현빈

2014. 11. 14 木~

목차

2 정수의 나누어떨어짐 특성

정의 2. 1) 자연수와 정수

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

라고 하자. 그러면

$$\begin{cases} x\text{는 }\textbf{자연수}\text{이다.} & \iff x \in \mathbb{N} \\ x\text{는 }\textbf{정수}\text{이다.} & \iff x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

정의 2. 2) 십진법 숫자의 표기

10보다 작은 자연수 a, b, c에 대해 $\overline{abc}$를 $\overline{abc} = 100a + 10b + c$로 정의하자. 마찬가지로 10보다 작은 k개의 자연수 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_k에 대해 $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$를

$$\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

로 정의하자($10^0 = 1$).

정의 2. 3) 나누어떨어짐 (divisibility)

두 자연수 a, b에 대해 $b = ak$를 만족시키는 자연수 k가 존재하면 b는 a로 **나누어떨어진다**고 말하고, 이를 기호로 $a \mid b$라고 한다.

정의 2. 4) 소수 (prime, 素數)

자연수 $p \neq 1$에 대해 $a \mid p$일 때 $a = p$이면 p는 **소수**이다. 즉 1이 아닌 약수가 자기 자신밖에 없으면 소수이다.

정리 2. 5)

소수는 무한히 많이 존재한다.

증명. 귀류법으로 증명이 가능하다. 36단원에서 증명하겠다. □

정리 2. 6) 산술의 기본정리(The Fundamental Theorem of Arithmetic)

임의의 자연수는 소인수분해될 수 있다. 또 소인수분해가 되는 방식은 유일하다. 즉 자연수 A에 대해

$$A = {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot \cdots \cdot {p_n}^{k_n}$$

를 만족시키는 p_i, k_i 들이 유일하게 존재한다.

증명. 당연해 보이는 정리이고 아주 중요한 정리이지만 증명하기가 쉽지는 않다. 대학 수준의 수학을 이용하면 증명 가능하다. □

정리 2. 7)

자연수 a, b, c에 대해 $a \mid b$, $a \mid c$ 이면 $a \mid (b+c)$ 이다.

증명. $b = ak$, $c = al$ 을 만족시키는 자연수 k, l 이 존재한다. 그러면 $b+c = a(k+l)$ 이고 이 때 $k+l$ 은 자연수이다. □

정리 2. 8)

자연수 a, b, c(b>c) 에 대해 $a \mid b$, $a \mid c$ 이면 $a \mid b-c$ 이다.

증명. $b = ak$, $c = al$ 을 만족시키는 자연수 k, l 이 존재한다. 그러면 $b-c = a(k-l)$ 이고 이 때 $k-l$ 은 정수이다. $k-l = 0$ 이면 $b = c$ 이 된다. 또 $k-l < 0$ 이면 $b < c$ 가 된다. 따라서 $k-l$ 은 자연수이다. □

정리 2. 9)

자연수 a, b에 대해 $a \mid b$, $b \mid c$ 이면 $a \mid c$ 이다.

증명. $b = ak$, $c = bl$ 을 만족시키는 자연수 k, l 이 존재한다. 그러면 $c = (ak)l = a(kl)$ 이고 kl 은 자연수이므로 $a \mid c$ 이다. □

정리 2. 10)

$p \mid ab$ 이고 $p \nmid a$ 이면 $p \mid b$ 이다.

증명. 정리 2. 6로부터 당연하다. □

정리 2. 11)

소수 p, $q(\neq p)$, 자연수 a 에 대해

$$p \mid a \,\&\, q \mid a \iff pq \mid a$$

이다.

증명. ($\Leftarrow$) 정리 2. 9로부터 당연하다. ($\Rightarrow$) 정리 2. 6로부터 당연하다. $\square$

정리 2. 12)

$ab \mid c$ 이면 $a \mid c$ 이고 $b \mid c$ 이다.

증명. c=(ab)k 인 자연수 k 가 존재하며 이를 $c = a(bk)$ 꼴로 다시 쓸 수 있다. 따라서 $a \mid c$ 이다. 마찬가지로 $b \mid c$ 이다. $\square$

정리 2. 13)

세 자리의 자연수 $\overline{abc}$ 에 대해

(1) $2 \mid \overline{abc} \iff 2 \mid c$

(2) $5 \mid \overline{abc} \iff 5 \mid c$

(3) $4 \mid \overline{abc} \iff 4 \mid \overline{bc}$

(4) $25 \mid \overline{abc} \iff 25 \mid \overline{bc}$

이다.

증명. (1) $2 \mid 100a + 10b$ 이므로 정리 2.7, 정리 2.8에 의해

$$2 \mid \overline{abc} \iff 2 \mid 100a + 10b + c \iff 2 \mid c$$

이다. (2) 도 마찬가지로 증명할 수 있다. (3) $4 \mid 100a$ 이므로 정리 2.7, 정리 2.8에 의해

$$4 \mid \overline{abc} \iff 4 \mid 100a + 10b + c \iff 2 \mid 10 + c$$

이다. (4) 도 마찬가지로 증명할 수 있다. $\square$

정리 2. 14)

일반적으로 $n+1$자리의 자연수 $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$에 대해, 자연수 k가 $k \le n$을 만족시킬 때

$$2^k \,\Big|\, \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \iff 2^k \,\Big|\, \overline{a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$$
$$5^k \,\Big|\, \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \iff 5^k \,\Big|\, \overline{a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$$

이다.

증명. 증명생략. □

정리 2. 15)

네 자리의 자연수 $\overline{abcd}$에 대해

(1) $3 \mid \overline{abcd} \iff 3 \mid a+b+c+d$

(2) $9 \mid \overline{abcd} \iff 9 \mid a+b+c+d$

(3) $27 \mid \overline{abcd} \not\Longleftrightarrow 27 \mid a+b+c+d$

증명. (1) $3 \mid 999a + 99b + 9c$이므로 정리 2.7, 정리 2.8에 의해

$$3 \mid \overline{abcd} \iff 3 \mid 1000a + 100b + 10c + d \iff 3 \mid a+b+c+d$$

이다. 마찬가지의 방법으로 (2)도 성립한다. (3) $\overline{abcd} = 9945$이면 $27 \nmid 9945$이고 $27 \mid 9+9+4+5$이다. □

일반적으로 자연수 n에 대해서 n자리의 자연수에 대해서도 정리 2. 15에 해당하는 정리가 성립한다(cf. p33, ④).

