

성민03 : 확률과 통계 [정석] 6단원, 연습문제 풀이 및 유사문제들

April 1, 2016

1 6단원 연습문제 풀이

문제 1) 6-16

한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 6명이 오른쪽 그림과 같이 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉을 확률을 구하여라.

11	12	13
21	22	23

풀이) 전체 경우의 수는 $6! = 720$ 이다.

여섯 개의 좌석을 주어진 조건에 맞게 세 조로 분할하는 방법은 다음의 세 가지이다. 세 조 중 하나를 택하고 $({}_3C_1)$, 각 조에 들어갈 학생의 국적을 정하고 $(3!)$, 각

11	12	13
21	22	23

11	12	13
21	22	23

11	12	13
21	22	23

국적의 학생들이 자리에 앉는 방법을 정하면 $((2!)^3)$ 되므로 총 144가지이다.

따라서 주어진 조건을 만족할 확률은 $\frac{144}{720} = \frac{1}{5}$ 이다.

문제 2) 6-17

주머니에 1부터 9까지의 자연수가 한 개씩 적혀 있는 9개의 공이 들어있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수이고, 곱이 3의 배수일 확률을 구하여라.

풀이) 전체 경우의 수는 ${}_9C_3 = 84$ 이다. A 를 세 수의 합이 홀수인 사건, B 를 세 수의 곱이 3의 배수인 사건이라고 하자. 이제 구해야 하는 것은 $n(A \cap B)$ 이다. 이때

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = n(A) - n(A \cap B^c)$$

를 이용하자.

$n(A)$ 를 구하자. 세 수의 합이 홀수인 경우의 수를 구해야 하므로, 주어진 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 을 짝수들의 집합 $\{2, 4, 6, 8\}$ 과 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 로 나누어 생각하자. 세 수의 합이 홀수이려면 (1) 세 수가 모두 홀수이거나, (2) 두 수가 짝수이고 한 수가 홀수이면 된다. 따라서 $n(A) = {}_5C_3 + {}_4C_2 \times {}_5C_1 = 40$ 이다.

$n(A \cap B^c)$ 를 구하자. 주어진 A 에서, 곱이 3의 배수가 아닌 경우의 수를 구하면 된다. 따라서 세 수 중에 하나도 3의 배수가 없으면 된다. 그러므로 3의 배수를 제외하여 만든 짝수집합 $\{2, 4, 8\}$ 과 홀수집합 $\{1, 5, 7\}$ 을 생각하자. 이전과 마찬가지로, 세 수의 합이 홀수이려면 (1) 세 수가 모두 홀수이거나, (2) 두 수가 짝수이고 한 수가 홀수이면 된다. 따라서 $n(A \cap B^c) = {}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_3C_1 = 10$ 이다.

따라서 $n(A \cap B) = 40 - 10 = 30$ 이고

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

이다.

문제 3) 6-20

정팔각형의 8개의 꼭짓점 중에서 임의로 3개를 잡아 삼각형을 만들 때, 직각삼각형이 될 확률은?

풀이) 정팔각형에 외접하는 외접원을 생각하자. 직각삼각형이 만들어지려면, 외접원의 지름을 하나 포함해야 한다. 외접원의 지름은 4개를 선택할 수 있고, 외접원을 선택했을 때 나머지 한 점은 6개를 선택할 수 있다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{4 \times 6}{{}_8C_3} = \frac{3}{7}$$

이다.

문제 4) 6-22

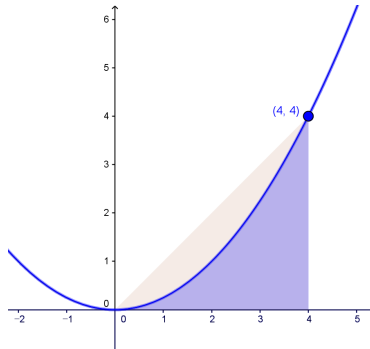
$0 \leq b \leq a \leq 4$ 를 만족하는 두 실수 a, b 를 임의로 택하여 x 에 관한 이차방정식을 만들 때, 이 이차방정식이 실근을 가질 확률을 구하여라.

풀이) 가능한 (a, b) 를 $a - b$ 평면 위에 나타내면 다음과 같은 직각삼각형이 되고, 그 안에서 이차방정식의 판별식이 0보다 크거나 같은 범위가 되는 $b \geq \frac{1}{4}a^2$ 을 나타내면 다음과 같이 포물선 아래의 영역이 된다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\int_0^4 \frac{1}{4}a^2 da}{\frac{1}{2} \times 4 \times 4} = \frac{2}{3}$$

이다.



2 유사 문제들

문제 5) 6-16-1

다음과 같이 생긴 2층짜리 아파트가 있다. 여기에 A, B, C, D 네 개 세대가 입주하는데 A 와 B, C 와 D 는 서로 친척간이다. 친척끼리는 호수의 차가 1 또는 100이 되도록 입주할 확률은?

201	202
101	102

문제 6) 6-16-2

국어국문학과, 철학과, 심리학과, 사회학과 학생이 각각 두 명씩 있다. 이 학생들이 다음과 같은 열람실의 A 구역의 여덟 좌석에 앉으려고 한다. 같은 학과의 학생끼리는 좌석번호의 차가 1이거나 합이 21이 되도록 앉게 될 확률은?

A 구역

1	2	3	4	5	6	
20	19	18	17	16	15	

문제 7) 6-17-1

1부터 12까지의 자연수 중 임의로 두 개를 동시에 선택할 때, 두 수의 합이 짝수일 확률과 두 수의 곱이 짝수일 확률을 각각 구하시오.

문제 8) 6-17-2

1부터 12까지의 자연수 중 임의로 두 개를 동시에 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수일 확률과 두 수의 곱이 3의 배수일 확률을 각각 구하시오.

문제 9) 6-17-3

1부터 12까지의 자연수 중 임의로 세 개를 동시에 선택할 때, 세 수의 합이 3의 배수일 확률을 구하시오.

문제 10) 6-17-4

1부터 12까지의 자연수 중 임의로 두 개를 동시에 선택할 때, 두 수의 합이 4의 배수일 확률을 구하시오.

문제 11) 6-20-1

정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 3개를 잡아 삼각형을 만들 때, 직각삼각형이 될 확률은?

문제 12) 6-20-2

정십각형의 10개의 꼭짓점 중에서 임의로 3개를 잡아 삼각형을 만들 때, 직각삼각형이 될 확률은?

문제 13) 6-22-1

$0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ 를 만족시키는 두 실수 a, b 를 택해, x 에 관한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 를 만들 때 이 이차방정식이 실근을 가질 확률은?

문제 14) 6-22-2

$0 \leq b \leq 2a \leq 12$ 를 만족시키는 두 실수 a, b 를 택해, 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ 을 만들 때 이 함수가 극값을 가질 확률은?