미리-05

December 19, 2014

목차

정의 1) 허수단위 i

$i^2 = -1$을 만족시키는 어떤 숫자를 i라고 표기한다. 즉 i는 이차방정식 $x^2 = -1$의 한 근이다. 따라서 i는 실수가 아닌 수이다. i는 **허수단위**라고 불린다.

참고 2)

(1) $-i$ 또한 이차방정식 $x^2 = -1$의 한 근이라는 점을 주목하자. 왜냐하면

$$(-i)^2 = [(-1) \cdot i]^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

으로 생각할 수 있기 때문이다.

(2) i를 정의함으로써, 이차방정식

$$x^2 = -A \tag{a}$$

의 근도 구할 수 있다($A > 0$). 왜냐하면 (a)는

$$\left(\frac{x}{\sqrt{A}}\right)^2 = -1$$

와 동치이고 따라서

$$\frac{x}{\sqrt{A}} = \pm i$$

이기 때문이다. 즉 $x = \pm\sqrt{A}i$이다.

물론, 아직 i에 대해서 곱셈이나 나눗셈을 정의하지 않았기 때문에 이런 식의 논리 전개는 엄밀하지 않다. 하지만 정의 6에서 덧셈과 곱셈을 잘 정의하고 나면 엄밀한 관점에서도 옳다는 것을 알 수 있을 것이다.

정의 3) 음수의 제곱근

(1) 참고 2-(1)로부터, -1의 제곱근에는 $\pm i$의 두 개가 있다는 것을 알 수 있다. 3의 양의 제곱근을 $\sqrt{3}$으로 쓰는 것과 비슷하게, i를 $i = \sqrt{-1}$라고 쓴다.

(2) 참고 2-(2)로부터, $A > 0$일 때 $-A$의 제곱근에는 $\pm\sqrt{A}i$의 두 개가 있다는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 $\sqrt{A}i = \sqrt{-A}$라고 쓴다.

정의 4) 복소수

$\mathbb{R}$을 실수들의 집합이라고 하자. 즉 $-1 \in \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $\cdots$. 새로운 집합 $\mathbb{C}$를

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

로 정의하자. 그러면

$$z\text{가 } \textbf{복소수}\text{이다.} \iff z \in \mathbb{C}$$

이다. 즉 복소수는 $a+bi$ 꼴로 표현되는 숫자를 말한다(a, b는 실수).

복소수 z가 $z=a+bi$로 표현될 때(a, b는 실수), a를 **실수부분**, b를 **허수부분**이라고 부른다. 만약 $b=0$이면 $z=a$가 되어 z는 실수이다. 만약 $b\neq 0$이면 z를 **허수**라고 부른다. 만약 $b\neq 0$이고 $a=0$이면 $z=bi$이다. 이 때 z를 **순허수**라고 부른다.

정의 5) 복소수의 상등

실수 a, b, c, d에 대해

(1) $a+bi=c+di \iff a=c \ \& \ b=d$

(2) $a+bi=0 \iff a=0 \ \& \ b=0$ 이다.

정의 6) 복소수의 연산

실수들의 집합인 $\mathbb{R}$은, 덧셈과 곱셈이라는 두 가지 연산이 정의되어 있을 뿐아니라 부등호도 정의되어 있었다. 복소수들의 집합인 $\mathbb{C}$에도 덧셈과 곱셈을 정의할 수 있다. 물론 따라서 뺄셈과 나눗셈도 정의할 수 있다. 하지만 복소수에서는 부등호를 정의하지 않는다.

복소수 $a+bi$, $c+di$에 대해(a, b, c, d는 실수) 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈은 다음과 같이 정의한다.

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ $(c+di\neq 0)$.

정리 7) 복소수의 연산의 성질

실수에서 정의된 덧셈과 곱셈에는 **결합법칙**, **교환법칙**, **분배법칙**이 성립했다. 복소수에서도 정의 6에 의해 정의된 덧셈과 곱셈에 대해 이 법칙들이 모두 성립하게 된다.

