삼각형의 각과 변 사이의 관계

October 8, 2014

Contents

1 가정

평면 위의 세 점 A, B, C는 삼각형을 이룬다. 각 꼭지점에 대한 대변對邊을 각각 a, b, c라고 하자. [그림 1]

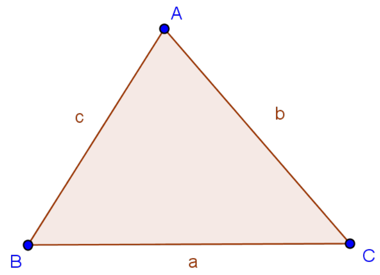

그림 1: 삼각형 ABC

2 삼각부등식

삼각형을 이루는 세 변 a, b, c에 대해서 다음 부등식이 성립한다.

$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$c + a > b$$

특히, 한 문자에 관해서 부등식을 풀어내면

$$c - b < a < c + b$$
$$c - a < b < c + a$$
$$b - a < c < b + a$$

이 된다.

증명. 아래 그림과 같이 [그림 2] 반직선 $\overrightarrow{BA}$ 위에 $\overline{AD} = \overline{AC}$가 되는 점 D를 잡으면 $\angle DCA < \angle DCB$가 성립한다. $\overline{AD} = \overline{AC}$이므로 $\angle DCA = \angle BDC$이고, 따라서 $\angle BDC < \angle DCB$가 성립한다. 삼각형 DBC에서, 대각의 크기가 크면

대변의 길이도 크므로 $\overline{BC} < \overline{BD}$ 이다. 따라서 $c+b = \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{BD} > \overline{BC} = a$ 가 성립한다. 나머지 두 식도 똑같은 방식으로 증명할 수 있다. $\square$

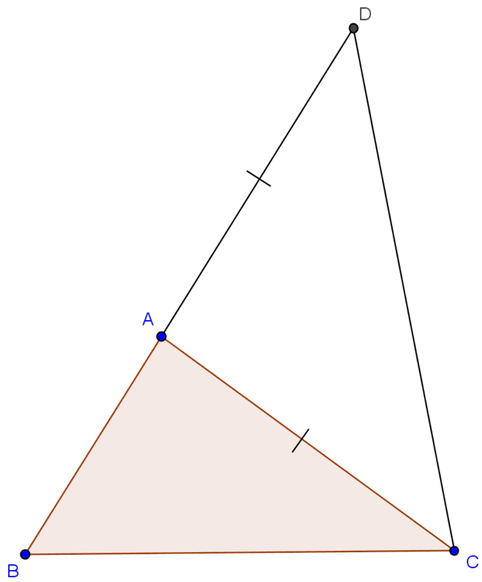

그림 2: 삼각부등식의 증명

3 피타고라스의 정리 외

3.1 $\angle C$=90° 이면 $a^2 + b^2 = c^2$ 이다(피타고라스의 정리).

증명은 생략한다. 대표적으로 유클리드의 증명방법이 있다.

3.2 $\angle C$<90° 이면 $a^2 + b^2 > c^2$ 이다.

증명. $\angle B$ 의 크기에 따라 $\angle B$<90° 일 때, $\angle B$=90°, $\angle B$>90° 일 때로 나누어 생각한다.

i) $\angle B$<90° 일 때

그림 3과 같이 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H, 수선의 길이를 h, $\overline{CH}$ 의 길이를 l 이라고 하면

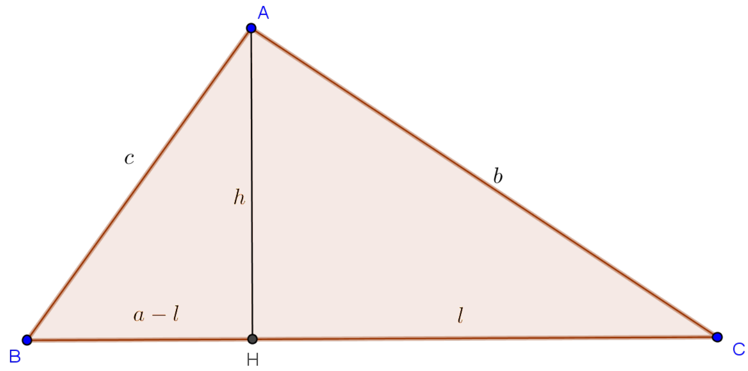

그림 3: $\angle C$=90° 이고 $\angle B$<90° 일 때

$$c^2 = (a-l)^2 + h^2 = a^2 - 2al + l^2 + h^2$$
$$< a^2 + l^2 + h^2 = a^2 + b^2$$

이 된다.

ii) $\angle B$=90° 일 때

그림 4에서 $c^2 = b^2 - a^2 < b^2 + a^2$ 이다.

