민형 : 04 특이적분, 도함수의 활용

2016년 11월 20일

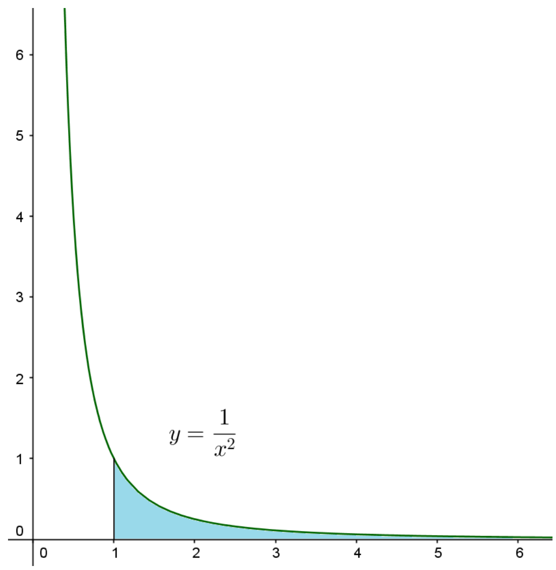
차 례

차 례 1
1 특이적분(Improper Integral) 2
2 접선의 방정식 6
3 함수의 증가 · 감소 7
4 함수의 극대 · 극소 8
5 곡선의 볼록 · 오목 10

1 특이적분(Improper Integral)

예시 1)

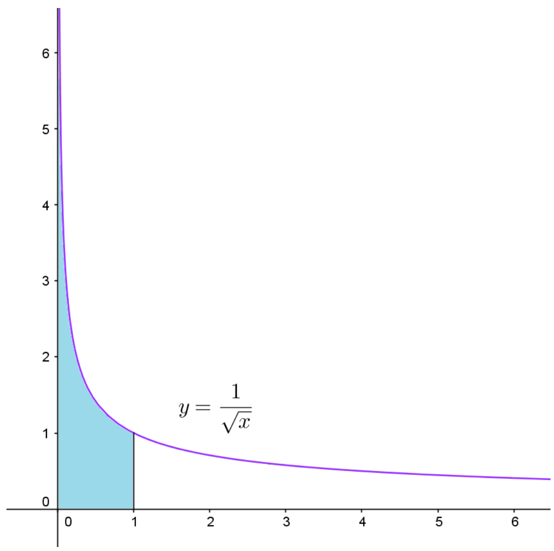
다음은 $y = \frac{1}{x^2}$의 그래프이다. 이때 $x = 1$, $y = \frac{1}{x^2}$, x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.



답 : 1

예시 2)

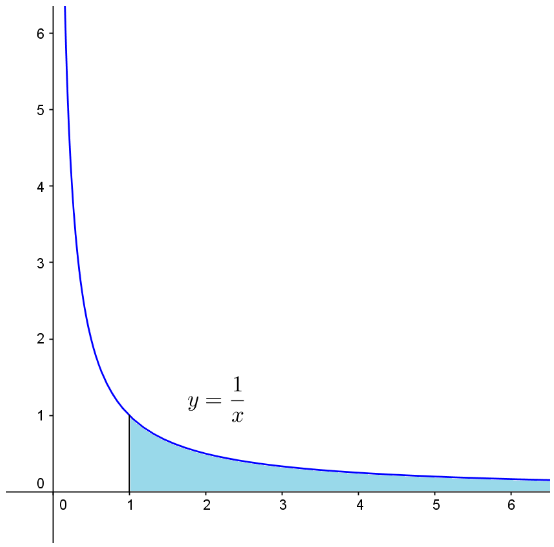
다음은 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프이다. 이때 $x = 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.



답 : 2

예시 3)

다음은 $y = \frac{1}{x}$의 그래프이다. 이때 $x = 1$, $y = \frac{1}{x}$, x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.



답 :

예시 4)

다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

답 :

2 접선의 방정식

점 (x_1, y_1) 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

이다.

정리 5)
함수 $y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

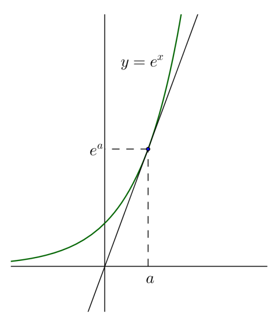
이다.

예시 6)
원점에서 곡선 $y = e^x$ 에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

$f(x) = e^x$ 으로 놓으면 $f'(x) = e^x$ 이다. 이때 접점의 좌표를 (a, e^a) 이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(a) = e^a$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - e^a = e^a(x - a), \qquad y = e^a x - e^a(a - 1)$$

그런데 이 접선이 원점을 지나므로
$0 = -e^a(a - 1)$ 에서 $a = 1$ 이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = ex$ 이다.



