수학 I : 04 삼각함수

2022년 1월 8일

차 례

1 호도법

문제 1) 단위 변환
'인치(in)'는 미국에서 주로 사용되는 길이 단위로 1 in는 약 $2,54$ cm에 해당한다.

$$1 \text{ in} \approx 2.54 \text{ cm}$$

다음 빈 칸에 알맞은 숫자 혹은 식을 써넣으시오.

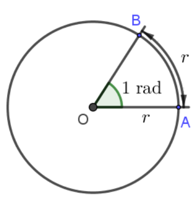
(1) $3 \text{ in} \approx \boxed{}$ cm

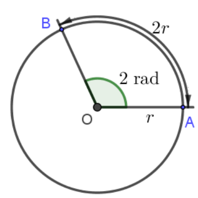
(2) $1 \text{ cm} \approx \boxed{}$ in

(3) $4 \text{ cm} \approx \boxed{}$ in

지금까지 각의 크기를 나타낼 때, $30°$, $90°$, $120°$와 같이 도(°)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다. 이제 각의 크기를 나타내는 새로운 단위를 알아보자.

정의 2) 호도법
반지름의 길이가 r이고 호의 길이도 r인 부채꼴의 중심각의 크기를 1rad으로 정한다. rad는 각을 나타내는 단위로 '라디안(radian)'이라고 읽는다.





참고 3)

(1) 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 $r : 2\pi r = 1\text{rad} : 360°$ 이다. 따라서

$$1\text{rad} = \frac{180°}{\pi} \qquad (*)$$

π의 값에 $\pi = 3.14\cdots$을 대입하면 1rad은 약 57.29°정도이다.

$$1\text{rad} \approx 57.29°$$

(2) $(*)$의 양변에 π를 곱하면 π rad $= 180°$이다. 이때, 단위인 라디안은 생략하는 것이 보통이다. 따라서

$$\pi = 180°$$

라고 쓴다.

(3) 90°는 180°의 절반이므로 $90° = \frac{\pi}{2}$ 이다.
30°는 180°의 $\frac{1}{6}$이므로 $30° = \frac{\pi}{6}$ 이다.
360°는 180°의 두 배이므로 $360° = 2\pi$ 이다.

문제 4) 다음 표를 완성하여라.

0°	30°	45°		90°	120°		150°	180°	270°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π		

문제 5) 다음 각도를 호도법으로 나타내시오.

(1) 반지름의 길이가 4인 원에서 호의 길이가 $\frac{3}{\pi}$인 부채꼴의 중심각의 크기

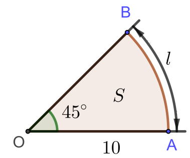
(2) 반지름의 길이가 1인 원에서 호의 길이가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴의 중심각의 크기

(3) 1°

(4) 3°

2 부채꼴의 호의 길이와 넓이

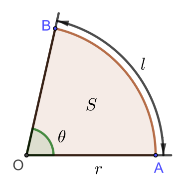
문제 6) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10이고 중심각의 크기가 45°인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 각각 구하여라.



참고 7)
위 문제에서 l과 S를 구하는 식은 각각

$$l = 2\pi \times 10 \times \frac{45}{360}$$
$$S = \pi \times 10^2 \times \frac{45}{360}$$

이다. 이와 같은 원리를 이용하여, 이번에는 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(rad)인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 구해보자.[1]



$$l = 2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$
$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$

따라서 $l = r\theta$이고 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$이다. 한편, S를 구하는 식을 조금 변형하면

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times r \times r\theta = \frac{1}{2}rl$$

을 얻을 수도 있다.

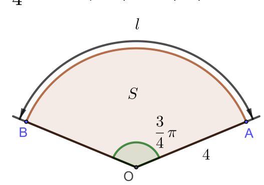
[1] θ는 8번째 그리스어 문자로 세타(theta)라고 읽는다. 주로 각도를 표시할 때 쓰인다.

이것들을 정리하면 다음과 같다.

> **정리 8) 부채꼴의 호의 길이와 넓이**
> 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면
> $l = r\theta \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad S = \frac{1}{2}rl$

예시 9) 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴에서

$$l = 4 \times \frac{3}{4}\pi = 3\pi$$
$$S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$$

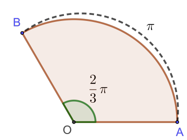


문제 10) 다음 부채꼴에서 호의 길이 l과 넓이 S를 구하여라.

(1) 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴

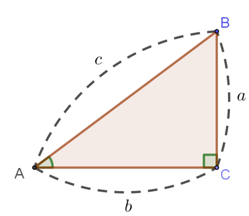
(2) 반지름의 길이가 10이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴

문제 11) 호의 길이가 π이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 넓이를 구하여라.

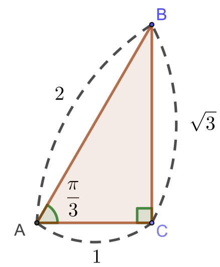


3 복습(삼각비)

> **정의 12) 삼각비**
> $\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$



예시 13) $\frac{\pi}{3} = 60°$의 삼각비를 구하여라.



오른쪽 그림에서

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

이다.

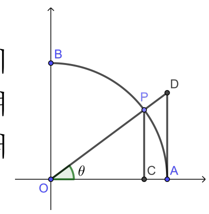
문제 14) 다음 삼각비의 값들을 구하여라.

$$\begin{array}{llll} (1) & \sin\frac{\pi}{6} = & \cos\frac{\pi}{6} = & \tan\frac{\pi}{6} = \\ (2) & \sin\frac{\pi}{4} = & \cos\frac{\pi}{4} = & \tan\frac{\pi}{4} = \end{array}$$

문제 15) 다음 값을 계산하여라.

$$(\sin\frac{\pi}{6})^2 + (\cos\frac{\pi}{6})^2 =$$
$$(\sin\frac{\pi}{4})^2 + (\cos\frac{\pi}{4})^2 =$$

문제 16) 다음 그림에서 $\widehat{AB}$는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원의 일부이다. $\widehat{AB}$위의 한 점 P에 대하여 $\angle POA = \theta$라고 할 때, 다음 빈칸에 알맞은 선분을 써넣고 다음 물음에 답하여라.



