

현빈

2014. 11. 14 木~

목차

2 정수의 나누어떨어짐 특성	2
3 절댓값에 관한 문제	6
4 미지수가 1개인 일차방정식과 부등식	9
5 미지수가 2개인 일차연립방정식 및 응용	10
6 정식의 계산	13
7 인수분해 (1)	18
8 분수식의 계산	20
9 정수의 나누어떨어짐	21
10 홀수, 짝수 및 간단한 이색문제	25
11 1차 부정방정식의 해법	26
12 답안 선택의 풀이에 대하여 (1)	28
13 여러가지 문제	28
14 실수	30
15 거듭제곱근식과 지수	33

2 정수의 나누어떨어짐 특성

정의 2. 1) 자연수와 정수

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

라고 하자. 그러면

$$\begin{cases} x \text{는 자연수이다.} & \iff x \in \mathbb{N} \\ x \text{는 정수이다.} & \iff x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

정의 2. 2) 십진법 숫자의 표기

10보다 작은 자연수 a, b, c 에 대해 \overline{abc} 를 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ 로 정의하자. 마찬가지로 10보다 작은 k 개의 자연수 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ 에 대해 $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ 를

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

로 정의하자($10^0 = 1$).

정의 2. 3) 나누어떨어짐 (divisibility)

두 자연수 a, b 에 대해 $b = ak$ 를 만족시키는 자연수 k 가 존재하면 b 는 a 로 나누어떨어진다고 말하고, 이를 기호로 $a \mid b$ 라고 한다.

정의 2. 4) 소수 (prime, 素數)

자연수 $p \neq 1$ 에 대해 $a \mid p$ 일 때 $a = p$ 이면 p 는 소수이다. 즉 1이 아닌 약수가 자기 자신밖에 없으면 소수이다.

정리 2. 5)

소수는 무한히 많이 존재한다.

증명. 귀류법으로 증명이 가능하다. 36단원에서 증명하겠다.

□

정리 2. 6) 산술의 기본정리(The Fundamental Theorem of Arithmetic)

임의의 자연수는 소인수분해될 수 있다. 또 소인수분해가 되는 방식은 유일하다. 즉 자연수 A 에 대해

$$A = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$$

를 만족시키는 p_i, k_i 들이 유일하게 존재한다.

증명. 당연해 보이는 정리이고 아주 중요한 정리이지만 증명하기가 쉽지는 않다. 대학 수준의 수학을 이용하면 증명 가능하다. \square

정리 2. 7)

자연수 a, b, c 에 대해 $a \mid b, a \mid c$ 이면 $a \mid (b + c)$ 이다.

증명. $b = ak, c = al$ 을 만족시키는 자연수 k, l 이 존재한다. 그러면 $b + c = a(k + l)$ 이고 이 때 $k + l$ 은 자연수이다. \square

정리 2. 8)

자연수 $a, b, c(b > c)$ 에 대해 $a \mid b, a \mid c$ 이면 $a \mid b - c$ 이다.

증명. $b = ak, c = al$ 을 만족시키는 자연수 k, l 이 존재한다. 그러면 $b - c = a(k - l)$ 이고 이 때 $k - l$ 은 정수이다. $k - l = 0$ 이면 $b = c$ 이 된다. 또 $k - l < 0$ 이면 $b < c$ 가 된다. 따라서 $k - l$ 은 자연수이다. \square

정리 2. 9)

자연수 a, b 에 대해 $a \mid b, b \mid c$ 이면 $a \mid c$ 이다.

증명. $b = ak, c = bl$ 을 만족시키는 자연수 k, l 이 존재한다. 그러면 $c = (ak)l = a(kl)$ 이고 kl 은 자연수이므로 $a \mid c$ 이다. \square

정리 2. 10)

$p \mid ab$ 이고 $p \nmid a$ 이면 $p \mid b$ 이다.

증명. 정리 2. 6로부터 당연하다. \square

정리 2. 11)

소수 $p, q (p \neq q)$, 자연수 a 에 대해

$$p \mid a \text{ \& } q \mid a \iff pq \mid a$$

이다.

증명. (\Leftarrow) 정리 2. 9로부터 당연하다. (\Rightarrow) 정리 2. 6로부터 당연하다. \square

정리 2. 12)

$ab \mid c$ 이면 $a \mid c$ 이고 $b \mid c$ 이다.

증명. $c=(ab)k$ 인 자연수 k 가 존재하며 이를 $c = a(bk)$ 꼴로 다시 쓸 수 있다. 따라서 $a \mid c$ 이다. 마찬가지로 $b \mid c$ 이다. \square

정리 2. 13)

세 자리의 자연수 \overline{abc} 에 대해

$$(1) 2 \mid \overline{abc} \iff 2 \mid c$$

$$(2) 5 \mid \overline{abc} \iff 5 \mid c$$

$$(3) 4 \mid \overline{abc} \iff 4 \mid \overline{bc}$$

$$(4) 25 \mid \overline{abc} \iff 25 \mid \overline{bc}$$

이다.

증명. (1) $2 \mid 100a + 10b$ 이므로 정리 2.7, 정리 2.8에 의해

$$2 \mid \overline{abc} \iff 2 \mid 100a + 10b + c \iff 2 \mid c$$

이다. (2)도 마찬가지로 증명할 수 있다. (3) $4 \mid 100a$ 이므로 정리 2.7, 정리 2.8에 의해

$$4 \mid \overline{abc} \iff 4 \mid 100a + 10b + c \iff 4 \mid 10b + c$$

이다. (4)도 마찬가지로 증명할 수 있다. \square

정리 2. 14)

일반적으로 $n + 1$ 자리의 자연수 $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ 에 대해, 자연수 k 가 $k \leq n$ 을 만족시킬 때

$$\begin{aligned} 2^k \mid \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &\iff 2^k \mid \overline{a_{k-1} \cdots a_1 a_0} \\ 5^k \mid \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &\iff 5^k \mid \overline{a_{k-1} \cdots a_1 a_0} \end{aligned}$$

이다.

증명. 증명생략. □

정리 2. 15)

네 자리의 자연수 \overline{abcd} 에 대해

- (1) $3 \mid \overline{abcd} \iff 3 \mid a + b + c + d$
- (2) $9 \mid \overline{abcd} \iff 9 \mid a + b + c + d$
- (3) $27 \mid \overline{abcd} \not\iff 27 \mid a + b + c + d$

증명. (1) $3 \mid 999a + 99b + 9c$ 이므로 정리 2.7, 정리 2.8에 의해

$$3 \mid \overline{abcd} \iff 3 \mid 1000a + 100b + 10c + d \iff 3 \mid a + b + c + d$$

이다. 마찬가지로 (2) 도 성립한다. (3) $\overline{abcd} = 9945$ 이면 $27 \nmid 9945$ 이고 $27 \mid 9 + 9 + 4 + 5$ 이다. □

일반적으로 자연수 n 에 대해서 n 자리의 자연수에 대해서도 정리 2. 15에 해당하는 정리가 성립한다(cf. p33, ④).