3 절댓값에 관한 문제

정리 3. 1) 절댓값기호

실수 a에 대해

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

정리 3. 2)

실수 a에 대해 $|-a| = |a|$이다.

증명. $a > 0(\therefore -a < 0)$이면 $|-a| = -(-a) = a = |a|$. $a = 0$이면 $|-a| = |-0| = |0| = |a|$. $a < 0(\therefore -a > 0)$이면 $|-a| = -a = |a|$. □

정리 3. 3)

실수 a에 대해

(1) $|a| = a \iff a \geq 0$,

(2) $|a| = -a \iff a \leq 0$.

증명. $(\Rightarrow)$ $|a| = a$라고 가정하자. $a < 0$이면 $-a = a$이고, 따라서 $a = 0$, 모순. 따라서 $|a| = a$이면서 $a < 0$일 수 없다. 즉 $a \geq 0$이어야 한다. $(\Leftarrow)$ 정의 3. 1로부터 당연하다.

(2) 정리 3. 2, 정리 3. 3 (1)에 의해

$$\begin{aligned} |a| = -a &\overset{\text{정리3.2}}{\iff} |-a| = -a \\ &\overset{\text{정리3.3(1)}}{\iff} -a \geq 0 \\ &\iff a \leq 0 \end{aligned}$$

□

정리 3. 4)

실수 a, $a_i (1 \leq i \leq n)$에 대해

(1) $|a| \geq 0$.

(2) $|a| = 0 \iff a = 0$.

(3) $|a_1| + \cdots + |a_n| = 0 \iff a_1 = 0 \;\&\; \cdots \;\&\; a_n = 0$.

증명. 정의 3. 1로부터 당연하다. □

정리 3. 5) 절댓값의 곱

실수 a, b에 대해 $|a| \cdot |b| = |ab|$가 성립한다.

증명. i) a 혹은 b가 0인 경우 ; $\mathrm{LHS} = \mathrm{RHS}$

ii) $a > 0 \,\&\, b > 0$; $\mathrm{LHS} = ab = \mathrm{RHS}$

iii) $a > 0 \,\&\, b < 0$; $\mathrm{LHS} = a(-b) = -ab = \mathrm{RHS}$

iv) $a < 0 \,\&\, b > 0$; $\mathrm{LHS} = (-a)b = -ab = \mathrm{RHS}$

v) $a < 0 \,\&\, b < 0$; $\mathrm{LHS} = (-a)(-b) = \mathrm{RHS}$

□

정리 3. 6) 절댓값의 합, 삼각부등식 (Triangular inequality)

실수 a, b에 대해

(1) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(2) $|a + b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0.$

증명. (1) i) a 혹은 b가 0인 경우 ; 일반성을 잃지 않고 $b = 0$이라고 하자. 그러면 $\mathrm{LHS} = |a + 0| = |a| = |a| + 0 = \mathrm{RHS}$. ii) $a > 0$, $b > 0$인 경우 ; $\mathrm{LHS} = a + b = \mathrm{RHS}$. iii) $a < 0$, $b < 0$인 경우 ; $\mathrm{LHS} = -(a + b) = (-a) + (-b) = \mathrm{RHS}$. iv) a, b 중 하나는 양수, 하나는 음수인 경우 ; 일반성을 잃지 않고 $a > 0$, $b < 0$이라고 하자. $|a| = |b|$이면, $\mathrm{LHS} = |0| = 0 < a - b = \mathrm{RHS}$. 이제 $|a| \neq |b|$인 경우를 고려하자. 일반성을 잃지 않고 $|a| > |b|$라고 가정할 수 있다. 즉 $a + b > 0$. 따라서 $\mathrm{LHS} = a + b < a - b = \mathrm{RHS}$.

(2) (1)의 증명과정으로부터 당연하다. □

정리 3. 7) 수직선 상에서의 거리

수직선 상의 두 점 A, B의 좌표가 각각 a, b일 때, A와 B 사이의 거리인 $d(A, B)$는 다음과 같이 정의한다.

$$d(A, B) = |a - b|.$$

정리 3. 8)

수직선 위의 세 점 A, B, C 에 대해 다음이 성립한다.

(1) $d(A, B) = d(B, A)$

(2) $d(A, B) + d(B, C) \leq d(A, C)$.

즉, 실수 a, b, c 에 대해

(1) $|a - b| = |b - a|$

(2) $|a - b| + |b - c| \leq |a - c|$

가 성립한다.

증명. 각각 정리 3. 2와 정리 3. 6로부터 당연하다. □

정리 3. 9) 부분분수 (Partial Fraction)

실수 a, b, 정수 n 에 대해 $(a \neq b,\ n \neq 1,\ n \neq 0)$

(1) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(2) $\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

가 성립한다.

4 미지수가 1개인 일차방정식과 부등식

정의 4. 1) 일차방정식과 일차부등식

실수 $a \neq 0$, b에 대해 $ax + b = 0$ 꼴의 등식을 **일차방정식**이라고 한다. 또 $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b \leq 0$, $ax+b \geq 0$ 꼴의 부등식을 **일차부등식**이라고 한다.

정리 4. 2) $ax + b = 0$ 꼴의 등식의 풀이

a, b가 실수일때,

i) $a \neq 0$이면 $ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$이다.

ii) $a = 0$, $b \neq 0$이면 근이 존재하지 않는다(불능不能). 즉, 어떤 실수 x도 위 등식을 만족시키지 않는다.

iii) $a = 0$, $b = 0$이면 근이 무수히 많다(부정不定). 즉, 모든 실수 x에 대해서 위 등식을 만족시킨다.

공리 4. 3)

실수는 '$<$'로 표기하는 이항관계를 가지며 이를 부등호라고 한다.

(1) 실수 a, b에 대해 $a < b$이거나 $a = b$이거나 $a < b$이다.