$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{(가)}}}{\overline{OP}} = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{\overline{OD}} \qquad \cos\theta = \frac{\boxed{\text{(다)}}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} \qquad \tan\theta = \frac{\boxed{\text{(가)}}}{\boxed{\text{(다)}}} = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{\overline{OA}}$$

따라서

$$\sin\theta = \boxed{\text{(가)}} \qquad \cos\theta = \boxed{\text{(다)}} \qquad \tan\theta = \boxed{\text{(나)}}$$

(1) $\theta = 0$의 삼각비를 구하려면 $P = A$인 상황을 생각하면 된다. 그러므로

$$\sin 0 = \qquad \cos 0 = \qquad \tan 0 =$$

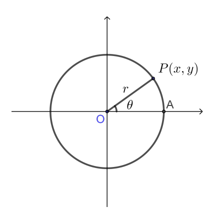
(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$의 삼각비를 구하려면 $P = B$인 상황을 생각하면 된다. 그러므로

$$\sin\frac{\pi}{2} = \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \qquad \tan\frac{\pi}{2} =$$

4 삼각함수

정의 17) 삼각함수의 값

양수 r에 대하여 점 $A = (r, 0)$을 원 $x^2 + y^2 = r^2$을 따라 시계 반대 방향[2]으로 θ만큼 회전시킨 점을 $P(x, y)$라고 할 때,



$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

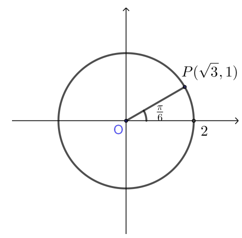
이다. 이때, 반직선 OA를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 부른다.

예시 18) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{6}$의 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 각각 구하여라.

[2]시계 반대 방향은 시계 바늘이 도는 방향의 반대방향을 의미한다. $\theta < 0$이면 시계 방향으로 회전시킨다. 따라서 시계 반대 방향을 $\boxed{\text{양의 방향}}$, 시계 방향을 $\boxed{\text{음의 방향}}$이라고 부른다.

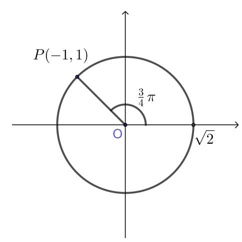
(1) $r = 2$로 두고 $A(2,0)$를 시계반대방향으로 $\frac{\pi}{6}(= 30°)$만큼 회전시키면 $P = (\sqrt{3}, 1)$이다. 따라서

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



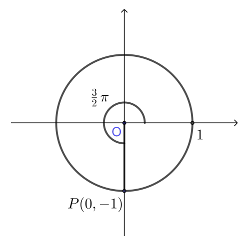
(2) $r = \sqrt{2}$로 두고 $A(\sqrt{2}, 0)$를 시계반대방향으로 $\frac{3}{4}\pi(= 135°)$만큼 회전시키면 $P = (-1, \sqrt{2})$이다. 따라서

$$\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{3}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{-1} = -1$$



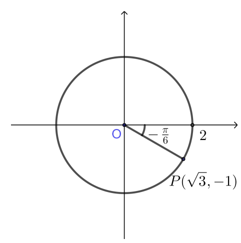
(3) $r = 1$로 두고 $A(1,0)$를 시계반대방향으로 $\frac{3}{2}\pi(= 270°)$만큼 회전시키면 $P = (0, -1)$이다. 따라서

$$\sin\frac{3}{2}\pi = \frac{0}{1} = 0$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi = \frac{-1}{1} = -1$$
$$\tan\frac{3}{2}\pi = \frac{-1}{0}\text{(존재하지 않는다.)}$$



(4) $r = 2$로 두고 $A(2,0)$를 시계방향으로 $\frac{\pi}{6}(= 30°)$만큼 회전시키면 $P = (\sqrt{3}, -1)$이다. 따라서

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

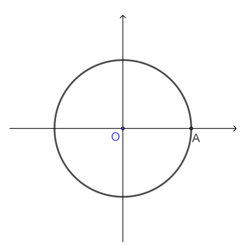


문제 19) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $-\pi$의 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 각각 구하여라.

$\sin\frac{\pi}{4} =$

$\cos\frac{\pi}{4} =$

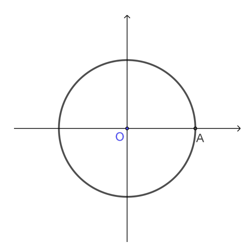
$\tan\frac{\pi}{4} =$



$\sin\frac{2}{3}\pi =$

$\cos\frac{2}{3}\pi =$

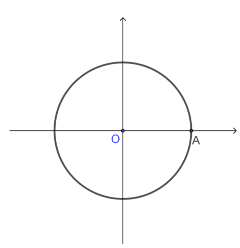
$\tan\frac{2}{3}\pi =$



$\sin\frac{7}{3}\pi =$

$\cos\frac{7}{3}\pi =$

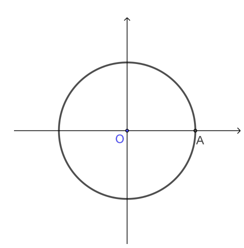
$\tan\frac{7}{3}\pi =$



$\sin(-\pi) =$

$\cos(-\pi) =$

$\tan(-\pi) =$

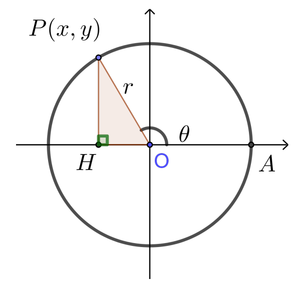


5 삼각함수의 성질

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x,y)$에 대하여

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

이었다. 따라서

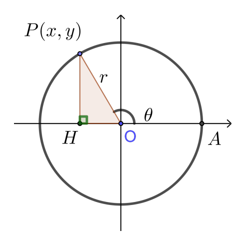


$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y/r}{x/r}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

이다. 한편, $\overline{OH}=|x|$, $\overline{PH}=|y|$이므로, 삼각형 OHP에 피타고라스의 정리를 쓰면 $x^2+y^2=r^2$이다. 양변을 r^2으로 나누면 $(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$이다. 즉

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

이다.[3]
오른쪽 그림에서 $-r\le x\le r$, $-r\le y\le r$ 이다.
두 식의 양변을 r로 나누면



$$-1\le\cos\theta\le 1,\quad -1\le\sin\theta\le 1$$

이다. 또한, 식 $x^2+y^2=r^2$에서 양변을 r^2으로 나누어주면[4]

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

이다. 한편,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y/r}{x/r}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

도 성립한다.

[3] $(\sin\theta)^2$은 $\sin^2\theta$로 표기한다.
[4] $(\sin\theta)^2$은 $\sin^2\theta$로 표기한다.

정의 20) 삼각함수의 기본 성질

(1) $-1 \le \sin\theta \le 1,\ -1 \le \cos\theta \le 1$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(3) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

문제 21)

(1) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하시오.

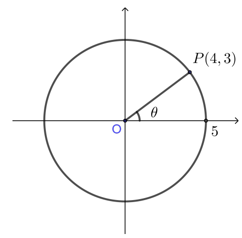
(2) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$일 때, $\cos\theta$의 값으로 가능한 것을 모두 구하시오.

(3) $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

(4) $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$이고, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

예시 22) 각도 θ의 동경을 OP라고 할 때, $P = (4, 3)$이다.

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$
$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

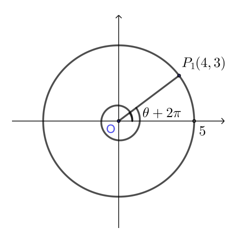


이때 다음 각도들에 대한 삼각비의 값을 차례로 구하여라.

