 등차수열임을 알수 있다. 첫항은 a=4이고 공차는 $d=a_2\div a_1=\frac{3}{2}$ 이므로

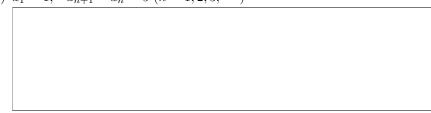
$$a_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

답: $a_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

문제 8)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 5 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$

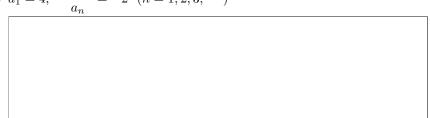


답: $a_n =$

(2) $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_{n+2} + a_n}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

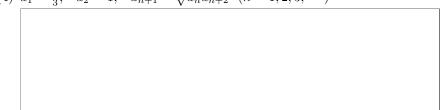
답: $a_n =$

(3) $a_1 = 4$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$



답: a_n =

(4) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$



답: a_n =

2 수열의 귀납적 정의(2)

예시 9)

문제 5의 (1), (2), (3)의 일반항을 구해보자.

(1)
$$a_1 = 3$$
, $a_{n+1} = a_n + n$

점화식의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n$ 을 차례로 대입하여 나열하면

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3$$

:

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

이다. 이 식들을 모두 더하면

$$a_n = a_1 + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 3 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$=\frac{n^2-n+6}{2}$$

이다.

답:
$$a_n = \frac{n^2 - n + 6}{2}$$

(2)
$$a_1 = 1$$
, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n$

점화식의 n에 $1, 2, 3, \cdots$, n을 차례로 대입하여 나열하면

$$a_2 = \frac{3}{1}a_1$$

$$a_3 = \frac{4}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{5}{3}a_3$$

$$a_5 = \frac{6}{4}a_3$$

:

$$a_{n-1} = \frac{n}{n-2} a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$$

이다. 이 식들을 모두 곱하면

$$a_n = a_1 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1}$$
$$= a_1 \times \frac{n(n+1)}{1 \times 2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

이다.

답:
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$

주어진 점화식

$$a_{n+1} = 3a_n + 2$$

은

$$a_{n+1} + k = 3(a_n + k)$$

꼴로 만들 수 있다. 두 식을 비교해보면 2k=2이므로 k=1이고

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

이다. $b_n = a_n + 1$ 을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 을 생각하면

$$b_{n+1} = 3b_n$$

이므로 $\{b_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다. $b_1=a_1+1=1+1=2$ 이므로

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이고

$$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이다. 따라서

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

이다.

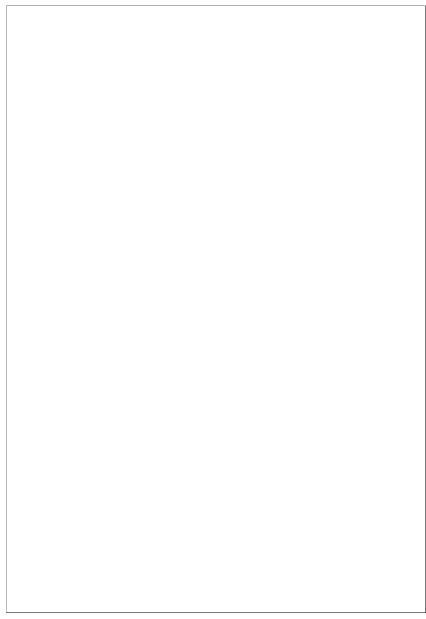
답:
$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

문제 10)

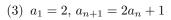
다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

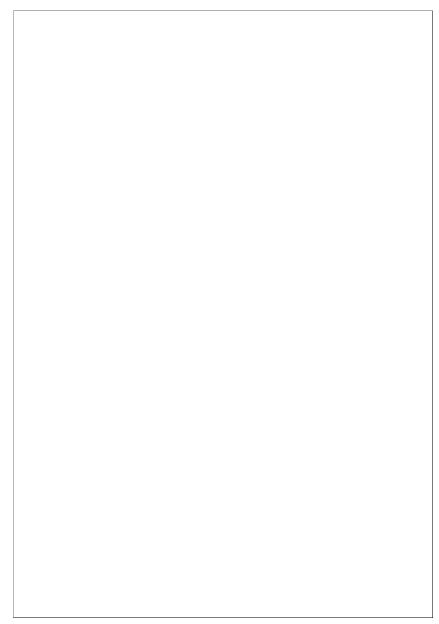
 $(1) \ a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n + 4n$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2^n a_n$



