현빈 : 07 삼각함수

January 14, 2015

1 삼각비 (중학교 3학년 2학기 과정)

정의 1. 1) 삼각비

$\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 $\triangle ABC$ 에서 A 의 대변을 a, B 의 대변을 b, C 의 대변을 c 라고 할 때, 다음과 같이 삼각비를 정의한다.[그림 1]

$$\sin\angle A = \frac{a}{c}$$
$$\cos\angle A = \frac{b}{c}$$
$$\tan\angle A = \frac{a}{b}$$

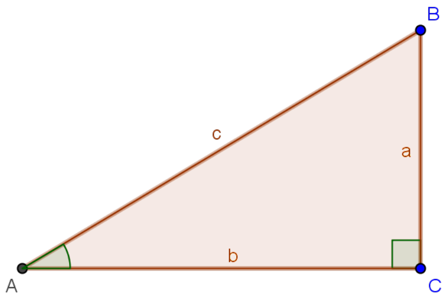

그림 1

이때 삼각비의 값은 주어진 각도에만 의존한다. 즉, 서로 다른 두 삼각형이라도 각도가 같으면 삼각비의 값은 같다.[그림 2]

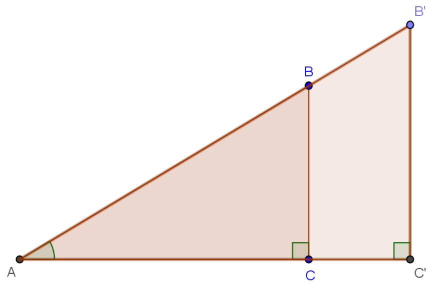

그림 2

정리 1. 2) 삼각비의 성질

그림 3과 같이 사분면에서 반지름이 1인 사분원을 그리고 사분원 위의 한 점을 B라고 하자. 또 B에서 x축, y축에 내린 수선을 각각 D, C라고 하자. 그리고 x축과 OB가 이루는 예각을 θ라고 하면 다음이 성립한다.

(1) $\sin\theta = \overline{OC}$ 이고 $\cos\theta = \overline{OD}$ 이다.

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이다.

(3) $0 \le \sin\theta \le 1$ 이고 $0 \le \cos\theta \le 1$ 이다.

(4) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이다.

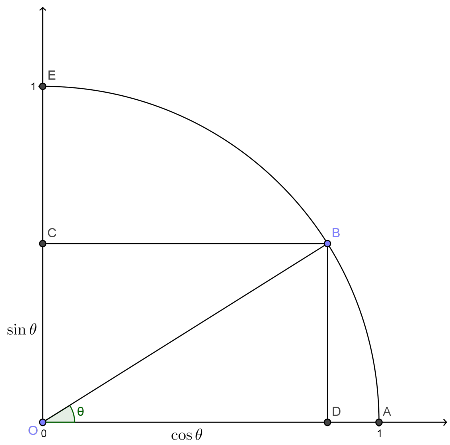

그림 3

2 삼각함수 (고등학교 2학년 과정)

정리 2. 1) 원의 방정식

좌표평면 상에 반지름의 길이가 r 이고 중심이 원점인 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = r^2$$

이다.[그림 4]

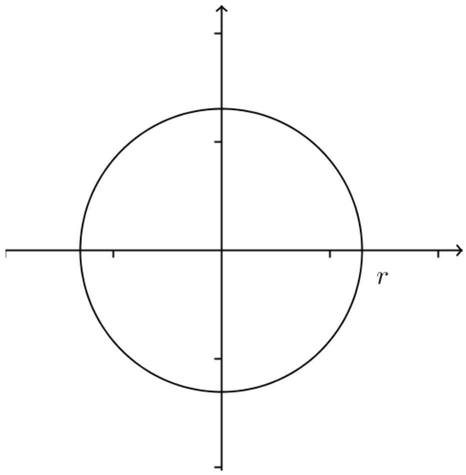

그림 4

증명. 원이란, 한 점으로부터 일정한 거리 (=반지름) 에 있는 점들의 집합이다. 따라서 주어진 원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라고 하면, 이 점은

$$\overline{OP} = r$$

을 만족시켜야 한다 (O 는 원점).

