이차방정식의 근과 계수와의 관계

2022년 3월 5일

1 이차방정식의 근과 계수와의 관계

문제 1) 이차방정식 $x^2 - 6x + 5 = 0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차방정식의 두 근을 구하여라.

(2) 두 근의 합을 구하여라.

(3) 두 근의 곱을 구하여라.

(4) $a = 1,\ b = -6,\ c = 5$라고 두었을 때, $-\frac{b}{a}$와 $\frac{c}{a}$의 값을 구하여라.

문제 2) 이차방정식 $2x^2 + 5x + 2 = 0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차방정식의 두 근을 구하여라.

(2) 두 근의 합을 구하여라.

(3) 두 근의 곱을 구하여라.

(4) $a = 2,\ b = 5,\ c = 2$라고 두었을 때, $-\frac{b}{a}$와 $\frac{c}{a}$의 값을 구하여라.

정리 3) 이차방정식의 근과 계수와의 관계
이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$의 두 근을 α, β라고 할 때 다음 식이 성립한다.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

2 증명

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$의 근의 공식은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

이다. 두 근 α, β를

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

로 둘 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{\boxed{\phantom{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (-b) - \sqrt{b^2 - 4ac}}}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

이다. 또한, 합차공식 $[(X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2]$을 활용하면

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\
&= \frac{\boxed{}^2 - \boxed{\phantom{\sqrt{b^2 - 4ac}}}^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

을 얻는다.[1]

[1] 이 증명을 세 번 정도 공책에 써보세요!

답

문제 1)

(1) $x = 1,\ x = 5$

(2) 6

(3) 5

(4) $-\frac{b}{a} = 6,\ \frac{c}{a} = 5$

문제 2)

(1) $x = -\frac{1}{2},\ x = -2$

(2) $-\frac{5}{2}$

(3) 1

(4) $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{2},\ \frac{c}{a} = 1$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{\boxed{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

이다. 또한, 합차공식 $[(X+Y)(X-Y) = X^2 - Y^2]$을 활용하면

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} \\
&= \frac{\boxed{(-b)^2} - \boxed{\sqrt{b^2 - 4ac}^2}}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$