윤영 : 12 등비수열

2017년 1월 4일

차 례

1 등비수열의 일반항

다음과 같은 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \quad 243 \quad 729 \qquad \cdots\cdots \quad \{a_n\}$$

이 수열은 항 사이의 비가 3으로 일정하다;

$$\frac{a_2}{a_1}=3, \quad \frac{a_3}{a_2}=3, \quad \frac{a_4}{a_3}=3, \quad \frac{a_5}{a_4}=3, \quad \frac{a_6}{a_5}=3, \qquad \cdots$$

이처럼, 인접한 항 사이의 비가 일정한 수열을 **등비수열**이라고 부른다. 이때, 등비수열에서 인접한 항 사이의 비를 **공비**라고 부른다. 공비는 보통 r로 쓴다.

정의 1) 등비수열

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키면 이 수열은 등비수열이다.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r. \quad (n\text{은 자연수})$$

문제 2)

다음 수열들 중 등비수열인 것을 고르고, 등비수열인 경우 공차 r를 구하여라.

(1) $1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(2) $2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(3) $3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad 96 \quad 192$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(4) $5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(5) $1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(6) $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(7) $10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10000 \quad 100000$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(8) $9 \quad 99 \quad 999 \quad 9999 \quad 99999$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

(9) $8 \quad 4\sqrt{2} \quad 4 \quad 2\sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{2} \quad 1$ 등비수열이다/아니다 : $r=\boxed{}$

문제 3)

다음 등비수열의 여섯 번째 항을 구하여라.

(1) $\{a_n\}: 2 \quad 4 \quad 8 \quad \cdots$

(2) $\{b_n\}: 2 \quad 6 \quad 18 \quad \cdots$

(3) $\{c_n\}: 1 \quad -1 \quad 1 \quad \cdots$

(4) $\{d_n\}: 6 \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad \cdots$

(5) $\{e_n\}: 4 \quad -2 \quad 1 \quad \cdots$

문제 4)

문제 3에 제시된 등비수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_n =$

(2) $b_n =$

(3) $c_n =$

(4) $d_n =$

(5) $e_n =$

정리 5)
첫번째 항(=a_1) 이 a 이고 공비가 r 인 등비수열의 일반항은

$$a_n = ar^{n-1}$$

이다.

증명)
첫번째 항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열의 항을 나열해보면

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a_1 \times r = ar \\ a_3 &= a_2 \times r = ar^2 \\ a_4 &= a_3 \times r = ar^3 \\ a_5 &= a_4 \times r = ar^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$a_n = ar^{n-1}$$

이다. □

문제 6)
다음 등비수열들의 일반항 a_n 을 구하시오.

(1) $1, \quad 3, \quad 9, \quad 27, \quad \cdots$

(2) $-2, \quad 4, \quad -8, \quad 16, \quad \cdots$

문제 7)
다음 등비수열

$$128, \quad 32, \quad 8, \quad 2, \cdots$$

의 일반항 a_n 이 다음을 만족할 때, 빈칸을 채우시오.

$$a_n = 2^{\boxed{}}$$

정리 8) 등비중항

세 숫자 a, b, c가 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라고 한다. 이때 등비중항 b는 다음 조건을 만족한다.

$$b^2 = ac$$

증명)

a, b, c가 등비수열을 이루므로, 인접한 항 사이의 비가 같다. 즉

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

이다. 양 변에 ab를 곱하면

$$b^2 = ac$$

이다. □

예시 9)

(1) 세 숫자

$$3, \quad x, \quad 6$$

이 등비수열을 이룬다면, $x^2 = 18$이다. 따라서 $x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$이다.

(2) 네 숫자

$$3, \quad 2, \quad x, \quad y$$

가 등비수열을 이룬다면,

$$3, \quad 2, \quad x$$

가 등비수열을 이루므로 $4 = 3x$이고, $x = \frac{4}{3}$이다. 또,

$$2, \quad x\left(= \frac{4}{3}\right), \quad y$$

가 등비수열을 이루므로 $\frac{16}{9} = 2y$이고, $y = \frac{8}{9}$이다.

