수학 I : 01 지수

2018년 11월 22일

차 례

차 례 1
1 복습 2
2 제곱근 4
3 거듭제곱근 6
4 거듭제곱근의 성질 11
5 자연수 지수 13
6 정수 지수 14
7 유리수 지수 16
8 실수 지수 18
*** 답 22**
*** 요약 24**

1 복습

문제 1) 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b)(a-b)$

(2) $(a+bi)(a-bi)$

(3) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

문제 2) 다음 식을 인수분해하시오.

(1) a^3+b^3

(2) x^3-27

(3) x^2-1

(4) x^2-5

(5) x^2+9

(6) x^4-16

기본적인 인수분해 공식

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

문제 3) 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2 = 4$ (2) $x^2 = 0$ (3) $x^2 = -4$

(4) $x^2 - x - 2 = 0$ (5) $x^2 - x - 1 = 0$ (6) $x^2 + 2x + 2 = 0$

답 : (1) $x =$ **(2)** $x =$ **(3)** $x =$

(4) $x =$ **(5)** $x =$ **(6)** $x =$

이차방정식의 풀이

(1) 이차방정식 $x^2 = A$의 근은

$$x = \pm\sqrt{A}$$

(2) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 근은

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(3) b가 짝수이면 $(b = 2b')$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

2 제곱근

정의 4) a의 제곱근
제곱해서 a가 되는 수를 A의 $\boxed{\text{제곱근}}$이라고 한다.

예시 5) 9의 제곱근을 구하여라.

$x^2 = 9$ 를 만족시키는 수 x를 구하면 된다.

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x+3)(x-3) = 0$$

이므로 $x = 3$ 또는 $x = -3$ 이다.

답 : $3, \ -3$

예시 6) -9의 제곱근을 구하여라.

$x^2 = -9$ 를 만족시키는 수 x를 구하면 된다.

$$x^2 + 9 = 0$$
$$(x+3i)(x-3i) = 0$$

이므로 $x = 3i$ 또는 $x = -3i$ 이다.

답 : $3i, \ -3i$

문제 7) 다음 수들의 제곱근을 각각 구하여라.

(1) 4 (2) 0 (3) -25

정의 8) $\sqrt{a}$
a가 $\boxed{\text{양수}}$일 때, a의 제곱근 중 $\boxed{\text{양수}}$인 것을 '제곱근 a' 또는 $\sqrt{a}$라고 한다.

예시 9)
예시 5)에서 9의 제곱근 중 양수인 것은 3이므로 제곱근 9는 3이다. 즉

$$\sqrt{9} = 3$$

이다.

문제 10) 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{16}$

(2) $\sqrt{36}$

정의 11) 제곱근의 성질
$a > 0$, $b > 0$일 때,

(1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예시 12) $\sqrt{12}$를 간단히 하여라.

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} \overset{(1)}{=} \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

문제 13) 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{54}$

(2) $\sqrt{80}$

(3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

3 거듭제곱근

정의 14) a의 세제곱근
세제곱해서 a가 되는 수를 a의 $\boxed{\text{세제곱근}}$이라고 한다.

예시 15) 27의 세제곱근을 구하여라.

$x^3 = 27$ 를 만족시키는 수 x를 구하면 된다.

$$x^3 - 27 = 0$$
$$(x-3)(x^2+3x+9) = 0$$

이므로 $x = 3$ 또는 $x^2+3x+9 = 0$ 이다. 즉 $x = 3$ 또는 $x = \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

답 : 3, $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$

예시 16) -27의 세제곱근을 구하여라.

$x^3 = -27$ 를 만족시키는 수 x를 구하면 된다.

$$x^3 + 27 = 0$$
$$(x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

이므로 $x = -3$ 또는 $x^2 - 3x + 9 = 0$ 이다. 즉 $x = -3$ 또는 $x = \frac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

답 : -3, $\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{3-3\sqrt{3}i}{2}$

문제 17) 다음 수들의 세제곱근을 각각 구하여라.

(1) 8　　(2) -8　　(3) 1　　(4) -1

정의 18) $\sqrt[3]{a}$
a가 $\boxed{\text{실수}}$일 때, a의 세제곱근 중 $\boxed{\text{실수}}$인 것을 '세제곱근 a' 또는 $\sqrt[3]{a}$라고 한다.

예시 19)

(1) 예시 15)에서 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이므로 세제곱근 27는 3이다. 즉

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

이다.

(2) 예시 16)에서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이므로 세제곱근 -27는 -3이다. 즉

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

이다.

