미적분 1 : 05 미분계수와 도함수

2017년 5월 12일

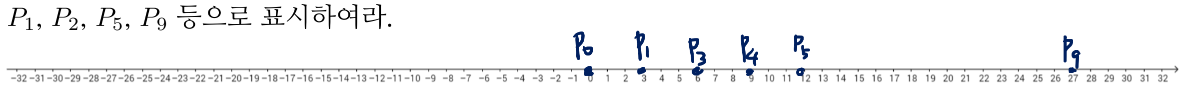
차 례

1 위치와 속도

예시 1)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 $0 \le t \le 10$의 시간동안 3의 속력으로 오른쪽으로 운동한다.

(1) 아래 수직선 상에 $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$, $t = 9$일 때의 P의 위치를 P_0, P_1, P_2, P_5, P_9 등으로 표시하여라.



(2) $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$, $t = 9$일 때의 P의 좌표인 $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(5)$, $x(9)$를 구하여라.

$x(0) = \boxed{0}$, $x(1) = \boxed{3}$, $x(2) = \boxed{6}$, $x(5) = \boxed{15}$, $x(9) = \boxed{27}$

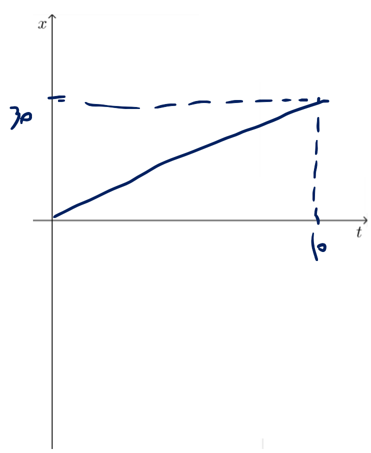
(3) 0초부터 10초까지 P의 평균 속도를 구하여라.

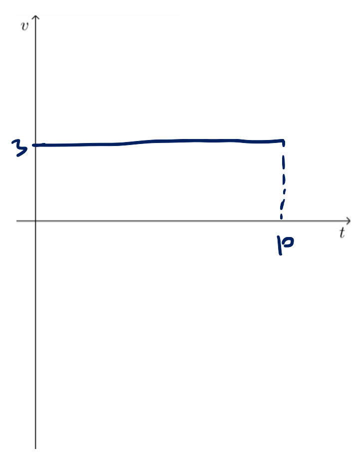
$v_{0\sim10} = \boxed{}\ \frac{30}{10} = 3$

(4) $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$, $t = 9$일 때의 P의 순간속도인 $v(1)$, $v(2)$, $v(5)$, $v(9)$를 구하여라.

$v(0) = \boxed{3}$, $v(1) = \boxed{3}$, $v(2) = \boxed{3}$, $v(5) = \boxed{3}$, $v(9) = \boxed{3}$

(5) 시간에 따른 위치의 그래프($x - t$그래프)와 시간에 따른 속도의 그래프($v - t$그래프)를 나타내어라.





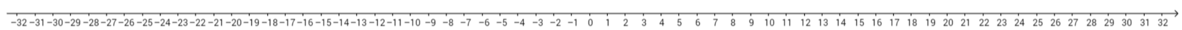
(6) 시각 t에서의 P의 위치 $x(t)$와 P의 속도 $v(t)$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

$x(t) = \boxed{3t}$, $v(t) = \boxed{3}$

예시 2)

$x = 10$을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 $0 \le t \le 10$의 시간동안 4의 속력으로 왼쪽으로 운동한다.

(1) 아래 수직선 상에 $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 위치를 P_0, P_1, P_2, P_5, P_9 등으로 표시하여라.



(2) $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 좌표인 $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(5)$, $x(9)$를 구하여라.

$x(0) = \boxed{}$, $x(1) = \boxed{}$, $x(2) = \boxed{}$, $x(5) = \boxed{}$, $x(9) = \boxed{}$

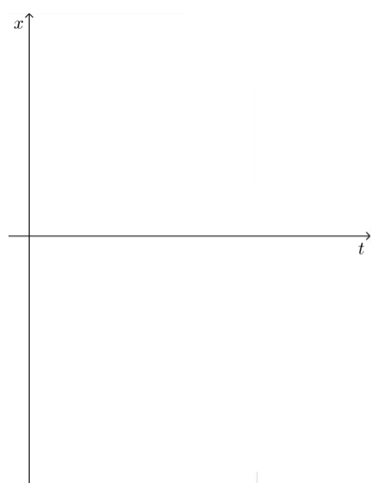
(3) 0초부터 10초까지 P의 평균속도를 구하여라.