3 절댓값에 관한 문제

정리 3. 1) 절댓값기호

실수 a 에 대해

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

정리 3. 2)

실수 a 에 대해 $|-a| = |a|$ 이다.

증명. $a > 0$ ($\therefore -a < 0$) 이면 $|-a| = -(-a) = a = |a|$. $a = 0$ 이면 $|-a| = |-0| = |0| = |a|$. $a < 0$ ($\therefore -a > 0$) 이면 $|-a| = -a = |a|$. \square

정리 3. 3)

실수 a 에 대해

- (1) $|a| = a \iff a \geq 0$,
- (2) $|a| = -a \iff a \leq 0$.

증명. $(\Rightarrow) |a| = a$ 라고 가정하자. $a < 0$ 이면 $-a = a$ 이고, 따라서 $a = 0$, 모순. 따라서 $|a| = a$ 이면서 $a < 0$ 일 수 없다. 즉 $a \geq 0$ 이어야 한다. (\Leftarrow) 정의 3. 1로부터 당연하다.

(2) 정리 3. 2, 정리 3. 3 (1)에 의해

$$\begin{aligned} |a| = -a & \stackrel{\text{정리3.2}}{\iff} |-a| = -a \\ & \stackrel{\text{정리3.3(1)}}{\iff} -a \geq 0 \\ & \iff a \leq 0 \end{aligned}$$

\square

정리 3. 4)

실수 $a, a_i (1 \leq i \leq n)$ 에 대해

- (1) $|a| \geq 0$.
- (2) $|a| = 0 \iff a = 0$.
- (3) $|a_1| + \cdots + |a_n| = 0 \iff a_1 = 0 \ \& \ \cdots \ \& \ a_n = 0$.

증명. 정의 3. 1로부터 당연하다.

□

정리 3. 5) 절댓값의 곱

실수 a, b 에 대해 $|a| \cdot |b| = |ab|$ 가 성립한다.

증명. i) a 혹은 b 가 0인 경우 ; LHS = RHS

ii) $a > 0$ & $b > 0$; LHS = ab = RHS

iii) $a > 0$ & $b < 0$; LHS = $a(-b) = -ab$ = RHS

iv) $a < 0$ & $b > 0$; LHS = $(-a)b = -ab$ = RHS

v) $a < 0$ & $b < 0$; LHS = $(-a)(-b) = ab$ = RHS

□

정리 3. 6) 절댓값의 합, 삼각부등식 (Triangular inequality)

실수 a, b 에 대해

$$(1) |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$(2) |a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0.$$

증명. (1) i) a 혹은 b 가 0인 경우 ; 일반성을 잃지 않고 $b = 0$ 이라고 하자. 그러면 LHS = $|a + 0| = |a| = |a| + 0 =$ RHS. ii) $a > 0, b > 0$ 인 경우 ; LHS = $a + b =$ RHS. iii) $a < 0, b < 0$ 인 경우 ; LHS = $-(a + b) = (-a) + (-b) =$ RHS. iv) a, b 중 하나는 양수, 하나는 음수인 경우 ; 일반성을 잃지 않고 $a > 0, b < 0$ 이라고 하자. $|a| = |b|$ 이면, LHS = $|0| = 0 < a - b =$ RHS. 이제 $|a| \neq |b|$ 인 경우를 고려하자. 일반성을 잃지 않고 $|a| > |b|$ 라고 가정할 수 있다. 즉 $a + b > 0$. 따라서 LHS = $a + b < a - b =$ RHS.

(2) (1)의 증명과정으로부터 당연하다.

□

정리 3. 7) 수직선 상에서의 거리

수직선 상의 두 점 A, B 의 좌표가 각각 a, b 일 때, A 와 B 사이의 거리인 $d(A, B)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$d(A, B) = |a - b|.$$

정리 3. 8)

수직선 위의 세 점 A, B, C 에 대해 다음이 성립한다.

(1) $d(A, B) = d(B, A)$

(2) $d(A, B) + d(B, C) \leq d(A, C)$.

즉, 실수 a, b, c 에 대해

(1) $|a - b| = |b - a|$

(2) $|a - b| + |b - c| \leq |a - c|$

가 성립한다.

증명. 각각 정리 3. 2와 정리 3. 6로부터 당연하다.

□

정리 3. 9) 부분분수 (Partial Fraction)

실수 a, b , 정수 n 에 대해 ($a \neq b, n \neq 1, n \neq 0$)

(1) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(2) $\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

가 성립한다.

4 미지수가 1개인 일차방정식과 부등식

정의 4. 1) 일차방정식과 일차부등식

실수 $a \neq 0, b$ 에 대해 $ax + b = 0$ 꼴의 등식을 일차방정식이라고 한다. 또 $ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$ 꼴의 부등식을 일차부등식이라고 한다.

정리 4. 2) $ax + b = 0$ 꼴의 등식의 풀이

a, b 가 실수일때,

- i) $a \neq 0$ 이면 $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$ 이다.
- ii) $a = 0, b \neq 0$ 이면 근이 존재하지 않는다(불능不能). 즉, 어떤 실수 x 도 위 등식을 만족시키지 않는다.
- iii) $a = 0, b = 0$ 이면 근이 무수히 많다(부정不定). 즉, 모든 실수 x 에 대해서 위 등식을 만족시킨다.

공리 4. 3)

실수는 ‘ $<$ ’로 표기하는 이항관계를 가지며 이를 부등호라고 한다.

- (1) 실수 a, b 에 대해 $a < b$ 이거나 $a = b$ 이거나 $a > b$ 이다.
- (2) 실수 a, b, c 에 대해 $a < b, b < c$ 이면 $a < c$ 이다.

공리 4. 4)

실수 a, b, c 에 대해

- (1) $a + c < b + c$ 이다.
- (2) $c > 0$ 이면 $ac < bc$ 이다.
- (3) $c < 0$ 이면 $ac > bc$ 이다.

공리란, 증명할 필요가 없는 문장으로서, 다른 명제(정리)를 증명하는 데 있어 기초가 되는 원리이다. 위에 두 공리에 적힌 내용들을 증명하는 것은 불가능하다. 하지만 실수를 구성할 때에 위의 공리들을 가지고 실수를 정의하기 때문에 참인 명제라고 볼 수 있다.

5 미지수가 2개인 일차연립방정식 및 응용

정의 5. 1) 다항식

(1) 음이 아닌 정수 n 과 실수 a_i ($1 \leq i \leq n$), ($a_n \neq 0$)에 대해서

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

꼴의 식을 ‘ x 에 대한 다항식’이라고 한다.