문제 20) 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{8}$

(2) $\sqrt[3]{-8}$

(3) $\sqrt[3]{1}$

(4) $\sqrt[3]{-1}$

예시 21) 81의 네제곱근을 구하여라.

$x^4 = 81$ 를 만족시키는 수 x를 구하면 된다.

$$x^4 - 81 = 0$$
$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$
$$(x + 3)(x - 3)(x + 3i)(x - 3i) = 0$$

이므로 $x = \pm 3$, $x = \pm 3i$ 이다.

답 : 3, -3, $3i$, $-3i$

문제 22) 다음 수들의 네제곱근을 각각 구하여라.

(1) 0 (2) 16 (3) 4

정의 23) $\sqrt[4]{a}$
a가 $\boxed{\text{양수}}$일 때, a의 네제곱근 중 $\boxed{\text{양수}}$인 것을 '네제곱근 a' 또는 $\sqrt[4]{a}$ 라고 한다.

예시 24)
예시 21)에서 81의 네제곱근 중 양수인 것은 3이므로 네제곱근 81은 3이다. 따라서

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

이다.

문제 25) 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{16}$

(2) $\sqrt[4]{4}$

정리 8), 18), 23)을 잘 살펴보면, n제곱근 a는 n이 짝수인지 홀수인지에 따라 정의가 달라진다는 것을 볼 수 있다.

정의 26) $\sqrt[n]{a}$

i) n이 짝수이면, a가 $\boxed{\text{양수}}$일 때

$$\sqrt[n]{a} = a\text{의 } n\text{제곱근 중 } \boxed{\text{양수}}\text{인 것}$$

ii) n이 홀수이면, a가 $\boxed{\text{실수}}$일 때

$$\sqrt[n]{a} = a\text{의 } n\text{제곱근 중 } \boxed{\text{실수}}\text{인 것}$$

만약 $n = 2$이면 $\sqrt[2]{a}$의 2를 생략해 $\sqrt{a}$로 쓴다.

예시 27)

(1) $\sqrt{64} = 64$의 제곱근 중에 $\boxed{\text{양수}}$인 것 $= 8$

(2) $\sqrt{-64} \quad \Longrightarrow \quad -64$가 음수이므로 $\sqrt{-64}$는 생각하지 않는다.*

(3) $\sqrt[3]{64} = 64$의 세제곱근 중에 $\boxed{\text{실수}}$인 것 $= 4$

(4) $\sqrt[3]{-64} = -64$의 세제곱근 중에 $\boxed{\text{실수}}$인 것 $= -4$

(5) $\sqrt[4]{64} = 64$의 네제곱근 중에 $\boxed{\text{양수}}$인 것 $= 2\sqrt{2}$

(6) $\sqrt[4]{-64} \quad \Longrightarrow \quad -64$가 음수이므로 $\sqrt{-64}$는 생각하지 않는다.

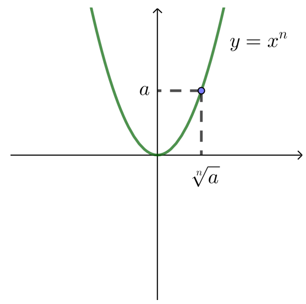
*굳이 $\sqrt{-64}$를 구하면

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64}i = 8i$$

가 되어 허수가 나온다.

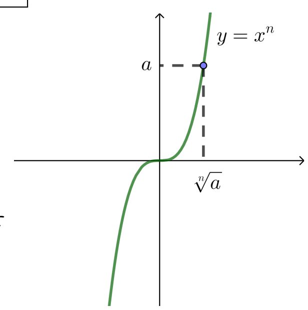
참고 28)

(1) n이 짝수이면, 함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대해서 대칭인 그래프이다(우함수). 따라서 a가 양수이면 $y=x^n$의 그래프와 $y=a$의 그래프의 교점은 두 개이며, 그중 x가 양수인 것은 단 하나 존재한다.



즉, a가 $\boxed{\text{양수}}$이면, $x^n=a$를 만족시키는 $\boxed{\text{양수}}$ x는 단 하나 존재한다.

(2) n이 홀수이면, 함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대해서 대칭인 그래프이다(기함수). 따라서 a가 양수이건 음수이건 상관없이 $y=x^n$의 그래프와 $y=a$의 그래프의 교점은 한 개이다.



즉, a가 $\boxed{\text{실수}}$이면, $x^n=a$를 만족시키는 $\boxed{\text{실수}}$ x는 단 하나 존재한다.