(2) 실수 a, b, c에 대해 $a < b$, $b < c$이면 $a < c$이다.

공리 4. 4)

실수 a, b, c에 대해

(1) $a + c < b + c$이다.

(2) $c > 0$이면 $ac < bc$이다.

(3) $c < 0$이면 $ac > bc$이다.

공리란, 증명할 필요가 없는 문장으로서, 다른 명제(정리)를 증명하는 데 있어 기초가 되는 원리이다. 위에 두 공리에 적힌 내용들을 증명하는 것은 불가능하다. 하지만 실수를 구성할 때에 위의 공리들을 가지고 실수를 정의하기 때문에 참인 명제라고 볼 수 있다.

5 미지수가 2개인 일차연립방정식 및 응용

정의 5. 1) 다항식

(1) 음이 아닌 정수 n과 실수 a_i $(1 \le i \le n)$, $(a_n \neq 0)$에 대해서

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

꼴의 식을 'x에 대한 다항식'이라고 한다.

(2) 음이 아닌 정수 m, n과 실수 a_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ a_{mn} \neq 0)$에 대해서

$$\begin{gathered}
a_{mn}x^m y^n + a_{m,n-1}x^m y^{n-1} + \cdots + a_{m1}x^m y + a_{m0}x^m \\
+a_{m-1,n}x^{m-1}y^n + a_{m-1,n-1}x^{m-1}y^{n-1} + \cdots + a_{m-1,1}x^{m-1}y + a_{m-1,0}x^{m-1} \\
\vdots \\
a_{0n}y^n + a_{0,n-1}y^{n-1} + \cdots + a_{01}y + a_{m0}
\end{gathered}$$

꼴의 식을 'x와 y에 대한 다항식'이라고 한다. 예를 들어 x^2+x+2는 x에 대한 다항식이고 $2x^3y^2 + x^3y^2 - 3x^2y^2 + x^2 + 2y - 1$은 x, y에 대한 다항식이다.

(3) (1)과 (2)의 정의에서, a_ix^i 혹은 $a_{ij}x^iy^j$ 각각을 **항**이라고 한다. 또 a_i 혹은 a_{ij} 들을 **계수**라고 한다. 그리고 (1)에서 n을 **차수**라고 하고, (2)에서 m을 'x에 대한 차수', n을 'y에 대한 차수'라고 한다. a_nx^n 혹은 $a_{mn}x^my^n$을 **최고차항**이라고 하고, a_0, a_{00}를 **상수항**이라고 한다. 또 항이 한 개인 다항식을 **단항식**이라고 부른다.

(4) 마찬가지로 세 개 이상의 미지수에 대해서도 다항식을 정의할 수 있다.

정의 5. 2) 연립방정식

n개의 미지수의 다항식으로 만들어지는 두 개 이상의 방정식에 대해 최고차수가 m이면 이 일련의 식들을 일컬어 'n원 m차 연립방정식'이라고 한다. 예를 들어

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

은 x, y에 대한 이원이차연립방정식이고

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ 2x+y+z=9 \end{cases}$$

는 x, y, z에 대한 삼원일차연립방정식이다.

정리 5. 3) 이원일차연립방정식

$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_i \neq 0$인 이원일차연립방정식

$$a_1x+b_1y=c_1 \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \tag{2}$$

은 다음과 같이 풀어낼 수 있다.

i) $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ (i.e. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$)

$b_2 \times (1) - b_1 \times (2)$를 계산하면 $(a_1b_2-a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$이다. 이때 $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$이므로

$$x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

이다. 마찬가지로 $a_1 \times (2) - a_2 \times (1)$를 계산하면 $(a_1b_2-a_2b_1)x = a_1c_2-a_2c_1$이다. 이때 $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$이므로

$$x = \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

이다.

ii) $a_1b_2-a_2b_1 = 0$ (i.e. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$)

$b_2 \times (1) - b_1 \times (2)$를 계산하면

$$0 \cdot x = b_2c_1 - b_1c_2 \tag{3}$$

이다.

ㄱ) $b_2c_1-b_1c_2=0$ (i.e. $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$)이면, 임의의 실수 x에 대해서 y를 (1)을 만족시키는 실수인 $y = \frac{c_1-a_1x}{b_1}$라고 하면 이러한 x, y는 (2)도 만족시킨다 ;

$$\begin{aligned} a_2x+b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1} &= a_2x+\frac{b_2}{b_1}c_1-\frac{b_2}{b_1}a_1x \\ &= a_2x+\frac{c_2}{c_1}c_1-\frac{a_2}{a_1}a_1x \\ &= c_2. \end{aligned}$$

따라서 연립방정식의 해는 무한히 많다 (부정不定).

ㄴ) $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ (i.e. $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$) 이면 (3) 의 해가 없으므로 연립방정식의 해도 존재하지 않는다(불능不能).

정리 5. 4) 이원연립방정식의 기하학적 해석

$f(x, y)$, $g(x, y)$ 가 x, y 에 대한 다항식일 때, 연립방정식

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

의 해의 집합을 $R = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0,\, g(x, y) = 0\}$ 은, xy 평면 상의 두 그래프 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 의 교집합과 같다.

증명. $F = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $G = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ 라고 하면, $F \cap G = R$ 이다. □

즉 연립방정식이라는 '대수적인' 문제를 두 도형의 교점을 찾는 '기하학적' 문제로 바꿀 수 있다. 예를 들어, 다음과 같은 이원이차연립방정식이 제시되어 있을 때

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

(즉 $f(x, y) = y - x^2$, $g(x, y) = y - x - 2$ 이다.) 이 방정식의 해의 집합인 {(-1,2),(2,4)}은 두 그래프 $F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ 와 $G = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$ 의 교집합과 같다. (그림. 1)

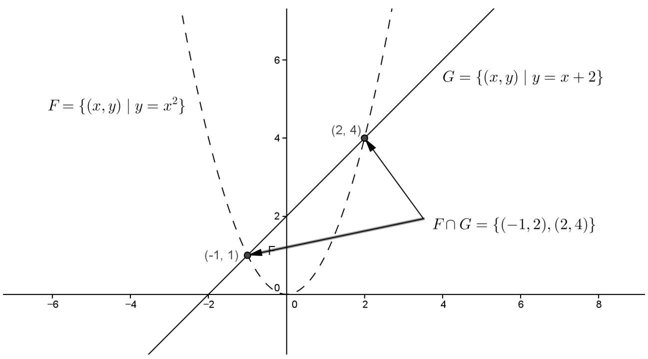

그림. 1: 연립방정식 $y = x + 1$, $y = x^2$ 의 기하학적 해석

6 정식의 계산

공리 6. 1)

실수 a, b에 대해

(1) $a+b=b+a$

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(3) $ab=ba$

(4) $(ab)c=a(bc)$

(5) $a(b+c)=ab+ac$

가 성립한다. 공리 4. 3, 4와 마찬가지로 실수를 정의할 때 사용되는 가정이므로 증명될 수는 없다. 따라서 공리로 치부하겠다.

