윤영 : 09 명제 (2)

2016년 11월 30일

차 례

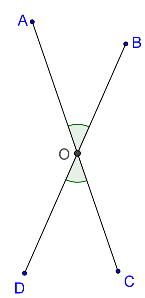
1 여러 가지 증명 방법

어떤 명제를 증명하는 방법에는 여러 가지가 있다.

1.1 직접 증명법

가장 많이 쓰이는 것은 **직접 증명법**으로, '가정에서 출발하여 추론을 거쳐 결론에 도달하는 방법'이다.

예전에 했었던 다음 증명에서,

<table>
<tr><td>정리</td><td>두 직선이 한 점에서 만날 때, 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.</td></tr>
<tr><td>가정</td><td>두 직선이 한 점에서 만난다.</td></tr>
<tr><td>결론</td><td>맞꼭지각의 크기는 서로 같다.</td></tr>
<tr><td>증명</td><td>오른쪽 그림과 같이 직선 AC와 BD가 한 점 O에서 만날 때, $\angle AOC$는 평각이므로
$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ \qquad (1)$$
또 $\angle BOD$는 평각이므로
$$\angle BOC + \angle COD = 180^\circ \qquad (2)$$
(1), (2)에서


$$\angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD$$
따라서 $\angle AOB = \angle COD$이다.</td></tr>
</table>

먼저 '두 직선이 한 점에서 만난다'는 것을 가정하고, 여러 과정을 거쳐 '맞꼭지각의 크기가 서로 같다'라는 결론에 도달해 증명을 완성했었다.

1.2 간접 증명법

그 외에는 **간접 증명법**을 사용할 수 있는데, 여기에는 **대우를 이용한 증명법**과 **귀류법**이 있다.

대우를 이용한 증명법

$$P \subset Q \iff Q^c \subset P^c$$

이므로, 주어진 명제 $(p \to q)$가 참이면 대우 $(\sim q \to \sim p)$도 참이다. 따라서 명제 $p \to q$를 증명할 때, 대우인 $\sim q \to \sim p$가 참이라는 것을 증명해도 된다.

예시 1)

명제 '자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명하여라.

> 대우 : 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.
>
> n이 홀수임을 가정하면 n을 $n = 2k - 1$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로,
>
> $$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 - 2k) + 1$$
>
> 여기서 $2k^2 - 2k$가 자연수이므로 n^2도 홀수이다.

문제 2)

명제 '두 자연수 m, n에 대하여 mn이 짝수이면 m 또는 n이 짝수이다.'가 참임을 대우를 이용하여 증명하여라.

귀류법

$$\begin{aligned} P \subset Q &\iff P - Q = \varnothing \\ &\iff P \cap Q^c = \varnothing \end{aligned}$$

이다. 따라서 $p \to q$가 참임을 보일 때, '결론을 부정하여 (Q^c) 가정 (P)에 모순 ($\varnothing$)됨을 보이는 방법'을 사용해도 된다.

예시 3)
$\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하여라.

> 이 명제를 $p \to q$꼴로 바꾸면
>
> $$x = \sqrt{2} \text{ 이면 } x \text{는 무리수이다.}$$
>
> 이다. 결론을 부정하여 x가 무리수가 아니라고 가정하면, x는 유리수이다. 따라서 x를 $x = \frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)로 나타낼 수 있다. 즉
>
> $$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$
>
> 이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
>
> $$2m^2 = n^2$$
>
> 여기서 n^2은 짝수이므로 n도 짝수이다. 그러므로 $n = 2k$ (k는 자연수)라고 하고 위 식에 대입해 정리하면
>
> $$m^2 = 2k^2$$
>
> 이다. 이번에도 m^2이 짝수이고, 따라서 m도 짝수이다. 그러면 m과 n이 모두 짝수이며, 이것은 아까 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.
>
> 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

문제 4)

명제 '$\sqrt{2}$가 무리수이면 $1+\sqrt{2}$가 무리수이다.'를 증명하여라.

2 필요조건, 충분조건

정의 5) 필요조건, 충분조건

명제 $p \to q$가 참일 때,

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건

라고 말한다. 또한 $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow p$이면, 이것을 기호로

$$\boxed{p \iff q}$$

와 같이 나타내고

p는 q이기 위한 필요충분조건

라고 말한다.

예시 6)

두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 무슨 조건인지 말하여라.

(1) $p : x = 2,$ $\quad q : x^2 - x - 2 = 0$

(2) $p : 3x - 1 < 2x + 3,$ $\quad q : 2x - 3 < 1$

(3) $p : x + 2 = 1,$ $\quad q : x^2 + 2x + 1 = 0$

p의 진리집합을 P, q의 진리집합을 Q라고 하자.

(1) $P = \{2\}$, $Q = \{-1, 2\}$에서 $P \subset Q$이므로 $p \Rightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) $P = \{x \,|\, x < 4\}$, $Q = \{x \,|\, x < 2\}$에서 $Q \subset P$이므로 $q \Rightarrow p$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

(3) $P = \{-1\}$, $Q = \{-1\}$에서 $P = Q$이므로 $p \Leftrightarrow q$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 : (1) 충분조건, (2) 필요조건, (3) 필요충분조건

문제 7)

두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 무슨 조건인지 말하여라.