예시 29) 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[3]{-27}$ (2) $\sqrt[5]{100000}$ (3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ (4) $-\sqrt[4]{0.0625}$

(1) $(-3)^3=-27$이므로 $\sqrt[3]{-27}=-3$이다.

(2) $10^5=100000$이므로 $\sqrt[5]{100000}=10$이다.

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$이므로 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$이다.

(4) $0.5^4=0.0625$이므로 $\sqrt[4]{0.0625}=0.5$이다. 따라서 $-\sqrt[4]{0.0625}=-0.5$

답 : **(1)** -3 **(2)** 10 **(3)** $\frac{2}{3}$ **(4)** -0.5

문제 30) 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[5]{32}$ (2) $-\sqrt[4]{0.0016}$ (3) $-\sqrt[3]{-0.125}$ (4) $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$

4 거듭제곱근의 성질

예시 31) $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27}$과 $\sqrt[3]{8 \times 27}$ 을 각각 계산해보면

$$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2 \times 3 = 6$$
$$\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{216} = 6$$

이다. 따라서

$$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \times 27}$$

이다. $a > 0$, $b > 0$에 대하여

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

가 성립하듯

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

도 성립할 것이다.

정리 32) $a > 0$, $b > 0$이고 m, n이 2이상의 정수일 때,

(a) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(c) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

예시 33) (a)를 증명하여라.
좌변을 n제곱하면

$$\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

이다. 이때, $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} > 0$이므로 $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근인 $\sqrt[n]{ab}$와 같다.
따라서 (a)가 성립한다.

문제 34) 다음은 (b), (c), (d)를 증명하는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

(b) 좌변을 n제곱하면

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\boxed{})^n}{(\boxed{})^n} = \boxed{}$$

이때, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} > 0$이므로 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 $\boxed{}$의 양의 n제곱근인 $\sqrt[n]{\boxed{}}$와 같다.
따라서 (b)가 성립한다.

(c) 좌변을 n제곱하면

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = \boxed{}$$

이때, $(\sqrt[n]{a})^m > 0$이므로 $(\sqrt[n]{a})^m$은 $\boxed{}$의 양의 n제곱근인 $\sqrt[n]{\boxed{}}$과 같다. 따라서 (c)가 성립한다.

(d) 좌변을 mn제곱하면

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n = (\boxed{})^n = \boxed{}$$

이때, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} > 0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 $\boxed{}$의 양의 mn제곱근인 $\sqrt[mn]{\boxed{}}$와 같다. 따라서 (d)가 성립한다.

문제 35) 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$

(2) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^{24}}}$

5 자연수 지수

a^x 와 같이 생긴 것을 $\boxed{\text{거듭제곱}}$이라고 부른다. 이때 a를 $\boxed{\text{밑}}$, x를 $\boxed{\text{지수}}$라고 부른다.

문제 36) 다음을 계산하여라.

(1) 5^2　　(2) 3^4　　(3) 2^7

정의 37) 자연수 지수

a가 실수이고 n이 자연수일 때,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 개}}$$

문제 38) 다음 □에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $5^3 \times 5^4 = 5^{\square}$　　(2) $8^2 \times 4^2 = 2^{\square}$　　(3) $6^5 \div 6^2 = 6^{\square}$

자연수 지수에 대해 다음 성질들이 성립한다.

정리 39) 지수법칙 - 자연수 지수

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^m = a^m b^m$

6 정수 지수

예시 40) 다음 □에 들어갈 수를 유추해보자.

$$
\begin{aligned}
2^3 &= 8 \\
2^2 &= 4 \\
2^1 &= 2 \\
2^0 &= \square \\
2^{-1} &= \boxed{\phantom{\frac{1}{2}}} \\
2^{-2} &= \boxed{\phantom{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

지수가 정수일 때, 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

정의 41) 정수 지수
$a \neq 0$이고 n이 자연수이면

(1) $a^0 = 1$

(2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

이때, 0^0, 0^{-1}, 0^{-2} 등은 정의하지 않는다.

예시 42)

(1) $2^0 = 1$

(2) $(-3)^0 = 1$

(3) $3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

문제 43) 다음 값을 구하여라.

(1) $(\sqrt{3})^0$ (2) 4^{-3} (3) $(-2)^{-3}$ (4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$

문제 44) 다음 □에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $3^2 \times 3^{-3} = 3^{\square}$

(2) $5^3 \div 5^5 = 5^{\square}$

(3) $\left(2^{-2}\right)^{-3} = 2^{\square}$

(4) $15^{-1} = 3^{\square} \times 5^{\square}$

따라서 정수 지수에 대해 다음 성질들이 성립한다.

