수학(상) : 03 항등식과 나머지정리

2018년 2월 22일

차 례

1 항등식과 미정계수법

1.1 항등식

정의 1) 항등식
 주어진 등식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식을 항등식이라고 한다.

예시 2)

(1) 등식 $x^2 - 2x - 3 = 0$에 $x = 3$을 대입하면 $0 = 0$이 되어 성립한다. 하지만 $x = 4$을 대입하면 $5 \neq 0$이 되어 성립하지 않는다. 따라서 이 등식은 항등식이 아니다.

(2) 등식 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$에는 $x = 3$을 대입하면 $0 = 0$이 되고 $x = 4$를 대입하면 $5 = 5$가 되어 성립한다. 그밖에 x에 어떤 값을 대입하더라도 항상 성립한다. 따라서 항등식이 맞다. 실제로 좌변을 잘 정리하면 우변이 되므로, 항등식인 것이 당연하다.

(3) $(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$에서 좌변을 전개하면 우변이 된다. 따라서 x와 y에 각각 어떤 값을 대입하더라도 이 등식은 항상 성립하며, 항등식이 맞다.

(4) $x^3 + 2x^2 + 5x - 3$를 $x^2 - 2x - 1$로 나누어 생기는 몫과 나머지로 만든

$$x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(x + 4) + 14x + 1$$

에서도, 우변을 전개하면 좌변이 된다. 따라서 항등식이다.

예시 3)

(1) 등식 $ax+b=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$임을 설명하여라.

(2) 등식 $ax+b=a'x+b'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$임을 설명하여라.

(1) 등식 $ax+b=0$에서 x에 어떤 값을 대입하더라도 항상 성립해야 한다.
$x=0$을 대입하면 $a\cdot 0+b=0$, 즉 $b=0$이다.
$x=1$을 대입하면 $a\cdot 1+0=0$, 즉 $a=0$이다.

(2) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x+(b-b')=0$$

이 되는데, 이 식이 항등식이 되려면 (1)에 의해 $a-a'=0$, $b-b'=0$ 이어야 한다. 따라서 $a=a'$이고 $b=b'$이다.

예시 4)

등식 $(m-1)x+(n+2)=3x+7$이 항등식이 되려면 $m-1=3$, $n+2=7$ 이어야 한다. 따라서 $m=4$, $n=5$이다.

문제 5)

(1) 등식 $ax^2 + bx + c = 0$가 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$임을 설명하여라.

(2) 등식 $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$이 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ 임을 설명하여라.

문제 6) 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, $a + b + c$의 값을 구하여라.

(1) $(a + 2)x^2 + (b - 2)x + 3 - c = 0$

(2) $1 - 2x + ax^2 = 5x^2 + bx + c$

문제 7)

(1) 등식 $ax + by + c = 0$가 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$임을 설명하여라.

(2) 등식 $ax + by + c = a'x + b'y + c'$이 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$임을 설명하여라.

이상에서 다음의 항등식의 성질을 얻을 수 있다.

정리 8) 항등식의 성질

(a) $ax + b = 0$이 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$이다.

(b) $ax + b = a'x + b'$이 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$이다.

(c) $ax^2 + bx + c = 0$이 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$이다.

(d) $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$이 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$이다.

(e) $ax + by + c = 0$이 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$이다.

(f) $ax + by + c = a'x + b'y + c'$이 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$이다.

1.2 미정계수법

예시 9) 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 2x^2 - 3x + 4$$

<풀이1>

좌변을 전개하여 정리하면

$$\begin{aligned} a(x-1)^2 + b(x-1) + c &= ax^2 - 2ax + a + bx - b + c \\ &= ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c) \end{aligned}$$

이므로 주어진 항등식은

$$ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c) = 2x^2 - 3x + 4$$

가 되고, 따라서 $a = 2$, $-2a + b = -3$, $a - b + c = 4$이다. 이 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$이 된다.

<풀이2>

주어진 식이 항등식이므로 x에 $x = 1$, $x = 0$, $x = 2$를 넣어도 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} &x = 1\ ;\ c = 3 \\ &x = 0\ ;\ a - b + c = 4 \\ &x = 2\ ;\ a + b + c = 6 \end{aligned}$$

이 식들을 연립하면 $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$이다.

이처럼 항등식에서 아직 정해지지 않은 계수(=미정계수)의 값을 정하는 방법을 미정계수법이라고 한다. <풀이 1>에서처럼 양변의 계수를 비교하여 미정계수를 구하는 방법을 계수비교법, <풀이 2>에서처럼 x에 여러 값들을 대입해 미정계수를 구하는 방법을 수치대입법이라고 한다.

문제 10) 계수비교법을 이용하여 다음 항등식에서 $a+b+c$를 구하여라.

$$x^3 + ax^2 - 36 = (x+c)(x^2 + bx - 12)$$

문제 11) 수치대입법을 이용하여 다음 항등식에서 $a^2 - b^2$의 값을 구하여라.

