

태희, 추가 과제 01

2018년 7월 7일

문제 1)

x 에 대한 다항식 $x^4 + ax + b$ 가 $(x - 2)^2$ 으로 나누어떨어질 때, 몫을 $Q(x)$ 라고 하자. 두 상수 a, b 에 대하여 $a + b + Q(2)$ 의 값을 구하여라.

문제 2)

$2018^3 - 27$ 을 $2018 \times 2021 + 9$ 로 나눈 몫은?

- ① 2015 ② 2025 ③ 2035 ④ 2045 ⑤ 2055

문제 3)

모든 실수 x 에 대하여 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad P(x) + Q(x) = 4$$

$$(나) \quad \{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

$P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수일 때, $P(2) + Q(3)$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제 1) 2018년 6월 고1 교육청 모의고사 26번

$$x^4 + ax + b = (x - 2)^2 Q(x) \quad (1)$$

에서 $x = 2$ 를 대입하면

$$16 + 2a + b = 0$$

따라서 $b = -2a - 16$ 이다. 이것을 (1)에 대입하면

$$x^4 + ax - 2a - 16 = (x - 2)^2 Q(x)$$

이다. 조립제법을 사용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & a & -2a-16 \\ & & 2 & 4 & 8 & 2a+16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & a+8 & 0 \end{array}$$

$$(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8) = (x - 2)^2 Q(x)$$

이다. 이 식을 $x - 2$ 로 나누면

$$x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8 = (x - 2)Q(x) \quad (2)$$

여기에 $x = 2$ 를 대입하면 $a + 32 = 0$, $a = -32$. 또한 $b = 48$. 따라서 (2)는

$$x^3 + 2x^2 + 4x - 24 = (x - 2)Q(x)$$

이 된다. 한편

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & 4 & -24 \\ & & 2 & 8 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 12 & 0 \end{array}$$

에서

$$(x - 2)(x^2 + 4x + 12) = (x - 2)Q(x)$$

이고 다시 양변을 $x - 2$ 로 나누면

$$Q(x) = x^2 + 4x + 12 \quad (3)$$

이다. 따라서 $Q(2) = 24$. 그러므로

$$a + b + Q(2) = -32 + 48 + 24 = 40$$

답 : 40

문제 2) 2018년 6월 고1 교육청 모의고사 15번

정수 a 와 자연수 b 에 대하여

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b)$$

이면 a 를 b 로 나누었을 때 몫이 q 이고 나머지가 r 이다.

곱셈공식 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 으로부터

$$\begin{aligned} x^3 - 27 &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \\ &= (x - 3)\{x(x + 3) + 9\} \end{aligned}$$

$x = 2018$ 을 대입하면

$$2018^3 - 27 = 2015 \cdot (2018 \times 2021 + 9)$$

따라서 $2018^3 - 27$ 를 $2018 \times 2021 + 9$ 로 나누면 몫이 2015이고 나머지가 0이다.

답 : ①

문제 3) 2018년 6월 고1 교육청 모의고사 21번

(나)의 좌변을 인수분해하여 정리하면 ($P(x) = P$, $Q(x) = Q$ 로 표기)

$$\begin{aligned} P^3 + Q^3 &= (P + Q)(P^2 - PQ + Q^2) \\ &\stackrel{(\text{가})}{=} 4(P^2 - PQ + Q^2) \end{aligned}$$

따라서

$$P^2 - PQ + Q^2 = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4$$

(가)를 변형한 $Q = 4 - P$ 를 대입하면

$$3P^2 - 12P + 16 = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4$$

$$3P^2 - 12P = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 12$$

$$P(P - 4) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$$

조립제법을 써서 우변을 인수분해하면

$$P(P - 4) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 2)$$

이것을 다시 정리하면

$$P(P - 4) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

따라서

$$P(x) = x^2 + x + 2, \quad P(x) - 4 = x^2 + x - 2$$

혹은

$$P(x) = -x^2 - x + 2, \quad P(x) - 4 = -x^2 - x - 2$$

$P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x) = -x^2 - x + 2$$

또한 $Q = 4 - P$ 에서

$$Q = x^2 + x + 2$$

$$P(2) + Q(3) = (-4) + 14 = 10$$

답 : ⑤