수학(하) : 04 내분점과 외분점

2018년 8월 7일

차 례

1 내분점과 외분점(1차원)

정의 1) 내분점과 외분점

선분 $\overline{AB}$위의 점 P가

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$

를 만족시키면, 점 P를 점 A와 점 B의 $m : n$ **내분점**이라고 한다.

선분 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점 Q가

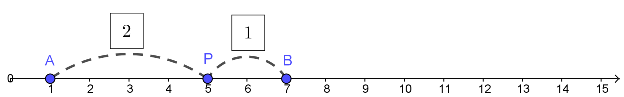
$$\overline{AQ} : \overline{QB} = m : n$$

를 만족시키면, 점 Q를 점 A와 점 B의 $m : n$ **외분점**이라고 한다.

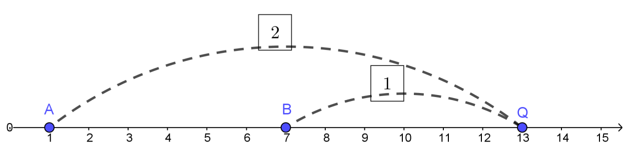
예시 2)

수직선 위의 두 점 $A(1)$, $B(7)$에 대해

(1) A와 B의 $2 : 1$ 내분점은 $P(5)$이다.



(2) A와 B의 $2 : 1$ 외분점은 $Q(13)$이다.



문제 3)

수직선 위의 두 점 $A(2)$, $B(10)$에 대해

(1) A와 B의 $3 : 1$ 내분점 P

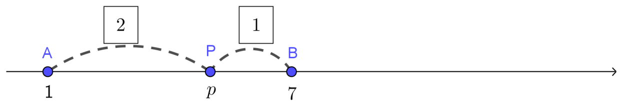
(2) A와 B의 $3 : 1$ 외분점 Q

(3) A와 B의 $1 : 2$ 외분점 R

의 좌표를 각각 구하여라.

예시 4)

예시 2)를 다음과 같이 풀어보자. P의 좌표를 p라고 두면 P는 A와 B 사이에 있으므로 $1 < p < 7$이다.

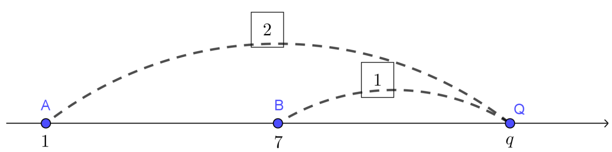


$\overline{AP} = p - 1$, $\overline{PB} = 7 - p$로부터

$$p - 1 : 7 - p = 2 : 1$$
$$2(7 - p) = p - 1$$
$$14 - 2p = p - 1$$
$$3p = 15$$
$$p = 5$$

따라서 P의 좌표는 5이다.

한편, Q의 좌표를 q라고 두면 Q는 B의 오른편에 있으므로 $1 < 7 < q$이다.



$\overline{AQ} = q - 1$, $\overline{QB} = q - 7$로부터

$$q - 1 : q - 7 = 2 : 1$$
$$2(q - 7) = q - 1$$
$$2q - 14 = q - 1$$
$$q = 13$$

따라서 Q의 좌표는 13이다.

문제 5)

문제 3)을 예시 4)의 방법을 사용하여 풀어라.

정리 6) 내분점과 외분점의 좌표(1차원)
두 점 $A(a)$, $B(b)$에 대하여 A와 B의 $m:n$ 내분점 $P(p)$, 외분점 $Q(q)$의 좌표는 각각

$$p = \frac{mb+na}{m+n}$$

$$q = \frac{mb-na}{m-n}$$

이다.

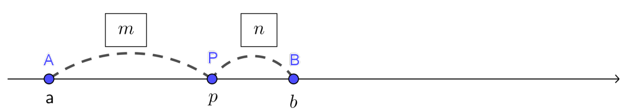
$$p = \frac{n}{m+n}a + \frac{m}{m+n}b, \qquad q = -\frac{n}{m-n}a + \frac{m}{m-n}b$$

로 쓸 수도 있다.

