

성현 - 제곱근과 절댓값

January 18, 2020

문제 1) 다음을 계산하여라.

- (1) $|6|$
- (2) $|-3|$
- (3) $|0|$
- (4) $|-10|$
- (5) $\sqrt{6^2}$
- (6) $\sqrt{(-3)^2}$
- (7) $\sqrt{0^2}$
- (8) $\sqrt{(-10)^2}$
- (9) $\sqrt{6^2}$
- (10) $\sqrt{-3^2}$
- (11) $\sqrt{0^2}$
- (12) $\sqrt{-10^2}$

정리 2) a 가 실수일 때,

- (1) $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a \leq 0) \end{cases}$
- (2) $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a \leq 0) \end{cases}$
- (3) $\sqrt{a^2} = |a|$
- (4) $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ \text{답을 정할 수 없다.*} & (a < 0) \end{cases}$

예시 3) 다음 문장들 중 옳은 것에는 ‘O’, 틀린 것에는 ‘X’ 표시를 하여라. 틀린 문장은 왜 틀렸는지 예를 들어 설명하여라.

- (1) x 가 실수이면 $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 이다. [O]
- (2) y 가 실수이면 $\sqrt{y^2} = y$ 이다. [X, $y = -2$]
- (3) $t \leq 0$ 이면 $\sqrt{t^2} \neq t$ 이다. [X, $t = 0$]

*고등학교 1학년 과정에서는 $i = \sqrt{-1}$ 을 도입한다. 이 숫자 i 는 $i^2 = -1$ 을 만족시키는 새로운 수이다. i 를 가지고 문제 1)의 (10), (12)를 계산하면

$$(10) \quad \sqrt{-3^2} = (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 = \sqrt{3^2}i^2 = 3 \cdot (-1) = -3$$

$$(12) \quad \sqrt{-10^2} = (\sqrt{10}\sqrt{-1})^2 = \sqrt{10^2}i^2 = 10 \cdot (-1) = -10$$

이다.

문제 4) 다음 문장들 중 옳은 것에는 ‘O’, 틀린 것에는 ‘X’ 표시를 하여라. 틀린 문장은 왜 틀렸는지 예를 들어 설명하여라.

- (1) $b > 2$ 일 때, $\sqrt{(b-2)^2} = b-2$ 이다. []
- (2) $b > 0$ 일 때, $\sqrt{(b-2)^2} = b-2$ 이다. []
- (3) n 이 자연수이면 $\sqrt{n^2} = n$ 이다. []
- (4) k 가 자연수이면 $\sqrt{k^2} = -k$ 이다. []
- (5) $c < -4$ 일 때, $\sqrt{(c+4)^2} = -c-4$ 이다. []
- (6) x 가 실수일 때, $|-x| = |x|$ 이다. []
- (7) x 가 실수일 때, $\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2}$ 이다. []

예시 5) $0 \leq a \leq 3$ 일 때, 다음을 계산하여라.

- (1) $|a-3| + |a| = |a-3| + |a| = -(a-3) + a = 3$
- (2) $2|a-3| + 3|a| = 2\{-(a-3)\} + 3a = a+6$
- (3) $\sqrt{(a-5)^2} - |a+2| = |a-5| + |a+2| = -(a-5) - (a+2) = -2a+3$

문제 6) $2 \leq b \leq 4$ 일 때, 다음을 계산하여라.

- (1) $|b-2| + |b-4| =$
- (2) $2|b-2| - 3|b-4| =$
- (3) $|2-b| - |b-4| =$
- (4) $|b| + |-b| =$
- (5) $\sqrt{(b-2)^2} - \sqrt{(b-4)^2} =$

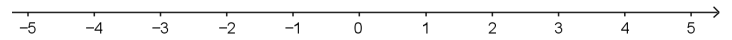
문제 7) $-1 < c < 1$ 일 때, 다음을 계산하여라.

- (1) $\sqrt{(c-1)^2} + \sqrt{(c+1)^2} =$
- (2) $3|c-1| + 4|c+1| =$
- (3) $|c-2| + 3|c+2|$
- (4) $\sqrt{(4-c)^2} + \sqrt{(-1-c)^2}$

문제 8) 다음을 계산하여라.