(2) 음이 아닌 정수 m, n 과 실수 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, a_{mn} \neq 0$)에 대해서

$$\begin{aligned} & a_{mn} x^m y^n + a_{m,n-1} x^m y^{n-1} + \cdots + a_{m1} x^m y + a_{m0} x^m \\ & + a_{m-1,n} x^{m-1} y^n + a_{m-1,n-1} x^{m-1} y^{n-1} + \cdots + a_{m-1,1} x^{m-1} y + a_{m-1,0} x^{m-1} \\ & \vdots \\ & a_{0n} y^n + a_{0,n-1} y^{n-1} + \cdots + a_{01} y + a_{00} \end{aligned}$$

꼴의 식을 ‘ x 와 y 에 대한 다항식’이라고 한다. 예를 들어 $x^2 + x + 2$ 는 x 에 대한 다항식이고 $2x^3 y^2 + x^3 y^2 - 3x^2 y^2 + x^2 + 2y - 1$ 은 x, y 에 대한 다항식이다.

(3) (1)과 (2)의 정의에서, $a_i x^i$ 혹은 $a_{ij} x^i y^j$ 각각을 항이라고 한다. 또 a_i 혹은 a_{ij} 들을 계수라고 한다. 그리고 (1)에서 n 을 차수라고 하고, (2)에서 m 을 ‘ x 에 대한 차수’, n 을 ‘ y 에 대한 차수’라고 한다. $a_n x^n$ 혹은 $a_{mn} x^m y^n$ 을 최고차항이라고 하고, a_0, a_{00} 를 상수항이라고 한다. 또 항이 한 개인 다항식을 단항식이라고 부른다.

(4) 마찬가지로 세 개 이상의 미지수에 대해서도 다항식을 정의할 수 있다.

정의 5. 2) 연립방정식

n 개의 미지수의 다항식으로 만들어지는 두 개 이상의 방정식에 대해 최고차수가 m 이면 이 일련의 식들을 일컬어 ‘ n 원 m 차 연립방정식’이라고 한다. 예를 들어

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

은 x, y 에 대한 이원일차연립방정식이고

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 9 \end{cases}$$

은 x, y, z 에 대한 삼원일차연립방정식이다.

정리 5. 3) 이원일차연립방정식

$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ 인 이원일차연립방정식

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

은 다음과 같이 풀어낼 수 있다.

i) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (i.e. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$)

$b_2 \times (1) - b_1 \times (2)$ 를 계산하면 $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$ 이다. 이때 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 이므로

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

이다. 마찬가지로 $a_1 \times (2) - a_2 \times (1)$ 를 계산하면 $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$ 이다. 이때 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 이므로

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

이다.

ii) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (i.e. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$)

$b_2 \times (1) - b_1 \times (2)$ 를 계산하면

$$0 \cdot x = b_2c_1 - b_1c_2 \quad (3)$$

이다.

\neg) $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$ (i.e. $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$) 이면, 임의의 실수 x 에 대해서 y 를 (1) 을 만족시키는 실수인 $y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$ 라고 하면 이러한 x, y 는 (2) 도 만족시킨다 ;

$$\begin{aligned} a_2x + b_2 \frac{c_1 - a_1x}{b_1} &= a_2x + \frac{b_2}{b_1}c_1 - \frac{b_2}{b_1}a_1x \\ &= a_2x + \frac{c_2}{c_1}c_1 - \frac{a_2}{a_1}a_1x \\ &= c_2. \end{aligned}$$

따라서 연립방정식의 해는 무한히 많다 (부정不定).

ㄴ) $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ (i.e. $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$) 이면 (3)의 해가 없으므로 연립방정식의 해도 존재하지 않는다(불능不能).

정리 5. 4) 이원연립방정식의 기하학적 해석

$f(x, y)$, $g(x, y)$ 가 x, y 에 대한 다항식일 때, 연립방정식

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

의 해의 집합을 $R = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0, g(x, y) = 0\}$ 은, xy 평면 상의 두 그래프 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 의 교집합과 같다.

증명. $F = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $G = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ 라고 하면, $F \cap G = R$ 이다. \square

즉 연립방정식이라는 ‘대수적인’ 문제를 두 도형의 교점을 찾는 ‘기하학적’ 문제로 바꿀 수 있다. 예를 들어, 다음과 같은 이원이차연립방정식이 제시되어 있을 때

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

(즉 $f(x, y) = y - x^2$, $g(x, y) = y - x - 2$ 이다.) 이 방정식의 해의 집합인 $\{(-1, 2), (2, 4)\}$ 은 두 그래프 $F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ 와 $G = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$ 의 교집합과 같다. (그림. 1)

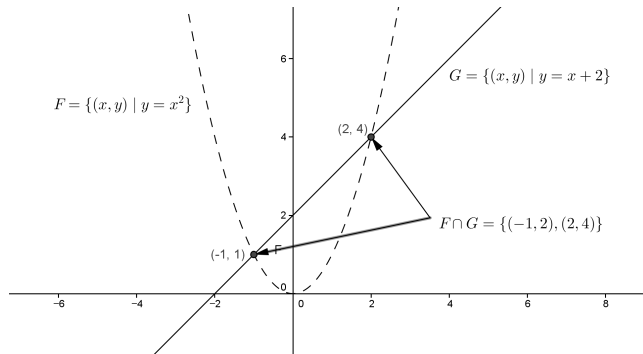


그림. 1: 연립방정식 $y = x + 1$, $y = x^2$ 의 기하학적 해석

6 정식의 계산

공리 6. 1)

실수 a, b 에 대해

$$(1) \ a + b = b + a$$

$$(2) \ (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(3) \ ab = ba$$

$$(4) \ (ab)c = a(bc)$$

$$(5) \ a(b + c) = ab + ac$$

가 성립한다. 공리 4. 3, 4와 마찬가지로 실수를 정의할 때 사용되는 가정이므로 증명될 수는 없다. 따라서 공리로 치부하겠다.

정리 6. 2)

다항식 A, B, C 에 대해

$$(1) \ A + B = B + A$$

$$(2) \ (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(3) \ AB = BA$$

$$(4) \ (AB)C = A(BC)$$

$$(5) \ A(B + C) = AB + AC$$

가 성립한다.

증명. 다항식(1)에서 미지수에는 실수가 대입되므로 다항식 자체도 하나의 실수라고 생각할 수 있다. 따라서 공리 5. 1에 의해 성립한다. \square

정리 6. 3)

실수 a, b, c, d 에 대해서

$$(1) \ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$(3) (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$(4) (a_1 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_2a_n + \cdots + a_{n-1}a_n)$$

정의 6. 4) 파스칼Pascal의 삼각형 (혹은 양휘揚輝의 삼각형)

다음과 같이, 0이 아닌 정수 n 에 대해, n 행에 $(n+1)$ 개의 숫자를 적되 첫 숫자와 마지막 숫자를 1로, $k(1 < k < n+1)$ 번째 숫자를 $n-1$ 행의 $(k-1)$ 번째 숫자와 k 번째 숫자의 합으로 정할 때, 이 숫자들의 삼각형을 파스칼Pascal의 삼각형 혹은 양휘揚輝의 삼각형이라고 부른다.

이때 n 행의 k 번째 숫자를 $\binom{n}{k}$ 로 표기한다($0 \leq k \leq n$). 따라서

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

이다(그림. 2).