정리 45) 지수법칙 - 정수 지수
$a \neq 0$, $b \neq 0$이고 m, n이 정수일 때,

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^m = a^m b^m$

문제 46) 다음 식을 간단히 하시오.(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

(1) $2^4 \times 3^{-2} \div 6^{-3}$

(2) $(3^3 \times 9^{-2})^{-1}$

(3) $a^3 \div (a^2)^{-1}$

(4) $(a^3 b^{-2})^{-2}$

7 유리수 지수

예시 47) 다음 □에 들어갈 수를 유추해보자.

$$2^0 = 1$$
$$2^{\frac{1}{2}} = \boxed{}$$
$$2^1 = 2$$
$$2^{\frac{3}{2}} = \boxed{}$$
$$2^2 = 4$$

지수가 유리수일 때, 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

정의 48) 유리수 지수
$a > 0$이고 m, $n(n \geq 2)$이 정수이면

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

a가 음수이면, n이 짝수일 때 $a^{\frac{1}{n}}$이 정의되지 않는다. 또 $a = 0$이면 $m < 0$일 때, a^m이 정의되지 않는다. 따라서 a를 양수로 제한한다.

예시 49)

(1) $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$

(2) $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

(3) $3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$

문제 50) 다음을 근호를 사용하여 나타내어라.
(1) $6^{\frac{1}{4}}$ (2) $3^{1.5}$ (3) $2^{1.2}$ (4) $5^{-\frac{3}{2}}$

문제 51) 다음을 $a^{\frac{m}{n}}$의 꼴로 나타내어라.
(1) $\sqrt{6^3}$ (2) $\sqrt[4]{3^{-3}}$ (3) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$

예시 52) 거듭제곱근의 성질[정리 32)]을 사용하여 다음 계산을 할 수 있다.

(1) $3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^4} \times \sqrt[5]{3^2} \overset{(a)}{=} \sqrt[5]{3^4 \times 3^2} = \sqrt[5]{3^6} = 3^{\frac{6}{5}}$

(2) $(10^{\frac{1}{5}})^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[5]{10})^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{10}}\right)^2 \overset{(d)}{=} (\sqrt[15]{10})^2 \overset{(c)}{=} \sqrt[15]{10^2} = 10^{\frac{2}{15}}$

문제 53) 다음 빈 칸에 알맞은 수를 써넣고 정리 32)의 어떤 성질들이 쓰였는지 말하여라.

(1) $5^{\frac{7}{3}} \div 5^{\frac{5}{3}} = 5^{\square}$

(2) $(15)^{\frac{3}{2}} = 3^{\square} \times 5^{\square}$

예시 52)와 문제 53)의 결과를 요약하면

$$3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{5}+\frac{2}{5}}$$
$$\left(10^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}}$$
$$5^{\frac{7}{3}} \div 5^{\frac{5}{3}} = 5^{\frac{7}{3}-\frac{5}{3}}$$
$$(3 \times 5)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{3}{2}}$$

이다. 따라서 유리수 지수에 대해 다음 성질들이 성립한다.

정리 54) 지수법칙 - 유리수 지수

$a > 0$, $b > 0$이고 r, s이 유리수일 때,

(1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

(2) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$

(4) $(ab)^r = a^r b^r$

문제 55) 다음 식을 간단히 하시오.(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

(1) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{5}{8}}$

(2) $5^{-\frac{1}{3}} \div 5^{-2}$

(3) $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}}$

(4) $(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}})^4$

8 실수 지수

지금까지 지수를 유리수까지 확장하였다. 이제 실수 지수에 대해 생각해보자. a^x에서 x가 무리수인 경우를 고려하자.

예시 56) $3^{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$는 무리수, 즉 순환하지 않는 무한소수이다.

$$\sqrt{2} = 1.41421\cdots$$

이제 $3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, \cdots$ 을 차례로 계산하면 이 숫자들은 일정한 수 $4.72880\cdots$에 점점 가까워진다.

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3 \\
3^{1.4} &= 4.65553\cdots \\
3^{1.41} &= 4.70696\cdots \\
3^{1.414} &= 4.72769\cdots \\
3^{1.4142} &= 4.72873\cdots \\
3^{1.41421} &= 4.72878\cdots \\
&\vdots \\
3^{\sqrt{2}} &= 4.72880\cdots
\end{aligned}$$

이 일정한 수 $4.72880\cdots$를 $3^{\sqrt{2}}$로 정한다.