- (1) $|5-1|$
- (2) $|4-(-3)|$
- (3) $|2-4|$
- (4) $|4|$

문제 9) 아래와 같은 수직선에 대하여 다음을 계산하여라.



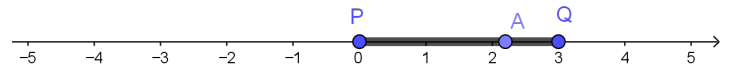
- (1) 5와 1 사이의 거리
- (2) 4와 -3 사이의 거리
- (3) 2와 4 사이의 거리
- (4) 4와 0 사이의 거리

정리 10) 실수 a, b 에 대하여

$$|a-b| = \text{수직선 위의 } a \text{와 } b \text{ 사이의 거리}$$

이다.

예시 11) 다음은 예시 5)의 (1)를 다시 계산하는 과정이다. 빈 칸을 채워라.



0을 나타내는 점을 P , 3을 나타내는 점을 Q 라고 하자. a 를 나타내는 점을 A 라고 하면 A 는 P 와 Q 사이를 움직인다.

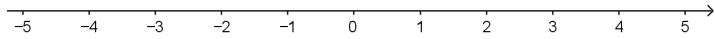
$$|a-3| = \boxed{\overline{AQ}}$$

$$|a| = \boxed{\overline{AP}}$$

이므로 $|a-3| + |a| = \boxed{\overline{AQ}} + \boxed{\overline{AP}}$ 이다. P 의 위치에 관계없이 $\boxed{\overline{AQ}} + \boxed{\overline{AP}} = \boxed{\overline{PQ}}$ 이므로

$$|a-3| + |a| = \boxed{\overline{AQ}} + \boxed{\overline{AP}} = \boxed{\overline{PQ}} = 3$$

문제 12) 다음은 예시 6)의 (1)를 다시 계산하는 과정이다. 빈 칸을 채워라.



2를 나타내는 점을 P , 4를 나타내는 점을 Q 라고 하자. b 를 나타내는 점을 B 라고 하면 B 는 P 와 Q 사이를 움직인다.

$$|b - 2| = \boxed{}$$

$$|b - 4| = \boxed{}$$

이므로 $|b - 2| + |b - 4| = \boxed{} + \boxed{}$ 이다. P 의 위치에 관계없이 $\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$ 이므로

$$|b - 2| + |b - 4| = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{} = 2$$

문제 13) $1 < x < y < 4$ 일때,

$$|1 - x| + |x - y| + |y - 4|$$

의 값을 구하여라.

답 1)

(1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) 10

(5) 6 (6) 3 (7) 0 (8) 10

(9) 6 (10) 답을 정할 수 없다.

(11) 0 (12) 답을 정할 수 없다.

답 4) (1) O (2) X (3) O (4) X (5) O (6) O (7) O

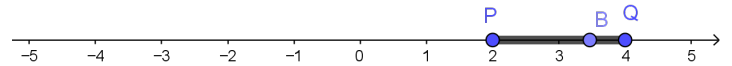
답 6) (1) 2 (2) $5b - 16$ (3) $2b - 6$ (4) $2b$ (5) $2b - 6$

답 7) (1) 2 (2) $c + 7$ (3) $2c + 8$ (4) 5

답 8) (1) 4 (2) 7 (3) 2 (4) 4

답 9) (1) 4 (2) 7 (3) 2 (4) 4

답 12)



2를 나타내는 점을 P , 4를 나타내는 점을 Q 라고 하자. b 를 나타내는 점을 B 라고 하면 B 는 P 와 Q 사이를 움직인다.

$$|b - 2| = \overline{BP}$$

$$|b - 4| = \overline{BQ}$$

이므로 $|b - 2| + |b - 4| = \overline{BP} + \overline{BQ}$ 이다. P 의 위치에 관계없이 $\overline{BP} + \overline{BQ} = \overline{PQ}$ 이므로

$$|b - 2| + |b - 4| = \overline{BP} + \overline{BQ} = \overline{PQ} = 2$$

답 13) 3