답 : $y = ex$

3 함수의 증가 · 감소

정의 7)
함수 $y = f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여
(1) $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 한다.

(2) $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다고 한다.

정리 8)
함수 $y = f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서
(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

예시 9)
위 정리의 역인

$$f(x) \text{ 가 증가함수이면 } f'(x) > 0 \text{ 이다.}$$

은 성립하지 않는다. 예를 들어 함수 $y = x^3$ 은 구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능한 함수이고 증가함수이지만, 항상 $f'(x) > 0$ 인 것은 아니다. $f'(0) = 0$ 이기 때문이다.

대신 다음 정리는 성립한다.

정리 10)
함수 $y = f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서
(1) $f(x)$ 가 증가함수이면 $f'(x) \geq 0$ 이다.

(2) $f(x)$ 가 감소함수이면 $f'(x) \leq 0$ 이다.

4 함수의 극대 · 극소

정리 11) 극대 / 극소 판정법 1

함수 $f(x)$가

(1) $x = a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이다.

(2) $x = a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

정리 12) 극대 / 극소 판정법 2

미분 가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a) = 0$이고,

(1) $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이다.

(2) $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

정리 13)

미분 가능한 함수 $f(x)$에 대해

$$f(x)\text{가 } x = a\text{에서 극값을 가지면 } f'(a) = 0\text{이다.}$$

예시 14)

(1) 하지만 위 정리의 역인

$$f'(a) = 0\text{이면 } f(x)\text{가 } x = a\text{에서 극값을 가진다.}$$

은 성립하지 않는다. $f(x) = x^3$이면 $f'(0) = 0$이지만 $f(0)$은 극값이 아니다.

(2) 또, $f(x)$가 미분 가능하지 않으면 위의 정리는 의미가 없다. $f(x) = |x|$이면 $x = 0$에서 극값을 가지지만 $f'(0) = 0$이라고 볼 수 없다.

함수가 이계도함수를 가지는 경우 다음과 같이 판정할 수도 있다.

정리 15) 극대 / 극소 판정법 3
함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재하고 $f'(a) = 0$일 때,
(1) $f''(a) > 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

(2) $f''(a) < 0$이면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

예시 16)
위 정리의 역인

$$f(x)\text{가 } x = a\text{에서 극대이면 } f''(a) > 0\text{이다.}$$

은 성립하지 않는다. $f(x) = -x^4$이면 $x = 0$에서 극댓값을 갖지만 $f''(0) < 0$은 아니다.

예시 17)
$f(x) = x^3 - 12x + 1$의 극값을 구하여라.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$
$$f''(x) = 6x$$

이다. 판정법 2를 쓰기 위해 표를 그리면

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$

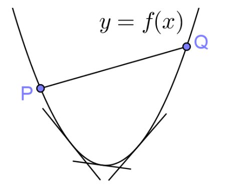
이므로 극댓값은 $f(-2) = 17$, 극솟값은 $f(2) = -15$이다.

판정법 3을 쓰면, $f'(x) = 0$을 만족하는 x는 -2와 2이므로 극값을 가질 가능성이 있는 x값은 -2와 2이다. 이때 $f''(-2) = -12 < 0$, $f''(2) = 12 > 0$이므로 $f(x)$는 $x = -2$에서 극댓값 17, $x = 2$에서 극솟값 -15을 가진다.

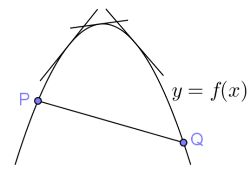
5 곡선의 볼록 · 오목

정의 19)
어떤 구간에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이

(1) 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 $y = f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다고 한다.



(2) 선분 PQ보다 위쪽에 있으면 $y = f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다고 한다.



위 그림에서 $y = f(x)$가 아래로 볼록이면 x가 증가할 수록 $f(x)$의 기울기가 증가하고, $y = f(x)$가 위로 볼록이면 x가 증가할 수록 $f(x)$의 기울기가 감소함을 알 수 있다. 따라서

정리 20)
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
(1) $f''(x) > 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록이다.

(2) $f''(x) < 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록이다.

정의 21)
곡선 $y = f(x)$에서 어떤 점 $P(a, f(a))$를 경계로 하여 오목 · 볼록성이 바뀌면 그 점을 변곡점이라고 한다.

정리 22)
함수 $f(x)$가 $f''(a) = 0$이고 $x = a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 이 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이다.