(1) $\theta + 2\pi$ (2) $-\theta$ (3) $\theta + \pi$ (4) $\frac{\pi}{2} - \theta$

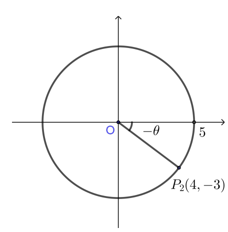
(1) $\theta + 2\pi$의 동경을 OP_1이라고 하면, P_1은 A를 θ만큼 시계 반대 방향으로 회전시킨 후($= P$) 같은 방향으로 2π만큼 더 회전시킨 점이다. 따라서 $P_1 = P = (4, 3)$이다.

$$\sin(\theta + 2\pi) = \frac{3}{5}$$
$$\cos(\theta + 2\pi) = \frac{4}{5}$$
$$\tan(\theta + 2\pi) = \frac{3}{4}$$



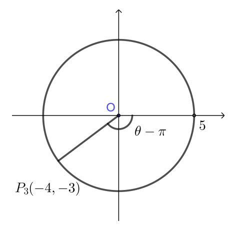
(2) $-\theta$의 동경을 OP_2이라고 하면, P_2는 A를 시계 방향으로 θ만큼 회전시킨 점이므로 $P_1 = (4, -3)$이다.

$$\sin(-\theta) = -\frac{3}{5}$$
$$\cos(-\theta) = \frac{4}{5}$$
$$\tan(-\theta) = -\frac{3}{4}$$



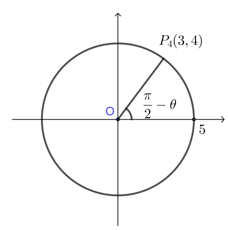
(3) $\theta-\pi$의 동경을 OP_3이라고 하면, P_3는 A를 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전시킨 후$(=P)$, 다시 시계방향으로 π만큼 회전시킨 점이다. 따라서 $P=(-4,-3)$이다.

$$\sin(\theta-\pi)=-\frac{3}{5}$$
$$\cos(\theta-\pi)=-\frac{4}{5}$$
$$\tan(\theta-\pi)=\frac{3}{4}$$



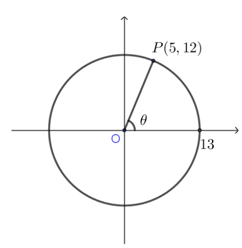
(4) $\frac{\pi}{2}-\theta$의 동경을 OP_4이라고 하면, P_4는 A를 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 후, 다시 시계방향으로 θ만큼 회전시킨 점이다. 따라서 $P=(3,4)$이다.

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\frac{4}{5}$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\frac{3}{5}$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{2}-\theta)=\frac{4}{3}$$



문제 23) 각도 θ의 동경을 OP라고 할 때, $P=(5,12)$이다.

$$\sin\theta=\frac{12}{13}$$
$$\cos\theta=\frac{5}{13}$$
$$\tan\theta=\frac{12}{5}$$

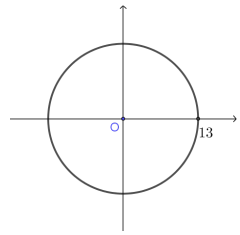


이때 다음 각도들에 대한 삼각비의 값을 차례로 구하여라.

(1) $\theta+4\pi$ (2) $-\theta$ (3) $\theta+\pi$ (4) $\frac{\pi}{2}-\theta$

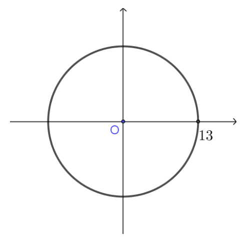
(1)

$$\sin(\theta + 4\pi) =$$
$$\cos(\theta + 4\pi) =$$
$$\tan(\theta + 4\pi) =$$



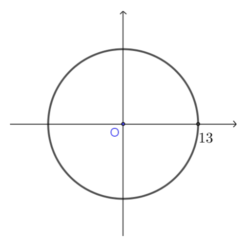
(2)

$$\sin(-\theta) =$$
$$\cos(-\theta) =$$
$$\tan(-\theta) =$$



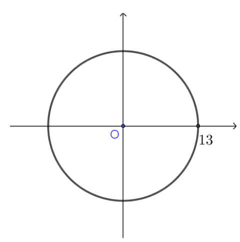
(3)

$$\sin(\theta + \pi) =$$
$$\cos(\theta + \pi) =$$
$$\tan(\theta + \pi) =$$



(4)

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$
$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$



6 삼각함수의 그래프

문제 24) 다음 표를 완성하여라.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$		$\frac{1}{2}$											
$\cos\theta$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$											
$\tan\theta$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$											

위의 표를 참고하여 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$의 그래프를 그려라.

