미적분 1 : 02 급수

2017년 1월 23일

차 례

1 부분합과 급수의 합

정의 1) 부분합과 급수의 합

수열 $\{a_n\}$에서 첫항부터 제 n항까지의 합

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

을 부분합이라고 부른다.

이때 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 그 극한값

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수의 합이라고 부른다.

예시 2)

다음 수열의 부분합과 급수의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \cdots, \frac{1}{n(n+1)}, \cdots$

(2) $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots$

(1) 부분합 S_n은

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

이고, 급수의 합 S는

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

이다.

(2) 부분합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

이고, 급수의 합 S 는

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$$

이다.

답 : (1) 부분합=$\frac{n}{n+1}$, 급수의 합=1, (2) 부분합=$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 급수의 합=$1$

문제 3)

다음 수열의 부분합과 급수의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 5}$, $\frac{1}{5\cdot 7}$, $\cdots$, $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\cdots$

(2) $\frac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\cdots$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\cdots$

답 : (1) **(2)**

예시 4)

다음 급수의 합을 구하여라.

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots$$

제 n 항을 a_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1+2+\cdots+n} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

이다. 부분합을 S_n 이라고 하면,

$$\begin{aligned} S_n &= 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

따라서 급수의 합 S 는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

답 : 2

예시 5)

다음 급수의 합을 구하여라.

$$\frac{1}{1^2+2}+\frac{1}{2^2+4}+\frac{1}{3^2+6}+\frac{1}{4^2+8}+\cdots$$

답 : (   )

2 급수의 수렴과 발산

정의 6) 급수의 수렴과 발산

부분합 $\{S_n\}$ 이 수렴하여 급수의 합

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

이 존재하면

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 은 수렴한다}$$

라고 말한다. 급수의 합이 존재하지 않으면

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 은 발산한다}$$

라고 말한다.

예시 7)

다음 급수의 수렴과 발산을 조사하여라.

(1) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$

(2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

(1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $\cdots$ 라고 하면 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 이다. 이때,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

이므로 n 이 충분히 크면 a_n 은 1 과 비슷한 값이다. 따라서 주어진 급수

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

는 1 과 비슷한 값을 무한히 더하여 얻어진다. 그러므로 주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 는 발산한다.

(2)

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\\
=&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
>&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\
&+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\
=&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty
\end{aligned}
$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 : (1) 발산(양의 무한대로 발산), (2) 발산(양의 무한대로 발산)

문제 8)

다음 급수의 수렴과 발산을 조사하여라.

(1) $\frac{2}{1}+\frac{3}{3}+\frac{4}{5}+\frac{5}{7}+\frac{6}{9}+\frac{7}{11}+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$

답 : (1) **(2)**

예시 7, 8의 (1) 로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ 이면 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 은 발산한다.}$$

또한 이 명제의 대우인 다음 명제도 성립한다.

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 이 수렴하면 } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 이다.}$$

하지만

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 이면 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 이 수렴한다.}$$

는 성립하지 않는다. 예시 7, 8의 (2) 가 그 반례이다.

3 등비급수의 수렴과 발산

예시 9)

다음 급수의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots$

(2) $2 + 2 + 2 + 2 + \cdots$

(3) $1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots$

(1) $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은 $a_n = ar^{n-1} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이고 부분합은

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

이다. 따라서 급수의 합은

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 6\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 6\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 6$$

(2) $a = 2$, $r = 1$ 인 등비수열로 일반항은 $a_n = 2 \times 1^{n-1} = 2$ 이고 부분합은

$$S_n = 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

이고 이 급수는 발산한다.

(3) $a = 1$, $r = -2$ 인 등비수열이므로 일반항은 $a_n = ar^{n-1} = (-2)^{n-1}$ 이고 부분합은

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{1 \times \{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = \frac{1-(-2)^n}{3}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-2)^n}{3}$$

는 진동하고 이 급수는 발산한다.

답 : (1) 수렴(6으로 수렴), (2) 발산(양의 무한대로 발산), (3) 발산(진동)

문제 10)

다음 급수의 수렴과 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $4 + (-2) + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \cdots$

(2) $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots$

(3) $2 + 6 + 18 + 54 + \cdots$

답 : (1) **(2)** **(3)**

정의 11) 등비급수
등비수열의 급수를 등비급수라고 부른다.

따라서, 예시 9와 문제 10에서 계산한 급수들이 모두 등비급수이다. 이때 다음 정리가 성립한다.

정리 12) 등비급수의 수렴과 발산
첫째항이 $a(\neq 0)$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $a_n = ar^{n-1}$ 에 대해

(1) $|r| < 1$ 이면 등비급수가 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}$$

이다.

(2) $|r| \geq 1$ 이면 등비급수는 발산한다.

4 급수의 성질

정리 13) 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴한다고 가정하면

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

이다.

증명)

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ca_k = \lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = c\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$(2),(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_n \pm \sum_{k=1}^{n} b_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_n \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

답

문제 3)

(1) $\frac{1}{2}$

(2) 2

문제 5)

$\frac{3}{4}$

문제 8)

(1) 발산

(2) 발산

문제 10)

(1) 수렴, $\frac{8}{3}$

(2) 발산

(3) 발산