

영석 : 04 일차부등식

May 12, 2015

Contents

1	부등호와 부등식	2
2	일차부등식	4
3	부정과 불능	8

1 부등호와 부등식

정의 1) 부등호와 부등식

$$<, >, \leq, \geq$$

등의 기호를 부등호라고 한다. 또 부등호의 양 옆에 수나 식이 나타나있는 경우 이것을 부등식이라고 한다.

예시 2)

(1)

$$1 < 2$$

$$2x \geq 3$$

$$3(x+4) + 5 > 2x - 2$$

$$x + y > 2$$

$$x^2 > 1$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

등은 모두 부등식이다.

(2)

$$1 < 2$$

는 '1 이 2보다 작다'라고 읽는다. 혹은 '1 이 2 미만이다'라고 읽는다.

$$2 > 1$$

은 '2가 1보다 크다'라고 읽는다. 혹은 '2가 1 초과이다'라고 읽는다.

$$1 \leq 2$$

은 '1 이 2보다 작거나 같다'라고 읽는다. 혹은 '1 이 2 이하이다.'라고 읽는다.

$$2 \geq 1$$

는 '2가 1보다 크거나 같다'라고 읽는다. 혹은 '2가 1 이상이다.'라고 읽는다.

(3) 허수에 관해서는 수의 대소관계를 나타내지 않는다. 예를 들어

$$i < 1$$
$$i^3 + i^2 - 2i \geq 0$$

등의 식은 쓰지 않는다.

부등식은 다음과 같은 성질을 만족한다.

정의 3) 부등식의 성질 1

a, b, c 가 실수이고 $a < b$ 이면

- (1) $a + c < b + c$
- (2) $a - c < b - c$

정의 4) 부등식의 성질 2

a, b, c 가 실수이고 $a < b, c > 0$ 이면

- (1) $ac < bc$
- (2) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

정의 5) 부등식의 성질 3

a, b, c 가 실수이고 $a < b, c < 0$ 이면

- (1) $ac > bc$
- (2) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

정리하면, 부등식의 양 변에 같은 값을 더하거나 빼도 부등호의 방향은 그대로 유지된다. 부등식의 양 변에 같은 값을 곱하거나 나눌 경우, 곱하거나 나누는 수가 양수이면 부등호의 방향이 그대로 유지되고, 곱하거나 나누는 수가 음수이면 부등호의 방향이 바뀐다.

이 결과는 ‘>’이 ‘≤’와 ≥’로 바뀐 경우에도 여전히 비슷하게 성립한다.

예시 6)

(1)

$$1 < 3$$

에서 양변에 2를 더한

$$3 < 5$$

와, 양변에 2를 빼

$$-1 < 1$$

은 모두 성립한다. (부등호의 방향은 바뀌지 않았다.)

(2)

$$1 < 3$$

에서 양변에 2를 곱한

$$2 < 6$$

과, 양변에 2를 나눈

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

는 모두 성립한다. (부등호의 방향은 바뀌지 않았다.)

(3)

$$1 < 3$$

에서 양변에 -2를 곱한

$$-2 > -6$$

과, 양변에 -2를 나눈

$$-\frac{1}{2} > -\frac{3}{2}$$

는 모두 성립한다. (부등호의 방향이 바뀌었다.)

2 일차부등식

정의 7) 일차부등식

정의 3, 4, 5의 결과로 부등식에서도 등식에서와 마찬가지로 이항을 마음대로 할 수 있음을 알 수 있다. 예를 들어

$$4x + 3 < x + 1$$

과 같은 부등식의 경우 양변에 1을 빼어

$$4x + 2 < x$$

를 얻고, 다시 양변에 x 를 빼어

$$3x + 2 < 0$$

를 얻을 수 있다. 이처럼, 이항하여

$$ax + b > 0$$

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \geq 0$$

$$ax + b \leq 0$$

꼴 (a, b 는 실수, $a \neq 0$)로 나타낼 수 있는 부등식을 **일차부등식**이라고 한다. 또 이러한 일차부등식을 만족하는 x 의 범위를 찾는 과정을 ‘일차부등식을 푼다’라고 한다.

문제 8)

다음 중 일차부등식을 찾아보자.

$$x > 1 \quad (1)$$

$$2x \geq x \quad (2)$$

$$x + 1 < x + 2 \quad (3)$$

$$0 \cdot x + 3 > 1 \quad (4)$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad (5)$$

$$3(x + 4) < 2(x + 1) \quad (6)$$

예시 9) 일차방정식의 풀이

(1) 일차방정식

$$2x + 3 > 0$$

를 풀어보자.

양변에서 3을 빼면

$$2x > -3$$

이다. 양변을 2로 나누면

$$x > -\frac{3}{2}$$

이다.

(2) 일차방정식

$$-3x - 5 \geq 0$$

을 풀어보자.