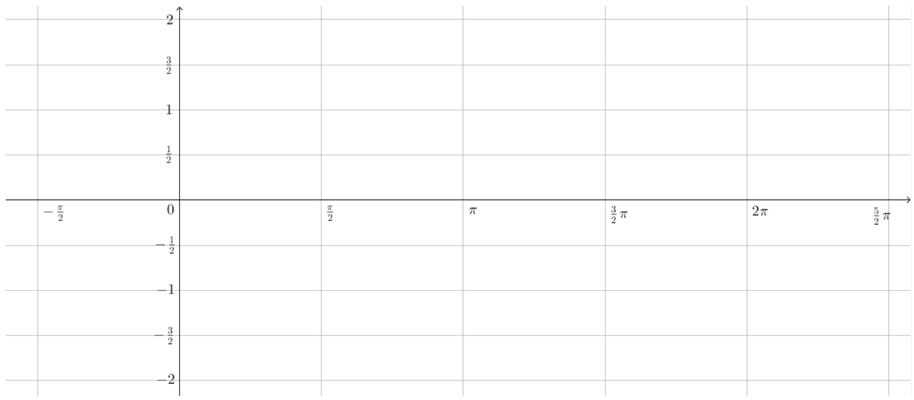


그림 1: *

$y = \sin x$

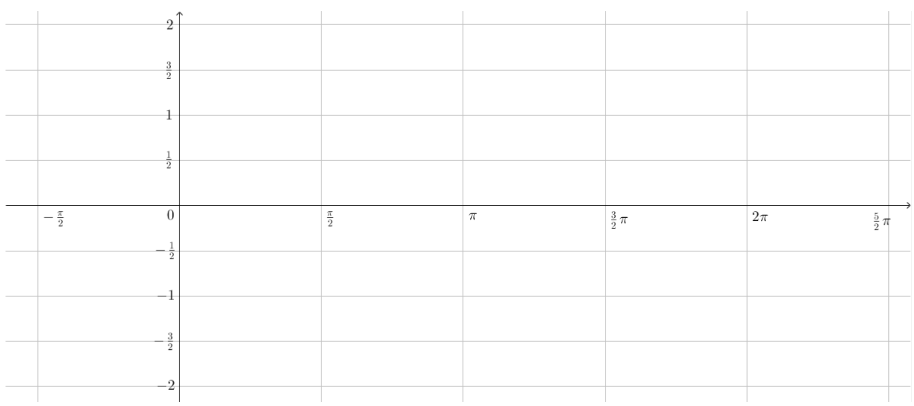


그림 2: *

$y = \cos x$

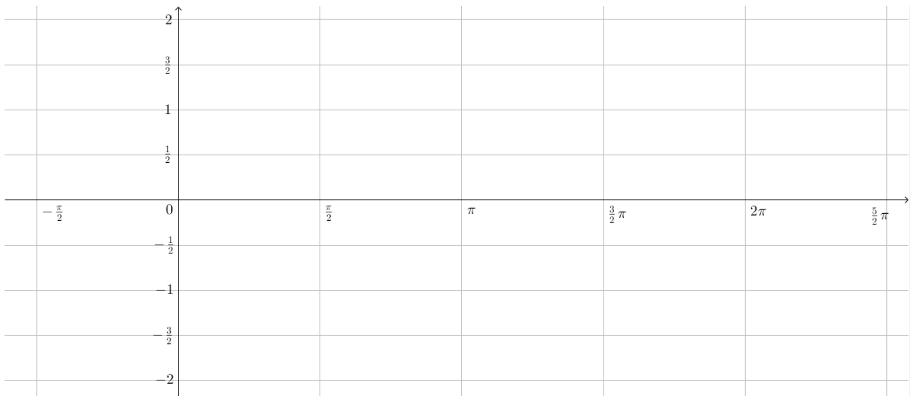


그림 3: *

$y = \tan x$

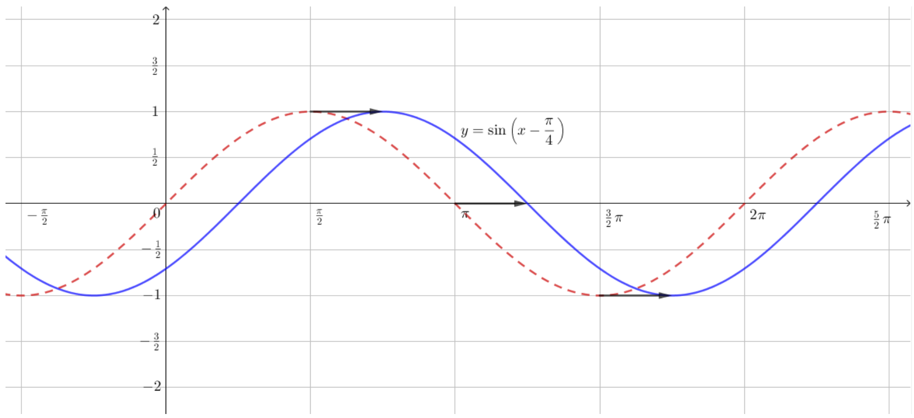
정리 25) 삼각함수의 그래프

$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
정의역은 실수 전체의 집합이다.		정의역은 $\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\}$이다.
치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$이다.		치역은 실수 전체의 집합이다.
최댓값이 1이고 최솟값이 -1이다.		최댓값과 최솟값이 없다.
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$	$\tan(x + \pi) = \tan x$
주기가 2π인 함수이다.		주기가 π인 함수이다.
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\tan(-x) = -\tan x$
원점 대칭이다.	y축 대칭이다.	원점 대칭이다.
기함수이다.	우함수이다.	기함수이다.
점근선이 없다.		점근선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$을 가진다.

예시 26) 다음 삼각함수들의 그래프를 그려라.

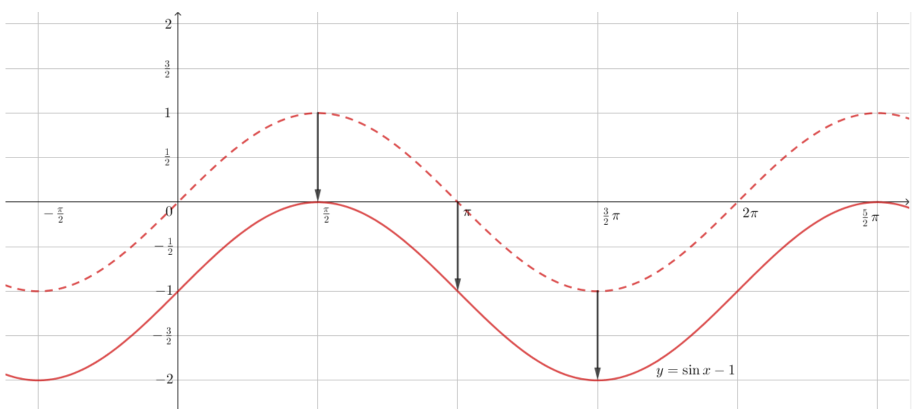
(1) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

$y = \sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동시키면 된다. 따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.



(2) $y = \sin x - 1$

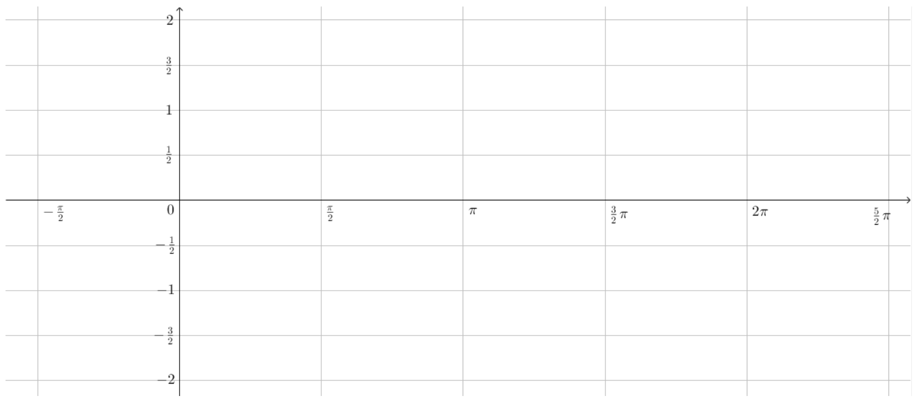
$y = \sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 된다. 따라서 다음과 같은 그래프가 나온다.



문제 27) 다음 삼각함수들의 그래프를 그려라.

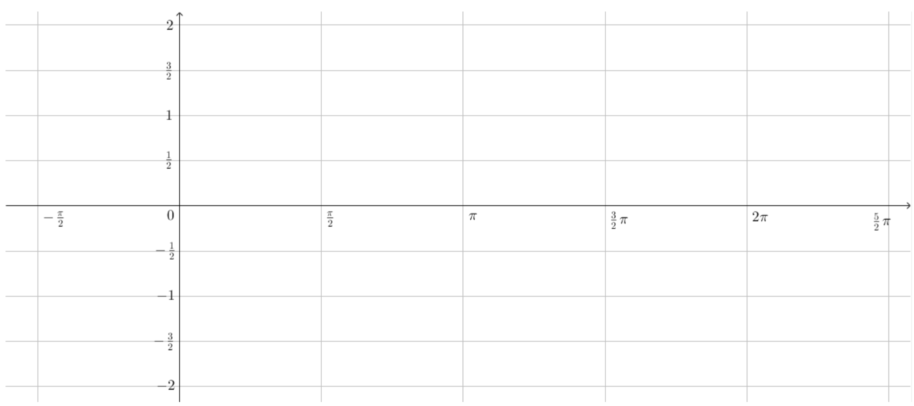
(1) $y = 2\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$2\sin x$													



(2) $y = \sin 2x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin 2x$													



예시 22)과 문제 23)에서 우리는 다음과 같은 성질들을 유추할 수 있었다.