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1$$

문제 12) 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

(1) $2x^2 - 2 = (x+1)(ax+b)$

(2) $a(x-1) + b(x-2) = 2x - 3$

2 나머지정리와 인수정리

$3x^3 - 2x^2 - 5x + 1$를 $x - 2$로 나누었을 때 몫과 나머지를 구하는 과정에는 다음의 두 방법이 있었다.

$$
\begin{array}{r|llll}
\multicolumn{1}{r}{} & 3x^2 & +4x & +3 & \\ \cline{2-5}
x-2 & 3x^3 & -2x^2 & -5x & +1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & 3x^3 & -6x^2 & & \\ \cline{2-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & 4x^2 & -5x & +1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{2-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 3x & +1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & 3x & -6 \\ \cline{2-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & -2 & -5 & 1 \\
 & & 6 & 8 & 6 \\ \hline
 & 3 & 4 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{7} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$

하지만 몫은 제외하고, 나머지만 구하려고 한다면 훨씬 쉽게 구하는 방법이 있다.

> **정리 13) 나머지정리**
> 다항식 $f(x)$를 $x - \alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

증명)
$f(x)$를 $x - \alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 하면

$$f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

이다. 이 식은 항등식이므로 $x = \alpha$를 대입해도 성립한다. 따라서 $f(\alpha) = R$ 이다. $\square$

예시 14)

(1) 위의 예에서 나머지정리를 쓰면, $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 1$을 $x - 2$로 나누었을 때의 나머지는

$$R = f(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = 7$$

이다.

(2) $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$를 $x + 3$으로 나누었을 때의 나머지는 $(-3)^3 - 2(-3)^2 + 3(-3) + 4 = -50$ 이다.

문제 15) $2x^3 - 2x^2 + 1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $x - 2$ (2) $x + \frac{1}{2}$

문제 16)

$x^3 - x^2 + ax + 4$을 $x + 2$로 나누었을 때의 나머지가 2일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

예시 17)

다항식 $f(x)$를 일차식 $ax + b$로 나누었을 때의 나머지가 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ 임을 보여라.

$f(x)$를 $ax + b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 하면

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

이다. 이 식은 항등식이므로 $x = -\frac{b}{a}$를 대입해도 성립한다. 따라서 $f\left(-\frac{b}{a}\right) = R$이다. □

문제 18) $3x^2 + x + 2$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $2x + 1$ (2) $3x - 2$

예시 19)

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$이라고 하자. 나누는 식 $(x-1)(x+2)$가 이차식이므로, $R(x)$는 일차 이하의 다항식 $ax+b$이다. 그러면

$$f(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

이다. 문제의 조건에서 $f(1)=3$이므로

$$a+b=3$$

또, $f(-2)=-3$이므로

$$-2a+b=-3$$

이다. 두 식을 빼면 $3a=6$, $a=2$이다. 따라서 $b=1$이다. 그러므로 $R(x)=2x+1$이다. □

문제 20)

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 4이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 8이다. 이때 $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$f(\alpha)$는 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지이다. 따라서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

정리 21) 인수정리
$f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

예시 22)
다항식 $f(x)=x^3+x^2+4$에서 $f(-2)=(-2)^3+(-2)^2+4=0$이므로, $f(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어진다. 조립제법을 써서 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x+2)(x^2-x+2)$$

가 된다. 이때 $f(x)$가 $x+2$를 인수로 가진다라고 말한다.

문제 23) 다음 일차식 중에서 다항식 x^3+5x^2+2x-8의 인수인 것을 모두 찾아라.

$x, \qquad x-1, \qquad x+1, \qquad x+2$

문제 24)
다항식 x^3+x^2+ax+a가 $x-4$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하여라.

답

문제 5)

(1) $x=0$을 대입하면 $c=0$이다. $x=1$을 대입하면 $a+b=0$이다. $x=-1$을 대입하면 $a-b=0$이다. 두 식을 연립하면 $a=0$, $b=0$를 얻는다.

(2) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$$

이다. 따라서 (1)에 의해 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$를 얻는다.

문제 6)

(1) $a=-2$, $b=2$, $c=3$
(2) $a=5$, $b=-2$, $c=1$

문제 7)

(1) $x=0$, $y=0$을 대입하면 $c=0$이다. $x=1$, $y=0$을 대입하면 $a=0$이다. $x=0$, $y=1$을 대입하면 $b=0$이다.

(2) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$$

이다. 따라서 (1)에 의해 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$를 얻는다.

문제 10)

14

문제 11)

20

문제 12)

(1) $a = 2$, $b = -2$

(2) $a = 1$, $b = -6$, $c = 10$

문제 15)

(1) 9

(2) $\frac{1}{4}$

문제 16)

-5

문제 18)

(1) $\frac{9}{4}$

(2) 4

문제 20)

$x + 5$

문제 23)

$x - 1$, $x + 2$

문제 24)

-16