수학 : 01 다항식의 연산

2018년 8월 2일

차 례

1 다항식

1.1 다항식

예시 1) $x^2 - 3x + 4$

(1) x에 대한 다항식 $x^2 - 3x + 4$은 세 개의 항 x^2, $-3x$, 4로 이루어져 있다.

(2) x^2의 차수는 2이고 이차항이라고 부른다. 이차항의 계수는 1이다.

(3) $-3x$의 차수는 1이고 일차항이라고 부른다. 일차항의 계수는 -3이다.

(4) 4의 차수는 0이고 상수항이라고 부른다.

(5) 최고차항의 차수가 2이므로 이 다항식 $x^2 + 3x + 4$는 이차식이다.

(6) 이 다항식은 내림차순으로 정리되어 있다. 이것을 오름차순으로 정리하면 $4 + 3x + x^2$이다.

예시 2) $x^3 + 2x^2y - x - 2y$

(1) x, y에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2y - x - 2y$은 네 개의 항으로 이루어져 있다.

(2) x^3의 차수는 x에 대하여 3차이고, 계수는 1이다.

(3) $2x^2y$의 차수는 x에 대하여 2차, y에 대하여 1차이며 계수는 2이다.

(4) 이 다항식을 x에 대해 내림차순으로 정리하면 $x^3 + 2yx^2 - x - 2y$이고, y에 대해 내림차순으로 정리하면 $(2x^2 - 2)y + (x^3 - x)$이다.

(5) 이 다항식은 x에 대하여 삼차식, y에 대하여 일차식이다.

문제 3) 다항식 $x^3 - 6x + 4$에 대한 다음 설명 중 틀린 것을 고르시오.

① 세 개의 항으로 이루어져 있다.

② 일차항의 계수는 6이다.

③ 상수항은 4이다.

④ 3차 다항식이다.

⑤ 오름차순으로 정리하면 $4 - 6x + x^3$이다.

문제 4) 다음 다항식에 대한 설명 중 틀린 것을 고르시오.

① $\sqrt{x+1}$, $\frac{1}{x^2} + 3$은 다항식이 아니다.

② $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$는 x, y, z에 대한 다항식이다.

③ $x^2 + 3xy + 2y^2$은 x, y에 대한 이차식이다.

④ $x^4 - 4x^2y^2 + 3y^4$에서 x^2y^2의 계수는 -4이다.

⑤ $2x^2 - 3xy + 3y^2 - 2x + 4y - 3$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면 $2x^2 - (3y-2)x + 3y^2 - 4y - 3$이다.

1.2 다항식의 덧셈, 뺄셈

다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙들이 성립한다.

정의 5)

(1) 교환법칙 : $A+B=B+A$ $\quad AB=BA$

(2) 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)$ $\quad (AB)C=A(BC)$

(3) 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$

예시 6)

(1) $(3x+2y)+(4x-3y)=(3x+4x)+(2y-3y)=(3+4)x+(2-3)y=7x-y$

(2) $3(x^2-x+1)+2(-x^2+2x-3)=(3x^2-3x+3)+(-2x^2+4x-6)$

$=(3x^2-2x^2)+(-3x+4x)+(3-6)=(3-2)x^2+(-3+4)x+(-3)$

$=x^2+x-3.$

문제 7) $A=3x^2+3xy-5y^2$, $B=x^2-xy-3y^2$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $2A-B$를 계산하여라.

(2) $A-2X=B$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

2 다항식의 나눗셈

2.1 정수의 나눗셈

예시 8)
32을 5로 나누면 몫은 6이고 나머지는 2이다.

$$\begin{array}{r|l} & \;6 \\ \cline{2-2} 5 & 3\;2 \\ & 3\;0 \\ \hline & \;2 \end{array}$$

이것을

$$32 = 5 \times 6 + 2$$

로 표현할 수 있다. 하지만

$$32 = 5 \times 5 + 7$$

이라고 해서 몫이 5이고 나머지가 7이라고 말하지는 않는다. 또한,

$$32 = 5 \times 7 + (-3)$$

라고 해서 몫이 7이고 나머지가 -3이라고 말하지는 않는다.