정리 28)

(1) $\sin(x+2\pi) = \sin x,\ \cos(x+2\pi) = \cos x,\ \tan(x+2\pi) = \tan x$

(2) $\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \tan(-x) = -\tan x$

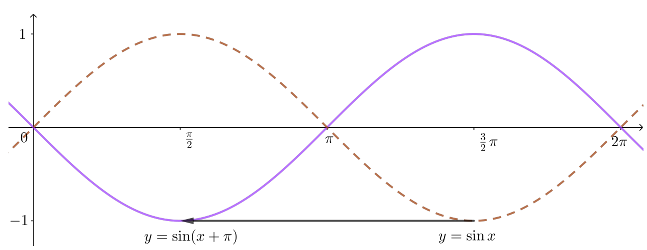
(3) $\sin(x+\pi) = -\sin x,\ \cos(x+\pi) = -\cos x,\ \tan(x+\pi) = \tan x$

(4) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x,\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

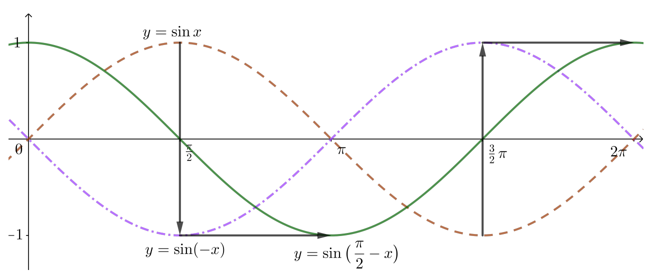
이 성질들은 삼각함수의 그래프를 통해서 보면 더 명확하게 보인다.

(1)은 삼각함수가 일정한 주기를 가진다는 사실로부터, (2)는 삼각함수가 원점 혹은 y축을 기준으로 대칭성이 있다는 사실로부터 당연하다.

한편 $y = \sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 이동시켜 $y = \sin(x+\pi)$의 그래프를 그리면, 정확히 $y = -\sin x$의 그래프와 일치한다. 코사인과 탄젠트의 경우도 마찬가지이다. 따라서 (3)이 성립한다.

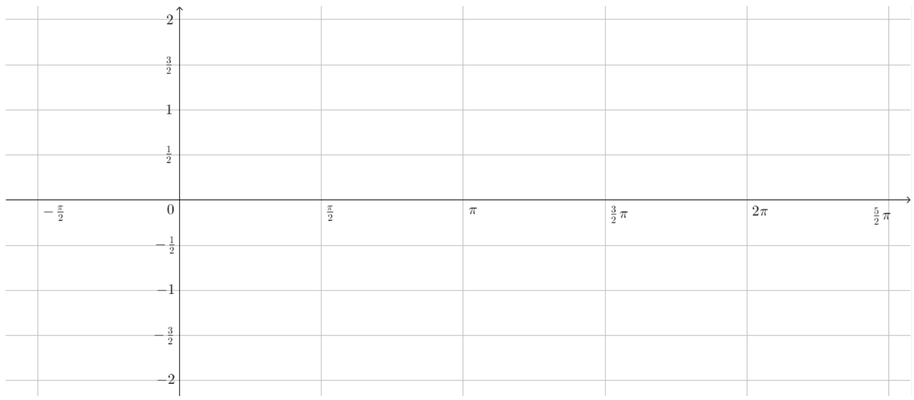


또한 $y = \sin x$의 그래프를 y축 대칭이동시켜 $y = \sin(-x)$그래프를 얻고, 이것을 다시 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시켜 $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$의 그래프를 얻으면, 정확히 $y = \cos x$의 그래프와 일치한다. 코사인의 경우도 마찬가지이다. 따라서 (4)가 성립한다.

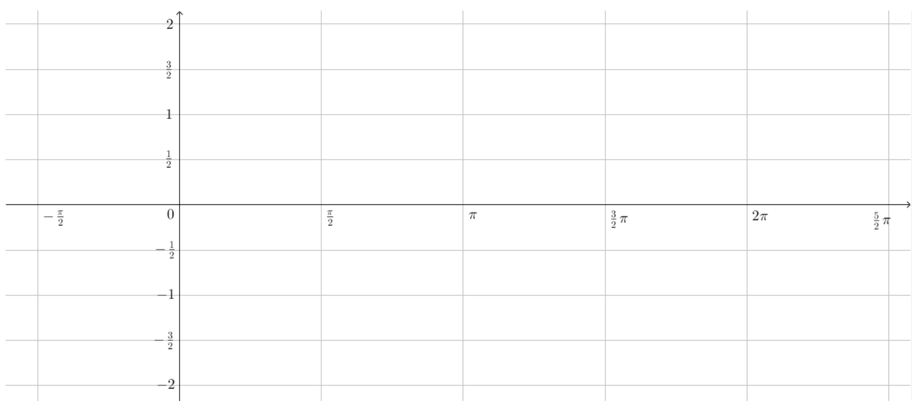


문제 29) 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$



(2) $\sin(\pi - x) = \sin x$



7 삼각방정식

예시 30) $0 \le x < 2\pi$일 때, 다음 방정식의 근을 구하여라.

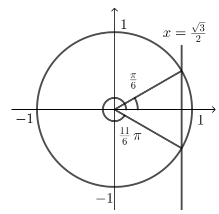
(1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan x = \sqrt{3}$

삼각함수의 정의를 사용하는 방법

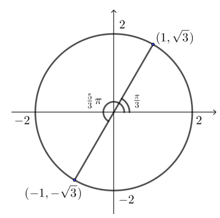
(1) 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점이 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$의 두 개이므로

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi$$



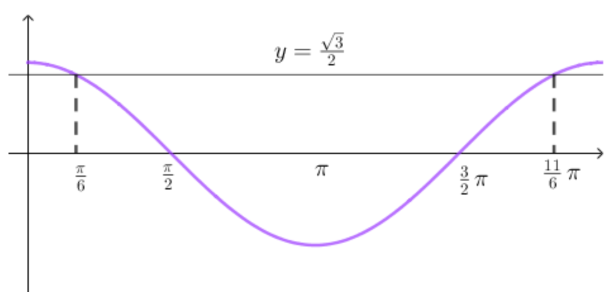
(2) 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선 $y = \sqrt{3}x$의 교점이 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$의 두 개이므로