정리 6. 2)

다항식 A, B, C에 대해

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $AB=BA$

(4) $(AB)C=A(BC)$

(5) $A(B+C)=AB+AC$

가 성립한다.

증명. 다항식 (1) 에서 미지수에는 실수가 대입되므로 다항식 자체도 하나의 실수라고 생각할 수 있다. 따라서 공리 5. 1에 의해 성립한다. □

정리 6. 3)

실수 a, b, c, d에 대해서

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

(3) $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

(4) $(a_1+\cdots+a_n)^2 = {a_1}^2+\cdots+{a_n}^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots a_1a_n+a_2a_3+a_2a_4+\cdots a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n)$

정의 6. 4) 파스칼Pascal의 삼각형(혹은 양휘揚輝의 삼각형)

다음과 같이, 0이 아닌 정수 n에 대해, n행에 $(n+1)$개의 숫자를 적되 첫 숫자와 마지막 숫자를 1로, $k(1<k<n+1)$번째 숫자를 $n-1$행의 $(k-1)$번째 숫자와 k번째 숫자의 합으로 정할 때, 이 숫자들의 삼각형을 **파스칼Pascal의 삼각형** 혹은 **양휘揚輝의 삼각형**이라고 부른다.

이때 n행의 k번째 숫자를 $\binom{n}{k}$로 표기한다$(0 \le k \le n)$. 따라서

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

이다(그림. 2).

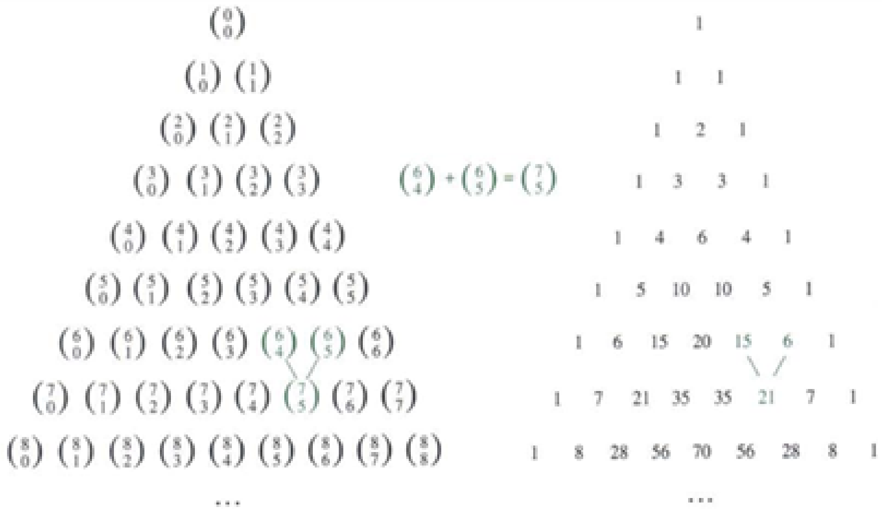

그림. 2: 파스칼의 삼각형

정의 6. 5) 조합

${}_nC_k$를 $k=0$ 이거나 $k=n$인 경우 1로 정의하고 $k \neq 0, n$인 경우 '1, 2, $\cdots$, n의 n개의 숫자 중 k개를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수'로 정의하자.

예를 들어, 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자 중 2개를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수는 $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$의 6가지이므로, ${}_4C_2 = 6$이다.

정리 6. 6)

${}_nC_k = \binom{n}{k}$이다.

증명. $1, 2, 3, \cdots, n$의 n개의 자연수 중 k개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수는, $n-1$개의 자연수 중 k개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수에 $n-1$개의 자연수 중 $k-1$개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑은 후 n을 추가하는 경우의 수를 더한 값과 같다. 즉

$$ {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k = {}_nC_k $$

이다. 또한 ${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$이므로 $\binom{n}{k}$와 ${}_nC_k$의 정의는 완전히 같다. 따라서 $\binom{n}{k} = {}_nC_k$이다. □

정리 6. 7) 이항정리 (Binomial Theorem)

실수 a, b와 음이 아닌 정수 n에 대해

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \binom{0}{0}a^0b^0 \\
(a+b)^1 &= \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 \\
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 \\
(a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 \\
&\vdots \\
(a+b)^n &= \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{0}a^0b^n
\end{aligned}
$$

증명. $(a+b)^n$의 전개식의 각 항의 a, b에 대한 차수는 n이다. 즉 $(a+b)^n$의 전개식의 각 항은 a^kb^{n-k}로 표현될 수 있다. 또 항 a^kb^{n-k}이 나타나는 횟수는, 총 n번 중 k번이 순서에 상관없이 선택되는 경우의 수인 ${}_nC_k$이다. □

정의 6. 8) 이항전개와 이항계수

정리 6. 7에서와 마찬가지로 항이 두 개인 식의 거듭제곱을 전개하는 것을 **이항전개**라고 하고, 이때 나타나는 계수들인 $\binom{n}{k}$를 **이항계수**라고 한다.

정의 6. 9)

두 자연수 A, B 에 대해서 $A = BQ + R(0 \le R < B)$ 인 자연수 Q, R 이 존재할 때 Q 를 **몫 (Quotient)**, R 을 **나머지 (Remainder)** 라고 부른다. A, B 는 각각 **피제수**, **제수**라고 불린다.