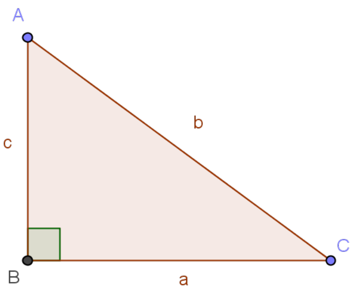

그림 4: $\angle C$=90° 이고 $\angle B$=90° 일 때

iii) $\angle B$>90° 일 때

i) 에서와 마찬가지로 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H, 수선의 길이를 h,

$\overline{CH}$의 길이를 l이라고 하면

$$\begin{aligned} c^2 &= (l-a)^2 + h^2 = a^2 - 2al + l^2 + h^2 \\ &< a^2 + l^2 + h^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

이 된다.[그림 5] □

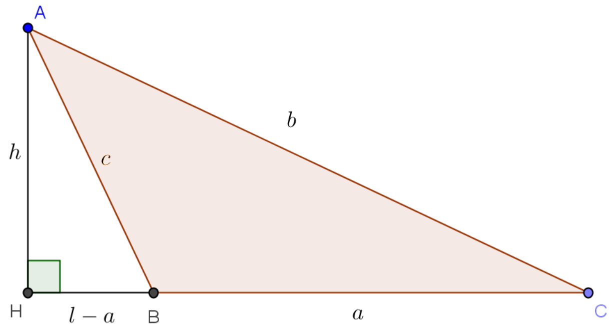

그림 5: $\angle C$=90° 이고 $\angle B$>90° 일 때

3.3 $\angle C$>90° 이면 $a^2 + b^2 < c^2$ 이다.

증명. **3.2**절의 i)과 iii)에서와 마찬가지로 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, 수선의 길이를 h, $\overline{CH}$의 길이를 l이라고 하면

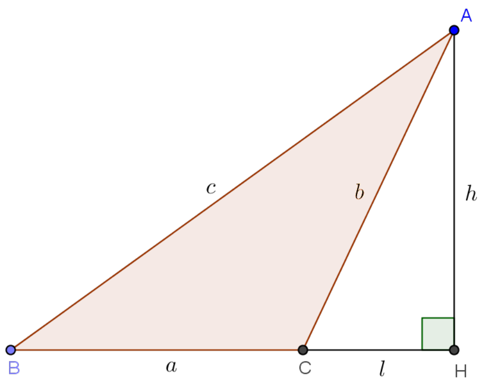

그림 6: $\angle C$>90° 일 때

$$c^2 = (a+l)^2 + h^2 = a^2 + 2al + l^2 + h^2$$
$$> a^2 + l^2 + h^2 = a^2 + b^2$$

이 된다. [그림 6] □

3.4 $a^2 + b^2 = c^2$ 이면 $\angle C$=90° 이다 (피타고라스의 정리의 역).

증명. (1) 그림 7과 같이 삼각형 ABC가 주어져 있고 $a^2 + b^2 = c^2$가 성립한다. 이 삼각형에서 $\angle C$=90° 라는 것을 증명해야 한다.