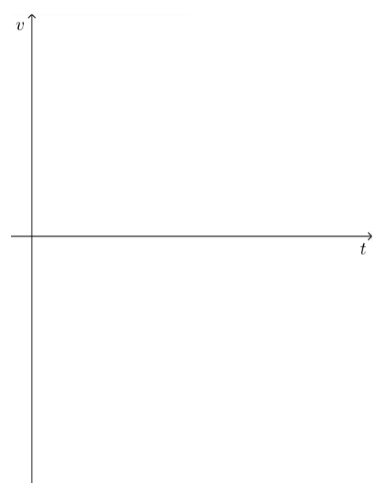
$v_{0\sim10} = \boxed{}$

(4) $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 순간속도인 $v(1)$, $v(2)$, $v(5)$, $v(9)$를 구하여라.

$v(0) = \boxed{}$, $v(1) = \boxed{}$, $v(2) = \boxed{}$, $v(5) = \boxed{}$, $v(9) = \boxed{}$

(5) $x-t$그래프와 $v-t$그래프를 각각 나타내어라.





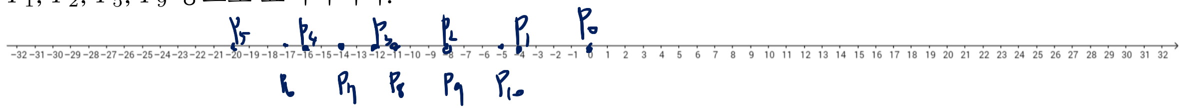
(6) 시각 t에서의 P의 위치 $x(t)$와 P의 속도 $v(t)$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

$x(t) = \boxed{}$, $v(t) = \boxed{}$

예시 3)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 $0 \le t \le 5$의 시간 동안에는 4의 속력으로 왼쪽으로 움직이다가, $5 \le t \le 10$의 시간 동안에는 3의 속력으로 오른쪽으로 운동한다.

(1) 아래 수직선 상에 $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 위치를 P_0, P_1, P_2, P_5, P_9 등으로 표시하여라.



(2) $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 좌표인 $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(5)$, $x(9)$를 구하여라.

$x(0) = \square$, $x(1) = \square$, $x(2) = \square$, $x(5) = \square$, $x(9) = \square$

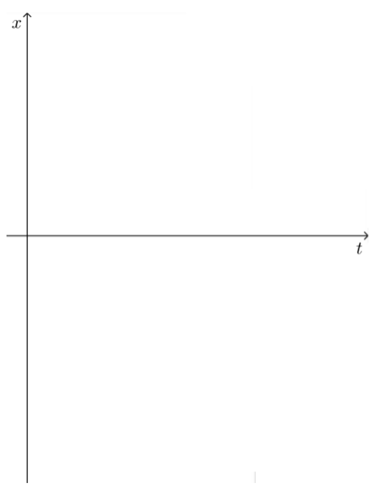
(3) 0초부터 10초까지 P의 평균속도를 구하여라.

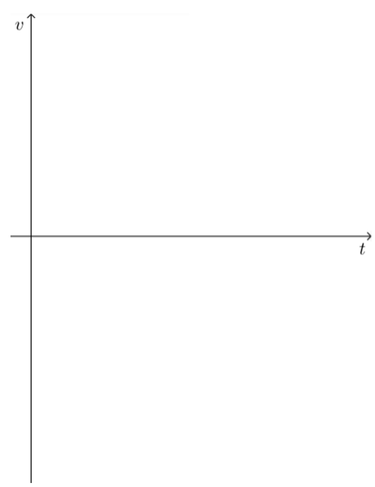
$v_{0\sim10} = \square$ $\frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$

(4) $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 순간속도인 $v(1)$, $v(2)$, $v(5)$, $v(9)$를 구하여라.

$v(0) = \square$, $v(1) = \square$, $v(2) = \square$, $v(5) = \square$, $v(9) = \square$

(5) $x-t$그래프와 $v-t$그래프를 각각 나타내어라.