정의 9)
a가 정수이고, b가 자연수일 때,

$$a = bq + r \qquad (0 \leq r < b)$$

가 성립하면, a를 b로 나누었을 때의 몫은 q, 나머지는 r이다.

예시 10)

(1) 32을 4로 나누면 $(32 = 4 \times 8 + 0)$ 몫이 8이고 나머지가 0이다. 이때 32는 4으로 나누어떨어진다고 한다. 또한 4은 32의 약수, 32는 4의 배수이다.

(2) -32는 5으로 나누면 $(-32 = 5 \times (-7) + 3)$ 몫이 -7이고 나머지가 3이다.

(3) 2로 나누어떨어지는 정수를 **짝수**, 2로 나누었을 때 나머지가 1인 정수를 **홀수**라고 한다. 따라서 5는 홀수, 0은 짝수, -4는 짝수이다.

문제 11)

주어진 a, b에 대하여, a를 b로 나누었을 때의 몫 q와 나머지 r을 각각 구하여라.

(1) $a = 50, \quad b = 4$

(2) $a = 50, \quad b = 5$

(3) $a = 50, \quad b = 12$

(4) $a = 0, \quad b = 4$

(5) $a = -14, \quad b = 5$

(6) $a = -14, \quad b = 2$

2.2 다항식의 나눗셈

정수와 마찬가지로 다항식도 나눌 수 있다.

예시 12)

다항식 x^3+2x^2+5x-3을 x^2-2x-1으로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} & x & +4 & & \\ \cline{2-5} x^2\ -2x\ -1 & x^3 & +2x^2 & +5x & -3 \\ & x^3 & -2x^2 & -x & \\ \cline{2-5} & & 4x^2 & +6x & -3 \\ & & 4x^2 & -8x & -4 \\ \cline{2-5} & & & 14x & +1 \end{array}$$

몫이 $x+4$이고 나머지가 $14x+1$이다.

이것을

$$x^3+2x^2+5x-3=(x^2-2x-1)(x+4)+14x+1$$

로 표현한다. 한편

$$x^3+2x^2+5x-3=(x^2-2x-1)(x+3)+x^2+12x$$

도 성립한다. 하지만 몫이 $x+3$이고 나머지가 x^2+12x이라고 말하지는 않는다.

정의 13)

A, B가 다항식일 때,

$$A=BQ+R \qquad (R\text{의 차수} < B\text{의 차수})$$

가 성립하면, A를 B로 나누었을 때의 몫은 Q, 나머지는 R이다.

예시 14)

(1) $x^3+11=(x+2)(x^2-2x+4)+3$ 이므로 x^3+11 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x+4, 나머지는 3 이다.

(2) $x^4+4x^2+16=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$ 이므로 x^4+4x^2+16 를 x^2+2x+4 로 나누었을 때의 몫은 x^2-2x+4 이고 나머지는 0 이다. 이때, x^4+4x^2+16 는 x^2+2x+4 로 나누어떨어진다고 말한다.

문제 15) 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(3x^3-2x^2-5x+1)\div(x-2)$

(2) $(2x^3-5x^2+4x-1)\div(x^2-2x-2)$

문제 16)

다항식 A 는 x^3+1 으로 나누어떨어지고 이 때의 몫이 $x+1$ 이다. 다항식 A 를 구하여라.

2.3 조립제법

나누는 수 B가 일차식일 때, 다음의 조립제법을 사용할 수 있다.

예시 17)
$3x^3 - 2x^2 - 5x + 1$를 $x - 2$로 나누는 과정은

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -2 & -5 & 1 \\ & & 6 & 8 & 6 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & \boxed{7} \end{array}$$

로 간단히 표시할 수 있다. 이때, 몫은 $3x^2 + 4x + 3$이고, 나머지는 7이다. 이것은 문제 15)의 (1)에서 구한 답과 일치한다.