정리 6. 10)

정리 6. 9의 Q 와 R 은 반드시 존재하며 또 유일하게 존재한다.

증명. 증명생략. □

정의 6. 11)

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대해서 $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)(R(x)$ 의 차수$< g(x)$ 의 차수$)$ 인 다항식 $Q(x)$, $R(x)$ 이 존재할 때 $Q(x)$ 를 **몫 (Quotient)**, $R(x)$ 을 **나머지 (Remainder)** 라고 부른다. $f(x)$, $g(x)$ 는 각각 **피제수**, **제수**라고 불린다.

정리 6. 12)

정리 6. 11의 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 은 반드시 존재하며 또 유일하게 존재한다.

증명. 증명생략. □

정리 6. 13) 나머지 정리

(1) $f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$ 이다.

(2) $f(x)$ 를 $ax + b(a \neq 0)$ 로 나눈 나머지는 $f(-\frac{b}{a})$ 이다.

증명. (1) $f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)$ 라고 하자. 그러면 $f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$ 로 쓸 수 있다. 이때 $R(x)$ 의 차수는 1차보다 작아야 하므로 상수이다. 따라서 $R(x) = R$ 로 쓰자. 그러면

$$f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

이다. 양변에 $x = \alpha$ 를 대입하면 위의 결과를 얻는다. (2) 또한 같은 방법으로 증명할 수 있다. □

정리 6. 14) 인수정리

$$(x - \alpha) \mid f(x) \iff f(\alpha) = 0.$$

증명. 정리 6. 13의 증명에서와 마찬가지로 $f(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$ 이라고 하면

$$(x-\alpha) \mid f(x) \iff R = 0 \iff f(\alpha) = 0.$$

$\square$

7 인수분해 (1)

정의 7. 1) 인수분해

다항식 $f(x)$에 대해서 $f(x)$를 두 개 이상의 다항식의 곱 (e.g. $f(x) = g(x)h(x)$ 혹은 $f(x) = g(x)h(x)k(x), \cdots$) 으로 변형시키는 과정을 **인수분해**라고 한다. 반대로 주어진 두 개 이상의 다항식의 곱을 합의 형태로 풀어내는 것을 **전개**라고 한다.

정리 7. 2) 인수분해 공식

실수 a, b, c, d, x에 대해 다음 식들이 성립한다.

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$

(4) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

(5) $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

(6) $(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

(7) $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = (x - \frac{1}{x})^2 + 2$

(8) $(x + \frac{1}{x})^2 = (x - \frac{1}{x})^2 + 4$

(9) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(10) $(x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

(11) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(12) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(13) $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

(14) $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

(15) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

(16) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

(17) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

(18) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

(19) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

(20) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

(21) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(22) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(23) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$
  $*\ a+b+c=0$ 이면 $a^3+b^3+c^3 = 3abc$
  $*\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

(24) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

증명. 분배법칙을 사용하여 전개해보면 모든 식이 성립한다는 것을 확인할 수 있다. □

정리 7. 3) cf. 예제 04(p. 68)

실수 a, b, $x_i (1 \le i \le n)$, 자연수 n, k 에 대해

(1) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(2) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1)$

(3) $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k})$

(4) $x^{2k+1} + 1 = (x-1)(x^{2k} - x^{2k-1} + x^{2k-2} - \cdots - x + 1)$

증명. 역시 분배법칙을 이용해 전개하면 된다. (2), (4) 는 각각 (1), (3) 으로부터 바로 나온다. □

8 분수식의 계산

정리 8. 1) 유리식과 분수식

다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대해

(1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 대수식을 **유리식**이라고 한다.

(2) $g(x)$ 의 차수가 일차 이상이면 **분수식**이라고 한다.

(3) 유리식의 분모를 0으로 만드는 x 의 값들은 생각하지 않는다.

(4) 두 변수 이상의 다항식에 대해서도 비슷한 정의를 내릴 수 있다.

정리 8. 2)

두 유리식 $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ 에 대해

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \,\&\, B \neq 0 \,\&\, D \neq 0$$

이다.

증명.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = \frac{C}{D} &\iff \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \,\&\, B \neq 0 \,\&\, D \neq 0 \\ &\iff AD = BC \,\&\, B \neq 0 \,\&\, D \neq 0. \end{aligned}$$

□

9 정수의 나누어떨어짐

정의 9. 1) 정수의 나누어떨어짐

두 정수 a, b에 대해 $b = ak$를 만족시키는 정수 k가 존재하면 b는 a로 **나누어떨어진다**고 말하고, 이를 기호로 $a \mid b$라고 한다.

정리 9. 2)

(1) 0은 임의의 정수에 의해 나누어떨어진다. 즉 a가 정수이면 $a \mid 0$이다.
(2) 1과 -1은 임의의 정수를 나눈다. 즉 b가 정수이면 $1 \mid b$이고 $-1 \mid b$이다.
(3) $a \mid b$이면 $a \mid -b$, $-a \mid b$, $-a \mid -b$이다.

증명. 정의 9. 1로부터 당연하다. □

2단원에서도 똑같은 기호를 도입했었다. 달라진 것은, 자연수에 대한 나누어떨어짐을, 정수에 대한 나누어떨어짐으로 확장했다는 것이다. 2단원에서 증명했던 각종 정리들(e.g. 정리 2. 7, 정리 2. 8, 정리 2. 10, 정리 2. 9 정리 2. 12)에 '자연수' 대신 '정수'로 바꾸어도 여전히 성립하게 된다. 물론 정리 2. 8에서 $b > c$의 조건은 필요없게 된다.

정리 9. 3)

정수 a, b_i, x_i $(1 \le i \le n)$에 대해 $a \mid b_i$ $(1 \le i \le n)$를 만족할 때,

$$a \big| b_1x_1 + \cdots b_nx_n$$

이 성립한다.