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$$

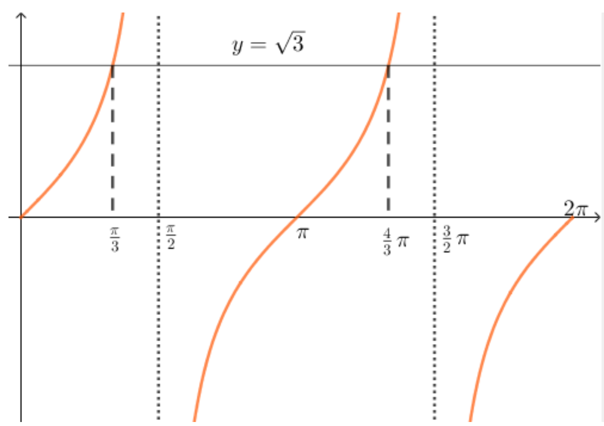


그래프를 사용하는 방법

(1) $y = \cos x$의 그래프와 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점을 구하면 $x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi$



(2) $y = \tan x$의 그래프와 $y = \sqrt{3}$의 교점을 구하면 $x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$



예시 31) x가 실수일 때, 다음 방정식의 근을 구하여라.

(1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan x = \sqrt{3}$

(1) 코사인함수는 주기가 2π이므로 $x = \frac{\pi}{6}$이 방정식 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 근이면

$$x = \cdots\ , \quad \frac{\pi}{6} - 2\pi\ , \quad \frac{\pi}{6}\ , \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi\ , \quad \frac{\pi}{6} + 4\pi\ , \quad \cdots$$

의 값들도 근이 된다. 마찬가지로 $x = \frac{11}{6}$가 근이므로

$$x = \cdots\ , \quad \frac{11}{6}\pi - 2\pi\ , \quad \frac{11}{6}\pi\ , \quad \frac{11}{6}\pi + 2\pi\ , \quad \frac{11}{6}\pi + 4\pi\ , \quad \cdots$$

또한 근이 된다. 이것들을 정리하면

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi\ , \quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \ \ (n\text{은 정수})$$

(2) 탄젠트함수는 주기가 π이므로

$$x = \frac{\pi}{3} + n\pi\ , \quad \frac{4}{3}\pi + n\pi \ \ (n\text{은 정수})$$

문제 32) x가 실수일 때, 다음 방정식의 근을 구하여라.

(1) $\sin x = -\frac{1}{2}$ (2) $\tan x = 1$

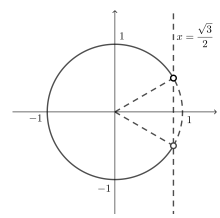
8 삼각부등식

예시 33) $0 \le x < 2\pi$일 때, 다음 부등식의 근을 구하여라.

(1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan x \ge \sqrt{3}$

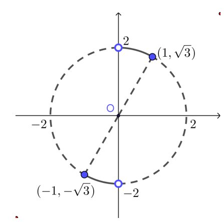
삼각함수의 정의를 사용하는 방법

(1) 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(x, y)$ 중 $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$인 점들을 표시하면 오른쪽 그림과 같다. 따라서



$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi$$

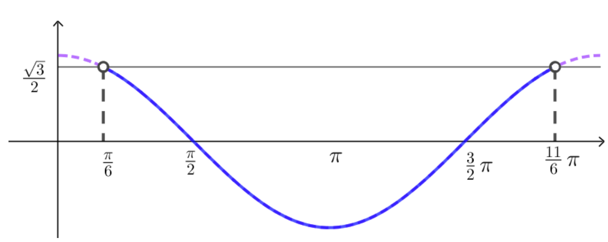
(2) 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(x, y)$ 중 직선 OP의 기울기가 $\sqrt{3}$보다 크거나 같은 점들을 표시하면 오른쪽 그림과 같다.



$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4}{3}\pi$$

그래프를 사용하는 방법

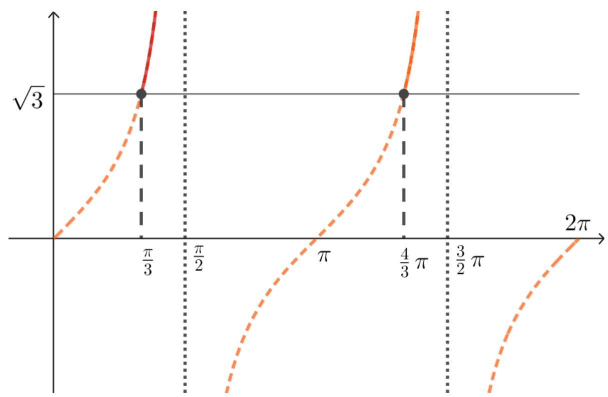
(1) $y = \cos x$의 그래프의 부분 중 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분을 표시하면 다음과 같다.



따라서

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi$$

(2) $y = \tan x$의 그래프의 부분 중 직선 $y = \sqrt{3}$보다 위에 있는 부분을 표시하면 다음과 같다.



따라서

$$\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad \frac{4}{3}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$$

문제 34) $0 \le x < 2\pi$일 때, 다음 부등식의 근을 구하여라.

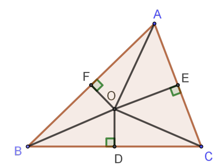
(1) $\sin x < -\frac{1}{2}$ (2) $\tan x \le 1$

9 사인법칙

복습 35) 삼각형의 외심

다음은 삼각형의 외심에 대한 설명이다. 문장들을 완성하여라.

- 삼각형 ABC의 외심 O는 삼각형의 (내접원 / 외접원)의 중심을 말한다.
- 외심 O는 (세 각의 각이등분선의 교점 / 세 변의 수직이등분선의 교점 / 중선의 교점)이기도 하다.
- 오른쪽 그림에서 $\triangle OBD$와 합동인 삼각형은 ($\triangle OBF$ / $\triangle OCD$)이다.

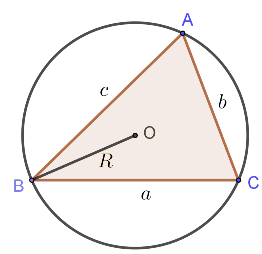


- $\triangle ABC$가 예각삼각형이면 점 O는 삼각형의 (내부 / 외부)에 있다.
- $\triangle ABC$가 둔각삼각형이면 점 O는 삼각형의 (내부 / 외부)에 있다.
- $\triangle ABC$가 직각삼각형이면 점 O는 $\boxed{}$에 있다.

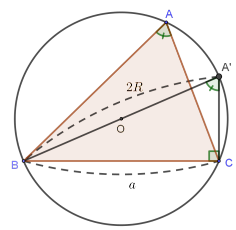
삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 할 때, 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면 다음 식이 성립한다.

정리 36) 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



문제 37) 다음은 삼각형 ABC가 예각삼각형일 때, 사인법칙을 증명하는 과정이다. 빈 칸에 알맞은 것을 써넣어라.