문제 18) 조립제법을 사용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 3) \div (x + 2)$

(2) $(2x^3 + 3x^2 - 6x + 1) \div (x - \frac{1}{2})$

문제 19)
위의 (2)의 결과를 이용하여 $2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$를 $2x - 1$로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

3 다항식의 곱셈

정리 20) 곱셈공식(1)

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(5) $(ax+b)(bx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

문제 21) 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+1)^2 =$

(2) $(3x-1)^2 =$

(3) $(x+3)(x+4) =$

(4) $(x+2)(3x+2) =$

문제 22)

(1) $x+y=5$, $xy=6$ 일 때 x^2+y^2 의 값을 구하여라.

(2) $x-y=2$, $x^2+y^2=34$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

문제 23) $x+\frac{1}{x}=4$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라(단, $x>1$).

(1) $x^2+\frac{1}{x^2} =$

(2) $x-\frac{1}{x} =$

정리 24) 곱셈공식 (2)

(6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(8) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(9) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(10) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(11) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

예시 25) (6), (8), (10)의 식을 유도해보면

(6) $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) = (a^3+2a^2b+ab^2) + (a^2b+2ab^2+b^3)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(8) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$
$= (a^3 - a^2b + ab^2) + (a^2b - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3$

(10) $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$
$= (a^2+2ab+b^2) + (2ac+2bc) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

문제 26) (7), (9), (11)의 식을 유도하여라.

문제 27) 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+2)^3 =$

(2) $(x-1)^3 =$

(3) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) =$

(4) $(3a-1)(9a^2+3a+1) =$

(5) $(a+2b-c)^2 =$

(6) $(x+2)(x-4)(x+5) =$

문제 28)
$a+b=3$, $ab=-2$일 때, a^3+b^3의 값을 구하여라.

문제 29)
$a-b=1$, $ab=4$일 때, a^3-b^3의 값을 구하여라.

문제 30)
$a+b+c=9$, $ab+bc+ca=8$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

정리 31) 곱셈공식(3)

(12) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

(13) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

예시 32) (13)의 식을 유도해보면

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4$

문제 33) (12)의 식을 유도하여라.

문제 34) 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)=$

(2) $(x-y-1)(x^2+y^2+xy+x-y+1)=$

(3) $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)=$

문제 35)

$a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=9$, $abc=-4$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하여라.

4 인수분해

예시 36)

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라고 한다. 예를 들어, $x^2 - x - 2$를 **인수분해**하면 $(x-2)(x+1)$이다. 반면 $(x-2)(x+1)$를 **전개**하면 $x^2 - x - 2$이다.

$$x^2 - x - 2 \xrightarrow{\text{인수분해}} (x-2)(x+1)$$
$$(x-2)(x+1) \xrightarrow{\text{전개}} x^2 - x - 2$$

정리 37) 인수분해공식 (1)

(1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

(2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

(3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(4) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

(5) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

문제 38) 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2ab^2 + 6b =$

(2) $x^2 + 6x + 9 =$

(3) $25a^2 - 10ab + b^2 =$

(4) $16x^2 - y^2 =$

(5) $x^2 + 10x + 21 =$

(6) $6a^2 - 13a - 5 =$

(7) $3a^2 + 4ab - 7b^2 =$

정리 39) 인수분해 공식 (2)

(6) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

(7) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(8) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(9) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(10) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$

문제 40) 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 =$

(2) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$

(3) $-8a^3 + 36a^2b - 54ab^2 + 27b^3 =$

(4) $a^3 + 8 =$

(5) $27a^3 - 64b^3 =$

(6) $a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab + 4bc + 4ca =$

(7) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx =$

정리 41) 인수분해 공식 (3)

(11) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(12) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

문제 42) 다음 식을 인수분해하여라

(1) $a^3-b^3+c^3+3abc=$

(2) $x^3+y^3-3xy+1=$

(3) $a^4+a^2+1=$

(4) $x^4+4x^2y^2+16y^4=$

5 항등식과 미정계수법

5.1 항등식

> **정의 43) 항등식**
> 주어진 등식의 문자에 어떤 값을 대입해도 항상 성립하는 등식을 항등식이라고 한다.