증명. $b_i = ak_i(1 \le i \le n)$인 정수 $k_i(1 \le i \le n)$들이 존재한다. 그러면 $b_1x_1 + \cdots b_nx_n = ak_1x_1 + \cdots + ak_nx_n = a(k_1x_1 + \cdots + k_nx_n)$이고 이때 $k_1x_1 + \cdots + k_nx_n$은 정수이다. □

정리 9. 4)

$a \mid b$이고 $b \neq 0$이면 $|a| \le |b|$이다.

증명. $b = ak$이고 k는 0이 아닌 정수이다. 절댓값을 씌우면 정리 3. 5에 의해 $|b| = |ak| = |a||k|$이다. $|k| \ge 1$이므로 $|a| \le |b|$이다. □

정리 9. 5)

$a \mid b$ 이고 $b \mid a$ 이면 $|a| = |b|$ 이다.

증명. 둘 중 하나가 0이라고 가정해보자. 일반성을 잃지 않고 $a = 0$ 이라고 가정하자. 그러면 $b = ak = 0 \cdot k = 0$ 인 k 가 존재해야 하므로 $b = 0$ 이다. 따라서 주어진 식이 성립한다. 이제 $a \neq 0$ & $b \neq 0$ 이라고 가정하자. 정리 9. 4에 의해 $|a| \leq |b|$ 이고 $|b| \leq |a|$ 이다. 따라서 $|a| = |b|$. □

정의 9. 6) 팩토리얼 (Factorial)

자연수 n 에 대해 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ 이라고 정의하자. $n = 0$ 의 경우 $0! = 1$ 로 약속한다.

정리 9. 7) 이항계수의 계산

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

증명. $k = 0$ 이면

$$\frac{n!}{(n-0)!0!} = 1 = \binom{n}{0}$$

이다. $k = n$ 이면

$$\frac{n!}{(n-n)!n!} = 1 = \binom{n}{n}$$

이다. $0 < k < n$ 이라고 가정하자. $\binom{n}{k} =_n C_k$ 는 1부터 n 까지의 자연수 중 k 개의 자연수를 순서에 상관없이 뽑는 경우의 수이다. k 개의 자연수를 순서를 고려하여 뽑는 경우의 수는 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$ 이다. 따라서 $\binom{n}{k}$ 는 이 숫자를 $k!$ 로 나눠야 한다. 즉

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\end{aligned}$$

이다. □

정리 9. 8)

n개의 연속하는 자연수의 곱은 반드시 $n!$로 나누어 떨어진다. 즉 m이 자연수이면

$$n! \mid m(m+1)\cdots(m+n-1).$$

Motivation : 임의의 자연수 n에 대해 $6 \mid n(n+1)(n+2)$이다.

n은 짝수이거나 홀수이다. n이 짝수이면 당연히 $2 \mid n(n+1)(n+2)$이다. n이 홀수이면 $2 \mid n+1$이므로 역시 $2 \mid n(n+1)(n+2)$이다. 따라서 모든 경우에 $2 \mid n(n+1)(n+2)$가 성립한다.

n은 $3k$, $3k+1$, $3k+2$꼴 중 하나이다. $n = 3k$이면 당연히 $3 \mid n(n+1)(n+2)$이다. $n = 3k+1$이면 $3 \mid n+2$이므로 역시 $3 \mid n(n+1)(n+2)$이다. $n = 3k+2$이면 $3 \mid n+1$이므로 역시 $3 \mid n(n+1)(n+2)$이다. 따라서 모든 경우에 $3 \mid n(n+1)(n+2)$가 성립한다.

이제 정리 2. 11에 의해 본 식이 성립한다.

하지만 더 일반적인 경우인 정리 9. 8의 증명에 이 증명방법을 사용할 수는 없다. n이하의 자연수들 중 소수가 아닌 수들도 있으므로 정리 2. 11를 적용할 수 없기 때문이다.

증명. 이항계수의 정의

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

에서 n 대신에 $m+n-1$을, k 대신에 n을 넣으면

$$\begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\cdots m}{n!}$$

이 된다. 이항계수는 항상 자연수이므로 본 식이 성립한다. □

정리 9. 9) 합성수

소수가 아닌 1보다 큰 자연수를 **합성수**라고 한다.

정의 9. 10) 최대공약수 (Greatest Common Divisor)

자연수 $a_1, \cdots, a_n$에 대해 $e \mid a_1, \cdots, e \mid a_n$를 만족시키는 자연수 e를 **공약수**라고 한다. d가 공약수이고 임의의 공약수 e에 대해 $e \mid d$이면 d를 **최대공약수**라고 하고 $d = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$라고 쓴다. 혹은, 최대공약수를 '공약수 중 가장 큰 수'로 정의해도 같은 정의가 된다.

정의 9. 11) 최소공배수(Least Common Multiple)

자연수 $a_1,\cdots,\ a_n$에 대해 대해 $a_1 \mid k,\ \cdots,\ a_n \mid k$를 만족시키는 자연수 k를 **공배수**라고 한다. l가 공배수이고 임의의 공배수 k에 대해 $l \mid k$이면 l을 **최소공배수**라고 하고 $l = [a_1, \cdots, a_n]$라고 쓴다. 혹은, 최소공배수를 '공배수 중 가장 작은 수'로 정의해도 같은 정의가 된다.

10 홀수, 짝수 및 간단한 이색문제

정의 10. 1) 짝수와 홀수

모든 자연수는 2로 나누어서 나머지가 0인 수와 나머지가 1인 수로 나눌 수 있다. 나머지가 0인 수를 **짝수**, 나머지가 1인 수를 **홀수**라고 한다.

홀수는 일반적으로 $2k-1(k=1,2,3,\cdots)$, 짝수는 일반적으로 $2k(k=1,2,3,\cdots)$로 나타낼 수 있다.

정리 10. 2)

(1) $(-1)^n=1$이면 n은 짝수이고 $(-1)^n=-1$이면 n은 홀수이다.

(2) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$이 0이면 n이 짝수이고 1이면 n이 홀수이다.