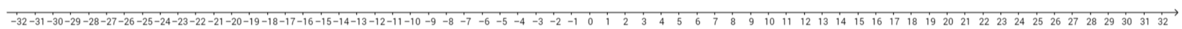
(6) 시각 t에서의 P의 위치 $x(t)$와 P의 속도 $v(t)$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

$$x(t) = \begin{cases} \square & (0 < t < 5) \\ \square & (5 < t < 10) \end{cases}, \quad v(t) = \begin{cases} \square & (0 < t < 5) \\ \square & (5 < t < 10) \end{cases}$$

예시 4)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 $0 \le t \le 3$의 시간 동안에는 10의 속력으로 오른쪽으로 움직이다가, $3 \le t \le 6$의 시간 동안에는 정지해있고, 다시 $6 \le t \le 10$의 시간 동안에는 10의 속력으로 왼쪽으로 운동한다.

(1) 아래 수직선 상에 $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 위치를 P_0, P_1, P_2, P_5, P_9 등으로 표시하여라.



(2) $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 좌표인 $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(5)$, $x(9)$를 구하여라.

$x(0) = \square$, $x(1) = \square$, $x(2) = \square$, $x(5) = \square$, $x(9) = \square$

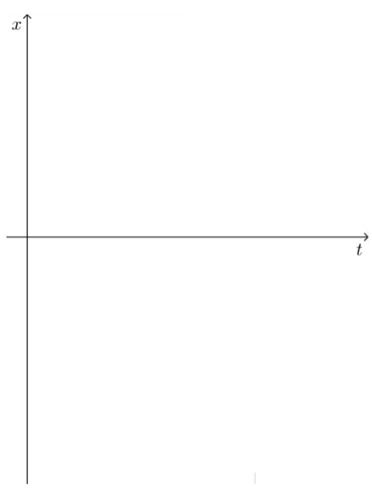
(3) 0초부터 10초까지 P의 평균속도를 구하여라.

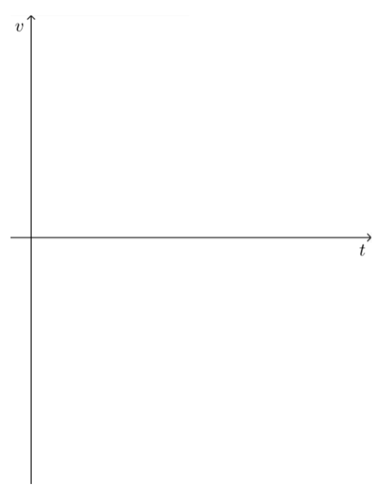
$v_{0\sim10} = \square$

(4) $t=1$, $t=2$, $t=5$, $t=9$일 때의 P의 순간속도인 $v(1)$, $v(2)$, $v(5)$, $v(9)$를 구하여라.

$v(1) = \square$, $v(2) = \square$, $v(5) = \square$, $v(9) = \square$

(5) $x-t$그래프와 $v-t$그래프를 각각 나타내어라.





(6) 시각 t에서의 P의 위치 $x(t)$와 P의 속도 $v(t)$를 t에 대한 식으로 나타내어라.

$x(t) =$ $v(t) =$

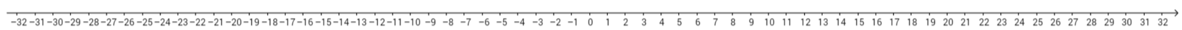
예시 5)

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 좌표가

$$x(t) = 20t - 5t^2$$

로 주어진다.

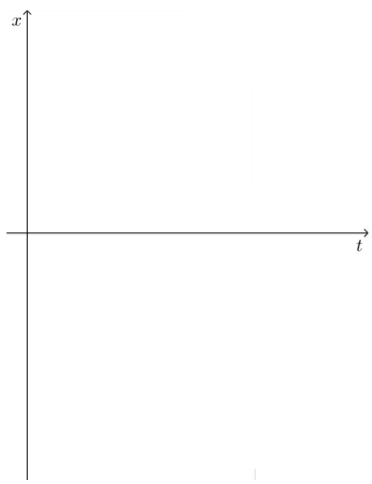
(1) 아래 수직선 상에 $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$일 때의 P의 위치를 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 등으로 표시하여라.



(2) $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$일 때의 P의 좌표인 $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$를 구하여라.

$x(0) = \square$, $x(1) = \square$, $x(2) = \square$, $x(5) = \square$, $x(9) = \square$

(3) $x - t$ 그래프를 나타내어라.



(4) 0초부터 3초까지 P의 평균속도를 구하여라.

$v_{0\sim3} = \square$

(5) $t=1$, $t=2$ 순간속도인 $v(1)$, $v(2)$을 유추하여라.