답: $a_n =$





답: $a_n =$

3 수학적 귀납법

예시 11)

 $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ 이므로 다음을 추측할 수 있다.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2 \tag{9}$$

하지만 이 사실만으로 모든 자연수 n에 대하여 식 \bigcirc 이 성립한다고 할 수는 없다. 또한, 무한히 많은 자연수 n에 대해 일일이 성립하는지 확인해볼 수도 없을 것이다.

이제 모든 자연수 n에 대하여 \bigcirc 이 성립함을 증명하는 방법을 알아보자.

[1] n=1일때 식 \bigcirc 이 성립함을 보인다. 즉

이므로 식 \bigcirc 은 n=1일 때 성립한다.

[2] n = k 일때 식 \bigcirc 이 성립한다고 가정하고, n = k + 1 일 때도 식 \bigcirc 이 성립함을 보인다. 즉

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

을 가정하고 이 식의 양변에 2k+1을 더하면. 그러면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

이다. 따라서 식 \bigcirc 은 n=k+1일 때에도 성립한다.

[1]에서 n=1일 때, 식 \bigcirc 이 성립함을 보였으므로 위에서 증명한 사실 [2]로부터

n=1일 때 식 \bigcirc 이 성립하므로 n=2일 때 식 \bigcirc 이 성립한다.

n=2일 때 식 \bigcirc 이 성립하므로 n=3일 때 식 \bigcirc 이 성립한다.

n=3일 때 식 \bigcirc 이 성립하므로 n=4일 때 식 \bigcirc 이 성립한다.

:

따라서 [1], [2]가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 식 \bigcirc 이 성립함을 알수 있다.

자연수에 대한 어떤 명제가 성립함을 보일 때, 위와 같은 방법으로 증명하는 것을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

정리 12) 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 p(n)이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- [1] n = 1일 때 명제 p(n)이 성립한다.
- [2] n = k 일 때 명제 p(n) 이 성립한다고 가정하면 n = k + 1 일 때도 p(n) 이 성립한다.

예시 13)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

 $1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (\(\text{9}\))

[1] n=1이면

(좌변) =
$$1^2 = 1$$
, (우변) = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$

이므로 식 \bigcirc 은 n=1일 때 성립한다.

[2] n=k일때 식 \bigcirc 이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + k^{2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

을 가정하자. n=k+1 일때에 식 \bigcirc 이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + k^{2} + (k+1)^{2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^{2}$$

$$= \frac{k+1}{6} \left\{ k(2k+1) + 6(k+1) \right\}$$

$$= \frac{k+1}{6} (2k^{2} + 7k + 6)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

이다. 따라서 n = k + 1일 때에도 식 \bigcirc 이 성립한다.

[1], [2]에서 모든 자연수에 대해 식 ⊙이 성립한다.

문제 14)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
 (\bigcirc)

답

문제 4)

$$(2) \frac{1}{8}$$

문제 14)

문제 8)

$$(1) a_n = 5n - 4$$

(2)
$$a_n = -2n + 6$$

(3)
$$a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$$

(4)
$$a_n = 3^{n-2}$$

문제 10)

$$(1) \ a_n = 2n^2 - 2n + 1$$

(2)
$$a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(3)
$$a_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$$

[1] n=1이면

(좌변) = 1, (우변) =
$$\frac{1 \cdot 2}{2}$$
 = 1

이므로 식 \bigcirc 은 n=1일 때 성립한다.

 $\lceil 2 \rceil \ n = k$ 일때 식 \bigcirc 이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

을 가정하자. n=k+1일때에 식 \bigcirc 이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 k+1을 더하면

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

이다. 따라서 n = k + 1일 때에도 식 \bigcirc 이 성립한다.

[1], [2]에서 모든 자연수에 대해 식 ⊙이 성립한다.