규현 : 06 수열(4)

2017년 1월 5일

차 례

1 수열의 귀납적 정의(1)

예시 1)
첫째항이 1 이고 공차가 2 인 등차수열

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad \cdots$$

는 일반항 $a_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n-1$ 로 나타내기도 하지만 첫째항 1 부터 차례로 일정한 수 2 를 더해서 얻어지는 수열이므로

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + 2\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

와 같이 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계식을 이용하여 수열을 정의하기도 한다.

정의 2) 수열의 귀납적 정의
일반적으로 a_1 의 값과 a_n 에서 a_{n+1} 을 구할 수 있는 관계식이 주어지면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이 정해진다. 이와 같이 첫째항과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다. 이때, 이웃하는 항들 사이의 관계식을 **점화식**이라고 한다.

예시 3)
$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제 4항을 구하면

$$n = 1\text{을 대입} : a_2 = 2\cdot 1 + 1 = 3$$

$$n = 2\text{을 대입} : a_3 = 2\cdot 3 + 1 = 7$$

$$n = 3\text{을 대입} : a_4 = 2\cdot 7 + 1 = 15$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 제4항은 15 이다.

문제 4)
다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제5항을 구하여라.

(1) $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 3$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

문제 5)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라.

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (   )

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (   )

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (   )

문제 6)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_5 + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

(1) $a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

(2) $a_1 = 1,\ \ a_2 = 2,\ \ a_{n+2} = a_n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : (**)**

위 문제에서 (1)의 수열은 **피보나치 수열**이라고 불린다.

예시 7)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 5,\ \ a_{n+1} = a_n + 8\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$a_{n+1} - a_n = 8$ 에서 공차가 8 인 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 5$ 이므로

$$a_n = 5 + (n-1)8 = 8n - 3$$

답 : $a_n = 8n - 3$

(2) $a_1 = 2,\ \ a_2 = 6,\ \ 2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등차중항이다. 따라서 인접한 세 항은 등차수열을 이루고, 전체 수열도 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 2$ 이고 공차는 $d = a_2 - a_1 = 4$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1)4 = 4n - 2$$

답 : $a_n = 4n - 2$

(3) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 2a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 에서 공비가 2 인 등비수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 1$ 이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

답 : $a_n = 2^{n-1}$

(4) $a_1 = 4,\ \ a_2 = 6,\ \ {a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

${a_{n+1}}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 a_{n+1} 은 a_n 과 a_{n+2} 의 등비중항이다. 따라서 인접한 세 항은 등차수열을 이루고, 전체 수열도 등차수열임을 알 수 있다. 첫항은 $a = 4$ 이고 공차는 $d = a_2 \div a_1 = \frac{3}{2}$ 이므로

$$a_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

답 : $a_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

문제 8)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} - a_n = 5 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

(2) $a_1 = 4, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_{n+2} + a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

(3) $a_1 = 4, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

(4) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

답 : $a_n =$

2 수열의 귀납적 정의(2)

예시 9)

문제 5의 (1), (2), (3)의 일반항을 구해보자.

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + n$

점화식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 나열하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1 \\ a_3 &= a_2 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + (n-1) \end{aligned}$$

이다. 이 식들을 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 3 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 6}{2} \end{aligned}$$

이다.

답 : $a_n = \frac{n^2-n+6}{2}$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$

점화식의 n 에 1, 2, 3, $\cdots$, n 을 차례로 대입하여 나열하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \tfrac{3}{1} a_1 \\ a_3 &= \tfrac{4}{2} a_2 \\ a_4 &= \tfrac{5}{3} a_3 \\ a_5 &= \tfrac{6}{4} a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \tfrac{n}{n-2} a_{n-2} \\ a_n &= \tfrac{n+1}{n-1} a_{n-1} \end{aligned}$$

이다. 이 식들을 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \times \tfrac{3}{1} \times \tfrac{4}{2} \times \tfrac{5}{3} \times \tfrac{6}{4} \times \cdots \times \tfrac{n}{n-2} \times \tfrac{n+1}{n-1} \\ &= a_1 \times \tfrac{n(n+1)}{1 \times 2} \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

이다.