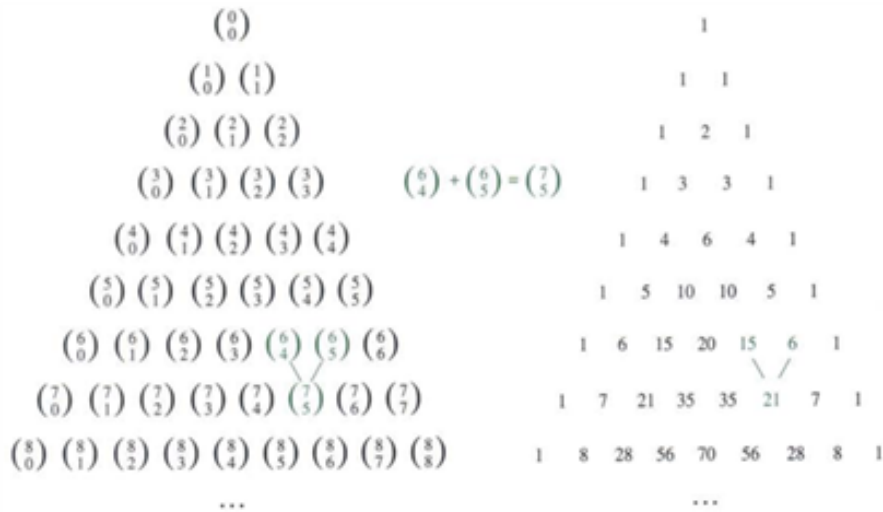


그림. 2: 파스칼의 삼각형

정의 6. 5) 조합

${}_nC_k$ 를 $k=0$ 이거나 $k=n$ 인 경우 1로 정의하고 $k \neq 0, n$ 인 경우 ‘1, 2, ..., n 의 n 개의 숫자 중 k 개를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수’로 정의하자.

예를 들어, 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중 2개를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수는 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)의 6가지이므로, ${}_4C_2 = 6$ 이다.

정리 6. 6)

${}_nC_k = \binom{n}{k}$ 이다.

증명. 1, 2, 3, \dots , n 의 n 개의 자연수 중 k 개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수는, $n-1$ 개의 자연수 중 k 개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수에 $n-1$ 개의 자연수 중 $k-1$ 개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑은 후 n 을 추가하는 경우의 수를 더한 값과 같다. 즉

$${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k = {}_nC_k$$

이다. 또한 ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$ 이므로 $\binom{n}{k}$ 와 ${}_nC_k$ 의 정의는 완전히 같다. 따라서 $\binom{n}{k} = {}_nC_k$ 이다. \square

정리 6. 7) 이항정리 (Binomial Theorem)

실수 a, b 와 음이 아닌 정수 n 에 대해

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= \binom{0}{0}a^0b^0 \\ (a+b)^1 &= \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 \\ (a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 \\ (a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 \\ &\vdots \\ (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n \end{aligned}$$

증명. $(a+b)^n$ 의 전개식의 각 항의 a, b 에 대한 차수는 n 이다. 즉 $(a+b)^n$ 의 전개식의 각 항은 a^kb^{n-k} 로 표현될 수 있다. 또 항 a^kb^{n-k} 이 나타나는 횟수는, 총 n 번 중 k 번이 순서에 상관없이 선택되는 경우의 수인 ${}_nC_k$ 이다. \square

정의 6. 8) 이항전개와 이항계수

정리 6. 7에서와 마찬가지로 항이 두 개인 식의 거듭제곱을 전개하는 것을 이항전개라고 하고, 이때 나타나는 계수들인 $\binom{n}{k}$ 를 이항계수라고 한다.

정의 6. 9)

두 자연수 A, B 에 대해서 $A = BQ + R (0 \leq R < B)$ 인 자연수 Q, R 이 존재할 때 Q 를 몫 (**Quotient**), R 을 나머지 (**Remainder**)라고 부른다. A, B 는 각각 피제수, 제수라고 불린다.

정리 6. 10)

정리 6. 9의 Q 와 R 은 반드시 존재하며 또 유일하게 존재한다.

증명. 증명생략. □

정의 6. 11)

두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대해서 $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ ($R(x)$ 의 차수 $< g(x)$ 의 차수)인 다항식 $Q(x), R(x)$ 이 존재할 때 $Q(x)$ 를 몫 (**Quotient**), $R(x)$ 을 나머지 (**Remainder**)라고 부른다. $f(x), g(x)$ 는 각각 피제수, 제수라고 불린다.

정리 6. 12)

정리 6. 11의 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 은 반드시 존재하며 또 유일하게 존재한다.

증명. 증명생략. □

정리 6. 13) 나머지 정리

(1) $f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$ 이다.

(2) $f(x)$ 를 $ax + b (a \neq 0)$ 로 나눈 나머지는 $f(-\frac{b}{a})$ 이다.

증명. (1) $f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x), R(x)$ 라고 하자. 그러면 $f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$ 로 쓸 수 있다. 이때 $R(x)$ 의 차수는 1차보다 작아야 하므로 상수이다. 따라서 $R(x) = R$ 로 쓰자. 그러면

$$f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

이다. 양변에 $x = \alpha$ 를 대입하면 위의 결과를 얻는다. (2) 또한 같은 방법으로 증명할 수 있다. □

정리 6. 14) 인수정리

$$(x - \alpha) \mid f(x) \iff f(\alpha) = 0.$$

증명. 정리 6. 13의 증명에서와 마찬가지로 $f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$ 이라고 하면

$$(x - \alpha) \mid f(x) \iff R = 0 \iff f(\alpha) = 0.$$

□

7 인수분해 (1)

정의 7. 1) 인수분해

다항식 $f(x)$ 에 대해서 $f(x)$ 를 두 개 이상의 다항식의 곱 (e.g. $f(x) = g(x)h(x)$)
혹은 $f(x) = g(x)h(x)k(x), \dots$) 으로 변형시키는 과정을 **인수분해** 라고 한다. 반
대로 주어진 두 개 이상의 다항식의 곱을 합의 형태로 풀어내는 것을 **전개** 라고
한다.

정리 7. 2) 인수분해 공식

실수 a, b, c, d, x 에 대해 다음 식들이 성립한다.