예시 44)

(1) 등식 $x^2-2x-3=0$에 $x=3$을 대입하면 $0=0$이 되어 성립한다. 하지만 $x=4$을 대입하면 $5\neq 0$이 되어 성립하지 않는다. 따라서 이 등식은 항등식이 아니다.

(2) 등식 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$에 $x=3$을 대입하면 $0=0$이 되고 $x=4$를 대입하면 $5=5$가 되어 성립한다. 그밖에 x에 어떤 값을 대입하더라도 항상 성립한다. 따라서 항등식이 맞다. 실제로 좌변을 잘 정리하면 우변이 되므로, 항등식인 것이 당연하다.

(3) $(x-3y)^2=x^2-6xy+9y^2$에서 좌변을 전개하면 우변이 된다. 따라서 x와 y에 각각 어떤 값을 대입하더라도 이 등식은 항상 성립하며, 항등식이 맞다.

(4) x^3+2x^2+5x-3를 x^2-2x-1로 나누어 생기는 몫과 나머지로 만든

$$x^3+2x^2+5x-3=(x^2-2x-1)(x+4)+14x+1$$

에서도, 우변을 전개하면 좌변이 된다. 따라서 항등식이다.

예시 45)

(1) 등식 $ax+b=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$임을 설명하여라.

(2) 등식 $ax+b=a'x+b'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$임을 설명하여라.

(1) 등식 $ax+b=0$에서 x에 어떤 값을 대입하더라도 항상 성립해야 한다.
$x=0$을 대입하면 $a\cdot 0+b=0$, 즉 $b=0$이다.
$x=1$을 대입하면 $a\cdot 1+0=0$, 즉 $a=0$이다.

(2) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x+(b-b')=0$$

이 되는데, 이 식이 항등식이 되려면 (1)에 의해 $a-a'=0$, $b-b'=0$ 이어야 한다. 따라서 $a=a'$이고 $b=b'$이다.

예시 46)

등식 $(m-1)x+(n+2)=3x+7$이 항등식이 되려면 $m-1=3$, $n+2=7$ 이어야 한다. 따라서 $m=4$, $n=5$이다.

문제 47)

(1) 등식 $ax^2+bx+c=0$가 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$임을 설명하여라.

(2) 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ 임을 설명하여라.

문제 48) 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, a, b, c의 값을 구하여라.

(1) $(a+2)x^2+(b-2)x+3-c=0$

(2) $1-2x+ax^2=5x^2+bx+c$

문제 49)

(1) 등식 $ax+by+c=0$가 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$임을 설명하여라.

(2) 등식 $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$임을 설명하여라.

이상에서 다음의 항등식의 성질을 얻을 수 있다.

정리 50) 항등식의 성질

(a) $ax+b=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$이다.

(b) $ax+b=a'x+b'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$이다.

(c) $ax^2+bx+c=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

(d) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

(e) $ax+by+c=0$이 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

(f) $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

5.2 미정계수법

예시 51) 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 2x^2 - 3x + 4$$

<풀이1>

좌변을 전개하여 정리하면

$$\begin{aligned} a(x-1)^2 + b(x-1) + c &= ax^2 - 2ax + a + bx - b + c \\ &= ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c) \end{aligned}$$

이므로 주어진 항등식은

$$ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c) = 2x^2 - 3x + 4$$

가 되고, 따라서 $a = 2$, $-2a+b = -3$, $a-b+c = 4$이다. 이 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$이 된다.

<풀이2>

주어진 식이 항등식이므로 x에 $x = 1$, $x = 0$, $x = 2$를 넣어도 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} x = 1 &\ ;\ c = 3 \\ x = 0 &\ ;\ a - b + c = 4 \\ x = 2 &\ ;\ a + b + c = 6 \end{aligned}$$

이 식들을 연립하면 $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$이다.

이처럼 항등식에서 아직 정해지지 않은 계수(=미정계수)의 값을 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다. <풀이 1>에서처럼 양변의 계수를 비교하는

방법을 계수비교법, <풀이 2>에서처럼 x에 여러 값들을 대입하는 방법을 수치대입법이라고 한다.