복소수 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$(a, b, c, d, e, f는 모두 실수)

(1) 덧셈에 대한 결합법칙 : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(2) 덧셈에 대한 교환법칙 : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

(3) 곱셈에 대한 결합법칙 : $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

(4) 곱셈에 대한 교환법칙 : $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

(5) 덧셈과 곱셈에 대한 분배법칙 : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

증명. (1)

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) \\
&= [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi) \\
&= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i \\
&= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]i \\
&= a + bi + [(c + e) + (d + f)i] \\
&= a + bi + [(c + di) + (e + fi)] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3).
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\
&= (a + c) + (b + d)i \\
&= (c + a) + (d + b)i \\
&= (c + di) + (a + bi) \\
&= z_2 + z_1.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= [(a + bi)(c + di)](e + fi) \\
&= [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) \\
&= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i \\
&= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1(z_2z_3) &= (a+bi)[(c+di)(e+fi)] \\
&= (a+bi)[(ce-df)+(cf+de)i] \\
&= [a(ce-df)-b(cf+de)]+[a(cf+de)+b(ce-df)]i \\
&= (ace-adf-bcf-bde)+(acf+ade+bce-bdf)i
\end{aligned}$$

따라서 좌변과 우변이 같다.

(4)

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (a+bi)(c+di) \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
&= (ca-db)+(cb+da)i \\
&= (c+di)(a+bi) \\
&= z_2z_1.
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
z_1(z_2+z_3) &= (a+bi)[(c+di)+(e+fi)] \\
&= (a+bi)[(c+e)+(d+f)i] \\
&= [a(c+e)-b(d+f)]+[a(d+f)+b(c+e)]i \\
&= (ac+ae-bd-bf)+(ad+af+bc+be)i \\
&= [(ac-bd)+(ae-bf)]+[(ad+bc)+(af+be)]i \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i]+[(ae-bf)+(af+be)i] \\
&= (a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi) \\
&= z_1z_2+z_1z_3.
\end{aligned}$$

□

참고 8)

(1) 실수 a, b에 대해

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

이 성립했다. 왜냐하면

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)a+(a+b)b\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= (a^2+ab)+(ba+b^2)\\ &= a^2+(ab+ba)+b^2\\ &= a^2+(ab+ab)+b^2\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

이기 때문인데 이때 실수의 분배법칙, 곱셈에 대한 교환법칙, 덧셈에 대한 결합법칙 등을 사용했다. 그런데 방금 복소수에 대해서도 실수와 마찬가지로 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙이 성립한다는 것을 보였으므로, 복소수 z 와 w 에 대해서도

$$(z+w)^2 = z^2 = 2zw + w^2$$

가 성립한다는 것을 알 수 있다 ($z^2 = z \cdot z$ 로 정의한다.). 마찬가지로 이전 단원들에서 배웠던 많은 인수분해 공식들 모두를 복소수에 적용시킬 수 있다.

(2) 정의 6-(4) 를 다시 보자. 두 복소수 사이의 나눗셈을 다음과 같이 정의했었다.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

분모가 무리수인 경우에 '분모의 유리화'를 했듯이, 좌변의 분모가 복소수이므로 '분모의 실수화'를 한 번 해보자. $c-di$ 가 0 이 아니므로 (만약 $c-di=0$ 이면 $c+di=0$ 이 되므로 모순이다.) $c-di$ 를 좌변의 분모와 분자에 각각 곱해보자. 그러면

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2}\\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

이 되어 정의 6-(4) 와 같다. 그러니까 아까 정의한 복소수의 나눗셈이라는 것은, 실은, '분모의 실수화'의 결과인 셈이다.

정의 9) 켤레복소수

복소수 $z = a + bi$ 에 대해 (a, b는 실수) 새로운 복소수 $\bar{z}$를

$$\bar{z} = a - bi$$

로 정의하자. $\bar{z}$는 z의 **켤레복소수**라고 불린다.

정리 10)

두 복소수 z, w 에 대해서 ($z = a + bi$)

(1) $\overline{(\bar{z})} = z$

(2) $z + \bar{z} = 2a$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$

(3) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

(4) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

증명. 증명은 생략한다. 정의 9에 의해 쉽게 증명할 수 있다. □