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(4) (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$(5) (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$(6) (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$(7) x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = (x - \frac{1}{x})^2 + 2$$

$$(8) (x + \frac{1}{x})^2 = (x - \frac{1}{x})^2 + 4$$

$$(9) (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(10) (x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$(11) (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(12) (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$(13) (x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$(14) (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$(15) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$(16) a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$(17) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(18) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$(19) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(20) a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$(21) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(22) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(23) (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$* a+b+c=0 \text{ 이면 } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$* a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$(24) a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

증명. 분배법칙을 사용하여 전개해보면 모든 식이 성립한다는 것을 확인할 수 있다. \square

정리 7. 3) cf. 예제 04(p. 68)

실수 $a, b, x_i (1 \leq i \leq n)$, 자연수 n, k 에 대해

$$(1) a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(2) x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1)$$

$$(3) a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

$$(4) x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + x^{2k-2} - \dots - x + 1)$$

증명. 역시 분배법칙을 이용해 전개하면 된다. (2), (4)는 각각 (1), (3)으로부터 바로 나온다. \square

8 분수식의 계산

정리 8. 1) 유리식과 분수식

다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대해

- (1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 대수식을 유리식이라고 한다.
- (2) $g(x)$ 의 차수가 일차 이상이면 분수식이라고 한다.
- (3) 유리식의 분모를 0으로 만드는 x 의 값들은 생각하지 않는다.
- (4) 두 변수 이상의 다항식에 대해서도 비슷한 정의를 내릴 수 있다.

정리 8. 2)

두 유리식 $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ 에 대해

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \text{ \& } B \neq 0 \text{ \& } D \neq 0$$

이다.

증명.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = \frac{C}{D} &\iff \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ \& } B \neq 0 \text{ \& } D \neq 0 \\ &\iff AD = BC \text{ \& } B \neq 0 \text{ \& } D \neq 0. \end{aligned}$$

□

9 정수의 나누어떨어짐

정의 9. 1) 정수의 나누어떨어짐

두 정수 a, b 에 대해 $b = ak$ 를 만족시키는 정수 k 가 존재하면 b 는 a 로 나누어떨어진다고 말하고, 이를 기호로 $a \mid b$ 라고 한다.

정리 9. 2)

- (1) 0은 임의의 정수에 의해 나누어떨어진다. 즉 a 가 정수이면 $a \mid 0$ 이다.
- (2) 1과 -1 은 임의의 정수를 나눈다. 즉 b 가 정수이면 $1 \mid b$ 이고 $-1 \mid b$ 이다.
- (3) $a \mid b$ 이면 $a \mid -b$, $-a \mid b$, $-a \mid -b$ 이다.

증명. 정의 9. 1로부터 당연하다. □

2단원에서도 똑같은 기호를 도입했었다. 달라진 것은, 자연수에 대한 나누어떨어짐을, 정수에 대한 나누어떨어짐으로 확장했다는 것이다. 2단원에서 증명했던 각종 정리들(e.g. 정리 2. 7, 정리 2. 8, 정리 2. 10, 정리 2. 9 정리 2. 12)에 ‘자연수’ 대신 ‘정수’로 바꾸어도 여전히 성립하게 된다. 물론 정리 2. 8에서 $b > c$ 의 조건은 필요없게 된다.

정리 9. 3)

정수 a, b_i, x_i ($1 \leq i \leq n$)에 대해 $a \mid b_i$ ($1 \leq i \leq n$)를 만족할 때,

$$a \mid b_1x_1 + \cdots b_nx_n$$

이 성립한다.

증명. $b_i = ak_i$ ($1 \leq i \leq n$)인 정수 k_i ($1 \leq i \leq n$)들이 존재한다. 그러면 $b_1x_1 + \cdots b_nx_n = ak_1x_1 + \cdots + ak_nx_n = a(k_1x_1 + \cdots + k_nx_n)$ 이고 이때 $k_1x_1 + \cdots + k_nx_n$ 은 정수이다. □

정리 9. 4)

$a \mid b$ 이고 $b \neq 0$ 이면 $|a| \leq |b|$ 이다.

증명. $b = ak$ 이고 k 는 0이 아닌 정수이다. 절댓값을 씌우면 정리 3. 5에 의해 $|b| = |ak| = |a||k|$ 이다. $|k| \geq 1$ 이므로 $|a| \leq |b|$ 이다. □

정리 9. 5)

$a \mid b$ 이고 $b \mid a$ 이면 $|a| = |b|$ 이다.

증명. 둘 중 하나가 0이라고 가정해보자. 일반성을 잃지 않고 $a = 0$ 이라고 가정하자. 그러면 $b = ak = 0 \cdot k = 0$ 인 k 가 존재해야 하므로 $b = 0$ 이다. 따라서 주어진 식이 성립한다. 이제 $a \neq 0$ & $b \neq 0$ 이라고 가정하자. 정리 9. 4에 의해 $|a| \leq |b|$ 이고 $|b| \leq |a|$ 이다. 따라서 $|a| = |b|$. \square

정의 9. 6) 팩토리얼 (Factorial)

자연수 n 에 대해 $n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$ 이라고 정의하자. $n = 0$ 의 경우 $0! = 1$ 로 약속한다.

정리 9. 7) 이항계수의 계산

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)!k!}.$$

증명. $k = 0$ 이면

$$\frac{n!}{(n - 0)!0!} = 1 = \binom{n}{0}$$

이다. $k = n$ 이면

$$\frac{n!}{(n - n)!n!} = 1 = \binom{n}{n}$$

이다. $0 < k < n$ 이라고 가정하자. $\binom{n}{k} = {}_n C_k$ 는 1부터 n 까지의 자연수 중 k 개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수이다. k 개의 자연수를 순서를 고려하여 뽑는 경우의 수는 $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1)$ 이다. 따라서 $\binom{n}{k}$ 는 이 숫자를 $k!$ 로 나뉘야 한다. 즉

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1) \cdot (n - k)!}{k! \cdot (n - k)!} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!k!} \end{aligned}$$

이다. \square

정리 9. 8)

n 개의 연속하는 자연수의 곱은 반드시 $n!$ 로 나누어 떨어진다. 즉 m 이 자연수이면

$$n! \mid m(m+1) \cdots (m+n-1).$$

Motivation : 임의의 자연수 n 에 대해 $6 \mid n(n+1)(n+2)$ 이다.

n 은 짝수이거나 홀수이다. n 이 짝수이면 당연히 $2 \mid n(n+1)(n+2)$ 이다. n 이 홀수이면 $2 \mid n+1$ 이므로 역시 $2 \mid n(n+1)(n+2)$ 이다. 따라서 모든 경우에 $2 \mid n(n+1)(n+2)$ 가 성립한다.

n 은 $3k, 3k+1, 3k+2$ 꼴 중 하나이다. $n = 3k$ 이면 당연히 $3 \mid n(n+1)(n+2)$ 이다. $n = 3k+1$ 이면 $3 \mid n+2$ 이므로 역시 $3 \mid n(n+1)(n+2)$ 이다. $n = 3k+2$ 이면 $3 \mid n+1$ 이므로 역시 $3 \mid n(n+1)(n+2)$ 이다. 따라서 모든 경우에 $3 \mid n(n+1)(n+2)$ 가 성립한다.

이제 정리 2. 11에 의해 본 식이 성립한다.

하지만 더 일반적인 경우인 정리 9. 8의 증명에 이 증명방법을 사용할 수는 없다. n 이하의 자연수들 중 소수가 아닌 수들도 있으므로 정리 2. 11를 적용할 수 없기 때문이다.