문제 52) 계수비교법을 이용하여 다음 항등식에서 $a+b+c$를 구하여라.

$$x^3 + ax^2 - 36 = (x+c)(x^2+bx-12)$$

문제 53) 수치대입법을 이용하여 다음 항등식에서 $a^2 - b^2$의 값을 구하여라.

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1$$

문제 54) 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $2x^2 - 2 = (x+1)(ax+b)$

(2) $a(x-1) + b(x-2) = 2x - 3$

5.3 나머지정리와 인수정리

$3x^3 - 2x^2 - 5x + 1$를 $x-2$로 나누었을 때 몫과 나머지를 구하는 과정에는 다음의 두 방법이 있었다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3x^2 & +4x & +3 & \\ \cline{2-5}
x-2 & 3x^3 & -2x^2 & -5x & +1 \\
 & 3x^3 & -6x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & -5x & +1 \\
 & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{2-5}
 & & & 3x & +1 \\
 & & & 3x & -6 \\ \cline{2-5}
 & & & & 7
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
2 & 3 & -2 & -5 & 1 \\
 & & 6 & 8 & 6 \\ \hline
 & 3 & 4 & 3 & 7
\end{array}$$

하지만 몫은 제외하고, 나머지만 구하려고 한다면 훨씬 쉽게 구하는 방법이 있다.

정리 55) 나머지정리
다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

증명)
$f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 하면

$$f(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$$

이다. 이 식은 항등식이므로 $x = \alpha$를 대입해도 성립한다. 따라서 $f(\alpha) = R$ 이다. □

예시 56)

(1) 위의 예에서 나머지정리를 쓰면, $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$$R = f(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = 7$$

이다.

(2) $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $(-3)^3 - 2(-3)^2 + 3(-3) + 4 = -50$ 이다.

문제 57) $2x^3 - 2x^2 + 1$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $x - 2$ (2) $x + \frac{1}{2}$

문제 58)
$x^3 - x^2 + ax + 4$을 $x + 2$로 나누었을 때의 나머지가 2일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

예시 59)
다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지가 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$임을 보여라.

$f(x)$를 $ax + b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 하면

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

이다. 이 식은 항등식이므로 $x = -\frac{b}{a}$를 대입해도 성립한다. 따라서 $f\left(-\frac{b}{a}\right) = R$이다. □

문제 60) $3x^2 + x + 2$를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $2x + 1$ (2) $3x - 2$

예시 61)

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 3이고, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$이라고 하자. 나누는 식 $(x-1)(x+2)$가 이차식이므로, $R(x)$는 일차 이하의 다항식 $ax+b$이다. 그러면

$$f(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$$

이다. 문제의 조건에서 $f(1) = 3$이므로

$$a + b = 3$$

또, $f(-2) = -3$이므로

$$-2a + b = -3$$

이다. 두 식을 빼면 $3a = 6$, $a = 2$이다. 따라서 $b = 1$이다. 그러므로 $R(x) = 2x + 1$이다. □

문제 62)

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 4이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 8이다. 이때 $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$f(\alpha)$는 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지이다. 따라서 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

정리 63) 인수정리 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

예시 64)
다항식 $f(x)=x^3+x^2+4$에서 $f(-2)=(-2)^3+(-2)^2+4=0$이므로, $f(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어진다. 조립제법을 써서 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x+2)(x^2-x+2)$$

가 된다. 이때 $f(x)$가 $x+2$를 **인수**로 가진다라고 말한다.

문제 65) 다음 일차식 중에서 다항식 x^3+5x^2+2x-8의 인수인 것을 모두 찾아라.

$x, \qquad x-1, \qquad x+1, \qquad x+2$

문제 66)
다항식 x^3+x^2+ax+a가 $x-4$로 나누어떨어지도록 상수 a의 값을 정하여라.