정리 10. 3)

(1) 홀수 $\pm$ 홀수 $=$ 짝수

(2) 짝수 $\pm$ 짝수 $=$ 짝수

(3) 짝수 $\pm$ 홀수 $=$ 홀수

(4) 홀수 $\pm$ 짝수 $=$ 홀수

(5) 홀수 $\times$ 홀수 $=$ 홀수

(6) 짝수 $\times$ 짝수 $=$ 짝수

(7) 홀수 $\times$ 짝수 $=$ 짝수

(8) 짝수 $\times$ 홀수 $=$ 짝수

증명. 홀수를 $2k+1$, 짝수를 $2l$로 놓고 식을 전개하면 쉽게 증명할 수 있다. $\square$

11　1차 부정방정식의 해법

정의 11. 1) 부정방정식

미지수가 n 개 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 인 다항식 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 에 대해 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 꼴의 방정식을 **부정방정식**이라고 부른다. f 가 k 차 다항식이면 이 부정방정식을 k 차 부정방정식이라고 부른다.

예를 들어 $f(x, y) = x^2 + y - 4$ 이면 $x^2 + y - 4$ 는 미지수가 두 개인 이차 부정방정식이다.

정의 11. 2) 연립부정식

$m(< n)$ 개의 부정방정식

$$f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, \cdots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

을 일컬어 **연립부정식**이라고 부른다.

정의 11. 3) 디오판토스 방정식 (Diophantine equation)

해가 정수인 부정방정식을 일컬어 **디오판토스 방정식**이라고 한다. 즉 다항식 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 에 대해 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 꼴의 정수해 방정식을 디오판토스 방정식이라고 한다. 또 $f(x_1, \cdots, x_n$ 가 1차이면 **일차 디오판토스 방정식**이라고 한다.

예를 들어 $x^n + y^n = z^n$, $x^2 - ny^2 = \pm 1$ 는 디오판토스 방정식이지만 일차 디오판토스 방정식은 아니다. 전자의 경우 $n = 2$ 이면 수없이 많은 해가 존재하고 (피타고라스의 수), 3 이상인 경우 해가 존재하지 않는다 (페르마의 마지막 정리 Fermat's Last Theorem). 후자의 방정식은 펠방정식Pell's Equation 이라고 불린다. $ax + by = c$, $ax + by + cz = d$ 등은 일차 디오판토스 방정식이다.

이 단원에서는 해가 자연수인 일차 디오판토스 방정식을 다룬다. 즉 다항식 $ax + by = c$ 이나 $ax + by + cz = d$ 꼴의 방정식을 다룬다.

정리 11. 4) 미지수가 두 개이고 해가 자연수인 일차 디오판토스의 방정식

$ax + by = c$ 꼴의 일차 부정방정식을 생각하자. 계수가 무리수인 경우는 생각하지 않는다. 계수가 일 경우, $Ax + By = C(A,\ B,\ C$ 는 정수) 꼴의 새로운 일차 부정방정식으로 변형시킬 수 있다.

이제 계수가 정수인 디오판토스의 방정식 $ax + by = c$, $x > 0$, $y > 0$을 생각하자. 일반성을 잃지 않고 $c > 0$이라고 가정하자.

(1) $a, b < 0$인 경우
두 경우 모두 해가 없다.

(2) $a, b > 0$인 경우
$x = \frac{c-by}{a}$ 꼴로 변형해 해가 존재하는지 살핀다.

i) 특수해 (x_0, y_0)가 존재하지 않는 경우
해가 없다.

ii) 특수해 (x_0, y_0)가 존재하는 경우
$ax_0 + by = c$이므로

$$ax + by = c \iff x = x_0 + m,\ y = y_0 + n$$

이다(m, n은 정수). ($\Rightarrow$)의 경우는 당연하고, ($\Leftarrow$)의 경우, 대입하여 바로 얻을 수 있다. $x = x_0 + m$, $y = y_0 + n$를 원래 식에 대입하면 $am + bn = 0$이 되어 $m = -bk$, $n = ak$로 놓을 수 있다. 따라서 문제는 $x = x_0 - bk$, $y = y_0 + ak$, $x > 0$, $y > 0$로 바뀐다. 그러면 $-\frac{y_0}{a} < k < \frac{x_0}{b}$이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 k의 값은 유한개가 있고 따라서 문제의 해도 유한히 있다.

(3) $ab < 0$인 경우
같은 방식으로 하면 해가 무한히 많다.

12 답안 선택의 풀이에 대하여(1)

13 여러가지 문제

정의 13. 1) 가우스기호

임의의 실수 x에 대해 $n \le x < n+1$를 만족시키는 자연수 n은 유일하게 존재한다. 실수 x에 대해 $[x]$를 다음과 같이 정의한다.

$$[x] = \begin{cases} n & (x = n) \\ x - n & (x \ne n) \end{cases}.$$

즉 $[x]$란 'x보다 크지 않은 최대 정수'이다. 예를 들어 $[1] = 1$, $[0] = 0$, $[10] = 10$, $[-4] = 4$, $[1.4] = 1$, $[-3.4] = -4$, $[\pi] = 3$, $[-\frac{1}{2}] = -1$ 등이다.

다음은 $y = [x]$ 그래프이다.

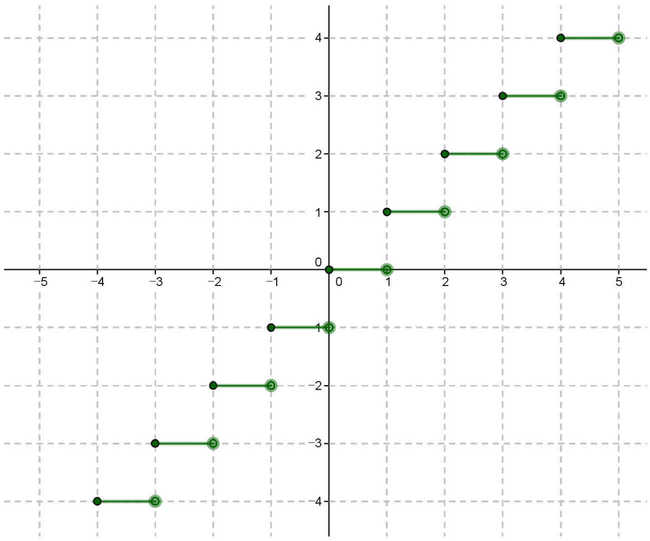

그림. 3: 정의 13.1 $y = [x]$의 그래프

정리 13. 2)

가우스기호에 대해 다음이 성립한다.