선분 BO의 연장선이 원과 만나는 점을 A'이라고 하면 $\angle A$와 $\angle A'$은 모두 호 BC에 대한 원주각이므로

$$\angle A = \angle A'$$

그러면 $\triangle A'BC$는 직각삼각형이므로

$$\sin A' = \frac{\boxed{(가)}}{2R}$$

따라서

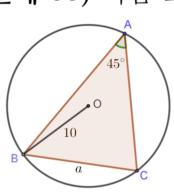
$$\frac{\boxed{(가)}}{\sin A} = 2R$$

이다. 마찬가지의 방법을 활용하면

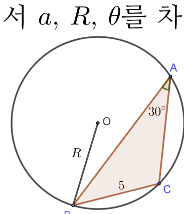
$$\frac{\boxed{(나)}}{\sin B} = 2R, \quad \frac{\boxed{(다)}}{\sin C} = 2R$$

이다. 따라서 사인법칙이 증명되었다.

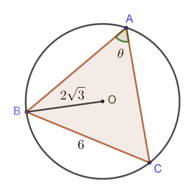
문제 38) 다음 그림에서 a, R, θ를 차례로 구하여라.



$a =$

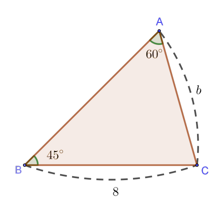


$R =$



$\theta =$

문제 39) 오른쪽 그림에서 b의 값을 구하여라.



10 코사인법칙

복습 40) 피타고라스 정리의 역

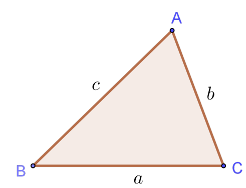
삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 대변의 길이가 각각 a, b, c일 때, 다음 빈칸에 알맞은 등호($=$) 혹은 부등호($<$, $>$)를 써넣어라.

- $\angle C$가 예각이면 a^2+b^2 $\boxed{}$ c^2이다.
- $\angle C$가 직각이면 a^2+b^2 $\boxed{}$ c^2이다.
- $\angle C$가 둔각이면 a^2+b^2 $\boxed{}$ c^2이다.

삼각형 ABC에 대하여 다음 정리가 성립한다.

정리 41) 코사인법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



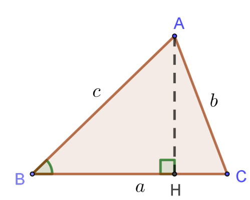
문제 42) $\angle B$가 예각일 때, 코사인법칙을 증명하는 과정이다. 빈 칸에 알맞은 선을 써넣어라.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\sin B = \frac{\overline{AH}}{c}$, $\cos B = \frac{\overline{BH}}{c}$ 이다. 따라서

$$\overline{AH} = \boxed{(가)}, \quad \overline{BH} = \boxed{(나)}$$

한편 $\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH}$이므로

$$\overline{CH} = a - \boxed{(나)}$$



직각삼각형 AHC에 피타고라스의 정리를 적용시키면 $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$

으로부터

$$b^2 = \boxed{(가)}^2 + \left(a - \boxed{(나)}\right)^2$$

이 식을 정리하면

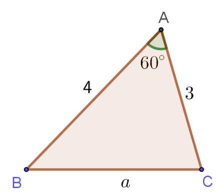
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

이 얻어진다. 마찬가지의 방법을 사용하면

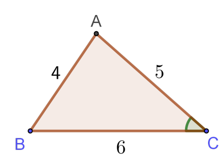
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

도 얻을 수 있다.

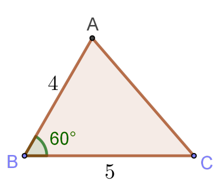
문제 43) 오른쪽 그림에서 a의 값을 구하여라.



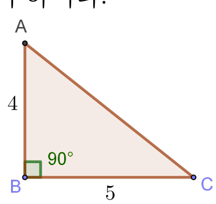
문제 44) 오른쪽 그림에서 $\cos C$의 값을 구하여라.



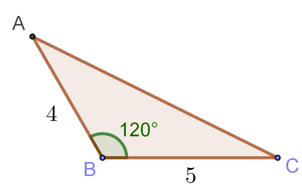
문제 45) 다음 그림에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$이다. $\angle B$가 각각 $60°$, $90°$, $120°$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 차례로 구하여라.



$\overline{AC} =$



$\overline{AC} =$



$\overline{AC} =$

답

문제 1) (1) 2.54×3 (2) $\frac{1}{2.54}$ (3) $\frac{4}{2.54}$

문제 5)

$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

문제 6) $l = \frac{5}{2}\pi,\ S = \frac{25}{2}\pi$

문제 10) (1) $l = \pi,\ S = 3\pi$ (2) $l = \frac{20}{3}\pi,\ S = \frac{100}{3}\pi$

문제 11) $\frac{3}{4}\pi$

문제 14)

(1) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

문제 15) 1, 1

문제 16) $\boxed{(가)} = \overline{CP},\ \boxed{(나)} = \overline{AD},\ \boxed{(다)} = \overline{OC}$

(1) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\tan 0 = 0$

(2) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\tan\frac{\pi}{2} =$ (존재하지 않는다.)

문제 19)

$$
\begin{array}{llll}
\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{7}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin(-\pi) = 0 \\
\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} & \cos\frac{7}{3}\pi = \frac{1}{2} & \cos(-\pi) = -1 \\
\tan\frac{\pi}{4} = 1 & \tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3} & \tan\frac{7}{3}\pi = \sqrt{3} & \tan(-\pi) = 0
\end{array}
$$

문제 21) (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\pm\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

문제 23)

$\sin(\theta+4\pi)=\frac{12}{13}$ $\quad\sin(-\theta)=-\frac{12}{13}$ $\quad\sin(\theta+\pi)=-\frac{12}{13}$ $\quad\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{5}{13}$

$\cos(\theta+4\pi)=\frac{5}{13}$ $\quad\cos(-\theta)=\frac{5}{13}$ $\quad\cos(\theta+\pi)=-\frac{5}{13}$ $\quad\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{12}{13}$

$\tan(\theta+4\pi)=\frac{12}{5}$ $\quad\tan(-\theta)=-\frac{12}{5}$ $\quad\tan(\theta+\pi)=\frac{12}{5}$ $\quad\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{5}{12}$