증명. 이항계수의 정의

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

에서 n 대신에 $m+n-1$ 을, k 대신에 n 을 넣으면

$$\begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix} = \frac{(m+n-1)(m+n-2) \cdots m}{n!}$$

이 된다. 이항계수는 항상 자연수이므로 본 식이 성립한다. □

정리 9. 9) 합성수

소수가 아닌 1보다 큰 자연수를 합성수라고 한다.

정의 9. 10) 최대공약수 (Greatest Common Divisor)

자연수 a_1, \dots, a_n 에 대해 $e \mid a_1, \dots, e \mid a_n$ 를 만족시키는 자연수 e 를 공약수라고 한다. d 가 공약수이고 임의의 공약수 e 에 대해 $e \mid d$ 이면 d 를 최대공약수라고 하고 $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 라고 쓴다. 혹은, 최대공약수를 ‘공약수 중 가장 큰 수’로 정의해도 같은 정의가 된다.

정의 9. 11) 최소공배수 (Least Common Multiple)

자연수 a_1, \dots, a_n 에 대해 $a_1 \mid k, \dots, a_n \mid k$ 를 만족시키는 자연수 k 를 공배수라고 한다. l 가 공배수이고 임의의 공배수 k 에 대해 $l \mid k$ 이면 l 을 최소공배수라고 하고 $l = [a_1, \dots, a_n]$ 라고 쓴다. 혹은, 최소공배수를 ‘공배수 중 가장 작은 수’로 정의해도 같은 정의가 된다.

10 홀수, 짝수 및 간단한 이색문제

정의 10. 1) 짝수와 홀수

모든 자연수는 2로 나누어서 나머지가 0인 수와 나머지가 1인 수로 나눌 수 있다. 나머지가 0인 수를 짝수, 나머지가 1인 수를 홀수라고 한다.

홀수는 일반적으로 $2k - 1 (k = 1, 2, 3, \dots)$, 짝수는 일반적으로 $2k (k = 1, 2, 3, \dots)$ 로 나타낼 수 있다.

정리 10. 2)

- (1) $(-1)^n = 1$ 이면 n 은 짝수이고 $(-1)^n = -1$ 이면 n 은 홀수이다.
- (2) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1}$ 이 0 이면 n 이 짝수이고 1 이면 n 이 홀수이다.

정리 10. 3)

- (1) 홀수 \pm 홀수 = 짝수
- (2) 짝수 \pm 짝수 = 짝수
- (3) 짝수 \pm 홀수 = 홀수
- (4) 홀수 \pm 짝수 = 홀수
- (5) 홀수 \times 홀수 = 홀수
- (6) 짝수 \times 짝수 = 짝수
- (7) 홀수 \times 짝수 = 짝수
- (8) 짝수 \times 홀수 = 짝수

증명. 홀수를 $2k + 1$, 짝수를 $2l$ 로 놓고 식을 전개하면 쉽게 증명할 수 있다. \square

11 1차 부정방정식의 해법

정의 11. 1) 부정방정식

미지수가 n 개 (x_1, x_2, \dots, x_n) 인 다항식 $f(x_1, \dots, x_n)$ 에 대해 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ 꼴의 방정식을 부정방정식이라고 부른다. f 가 k 차 다항식이면 이 부정방정식을 k 차 부정방정식이라고 부른다.

예를 들어 $f(x, y) = x^2 + y - 4$ 이면 $x^2 + y - 4 = 0$ 는 미지수가 두 개인 일차 부정방정식이다.

정의 11. 2) 연립부정식

$m(< n)$ 개의 부정방정식

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

을 일컬어 연립부정식이라고 부른다.

정의 11. 3) 디오판토스 방정식(Diophantine equation)

해가 정수인 부정방정식을 일컬어 디오판토스 방정식이라고 한다. 즉 다항식 $f(x_1, \dots, x_n)$ 에 대해 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ 꼴의 정수해 방정식을 디오판토스 방정식이라고 한다. 또 $f(x_1, \dots, x_n)$ 가 1차이면 일차 디오판토스 방정식이라고 한다.

예를 들어 $x^n + y^n = z^n$, $x^2 - ny^2 = \pm 1$ 는 디오판토스 방정식이지만 일차 디오판토스 방정식은 아니다. 전자의 경우 $n = 2$ 이면 수없이 많은 해가 존재하고 (피타고라스의 수), 3 이상인 경우 해가 존재하지 않는다(페르마의 마지막 정리 Fermat's Last Theorem). 후자의 방정식은 펠방정식 Pell's Equation 이라고 불린다. $ax + by = c$, $ax + by + cz = d$ 등은 일차 디오판토스 방정식이다.

이 단원에서는 해가 자연수인 일차 디오판토스 방정식을 다룬다. 즉 다항식 $ax + by = c$ 이나 $ax + by + cz = d$ 꼴의 방정식을 다룬다.

정리 11. 4) 미지수가 두 개이고 해가 자연수인 일차 디오판토스의 방정식

$ax + by = c$ 꼴의 일차 부정방정식을 생각하자. 계수가 무리수인 경우는 생각하지 않는다. 계수가 일 경우, $Ax + By = C$ (A, B, C 는 정수) 꼴의 새로운 일차 부정방정식으로 변형시킬 수 있다.

이제 계수가 정수인 디오판토스의 방정식 $ax + by = c$, $x > 0$, $y > 0$ 을 생각하자. 일반성을 잃지 않고 $c > 0$ 이라고 가정하자.

(1) $a, b < 0$ 인 경우

두 경우 모두 해가 없다.

(2) $a, b > 0$ 인 경우

$x = \frac{c-by}{a}$ 꼴로 변형해 해가 존재하는지 살핀다.

i) 특수해 (x_0, y_0) 가 존재하지 않는 경우

해가 없다.

ii) 특수해 (x_0, y_0) 가 존재하는 경우

$ax_0 + by = c$ 이므로

$$ax + by = c \iff x = x_0 + m, y = y_0 + n$$

이다 (m, n 은 정수). (\Rightarrow) 의 경우는 당연하고, (\Leftarrow) 의 경우, 대입하여 바로 얻을 수 있다. $x = x_0 + m$, $y = y_0 + n$ 를 원래 식에 대입하면 $am + bn = 0$ 이 되어 $m = -bk$, $n = ak$ 로 놓을 수 있다. 따라서 문제는 $x = x_0 - bk$, $y = y_0 + ak$, $x > 0$, $y > 0$ 로 바뀐다. 그러면 $-\frac{y_0}{a} < k < \frac{x_0}{b}$ 이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 k 의 값은 유한개가 있고 따라서 문제의 해도 유한히 있다.

(3) $ab < 0$ 인 경우

같은 방식으로 하면 해가 무한히 많다.

12 답안 선택의 풀이에 대하여(1)

13 여러가지 문제

정의 13. 1) 가우스기호

임의의 실수 x 에 대해 $n \leq x < n+1$ 를 만족시키는 자연수 n 은 유일하게 존재한다. 실수 x 에 대해 $[x]$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$[x] = \begin{cases} n & (x = n) \\ x - n & (x \neq n) \end{cases}.$$

즉 $[x]$ 란 ‘ x 보다 크지 않은 최대 정수’이다. 예를 들어 $[1] = 1$, $[0] = 0$, $[10] = 10$, $[-4] = -4$, $[1.4] = 1$, $[-3.4] = -4$, $[\pi] = 3$, $[-\frac{1}{2}] = -1$ 등이다.