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

이므로 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 = r^2$$

이 얻어진다. □

정의 2. 2) 삼각함수

좌표평면 상에 단위원(반지름의 길이가 1인 원)

$$x^2 + y^2 = 1$$

을 생각하자. $A(1,0)$로부터 원을 따라 시계반대방향으로 θ만큼 이동시킨 점을 B라고 할 때 $\sin\theta$를 B의 y좌표, $\cos\theta$를 B의 x좌표로 정의한다. $\tan\theta$는 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$로 정의한다.

따라서 그림 5에서처럼, B의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이고, $\tan\theta$는 $\overline{OB}$의 기울기이다.

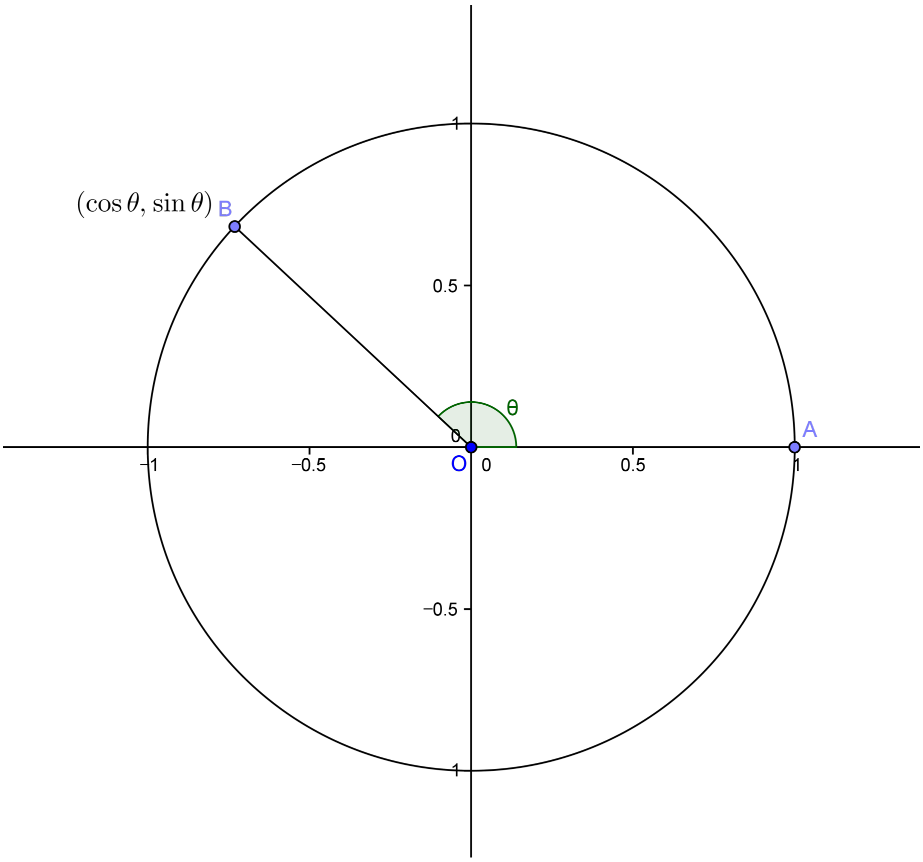

그림 5

이전 정의에서는 $0°$에서 $90°$까지의 사인, 코사인, 탄젠트값만을 정의했던 것과는 달리, 이번에는 모든 실수 각도에 대한 사인, 코사인 탄젠트값을 정의할

수 있었다. 또한 이 새로운 정의는 이전의 정의와 $0°$ 에서 $90°$ 까지의 범위에서 일치한다.

따라서 sin, cos, tan 각각을 하나의 함수로서 (정의역 = 실수전체) 간주할 수 있다.

정리 2. 3) 삼각함수의 성질

(1) 삼각함수는 $360°$ 을 주기로 하는 주기함수이다. 즉 자연수 n 에 대해

$$\sin(\theta + 360^\circ n) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + 360^\circ n) = \cos\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ n) = \tan\theta$$

이다.

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이다.

(3) $-1 \le \sin\theta \le 1$ 이고 $-1 \le \cos\theta \le 1$ 이다.