양변에서 5를 더하면

$$-3x \geq 5$$

이다. 양변을 -3 으로 나누면

$$x \leq -\frac{5}{3}$$

이다.

(3) 일차방정식

$$2x + 4 < 3x + 2$$

를 풀어보자.

양변에서 $3x$ 를 빼면

$$-x + 4 < 2$$

이다. 양변에서 4를 빼면

$$-x < -2$$

이다. 양변에 -1 을 곱하면

$$x > 2$$

이다.

문제 10)

다음 일차부등식을 풀어라.

$$x + 4 \leq 0 \quad (1)$$

$$x - \frac{1}{2} < 0 \quad (2)$$

$$2x + 1 > 0 \quad (3)$$

$$3x + 4 \geq 0 \quad (4)$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{4}{3} < 0 \quad (5)$$

$$-x + 7 > 0 \quad (6)$$

$$-2x + 4 \geq 0 \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2}x + 3 < 0 \quad (8)$$

문제 11)

다음 일차부등식을 풀어라.

$$x + 2 \geq 0 \quad (1)$$

$$x - \frac{3}{4} > 0 \quad (2)$$

$$3x + 4 < 0 \quad (3)$$

$$7x + 24 \geq 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{7}{8} > 0 \quad (5)$$

$$-x > 0 \quad (6)$$

$$-5x + 3 \geq 0 \quad (7)$$

$$-\frac{3}{2}x + 6 > 0 \quad (8)$$

문제 12)

다음 일차부등식을 풀어라.

$$2x + 3 \geq x + 2 \quad (1)$$

$$2x - 3 < 3x - 3 \quad (2)$$

$$-3x + 4 \leq x + 3 \quad (3)$$

$$-x + 1 > 2x + 5 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}x + 4 < \frac{3}{2} + 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} > x + 1 \quad (6)$$

$$\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (7)$$

$$2(x + 3) + 4 > 3(x - 1) + 1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}(x + 4) + 1 \geq 2(x - 2) + 2 \quad (9)$$

문제 13)

다음 일차부등식을 풀어라.

$$3x + 1 \geq x + 1 \quad (1)$$

$$2x - 5 < 3x - 6 \quad (2)$$

$$-2x + 1 \leq x - 3 \quad (3)$$

$$-2x + 2 \geq x + 3 \quad (4)$$

$$\frac{3}{2}x + 1 > \frac{1}{2} + 1 \quad (5)$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{2}{3} > 2x + 2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{4}x + 2 > \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} \quad (7)$$

$$x + 4 < 2(x + 3) + 1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{3}(2x + 4) + 2 \leq 3(x - 4) + 2 \quad (9)$$

3 부정과 불능

예시 14)

(1) 부등식

$$x + 3 > x + 2$$

의 경우 우변의 모든 항을 좌변으로 이항하면

$$0 \cdot x + 1 > 0$$

혹은

$$1 > 0$$

이 되므로 엄밀히 말해 일차부등식은 아니다. 그래도 부등식의 해를 구해보면, 즉 x 가 어떤 값일 때 이 부등식이 성립하는 지 살펴보면, x 가 어떤 값을 가지더라도 위의 부등식이 성립함을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 부등식의 해는 ‘ x 는 모든 실수’이다.

이처럼 부등식의 해가 실수 전체인 경우, 부정(不定)이라고 말한다.

(2) 반면 부등식

$$2x + 4 \geq 2x + 5$$

의 경우 정리하면

$$0 \cdot x - 1 \geq 0$$

혹은

$$-1 \geq 0$$

이 되어 역시 일차부등식은 아니다. 이 부등식의 경우 어떤 실수 x 에 대해서도 성립하지 않기 때문에 ‘해는 없다.’

이처럼 부등식을 만족하는 실수 x 의 값이 존재하지 않을 경우 불능(不能)이라고 말한다.

예시 15)

다음 부등식의 해를 구하시오.

$$2x + 3 > 2x + 2 \quad (1)$$

$$3x + 1 \leq x + 2x \quad (2)$$

$$2(x + 1) \geq 3(x + 3) - (x + 7) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(x + 4) + \frac{1}{2}(x - 2) < x + 4 \quad (4)$$

$$\frac{2x + 3}{6} < \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

예시 16)

다음 부등식이 부정(해가 실수 전체)이기 위한 상수 a 의 범위를 구하시오.

$$x + a > x \quad (1)$$

$$2x - a < 2x + a \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(x + a) \geq \frac{1}{2}x + 1 \quad (3)$$

예시 17)

다음 부등식이 불능(해가 없음)이기 위한 상수 a 의 값을 구하시오.

$$ax + 1 > 2 \quad (1)$$

$$(a + 2)x + 4 < 0 \quad (2)$$

$$\frac{2x + 1}{4} > \frac{ax + 3}{2} \quad (3)$$