다음은 $y = [x]$ 그래프이다.

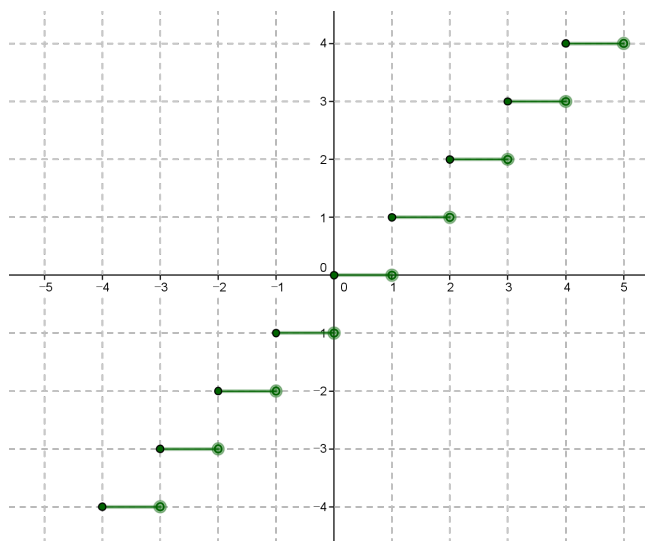


그림. 3: 정의 13.1 $y = [x]$ 의 그래프

정리 13. 2)

가우스기호에 대해 다음이 성립한다.

(1) $x \leq y$ 이면 $[x] \leq [y]$ 이다.

(2) $x \leq y$ 라고 해서 반드시 $[x] < [y]$ 는 아니다.

(3) 일반적으로 $[-x] = -[x]$ 이 성립하지 않는다.

증명. (1) 정의에 의해 $[x] \leq x < [x] + 1$ 이고 $[y] \leq y < [y] + 1$ 이다. 특히, $[x] \leq x \leq y < [y] + 1$ 이다. 즉 $[x] < [y] + 1$ 이다. 그런데 $[x]$ 와 $[y] + 1$ 이 모두 정수이므로 두 정수의 차는 1보다 크거나 같다 ; $([y] + 1) - [x] \geq 1$. 따라서 $[x] \leq [y]$ 이다.

(2) 반례 : $x = 0.2, y = 0.3$ 이면 (2)의 가정이 성립하지만, 결론이 성립하지 않는다.

(3) 반례 : $x = 0.5$ 이면 $[-x] = -1 \neq 0 = -0 = -[x]$ 이다. □

정리 13. 3) (저울문제에 관하여, cf. p141)

세 양수 a, b, c 를 최대한 한 번씩만 사용하여 덧셈 혹은 뺄셈을 했을 때 만들 수 있는 양수의 개수는 최대 13개이다.

증명. 세 실수를 최대한 한 번씩만 이용하여 만들 수 있는 숫자들의 집합은

$$\{ax + by + cz | x, y, z \text{는 각각 } -1, 0, 1 \text{ 중에 하나}\}$$

이다. 즉 다음과 같은 숫자들이다;

-a-b-c	-b-c	a-b-c
-a-b	-b	a-b
-a-b+c	-b+c	a-b+c
-a-c	-c	a-c
-a	0	a
-a+c	c	a+c
-a+b-c	b-c	a+b-c
-a+b	b	a+b
-a+b+c	b+c	a+b+c

위의 수들을 잘 살펴보면, 27개 수 중 0을 제외한 26개의 수들은 각각 x 와 $-x$ 꼴의 짝을 이루고 있다. 즉 두 개의 수들 중 하나는 양수이고 하나는 음수이다. 따라서 양수 전체의 개수는 13개이다. □

14 실수

정의 14. 1) 유리수

정의 2. 1에서 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 를 각각 자연수(自然數, natural number)의 집합, 정수(整數, integer)의 집합이라고 정의했다. 이제 집합

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

을 유리수의 집합이라고 정의하고 유리수(有理數, rational number)를 \mathbb{Q} 의 원소라고 정의하자. 즉

$$x \text{는 유리수이다.} \iff x \in \mathbb{Q}$$

이다.

정의 14. 2) 유한소수와 무한소수, 순환소수와 비순환소수

임의의 실수 x 가 십진법으로 다음과 같이 표현되었다고 하자.

$$x = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots .$$

즉 a_i 는 10^i 자릿수를, b_j 는 소수점 j 번째 자리수를 나타낸다. 어떤 자연수 N 에 대해 $j \geq N$ 이면 $b_j = 0$ 일 때, x 를 유한소수라고 부른다. 그렇지 않은 경우, 즉 그러한 자연수 N 이 존재하지 않을 때 x 를 무한소수라고 부른다.

x 가 무한소수라고 가정하자. b_i 들이 일정한 규칙으로 반복될 때 x 를 순환소수라고 한다. 즉 어떤 자연수 k 와 m 가 존재해서 모든 자연수 i 와 $0 \leq j < k$ 를 만족하는 j 에 대해 $b_{m+(ik+j)} = b_{m+j}$ 일 때 x 를 순환소수라고 부른다. 예를 들어 $3.214141414\cdots$ 는 순환소수이다. 모든 자연수 i 와 $j(= 0, 1)$ 에 대해 $b_{1+(2i+j)} = b_{1+j}$ 이기 때문이다.

x 가 무한소수이면서 순환소수가 아니면 비순환소수라고 부른다.

정리 14. 3) 유한소수와 순환소수는 유리수이다.

증명. 유한소수가 유리수인 것은 당연하다. x 가 순환소수라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} x &= a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_k b_{k+1} \cdots \\ 10^{k-1} x &= a_n a_{n-1} \cdots a_0 b_1 b_2 \cdots b_{k-1} . b_k b_{k+1} \cdots \\ 10^{2k-1} x &= a_n a_{n-1} \cdots a_0 b_1 b_2 \cdots b_{2k-1} . b_{2k} b_{2k+1} \cdots \end{aligned}$$

따라서 $10^{2k-1}x - 10^{k-1}x$ 은 정수이다. 즉

$$[10^{2k-1} - 10^{k-1}]x = N$$

이고 (N 은 정수), 따라서

$$x = \frac{N}{10^{2k-1} - 10^{k-1}}$$

는 유리수이다. □

여기서 증명하지는 않겠지만, 모든 유리수는 유한소수이거나 순환소수이다. 따라서 유리수의 집합 \mathbb{Q} 는 유한소수의 집합과 순환소수의 집합의 합집합과 정확히 일치한다.

정의 14. 4) 무리수와 실수

x 가 비순환소수이면 x 를 무리수(無理數, **irrational number**)라고 부른다. 무리수와 유리수를 합쳐서 실수(實數, **real number**)라고 부른다.