증명)

$\boxed{\text{내분점 } P}$

P는 A와 B 사이에 있으므로 $a < p < b$이다. $\overline{AP} = p - a$, $\overline{PB} = b - p$로부터



따라서

$$p - a : b - p = m : n$$

$$m(b-p) = n(p-a)$$

$$mb - mp = np - na$$

$$mb + na = (m+n)p$$

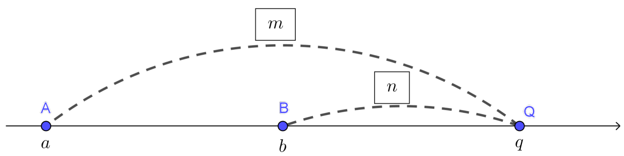
$$p = \frac{mb+na}{m+n}$$

□

$\boxed{\text{외분점 } Q}$

i) $m > n$일 때,

Q는 B의 오른편에 있으므로 $a < b < q$이다.

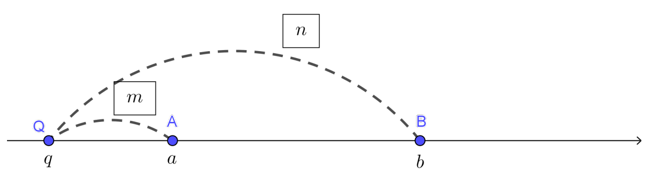


$\overline{AQ} = q - a$, $\overline{QB} = q - b$로부터

$$q - a : q - b = m : n$$
$$m(q - b) = n(q - a)$$
$$mq - mb = nq - na$$
$$(m - n)q = mb - na$$
$$q = \frac{mb - na}{m - n}$$

ii) $m < n$일 때,

Q는 B의 왼편에 있으므로 $q < a < b$이다.



$\overline{AQ} = a - q$, $\overline{QB} = b - q$로부터

$$a - q : b - q = m : n$$
$$m(b - q) = n(a - q)$$
$$mb - mq = na - nq$$
$$mb - na = (m - n)q$$
$$q = \frac{mb - na}{m - n}$$

$\square$

예시 7)

예시 2)를 정리 6)의 공식을 사용해서 풀어보면

$$p = \frac{2 \times 7 + 1 \times 1}{2+1} = \frac{15}{3} = 5$$
$$q = \frac{2 \times 7 - 1 \times 1}{2-1} = \frac{13}{1} = 13$$

이다.

문제 8)

문제 3)을 정리 6)의 공식을 사용하여 풀어라.

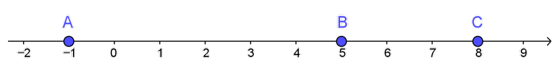
문제 9)

$A(-1)$, $B(5)$, $C(8)$에 대하여 다음 문장을 완성하여라.

(1) A는 B와 C의 $\square : \square$ 외분점이다.

(2) B는 A와 C의 $\square : \square$ 내분점이다.

(3) C는 A와 B의 $\square : \square$ 외분점이다.



문제 10)

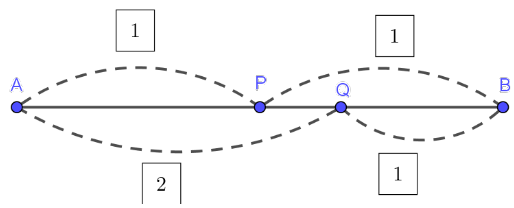
$P(9)$는 $A(3)$와 $B(b)$의 $2:3$ 내분점이다. 이때 b의 값을 구하시오.

문제 11)

$Q(11)$는 $A(a)$와 $B(5)$의 $4:3$ 외분점이다. 이때 a의 값을 구하시오.

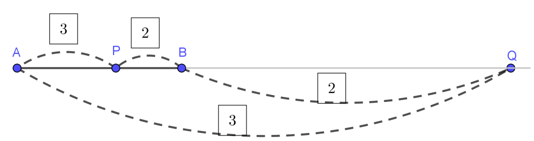
문제 12)

선분 $\overline{AB}$ 위의 두 점 P, Q에 대해 P는 A와 B의 중점이고 Q는 A와 B의 2:1 내분점일 때, $\overline{AP} : \overline{PQ} : \overline{QB}$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.