2 등비수열의 합

문제 10)

다음을 계산하시오.

$$1+2+4+8+\cdots+1024=\boxed{}$$

예시 11)

문제 10은 다음과 같이 계산할 수도 있다. 먼저 구하려는 값을 $S=1+2+4+8+\cdots+1024$라고 놓자. 이제 이 식과 이 식의 양 변에 2를 곱한 식을 나란히 놓고,

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} 2S & = & & & 2 & + & 4 & + & 8 & +\cdots+ & 512 & + & 1024 & + & 2048 \\ S & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & +\cdots+ & 512 & + & 1024 & & \end{array}$$

두 식을 빼자.

$$2S-S=-1+2048$$

따라서 $S=2047$이다.

정리 12) 등비수열의 합

등비수열 $\{a_n\}$의 첫번째 항을 a, 공비를 r라고 할 때, 첫째항부터 제n항까지의 합 $S(=a_1+a_2+\cdots+a_n)$은

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

이다. 혹은

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이라고 쓸 수도 있다. (단, $r=1$이면 이 식들을 쓸 수 없다.)

증명)

S를 나열한 식과, 그 식의 양 변에 r을 곱한 식을 나란히 놓으면

$$\begin{array}{rcccccccccccc} rS & = & & & ra_1 & + & ra_2 & + & ra_3 & +\cdots+ & ra_{n-2} & + & ra_{n-1} & + & ra_n \\ S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & +\cdots+ & a_{n-1} & + & a_n & & \end{array}$$

이다. 좀 더 자세하게 쓰면

$$\begin{array}{rcccccccccccc} rS & = & & & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & +\cdots+ & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\ S & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & +\cdots+ & ar^{n-2} & + & ar^{n-1} & & \end{array}$$

이다. 두 식을 빼면

$$rS - S = ar^n - a$$

$$(r-1)S = a(r^n - 1)$$

따라서

$$S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

이다.

또한, 이 식을 변형해

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

로 쓸 수도 있다. □

예시 13)

문제 10에서 $a = 1$, $r = 2$이다. $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$에서 $a_n = 2^{n-1} = 1024$이면 $n = 11$이므로

$$S = \frac{1(2^{11}-1)}{2-1} = 2047$$

문제 14)

등비수열의 합 공식을 이용하여 다음 계산을 하여라.

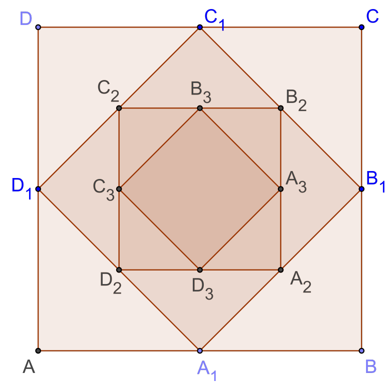
(1) $2 + 6 + 18 + 54 + 162 =$

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024} =$

(3) $-1 + 2 - 4 + 8 - \cdots - 256 + 512 =$

예시 15)

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $ABCD$ 에서 AB 의 중점을 A_1, BC 의 중점을 B_1, CD 의 중점을 C_1, DA 의 중점을 D_1 이라고 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 넓이를 S_1 이라고 하자. 또 A_1B_1 의 중점을 A_2, B_1C_1 의 중점을 B_2, C_1D_1 의 중점을 C_2, D_1A_1 의 중점을 D_2 라고 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이를 S_2 라고 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 수열 $\{S_n\}$ 을 만들 때, S_n 이 처음으로 0.01 보다 작아지는 n 의 값을 구하시오.



풀이 : $\overline{BA_1}=1$, $\overline{BB_1}=1$ 에서 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $S_1=(\sqrt{2})^2=2$ 이다. 또, $\overline{B_1A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{B_1B_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $\overline{A_1B_1}=1$ 이다. 따라서 $S_2=1^2=1$ 이다. 마찬가지로 계산하면 $S_3=\frac{1}{2}$, $S_4=\frac{1}{4}$ 등이다. 그러므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫항이 2 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다. 일반항을 계산하면

$$S_n = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\times 2^{1-n} = 2^{2-n}$$