정리 14. 5) 유리수와 무리수의 조밀성

유리수와 무리수는 실수 내에서 조밀하다. 즉, 임의의 서로 다른 두 실수 a 와 b 에 대해 ($a < b$) $a < x < b$ 를 만족하는 유리수 x 가 존재하고, $a < y < b$ 를 만족하는 무리수 y 도 존재한다.

증명. 증명은 생략한다. p153-154의 예제 3, 4에 이 정리보다는 약한 정리가 증명되어 있다. □

사실 ‘실수가 무엇이나’하는 문제는 생각보다 상당히 복잡하고 어려운 문제이다. 위에서는 ‘모든 숫자는 10진법으로 표현될 수 있다’는 가정 하에 유리수와 무리수를 분류했을 뿐이다. 하지만 그 ‘숫자’라는 게 무엇이나고 물으면 답하기가 쉽지 않다.

실제로 실수 집합 \mathbb{R} 이란 덧셈과 곱셈의 두 가지 이항연산과 부등호라는 이항관계를 가지고 있는 집합으로서, 몇 가지 공리를 만족시키는 집합으로 정의된다.

그 중 몇 가지 공리는 이미 언급했다. 덧셈과 곱셈에 관해서는 공리 6. 1에서 언급했다. 차례로 ‘덧셈의 교환법칙’, ‘덧셈의 결합법칙’, ‘곱셈의 교환법칙’, ‘곱셈의 결합법칙’, ‘덧셈과 곱셈의 분배법칙’이라고 부른다.

부등호에 대해서는 공리 4. 3, 4. 4에 대해서 언급한 바 있다.

정리 14. 6)

a, b, c, d 가 유리수이고 α 가 무리수일 때

$$(1) \ a + b\alpha = 0 \iff a = 0 \ \& \ b = 0$$

$$(2) \ a + b\alpha = c + d\alpha \iff a = c \ \& \ b = d$$

증명. 각각 p153-154의 예제 5, 6이다. (2)는 (1)로부터 바로 도출할 수 있다. \square

정리 14. 7)

a, b, c, d 가 유리수이고 \sqrt{b}, \sqrt{d} 가 무리수일 때

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \iff a = c \ \& \ b = d$$

이다.

증명. 154의 예제 7이다. \square

15 거듭제곱근식과 지수

정의 15. 1) 자연수 지수

실수 a 와 자연수 n 에 대해 a^n 을

$$\begin{aligned}a^1 &= a \\a^2 &= a \times a \\a^3 &= a \times a \times a \\&\vdots\end{aligned}$$

등으로 정의한다.

정의 15. 2) 정수 지수

실수 a 와 정수 n 에 대해 a^n 을 다음과 같이 정의한다. 만약 $n > 0$ 이면 정의 15.1에서처럼 정의한다. 만약 $n = 0$ 이면 $a^n = a^0 = 1$ 로 정의한다. 만약 $n < 0$ 이면 $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ 로 정의한다. 세 번째 경우 $-n > 0$ 이므로 a^{-n} 가 정의되는 데는 문제가 없다는 점에 주목하자.

정리 15. 3) 지수법칙 (정수)

실수 a, b , 정수 m, n 에 대해

- (1) $a^m b^n = a^{m+n}$
- (2) $(a^m)^n = a^{mn}$
- (3) $(ab)^m = a^m b^m$
- (4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} (b \neq 0)$

증명. 증명은 생략한다. m, n 이 각각 자연수일 때 네 법칙을 먼저 증명한 후 이를 토대로 정수 지수에 대해서 다시 증명하면 된다. \square

정의 15. 4) 거듭제곱근

a 가 실수이고 n 이 자연수일 때 $x^n = a$ 를 만족시키는 실수 x 를 a 의 n 제곱근이라고 부른다.

정리 15. 5) 거듭제곱근의 존재

정의 15. 4에서

(1) $a > 0$ 이면 x 는 유일하게 하나 존재한다.

(2) $a < 0$ 이고 n 이 짝수이면 x 는 존재하지 않는다.

(3) $a < 0$ 이고 n 이 홀수이면 x 는 유일하게 하나 존재한다.

증명. (2) 는 당연하다. 실수의 짝수승은 음수가 될 수 없기 때문이다. (1) 과 (3) 의 증명은 생략한다. \square

정의 15. 6)

정리 15. 5의 (1) 번의 경우, a 의 n 제곱근을 $\sqrt[n]{a}$ 라고 표기한다.

정의 15. 7) 유리수 지수

양의 실수 x 와 유리수 $t = \frac{m}{n}$ 에 대해 (m, n 는 정수, $n \neq 0$) x^t 를 다음과 같이 정의한다. 만약 $m = 1$ 이면 $x^t = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ 로 정의한다. 일반적으로 m 이 정수이면 $x^t = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ 으로 정의한다.

x 가 음수이면 지수를 정의하기가 어려우므로 생각하지 않는다.

정리 15. 8) 지수법칙 (유리수)

양의 실수 a, b , 유리수 s, t 에 대해

(1) $a^s b^t = a^{s+t}$

(2) $(a^s)^t = a^{st}$

(3) $(ab)^s = a^s b^s$

(4) $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s} (b \neq 0)$

증명. 정리 15. 3를 사용하여 약간의 계산을 거치면 어렵지 않게 증명할 수 있다. \square

정리 15. 9) 실수 지수

고등학교 과정의 극한 개념을 이용하면 실수 지수도 정의할 수 있다. 예를 들어, $3^{\sqrt{2}}$ 를 정의해보자. $\sqrt{2} = 1.414213 \dots$ 이다. 따라서 다음과 같은 수의 열을

생각해보자.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3^1 = 3 \\
 x_2 &= 3^{1.4} = 4.65553672175 \dots \\
 x_3 &= 3^{1.41} = 4.70696500172 \dots \\
 x_4 &= 3^{1.414} = 4.72769503527 \dots \\
 x_5 &= 3^{1.4142} = 4.72873393017 \dots \\
 x_6 &= 3^{1.41421} = 4.72878588091 \dots \\
 x_7 &= 3^{1.414213} = 4.72880146624 \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

위 식들의 우변은 정의 15. 7에 의하여 잘 정의되어 있다는 점에 주목하자. 이 수열 (=수의 열)인 $\{x_n\}$ 은 n 이 증가할수록 일정한 값에 가까워지는 것처럼 보인다. 이 값을 이 수열의 ‘극한’이라고 부른다. 그리고 이 극한값을 $3^{\sqrt{2}}$ 로 정의한다.

정리 15. 10) 지수법칙 (실수)

양의 실수 a, b , 실수 s, t 에 대해

- (1) $a^s b^t = a^{s+t}$
- (2) $(a^s)^t = a^{st}$
- (3) $(ab)^s = a^s b^s$
- (4) $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s} (b \neq 0)$

증명. 정리 15. 8와 극한의 성질을 사용하여 증명할 수 있다.

□