문제 13)

직선 $\overline{AB}$ 위의 두 점 P, Q에 대해 P는 A와 B의 $3:2$ 내분점이고 Q는 A와 B의 $3:2$ 외분점일 때, $\overline{AP} : \overline{PB} : \overline{BQ}$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

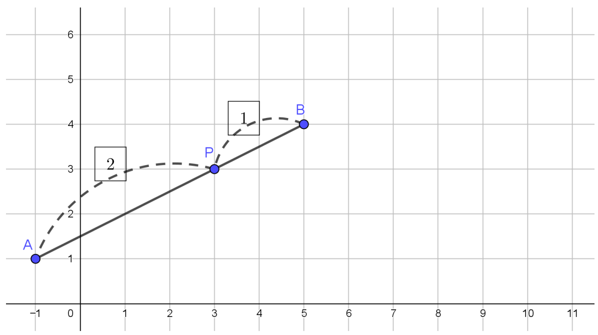


2 내분점과 외분점(2차원)

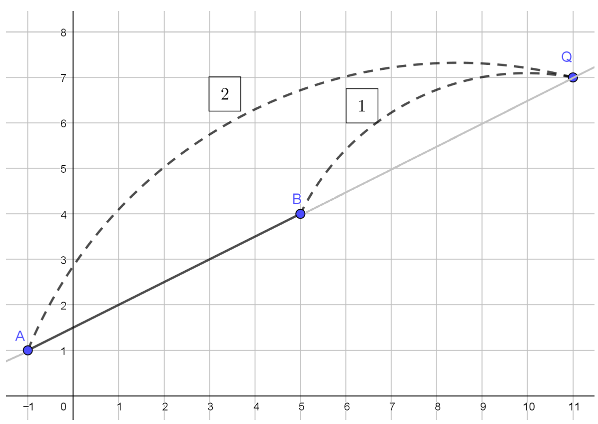
예시 14)

평면좌표 위의 두 점 $A(-1,1)$, $B(5,4)$에 대해

(1) A와 B의 $2:1$ 내분점은 $P(3,3)$이다.



(2) A와 B의 $2:1$ 외분점은 $Q(11,7)$이다.



문제 15)

평면 좌표 위의 두 점 $A(0,4)$ $B(4,0)$에 대해

(1) A와 B의 $3:1$ 내분점 P

(2) A와 B의 $3:1$ 외분점 Q

(3) A와 B의 $1:2$ 외분점 R

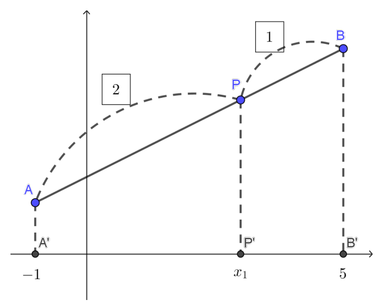
의 좌표를 각각 구하여라.

예시 16)

예시 14)에서 $P=(x_1, y_1)$로 놓고 다음과 같이 해석해보자.

A에서 x축에 내린 수선의 발을 A'
B에서 x축에 내린 수선의 발을 B'
P에서 x축에 내린 수선의 발을 P'

이라고 놓으면



닮음의 성질에 의해

$$\overline{A'P'}:\overline{P'B'}=2:1$$

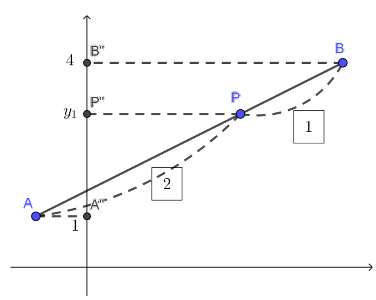
이다. 즉 $P'(x_1)$은 $A'(-1)$와 $B'(5)$의 2:1 내분점이다. 따라서

$$x_1=\frac{2\times 5+1\times(-1)}{2+1}=3$$

마찬가지로

A에서 y축에 내린 수선의 발을 A''
B에서 y축에 내린 수선의 발을 B''
P에서 y축에 내린 수선의 발을 P''

이라고 놓으면



$P''(y_1)$은 $A''(1)$와 $B''(4)$의 2:1 내분점이다.

$$y_1 = \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1} = 3$$

즉

$$P = (x_1, y_1) = \left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1} \ , \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1} \right) = (3, 3)$$

이다.

같은 방법으로 외분점 Q는

$$Q = (q_1, q_2) = \left(\frac{2 \times 5 - 1 \times (-1)}{2-1} \ , \frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2-1} \right) = (11, 7)$$

로 계산할 수 있다.

정리 17) 내분점과 외분점의 좌표(2차원)
두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 A와 B의 $m:n$ 내분점 P, 외분점 Q의 좌표는 각각

$$P = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n} \ , \ \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

$$Q = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n} \ , \ \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right)$$

이다.

문제 18)
문제 15)를 정리 17)의 공식을 사용하여 풀어라.