(1) $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$

(2) p : 'x는 3의 배수이다.', q : 'x는 6의 배수이다.'

(3) p :'$\triangle ABC$가 이등변삼각형이다.', q:'$\triangle ABC$의 두 변의 길이가 같다.'

답 : (1) (2) (3)

문제 8)

두 실수 x, y에 대하여 다음 빈 칸에 '필요', '충분', '필요충분' 중 알맞은 것을 구하여라.

(1) $x^2 = y^2$ 은 $x = y$이기 위한 $\boxed{}$조건이다.

(2) $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$은 $x + y = 4$이기 위한 $\boxed{}$조건이다.

(3) $x^2 - 3x = 0$은 $x = 0$ 또는 $x = 3$이기 위한 $\boxed{}$조건이다.

3 절대부등식

정의 9) 절대부등식
부등식 $(x-1)^2 \geq 0$, $x^2+1>0$, $|x-1|+1>0$은 모두 x에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립한다. 이와 같이 문자에 어떤 실수를 대입해도 항상 성립하는 부등식을 절대부등식이라고 한다.

문제 10)
다음 부등식 중 절대부등식인 것을 골라라.

① $x+1>0$
② $x^2+1>0$
③ $x^3+1>0$
④ $x^2-2x+1>0$
⑤ $x^2-2x-3>0$

부등식을 증명할 때, 다음과 같은 기본 성질을 자주 이용한다.

정의 11) 부등식의 기본 성질
실수 a, b에 대하여
(1) $a>b \iff a-b>0$

(2) $a^2 \geq 0$, $a^2+b^2 \geq 0$

(3) $a^2+b^2=0 \iff a=0,\ b=0$

(4) $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

(5) $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \iff a^2>b^2$

예시 12)

a, b가 실수일 때, 부등식 $a^2 + b^2 \geq ab$를 증명하여라.

$a^2 + b^2 - ab \geq 0$임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} a^2 - ab + b^2 &= a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 \\ &= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식이 증명되었다. 여기서 등호가 성립하는 경우는 $a - \frac{1}{2}b = 0$, $b = 0$일 때이다. 즉 $a = 0$, $b = 0$일 때이다.

문제 13)

a, b가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 0$, (2) $a^2 + 4ab + 6b^2 \geq 0$

예시 14)

a, b가 실수일 때, 다음 부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$를 증명하여라.

$|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$이므로 $(|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$을 증명하면 되고, 이것은 다시, $(|a|+|b|)^2 - (|a+b|)^2 \geq 0$을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2 - (|a+b|)^2 &= (|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2) - (a+b)^2 \\ &= (a^2 + 2|ab| + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

여기서 등호가 성립하는 경우는 $|ab| - ab = 0$일 때이다. 즉 $ab \geq 0$일 때이다.

문제 15)

a, b가 실수일 때, $|a| - |b| \leq |a-b|$를 증명하여라.

예시 16)

$a, b > 0$ 일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 를 증명하여라.

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 를 증명하면 된다. 이때 $a + b > 0$, $2\sqrt{ab} > 0$ 이므로 양변을 제곱한

$$(a+b)^2 \geq \left(2\sqrt{ab}\right)^2$$

를 증명해도 된다.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - \left(2\sqrt{ab}\right)^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 4ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a-b)^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식이 증명되었다. 여기서 등호가 성립하는 경우는 $a - b = 0$ 일 때이다. 즉 $a = b$ 일 때이다.

문제 17)

$a, b > 0$ 일 때, 부등식 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 를 증명하여라.

정의 18) 산술평균, 기하평균, 조화평균

예제 16와 문제 17에 나타난 세 값을 각각 산술평균, 기하평균, 조화평균이라고 부른다.

$$\text{산술평균} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{기하평균} = \sqrt{ab}, \quad \text{조화평균} = \frac{2ab}{a+b}$$

예시 19)

$a=2,\ b=8$ 이라고 하자.

(1) 산술평균은 우리가 흔히 쓰는 '평균'의 의미이다. 2와 8의 중간에 위치해 있는 값인 $\frac{2+8}{2}=5$를 뜻한다.

(2) 기하평균은 '곱셈을 기준으로 한 평균'이다. $a=2^1$ 이고 $b=2^3$ 이므로, 평균을 $2^2=4$로 정하겠다는 뜻이다.

(3) 조화평균은 '역수를 기준으로 한 평균'이다. 2의 역수는 $\frac{1}{2}$ 이고, 8의 역수는 $\frac{1}{8}$ 이므로, 두 수의 (산술) 평균을 구하면 $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{2}=\frac{5}{16}$ 이 된다. 여기에 다시 역수를 취한 $\frac{16}{5}=3.2$가 두 수의 조화평균이다.

예제 16와 문제 17에 의하면 산술평균이 가장 크고, 조화평균이 가장 작다.

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}}$$

2와 8의 경우에도 $5 \geq 4 \geq 3.2$ 이다.