이와 같은 방식으로 $a > 0$이고 x가 실수일 때, a^x를 정의할 수 있다.

실수 지수에 대해서도 지수법칙이 성립함이 알려져 있다.

정리 57) 지수법칙 - 실수 지수

$a > 0$, $b > 0$이고 x, y이 실수일 때,

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x b^x$

예시 58) 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $9^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}} = (3^2)^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 3^{3\sqrt{2}}$

(2) $(2^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \times 3)^{\sqrt{3}} \div 3^{-\sqrt{3}} = 2 \times 3^{\sqrt{3}} \div 3^{-\sqrt{3}} = 2 \times 3^{2\sqrt{3}}$

문제 59) 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $5^{-2\sqrt{2}} \times 5^{3\sqrt{2}}$

(2) $10^{\sqrt{27}} \times 10^{\sqrt{3}}$

(3) $(2^{\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}}$

(4) $9^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

답

문제 1)

(1) $a^2 - b^2$

(2) $a^2 + b^2$

(3) $a^3 - b^3$

문제 2)

(1) $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9)$

(3) $(x+1)(x-1)$

(4) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(5) $(x+3i)(x-3i)$

(6) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$
혹은
$(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

문제 3)

(1) $x = 2, -2$

(2) $x = 0$

(3) $x = 2i, -2i$

(4) $x = -1, 2$

(5) $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(6) $x = -1 \pm i$

문제 7)

(1) $2,\ -2$ (2) 0 (3) $5i,\ -5i$

문제 10)

(1) 4 (2) 6

문제 13)

(1) $3\sqrt{6}$ (2) $4\sqrt{5}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

문제 17)

(1) $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

(2) $-2,\ 1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

(3) $1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

(4) $-1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

문제 20)

(1) 2 (2) -2 (3) 1 (4) -1

문제 22)

(1) 0

(2) $2,\ -2,\ 2i,\ -2i$

(3) $\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i$

문제 25)

(1) 2 (2) $\sqrt{2}$

문제 30)

(1) 2 (2) -0.2 (3) -0.5 (4) $\frac{1}{4}$

문제 34)

(b) $\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b},\ \frac{a}{b},\ \frac{a}{b},\ \frac{a}{b}$

(c) $a^m,\ a^m,\ a^m$

(d) $\sqrt[n]{a}$, a, a, a

문제 35)

(1) 2 (2) 3 (3) 9 (4) 25

문제 36)

(1) 25 (2) 81 (3) 128

문제 38)

(1) 7 (2) 10 (3) 3

문제 43)

(1) 1 (2) $\frac{1}{64}$ (3) $-\frac{1}{8}$ (4) 16

문제 44)

(1) 5 (2) -2 (3) 6 (4) -1, -1

문제 46)

(1) $2^7 \times 3$

(2) 3

(3) a^5

(4) $a^{-6}b^4$

문제 50)

(1) $\sqrt[4]{6}$ (2) $\sqrt{3^3}$ (3) $\sqrt[5]{2^6}$ (4) $\sqrt{\frac{1}{5^3}}$

문제 51)

(1) $6^{\frac{3}{2}}$ (2) $3^{-\frac{3}{4}}$ (3) $2^{\frac{1}{15}}$

문제 53)

(1) $\frac{2}{3}$, (b) (2) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, (a)

문제 55)

(1) $3^{-\frac{1}{8}}$

(2) $5^{\frac{5}{3}}$

(3) $a^{\frac{2}{5}}$

(4) a^2b

문제 59)

(1) $5^{\sqrt{2}}$

(2) $10^{4\sqrt{3}}$

(3) $\frac{1}{8}$

(4) $3^{\sqrt{2}}$

요약

1. 거듭제곱근

-8의 세제곱근 $\Rightarrow$ $x^3 = -8$의 근 $\Rightarrow$ $-2,\ 1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$	81의 네제곱근 $\Rightarrow$ $x^4 = 81$의 근 $\Rightarrow$ $3,\ -3,\ 3i,\ -3i$
$\sqrt[3]{-8}$ $\Rightarrow$ -8의 세제곱근 중 실수 $\Rightarrow$ -2	$\sqrt[4]{81}$ $\Rightarrow$ 81의 네제곱근 중 양수 $\Rightarrow$ 3

2. 지수의 확장

- $5^0 = 1$
- $5^{-1} = \frac{1}{5}$
- $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

3. 지수법칙

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^x \div a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$