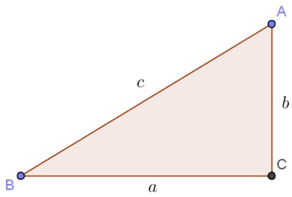

그림 7: 피타고라스 정리의 역에 대한 증명 (1)

직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b인 직각삼각형 $A'B'C'$를 아래 그림 8과 같이 그린다. 이 때, 삼각형 $A'B'C'$의 빗변의 길이를 x라고 하면 피타고라스의 정리

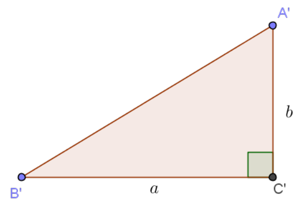

그림 8: 피타고라스 정리의 역에 대한 증명 (2)

로부터 $a^2 + b^2 = x^2$이 성립한다. 또 가정에서 $a^2 + b^2 = c^2$라고 했으므로 $x^2 = c^2$이다. 그런데 $x > 0$, $c > 0$이므로 $x = c$이다. 그러면 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$(SSS 합동) 이 된다. 따라서 $\angle C = \angle C' = 90°$ 이다. □

위의 증명 방식과는 다르게 간접적으로 증명할 수도 있다. *증명.* (1) 처럼 직접적으로 증명하는 방법을 '직접증명법' 이라고 말하고 앞으로 소개할 *증명.* (2) 에서처럼 간접적으로 증명하는 방법을 '간접증명법' 이라고 한다. *증명.* (2) 에서는 간접증명법 중에서도 '귀류법' 이라는 증명방식을 사용했다.

증명. (2) 만약 $\angle C{=}90^\circ$ 가 아니라면 $\angle C{<}90^\circ$ 이거나 $\angle C{>}90^\circ$ 이어야 한다. $\angle C{<}90^\circ$ 인 경우 **3.2**에 의해 $a^2 + b^2 > c^2$ 가 되어 $a^2 + b^2 = c^2$ 라는 가정에 모순되므로 성립할 수 없다. $\angle C{>}90^\circ$ 인 경우 **3.3**에 의해 $a^2 + b^2 < c^2$ 가 되어 $a^2 + b^2 = c^2$ 라는 가정에 모순되므로 성립할 수 없다. 따라서 $\angle C{=}90^\circ$ 일 수밖에 없다. □

3.5 $a^2 + b^2 > c^2$ 이면 $\angle C{<}90^\circ$ 이다.

마찬가지로 귀류법을 이용해 증명할 수 있다.

증명. 만약 $\angle C{<}90^\circ$ 가 아니라면 $\angle C{=}90^\circ$ 이거나 $\angle C{>}90^\circ$ 이어야 한다. $\angle C{=}90^\circ$ 인 경우 **3.1**에 의해 $a^2 + b^2 = c^2$ 가 되어 $a^2 + b^2 > c^2$ 라는 가정에 모순되므로 성립할 수 없다. $\angle C{>}90^\circ$ 인 경우 **3.3**에 의해 $a^2 + b^2 < c^2$ 가 되어 $a^2 + b^2 > c^2$ 라는 가정에 모순되므로 성립할 수 없다. 따라서 $\angle C{<}90^\circ$ 일 수밖에 없다. □

3.6 $a^2 + b^2 < c^2$ 이면 $\angle C{>}90^\circ$ 이다.

증명. 만약 $\angle C{>}90^\circ$ 가 아니라면 $\angle C{=}90^\circ$ 이거나 $\angle C{<}90^\circ$ 이어야 한다. $\angle C{=}90^\circ$ 인 경우 **3.1**에 의해 $a^2 + b^2 = c^2$ 가 되어 $a^2 + b^2 < c^2$ 라는 가정에 모순되므로 성립할 수 없다. $\angle C{<}90^\circ$ 인 경우 **3.2**에 의해 $a^2 + b^2 > c^2$ 가 되어 $a^2 + b^2 < c^2$ 라는 가정에 모순되므로 성립할 수 없다. 따라서 $\angle C{>}90^\circ$ 일 수밖에 없다. □

4 정리

이상의 내용을 정리하면 다음과 같다. 삼각형ABC의 세 변을 각각 a, b, c 라고 할 때,

$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$c + a > b$$

이 성립하고(삼각부등식), 또한

$$\angle C = 90^\circ \iff a^2 + b^2 = c^2$$
$$\angle C < 90^\circ \iff a^2 + b^2 > c^2$$
$$\angle C > 90^\circ \iff a^2 + b^2 < c^2.$$

이 성립한다(피타고라스정리 등).