문제 24)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\times$: 존재하지 않음

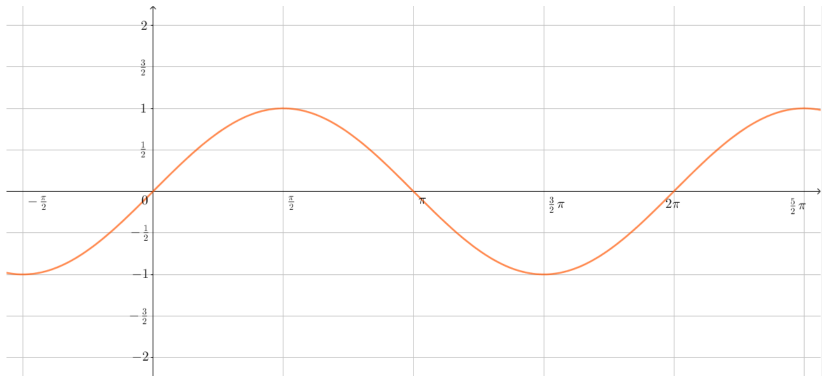


그림 4: *

$y = \sin x$

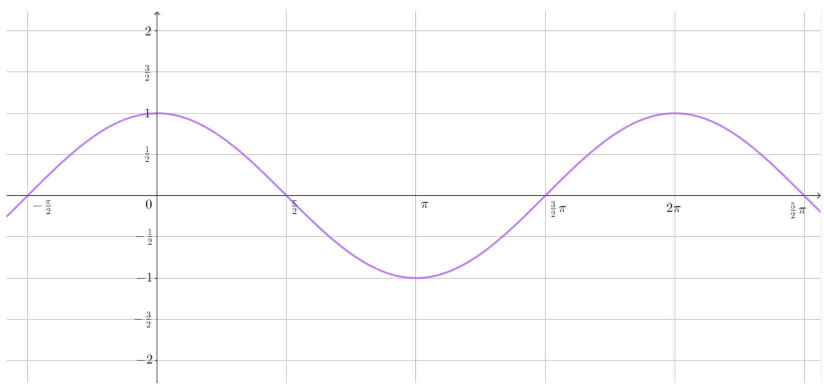


그림 5: *

$y = \cos x$

문제 27)

(1) $y = 2\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$2\sin x$	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0

(2) $y = \sin 2x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin 2x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

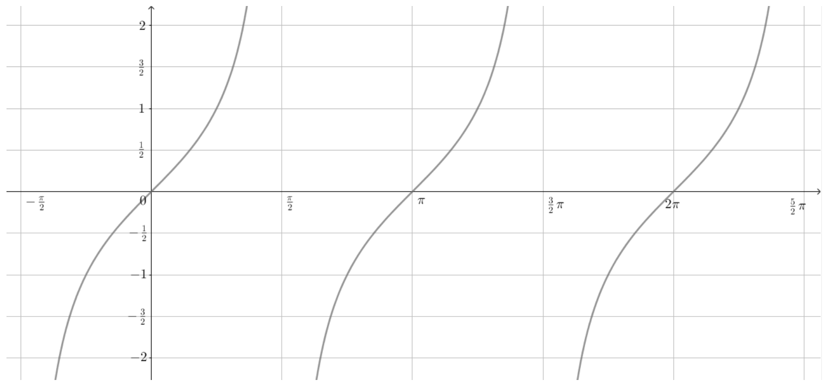
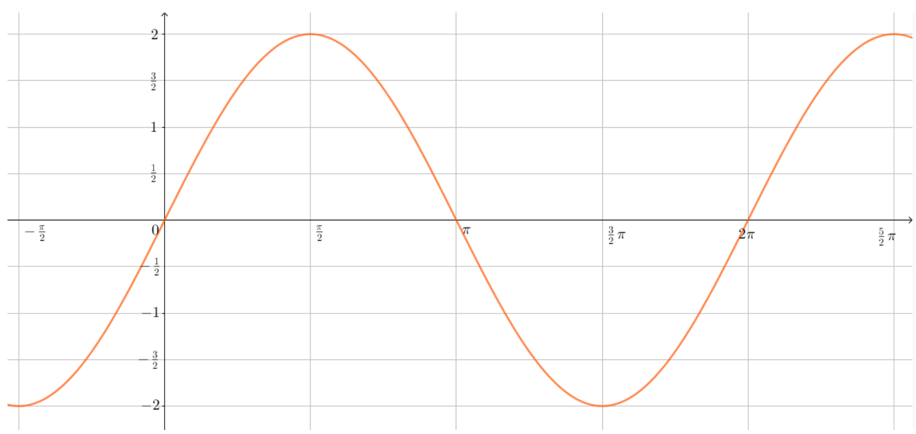
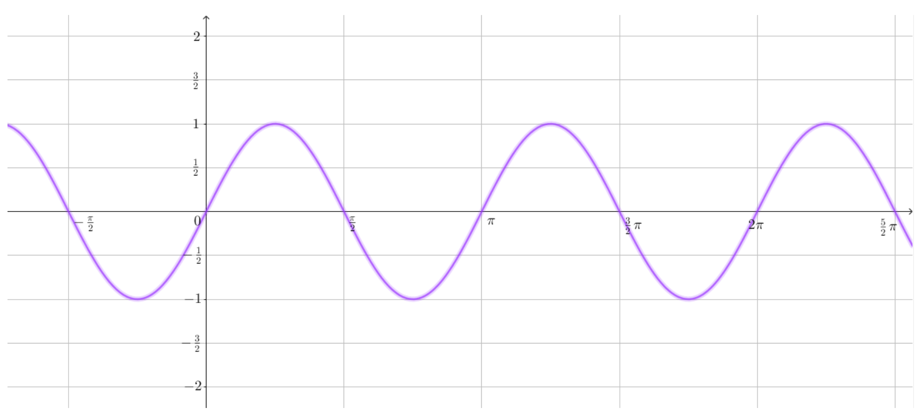


그림 6: *

$y = \tan x$





문제 32) (1) $x = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$ (2) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \frac{5}{4}\pi + n\pi$

문제 34) (1) $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ (2) $0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < x \le \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

문제 35)

- 외접원
- 세 변의 수직이등분선의 교점
- $\triangle OCD$
- 내부
- 외부
- 빗변의 중점

문제 37) $\boxed{(\text{가})} = a,\ \boxed{(\text{나})} = b,\ \boxed{(\text{다})} = c$

문제 38) (1) $10\sqrt{2}$ (2) 5 (3) $60°(= \frac{\pi}{3})$

문제 38) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

문제 40) $>, =, <$

문제 42) $\boxed{\text{(가)}} = \overline{AH}$, $\boxed{\text{(나)}} = \overline{BH}$

문제 43) $\sqrt{13}$

문제 44) $\frac{3}{4}$

문제 45) $\sqrt{21}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{61}$

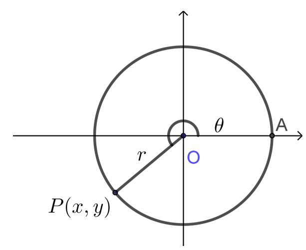
요약

2 부채꼴의 호의 길이와 넓이

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

4 삼각함수

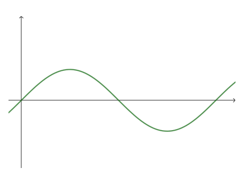
$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



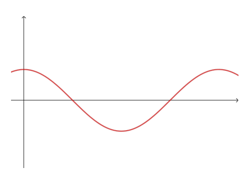
5 삼각함수의 성질

$$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

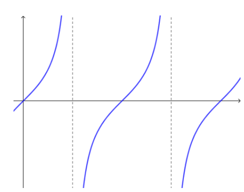
6 삼각함수의 그래프



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$

9 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

10 코사인법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$