답 : $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2$

주어진 점화식

$$a_{n+1} = 3a_n + 2$$

은

$$a_{n+1} + k = 3(a_n + k)$$

꼴로 만들 수 있다. 두 식을 비교해보면 $2k = 2$ 이므로 $k = 1$ 이고

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

이다. $b_n = a_n + 1$ 을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 을 생각하면

$$b_{n+1} = 3b_n$$

이므로 $\{b_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다. $b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ 이므로

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이고

$$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

이다. 따라서

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

이다.

답 : $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

문제 10)

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 4n$

답 : $a_n =$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2^n a_n$

답 : $a_n =$

(3) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$

답 : $a_n =$

3 수학적 귀납법

예시 11)
$1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ 이므로 다음을 추측할 수 있다.

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad (㉠)$$

하지만 이 사실만으로 모든 자연수 n에 대하여 식 ㉠이 성립한다고 할 수는 없다. 또한, 무한히 많은 자연수 n에 대해 일일이 성립하는지 확인해볼 수도 없을 것이다.

이제 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립함을 증명하는 방법을 알아보자.

[1] $n=1$일때 식 ㉠이 성립함을 보인다. 즉

$$(\text{좌변})=1, \quad (\text{우변})=1^2$$

이므로 식 ㉠은 $n=1$일 때 성립한다.

[2] $n=k$일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때도 식 ㉠이 성립함을 보인다. 즉

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

을 가정하고 이 식의 양변에 $2k+1$을 더하면. 그러면

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

이다. 따라서 식 ㉠은 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

*[1]*에서 $n=1$일 때, 식 ㉠이 성립함을 보였으므로 위에서 증명한 사실 *[2]* 로부터

$n=1$일 때 식 ㉠이 성립하므로 $n=2$일 때 식 ㉠이 성립한다.
$n=2$일 때 식 ㉠이 성립하므로 $n=3$일 때 식 ㉠이 성립한다.
$n=3$일 때 식 ㉠이 성립하므로 $n=4$일 때 식 ㉠이 성립한다.

$$\vdots$$

따라서 *[1]*, *[2]*가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 식 ㉠이 성립함을 알 수 있다.

자연수에 대한 어떤 명제가 성립함을 보일 때, 위와 같은 방법으로 증명하는 것을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

정리 12) 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

[1] $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

[2] $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 $p(n)$이 성립한다.

예시 13)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (㉠)$$

[1] $n=1$이면

$$(\text{좌변})=1^2=1, \quad (\text{우변})=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$$

이므로 식 ㉠은 $n=1$일 때 성립한다.

[2] $n=k$일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

을 가정하자. $n=k+1$일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k+1}{6}\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=k+1$일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

[1], *[2]*에서 모든 자연수에 대해 식 ㉠이 성립한다.

문제 14)

모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하여라.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (㉠)$$

답

문제 4)

(1) 14

(2) $\frac{1}{8}$

문제 5)

(1) 13

(2) 15

(3) 161

문제 6)

(1) 60

(2) 9

문제 8)

(1) $a_n = 5n - 4$

(2) $a_n = -2n + 6$

(3) $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

(4) $a_n = 3^{n-2}$

문제 10)

(1) $a_n = 2n^2 - 2n + 1$

(2) $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(3) $a_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$

문제 14)

[1] $n = 1$ 이면

$$(\text{좌변}) = 1, \quad (\text{우변}) = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

이므로 식 ㉠은 $n = 1$ 일 때 성립한다.

[2] $n = k$ 일때 식 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

을 가정하자. $n = k + 1$ 일때에 식 ㉠이 성립한다는 것을 보이기 위해 양변에 $k + 1$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 식 ㉠이 성립한다.

[1], *[2]*에서 모든 자연수에 대해 식 ㉠이 성립한다.