유진, 미적1 참고자료

2018년 2월 5일

문제 1) 미적1[라쎈] #357

$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = 2$ 일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

<풀이1> 인수분해를 통한 방법

$\lim_{x\to -1}(\text{분모}) = \lim_{x\to -1}(x+1) = 0$ 이므로 $\lim_{x\to -1}(\text{분자}) = 0$ 이다.

$$0 = \lim_{x\to -1}(x^2+ax+b) = (-1)^2 + a(-1) + b = 1 - a + b$$

따라서

$$b = a - 1 \tag{1}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2+ax+(a-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1}(x+a-1) = -1+a-1 = a-2 \end{aligned}$$

따라서 $a = 4$ 이다. (1) 에 대입하면 $b = 3$. 따라서 $a + b = 7$

<풀이2> 인수정리를 사용한 방법

$$x^2 + ax + b = f(x) \tag{2}$$

라고 하자. $\lim_{x\to -1}(x+1) = 0$ 이므로 $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$ 이다. 한편 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이므로 $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$ 이고, 따라서

$$f(-1) = 0$$

인수정리에 의해 $f(x)$ 는 $x+1$ 이라는 인수를 가진다. 따라서

$$f(x) = (x+1)Q(x)$$

이다. (2) 와 비교해보면 $Q(x) = x + b$ 이고 $a = b + 1$ 이다. 따라서

$$2 = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+b)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x+b) = -1+b$$

이다. 그러므로 $b = 3$, $a = 4$.

답 : 7

문제 2) 미적1[라쎈] #357-1

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+ax+b}{x-2} = 7$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

문제 3) 미적1[라쎈] #357-2

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+ax+b}{x-\frac{1}{2}} = 5$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

문제 4) 미적1[라쎈] #357-3

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3+ax^2+b}{x-1} = -3$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

문제 5) 미적1[라센] #365

x에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$$(가)\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2, \qquad (나)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$$

<풀이>

(가) 로부터 $f(x)-x^3$은 이차식이고 이차항의 계수는 2이다. 따라서

$$f(x)-x^3=2x^2+ax+b$$

또는

$$f(x)=x^3+2x^2+ax+b \tag{3}$$

이다. (나) 에서 $\lim_{x\to 0}$(분모) $=0$이므로 $\lim_{x\to 0}$(분자) $=\lim_{x\to 0}(x^3+2x^2+ax+b)=0$이다. 따라서 $b=0$. 그러므로 $f(x)=x^3+2x^2+ax$이고 이를 (나) 에 대입하면

$$-1=\lim_{x\to 0}(x^2+2x+a)=a$$

이다. 즉 $a=-1$이고

$$f(x)=x^3+2x^2-x$$

이다. $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지인 $f(1)$은

$$f(1)=1^3+2\cdot 1^2-1=2$$

이다.

답 : 2

문제 6) 미적1[라쎈] #365-1

x에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$$\text{(가)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{2x^2+5}=1, \qquad \text{(나)}\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$$

문제 7) 미적1[라쎈] #365-2

x에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 $x-3$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$$\text{(가)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+4x}=-1, \qquad \text{(나)}\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=10$$

문제 8) 미적1[라쎈] #365-3

x에 대한 다항식 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

$$\text{(가)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{ax-1}=2, \qquad \text{(나)}\ \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-5}{x+1}=8$$

문제 9) 미적1[라쎈] #366

x에 대한 삼차식 $f(x)$가

$$(\text{가})\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2, \qquad (\text{나})\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$의 값을 구하여라.

<풀이1> 인수분해를 통한 방법

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$이라고 하자. (가)에서 $f(0)=0$. 따라서 $d=0$. (나)에서 $f(1)=0$. 따라서 $a+b+c=0$, $c=-(a+b)$. 그러면

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3+bx^2-(a+b)x \\ &= a(x^3-x)+b(x^2-x) \\ &= ax(x-1)(x+1)+bx(x-1) \\ &= x(x-1)\left\{a(x+1)+b\right\} \end{aligned}$$

(가)에서 $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\left\{a(x+1)+b\right\}=2$, 따라서 $a+b=-2$.

(나)에서 $\lim\limits_{x\to 1}x\left\{a(x+1)+b\right\}=-1$, $2a+b=-1$.

두 식을 연립하면 $a=1$, $b=-3$. 또 $c=2$. 그러므로

$$f(x)=x^3-3x^2-2x=x(x-1)(x-2)$$

이고

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x(x-1)=2$$

<풀이2> 인수정리를 사용한 방법

(가)에서 $f(0)=0$, (나)에서 $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 x와 $x-1$을 인수로 가진다. 따라서 $f(x)=x(x-1)Q(x)$이고 $Q(x)$는 일차식이다. $Q(x)=mx+n$라고 하면,

$$f(x)=x(x-1)(mx+n)$$

이다. 다시 (가)로부터

$$2=\lim_{x\to 0}(x-1)(mx+n)=-n,$$

$n=-2$, $f(x)=x(x-1)(mx-2)$. 또 (나)로부터

$$-1=\lim_{x\to 1}x(mx-2)=m-2,$$

$m=1$. 따라서 $f(x)=x(x-1)(x-2)$이고

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x(x-1)=2$$

<풀이3> 미분계수를 사용한 방법

(가) 에서 $f(0)=0$ 이므로 (가) 를 다시 쓰면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$$

따라서 $f'(0)=2$.

(나) 에서 $f(1)=0$ 이므로 (나) 를 다시 쓰면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$$

따라서 $f'(1)=-1$.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라고 놓으면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이다. $f(0)=2$, $f'(0)=2$, $f(1)=0$, $f'(1)=-1$ 을 차례로 사용하면 $d=0$, $c=2$, $a+b+2=0$, $3a+2b+2=-1$ 이다. 따라서 $a=1$, $b=-3$. $f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ 이고

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2$$

답 : 2

문제 10) 미적1[라쎈] #366-1

x 에 대한 삼차식 $f(x)$ 가

$$(\text{가})\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1, \qquad (\text{나})\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

문제 11) 미적1[라쎈] #366-2

삼차함수 $f(x)$ 가

$$(\text{가})\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1, \qquad (\text{나})\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=6$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.