$v(1) = \square$, $v(2) = \square$

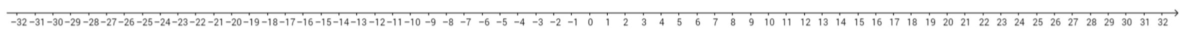
예시 6)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t에서의 좌표가

$$x(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

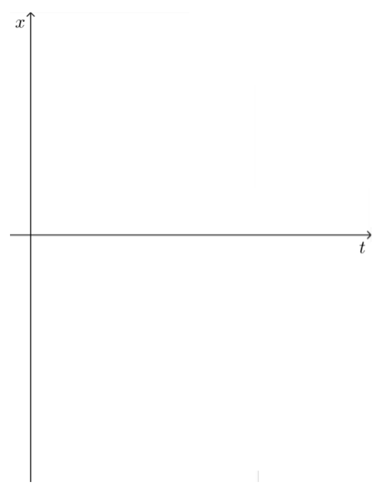
로 주어진다.

(1) 아래 수직선 상에 $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$일 때의 P의 위치를 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 등으로 표시하여라.



(2) $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$일 때의 P의 좌표인 $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$를 구하여라.
$x(0) = \square$, $x(1) = \square$, $x(2) = \square$, $x(5) = \square$, $x(9) = \square$

(3) $x - t$ 그래프를 나타내어라.



(4) 0초부터 3초까지 P의 평균속도를 구하여라.
$v_{0\sim3} = \square$

(5) $t=1$, $t=2$ 순간속도인 $v(1)$, $v(2)$을 유추하여라.
$v(1) = \square$, $v(2) = \square$

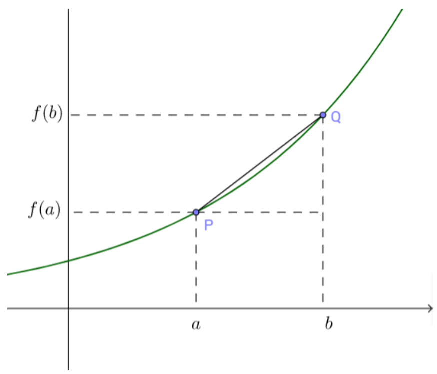
2 미분계수

정의 7) 평균변화율

함수 $y = f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다.



$*$ 위의 그림 상에 Δx와 Δy를 각각 표시하시오.

$**$ 이때 Δx 대신 h를 쓰기도 한다.

예시 8)

함수 $f(x) = x^2$가 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9 - 0}{3} = 3$$

이다.

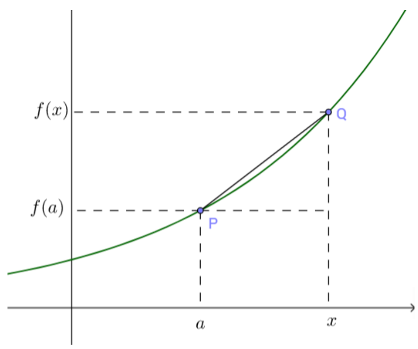
'평균변화율'은 위치와 속도에서 나왔던 '평균속도'의 의미와 비슷하다. 위치와 속도에서 나왔던 '순간속도'의 의미와 비슷한 것은 다음의 '순간변화율'이다.

평균속도	순간속도
평균변화율	순간변화율(=미분계수)

정의 9) 순간변화율(미분계수)
함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 순간변화율(미분계수) $f'(a)$는

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\boxed{}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

이다.



$*$ 위의 그림 상에 Δx와 Δy를 각각 표시하시오.
$**$ 이때 Δx 대신 h를 쓰기도 한다.
$***$ 위의 극한식의 빈칸에 알맞은 것을 넣으시오.

예시 10)
함수 $f(x) = x^2$의 $x = 1$에서의 순간변화율(미분계수) $f'(1)$은

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2\} - 1^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

와 같이 계산할 수 있다. 이때 Δx 와 같은 기호는 조금 쓰기가 번거로울 수 있으므로 h 로 바꿔서 쓰면 훨씬 편하다. 또한 다음과 같이 계산할 수도 있다.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

따라서, 두 계산값이 똑같다는 것을 확인할 수 있다.

순간변화율(미분계수)는 평균변화율의 극한이다. 평균변화율은 두 점 사이의 기울기이므로, 순가변화율(미분계수)는 기울기의 극한값이라고 생각할 수 있다. 따라서 이 예시에서 $f'(1)$ 의 의미는 '$y = x^2$ 의 $P(1,1)$ 에서의 접선의 기울기' 이다.

순간변화율(미분계수)=접선의 기울기