문제 19)
평면 위의 점 P가 $A(3, -3)$와 $B(8, 7)$의 $3:2$ 내분점일 때, P의 좌표를 구하여라.

문제 20)

평면 위의 점 P가 $A(1,0)$와 $B(3,-1)$의 $2:1$ 외분점일 때, P의 좌표를 구하여라.

문제 21)

평면 위의 점 $P(3,-2)$가 $A(0,7)$와 B의 $3:1$ 내분점일 때, B의 좌표를 구하여라.

문제 22)

평면 위의 세 점 $A(5,7)$, $B(-1,2)$, $C(8,5)$로 만든 삼각형 $\triangle ABC$이 있다. 선분 $\overline{BC}$ 위에 B와 C의 $2:1$ 내분점 D를 잡고 선분 $\overline{AD}$ 위에 A와 D의 $1:2$ 내분점 E를 잡을 때 E의 좌표를 구하여라.

3 중점과 무게중심

두 점 A, B의 중점이란, 두 점의 1:1 내분점을 말한다.

정리 6)와 정리 17)에 $m=1$, $n=1$을 대입하면 다음 결과를 얻는다.

정리 23) 두 점 A, B의 중점

(1) 수직선 위의 두 점 $A(a)$, $B(b)$의 중점 M의 좌표는

$$M=\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

이다.

(2) 평면 위의 두 점 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$의 중점 M의 좌표는

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

이다.

문제 24)
수직선 위의 두 점 $A(4)$, $B(b)$의 중점이 $M(10)$일 때, b의 값을 구하여라.

문제 25)
평면 위의 두 점 $A(1,10)$, $B(5,6)$의 중점 M의 좌표를 구하여라.

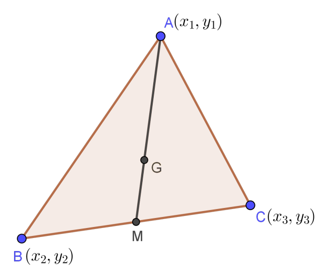
삼각형 ABC의 무게중심 G는 세 중선의 교점이다. 또한, 한 중선을 $2:1$로 내분한 점이기도 하다. 따라서 다음을 얻는다.

정리 26) 삼각형 ABC의 무게중심

평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$의 무게중심 G의 좌표는

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ , \ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

이다.



증명)

B와 C의 중점을 M이라 하면

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

이다. 무게중심 G는 A와 M의 2:1 내분점이므로

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + 1 \cdot x_3}{2+1}, \frac{2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + 1 \cdot y_3}{2+1} \right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ , \ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \end{aligned}$$

□

문제 27)

평면 위의 세 점 $A(1,5)$, $B(-2,1)$, $C(7,3)$의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

문제 28)

평면 위의 세 점 $A(a,3)$, $B(3,b)$, $C(12,0)$의 무게중심 G의 좌표가 $G=(8,0)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.하여라.

답

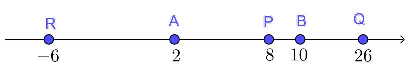
문제 3)

(1) $P(8)$

(2) $Q(14)$

(3) $R(-6)$

참고 :



문제 5)

생략

문제 8)

생략

문제 9)

(1) $2:3$

(2) $2:1$

(3) $3:1$

문제 10)

18

문제 11)

3

문제 12)

$3:1:2$

문제 13)

$3:2:10$

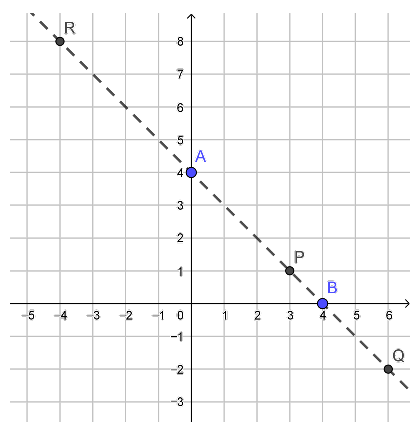
문제 15)

(1) $P = (3, 1)$

(2) $Q = (6, -2)$

(3) $R = (-4, 8)$

참고 :



문제 18)

생략

문제 19)

$P = (6, 3)$

문제 20)

$P = (5, -2)$

문제 21)

$B = (4, -5)$

문제 22)

$E = (5, 6)$

문제 24)

$b = 16$

문제 25)

$M = (3, 8)$

문제 27)

$G = (2, 3)$

문제 28)

6