(1) $x \le y$이면 $[x] \le [y]$이다.

(2) $x \leq y$ 라고 해서 반드시 $[x] < [y]$ 는 아니다.

(3) 일반적으로 $[-x] = -[x]$ 이 성립하지 않는다.

증명. (1) 정의에 의해 $[x] \leq x < [x]+1$ 이고 $[y] \leq y < [y]+1$ 이다. 특히, $[x] \leq x \leq y < [y]+1$ 이다. 즉 $[x] < [y]+1$ 이다. 그런데 $[x]$ 와 $[y]+1$ 이 모두 정수이므로 두 정수의 차는 1보다 크거나 같다 ; $([y]+1) - [x] \geq 1$. 따라서 $[x] \leq [y]$ 이다.

(2) 반례 : $x = 0.2$, $y = 0.3$ 이면 (2) 의 가정이 성립하지만, 결론이 성립하지 않는다.

(3) 반례 : $x = 0.5$ 이면 $[-x] = -1 \neq 0 = -0 = -[x]$ 이다. □

정리 13. 3) (저울문제에 관하여, cf. p141)

세 양수 a, b, c 를 최대한 한 번씩만 사용하여 덧셈 혹은 뺄셈을 했을 때 만들 수 있는 양수의 개수는 최대 13개이다.

증명. 세 실수를 최대한 한 번씩만 이용하여 만들 수 있는 숫자들의 집합은

$$\{ax + by + cz | x, y, z \text{는 각각 } -1, 0, 1 \text{ 중에 하나}\}$$

이다. 즉 다음과 같은 숫자들이다;

-a-b-c	-b-c	a-b-c
-a-b	-b	a-b
-a-b+c	-b+c	a-b+c
-a-c	-c	a-c
-a	0	a
-a+c	c	a+c
-a+b-c	b-c	a+b-c
-a+b	b	a+b
-a+b+c	b+c	a+b+c

위의 수들을 잘 살펴보면, 27개 수 중 0을 제외한 26개의 수들은 각각 x 와 $-x$ 꼴의 짝을 이루고 있다. 즉 두 개의 수들 중 하나는 양수이고 하나는 음수이다. 따라서 양수 전체의 개수는 13개이다. □

14 실수

정의 14. 1) 유리수

정의 2. 1에서 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$를 각각 자연수(自然數, natural number)의 집합, 정수(整數, integer)의 집합이라고 정의했다. 이제 집합

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

을 유리수의 집합이라고 정의하고 **유리수(有理數, rational number)**를 $\mathbb{Q}$의 원소라고 정의하자. 즉

$$x\text{는 유리수이다.} \iff x \in \mathbb{Q}$$

이다.

정의 14. 2) 유한소수와 무한소수, 순환소수와 비순환소수

임의의 실수 x가 십진법으로 다음과 같이 표현되었다고 하자.

$$x = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots .$$

즉 a_i는 10^i 자릿수를, b_j는 소수점 j번째 자리수를 나타낸다. 어떤 자연수 N에 대해 $j \geq N$이면 $b_j = 0$일 때, x를 **유한소수**라고 부른다. 그렇지 않은 경우, 즉 그러한 자연수 N이 존재하지 않을 때 x를 **무한소수**라고 부른다.

x가 무한소수라고 가정하자. b_i들이 일정한 규칙으로 반복될 때 x를 **순환소수**라고 한다. 즉 어떤 자연수 k와 m가 존재해서 모든 자연수 i와 $0 \leq j < k$를 만족하는 j에 대해 $b_{m+(ik+j)} = b_{m+j}$일 때 x를 순환소수라고 부른다. 예를 들어 $3.214141414\cdots$는 순환소수이다. 모든 자연수 i와 $j(=0, 1)$에 대해 $b_{1+(2i+j)} = b_{1+j}$이기 때문이다.

x가 무한소수이면서 순환소수가 아니면 **비순환소수**라고 부른다.

정리 14. 3) 유한소수와 순환소수는 유리수이다.

유한소수가 유리수인 것은 당연하다. x가 순환소수라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} x &= a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_k b_{k+1} \cdots \\ 10^{k-1} x &= a_n a_{n-1} \cdots a_0 b_1 b_2 \cdots b_{k-1} . b_k b_{k+1} \cdots \\ 10^{2k-1} x &= a_n a_{n-1} \cdots a_0 b_1 b_2 \cdots b_{2k-1} . b_{2k} b_{2k+1} \cdots \end{aligned}$$

따라서 $10^{2k-1}x - 10^{k-1}x$은 정수이다. 즉

$$[10^{2k-1} - 10^{k-1}]x = N$$

이고(N은 정수), 따라서

$$x = \frac{N}{10^{2k-1} - 10^{k-1}}$$

는 유리수이다.

정의 14. 4) 무리수와 실수

x가 비순환소수이면 x를 **무리수(無理數, irrational number)**라고 부른다. 무리수와 유리수를 합쳐서 **실수(實數, real number)**라고 부른다.

정리 14. 5) 유리수와 무리수의 조밀성

유리수와 무리수는 실수 내에서 조밀하다. 즉, 임의의 서로 다른 두 실수 a와 b에 대해($a < b$) $a < x < b$를 만족하는 유리수 x가 존재하고, $a < y < b$를 만족하는 무리수 y도 존재한다.

증명. 증명은 생략한다. p153–154의 예제 3, 4에 이 정리보다는 약한 정리가 증명되어 있다. □

정리 14. 6)

a, b, c, d가 유리수이고 α가 무리수일 때

(1) $a + b\alpha = 0 \iff a = 0 \ \&\ b = 0$

(2) $a + b\alpha = c + d\alpha \iff a = c \ \&\ b = d$

증명. 각각 p153–154의 예제 5, 6이다. (2)는 (1)로부터 바로 도출할 수 있다. □

정리 14. 7)

a, b, c, d가 유리수이고 $\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$가 무리수일 때

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \iff a = c \ \&\ b = d$$

이다.

증명. 154의 예제 7이다. □