예시 20)

$a=1,\ b=9$ 일 때, 산술평균과 기하평균, 조화평균을 구하여라.

답 : 산술평균= (　　　), 기하평균= (　　　), 조화평균= (　　　)

예시 16를 변형한 다음 식은 자주 쓰이는 부등식이다.

정리 21) 산술-기하 부등식

$a > 0,\ b > 0$ 이면

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

(단 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.)

예시 22)

$x > 0$ 일 때, 산술-기하 부등식을 이용하여 $\frac{x^2+4x+9}{x} \geq 10$ 을 증명하여라.

$x > 0,\ \frac{9}{x} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 4x + 9}{x} &= x + 4 + \frac{9}{x} \\ &= \left(x + \frac{9}{x}\right) + 4 \\ &\geq 2\sqrt{x \times \frac{9}{x}} + 4 \\ &= 2\sqrt{9} + 4 = 10\end{aligned}$$

여기서 등호가 성립하는 경우는 $x = \frac{9}{x}$ 일 때이다. 즉 $x = 3$ 일 때이다.

문제 23)

$a, b > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $a + \frac{1}{a} \geq 2$, (2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

예시 24) 코시-슈바르츠 부등식

a, b, x, y가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \ge (ax+by)^2$$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \ge 0$을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\\
=&(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)\\
=&a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\
=&(ay)^2-2(ay)(bx)+(bx)^2\\
=&(ay-bx)^2\\
\ge&0
\end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식이 증명되었다. 여기서 등호가 성립하는 경우는 $ay-bx=0$일 때이다. 즉 $a:b=x:y$일 때이다.

문제 25)

a, b, c가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

답

문제 2)
대우 : 두 자연수 m, n에 대하여 m과 n이 모두 홀수이면 mn이 홀수이다.

m과 n이 홀수임을 가정하면 m과 n을 각각 $m = 2k - 1$, $n = 2l - 1$(k, l은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$mn = (2k - 1)(2l - 1) = 4kl - 2k - 2l + 1 = 2(2kl - k - l) + 1$$

여기서 $2kl - k - l$이 자연수이므로 mn도 홀수이다.

문제 4)
결론을 부정해 $1 + \sqrt{2}$가 유리수라고 가정하자. 두 유리수 사이의 차는 유리수이다. 따라서 1도 유리수이므로

$$(1 + \sqrt{2}) - 1 = \sqrt{2}$$

도 유리수이다. 이것은 가정과 모순이다.

따라서 $1 + \sqrt{2}$는 무리수이다.

문제 7)
(1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

문제 8)
(1) 필요 (2) 충분 (3) 필요충분

문제 10)
②

문제 13)

(1)
$$a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2 \geq 0$$

(단 등호는 $a - b = 0$, $b = 0$일 때, 즉 $a = 0$, $b = 0$일 때 성립)

(2)

$$a^2 + 4ab + 6b^2 = (a + 2b)^2 + 2b^2 \geq 0$$

(단 등호는 $a + 2b = 0$, $b = 0$ 일 때, 즉 $a = 0$, $b = 0$ 일 때 성립)

문제 15)

(i) $|a| - |b| \geq 0$ 인 경우
$(|a| - |b|)^2 \leq (|a - b|)^2$ 를 증명하면 된다. 다시 말해, $(|a - b|)^2 - (|a| - |b|)^2 \geq 0$ 을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned}(|a - b|)^2 - (|a| - |b|)^2 &= (a - b)^2 - \left(|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2\right) \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 - 2|ab| + b^2) \\ &= 2\,(|ab| - ab) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

(ii) $|a| - |b| < 0$ 인 경우
$0 \leq |a - b|$ 이므로

$$|a| - |b| < 0 \leq |a - b|$$

(i), (ii) 로부터

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

(단, 등호는 $|ab| = ab$ 일 때, 즉 $ab \geq 0$ 일 때 성립)

(다른방법) 예시 14의 부등식에 a 대신 $a - b$를 넣으면

$$|a - b| + |b| \geq |(a - b) + b|$$

이고, 이것을 정리하면

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

문제 17)

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}&=\frac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{a+b}\\&=\frac{\sqrt{ab}\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}{a+b}\\&=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\\&\geq 0\end{aligned}$$

(단, 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ 일 때, 즉 $a=b$ 일 때 성립)

(다른방법) 예시 16에서 얻은 식의 양변에 $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ 를 곱하면

$$\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$$

문제 20)

산술평균 $=5$, 기하평균 $=3$, 조화평균 $=1.8\left(=\frac{9}{5}\right)$

문제 23)

(1)

$$a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=2\sqrt{1}=2$$

(단, 등호는 $a=\frac{1}{a}$ 일 때, 즉 $a=1$ 일 때 성립)

(2)

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{1}=2$$

(단, 등호는 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ 일 때, 즉 $a=b$ 일 때 성립)

문제 25)

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\
=&\frac{1}{2}\left[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right]\\
=&\frac{1}{2}\left[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\right]\\
=&\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\\
\geq&0
\end{aligned}
$$

(단, 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$ 일 때, 즉 $a=b=c$ 일 때 성립)