답

문제 3)

②

문제 4)

⑤

문제 7)

(1) $5x^2+7xy-7y^2$

(2) $x^2+2xy-y^2$

문제 11)

(1) $q=12, \quad r=2$

(2) $q=10, \quad r=0$

(3) $q=4, \quad r=2$

(4) $q=0, \quad r=0$

(5) $q=-3, \quad r=1$

(6) $q=-7, \quad r=0$

문제 15)

(1) 몫 : $3x^2+4x+3$, 나머지 : 7

(2) 몫 : $2x-1$, 나머지 : $6x-3$

문제 16)

$A=x^4+x^3+x+1$

문제 18)

(1) 몫 : x^2-4x+3, 나머지 : -3

(2) 몫 : $2x^2+4x-4$, 나머지 : -1

문제 19)

몫 : x^2+2x-2, 나머지 : -1

문제 21)

(1) $4x^2+4x+1$

(2) $9x^2-6x+1$

(3) $x^2+7x+12$

(4) $3x^2+8x+4$

문제 22)

(1) 13

(2) 15

문제 23)

(1) 14

(2) $2\sqrt{3}$

문제 26)

(7) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)$
$= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2) = (a^3-2a^2b+ab^2) - (a^2b-2ab^2+b^3)$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(9) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)$
$= (a^3+a^2b+ab^2) - (a^2b+ab^2+b^3) = a^3 - b^3$

(11) $(x+a)(x+b)(x+c) = \{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$
$= \{x^2+(a+b)x+ab\}x + \{x^2+(a+b)x+ab\}c$
$= \{x^3+(a+b)x^2+abx\} + \{cx^2+(ca+bc)x+abc\}$
$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

문제 27)

(1) $x^3+6x^2+12x+8$
(2) x^3-3x^2+3x-1
(3) x^3+8y^3
(4) $27a^3-1$
(5) $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$
(6) $x^3+3x^2-18x-40$

문제 28)

45

문제 29)

13

문제 30)

65

문제 33)

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\=&a(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+b(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&+c(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\=&(a^3+ab^2+c^2a-a^2b-abc-ca^2)+(a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc)\\&+(ca^2+b^2c+c^3-abc-bc^2-c^2a)\\=&a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

문제 34)

(1) $8a^3+b^3+c^3+6abc$
(2) $x^3-y^3+xy+x-y-1$
(3) $16x^4+4x^2y^2+y^4$

문제 35)

15

문제 38)

(1) $2b(3ab+3)$
(2) $(x+3)^2$
(3) $(5a-b)^2$
(4) $(4x+y)(4x-y)$
(5) $(x+3)(x+7)$
(6) $(2a-5)(3a+1)$
(7) $(a-b)(3a+7b)$

문제 40)

(1) $(x+3)^3$
(2) $(x-2)^3$
(3) $(-2a+3b)^3$
(4) $(a+2)(a^2-2a+4)$
(5) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$
(6) $(a+b+2c)^2$
(7) $(x-y+z)^2$

문제 42)

(1) $(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$
(2) $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$
(3) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
(4) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

문제 47)

(1) $x = 0$을 대입하면 $c = 0$이다. $x = 1$을 대입하면 $a + b = 0$이다. $x = -1$을 대입하면 $a - b = 0$이다. 두 식을 연립하면 $a = 0$, $b = 0$를 얻는다.

(2) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하면

$$(a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$$

이다. 따라서 (1)에 의해 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$를 얻는다.

문제 48)

(1) $a = -2$, $b = 2$, $c = 3$

(2) $a = 5$, $b = -2$, $c = 1$

문제 49)

(1) $x = 0$, $y = 0$을 대입하면 $c = 0$이다. $x = 1$, $y = 0$을 대입하면 $a = 0$이다. $x = 0$, $y = 1$을 대입하면 $b = 0$이다.

(2) 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하면

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

이다. 따라서 (1)에 의해 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$를 얻는다.

문제 52)

14

문제 53)

20

문제 54)

(1) $a = 2$, $b = -2$

(2) $a = 1$, $b = -6$, $c = 10$

문제 57)

(1) 9

(2) $\frac{1}{4}$

문제 58)

-5

문제 60)

(1) $\frac{9}{4}$

(2) 4

문제 62)

$x + 5$

문제 65)

$x - 1$, $x + 2$

문제 66)

-16