이 된다. 따라서

$$\begin{aligned} S_n &< 0.01 \\ 2^{2-n} &< \frac{1}{100} \\ 2^{n-2} &> 100 \end{aligned}$$

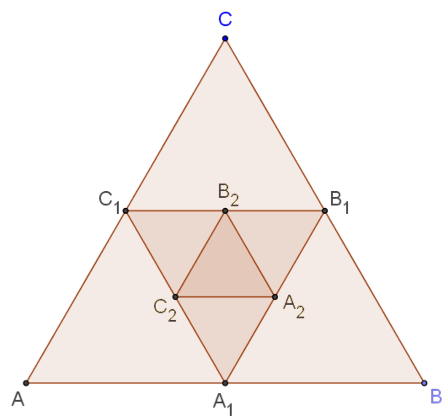
에서, n 의 최솟값은 9 이다.

답 : ($n=9$)

3 등비수열의 활용

문제 16)

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 ABC 에서 AB 의 중점을 A_1, BC 의 중점을 B_1, CA 의 중점을 C_1 이라고 하고, 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이를 S_1 이라고 하자. 또 A_1B_1 의 중점을 A_2, B_1C_1 의 중점을 B_2, C_1A_1 의 중점을 C_2 라고 하고, 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이를 S_2 라고 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 수열 $\{S_n\}$ 을 만들 때, S_5 의 값을 구하시오. (단, 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이다.)



풀이 :

답 : (   )

예시 17) 예금

연이율이 10%인 은행에 100만 원을 예금한다고 하자. 1년 후에 받을 수 있는 돈은 원래 맡겨놓았던 100만 원과 이자인

$$100\text{만원} \times \frac{10}{100} = 10\text{만원}$$

을 합친 금액인 110만 원이 된다.

정의 18) 원금, 이자, 원리합계, 이율

은행에 돈을 맡길 때, 원래 맡겨놓은 금액을 **원금**, 늘어난 금액을 **이자**라고 한다. 원금과 이자를 합친 금액은 **원리합계**라고 부르며, 이자가 붙는 비율인 10%는 **이율**이라고 부른다. 이율은 보통 r로 쓰며, 이율에는 연이율, 월이율 등이 있다. 위의 예에서

$$\begin{aligned} \text{원금} &= 100\text{만원} \\ \text{이자} &= 10\text{만원} \\ \text{원리합계} &= 110\text{만원} \\ \text{이율} &= r = \frac{10}{100} = 0.1 \end{aligned}$$

예시 19)

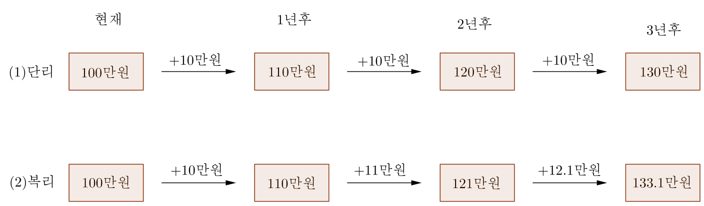
예시 17에서 2년 후에 받을 수 있는 돈은 얼마일까? 다음 두 가지의 방법을 생각해볼 수 있다.

(1) 원금은 100만 원이었으니, 추가로 받을 수 있는 이자는 여전히 10만 원이다. 따라서 원리합계는 $100 + 10 + 10 = 120$만 원이다.

(2) 1년 후에는 통장에 110만 원이 있으니, 추가로 받을 수 있는 이자는 $110 \times 0.1 = 11$만 원이 된다. 따라서 원리합계는 $100 + 10 + 11 = 121$만 원이다.

정의 20) 예금, 단리, 복리

원금을 일정한 기간동안 은행에 맡기는 것을 **예금**이라고 한다. 이때 원리합계를 구하는 방법은 두 가지로, 예시 19의 (1)과 같은 방법을 **단리**, (2)와 같은 방법을 **복리**라고 한다.



문제 21)

원금 10만 원을 연이율 6%로 예금할 때, 10년 후의 원리합계를 단리법, 복리법으로 각각 구하여라. (단, $1.06^{10} = 1.79$로 계산한다.)

풀이 :

답 : (　　　　　　　　　　　　)