2018학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	④	3	④	4	②	5	③
6	①	7	①	8	③	9	②	10	⑤
11	②	12	⑤	13	⑤	14	②	15	①
16	③	17	④	18	⑤	19	②	20	①
21	⑤	22	12	23	5	24	7	25	27
26	40	27	11	28	60	29	16	30	146

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(3+i)-2i$
$=3+(1-2)i$
$=3-i$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$(2x+3y)(4x-y)=8x^2+10xy-3y^2$에서 xy의 계수는 10이다.

3. [출제의도] 이차부등식 계산하기

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)\le 0$$

이므로 해는

$$1\le x\le 5$$

이다. 그러므로 $\alpha=1$, $\beta=5$이다.
따라서 $\beta-\alpha=5-1=4$이다.

4. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

등식

$$x^3-x^2+x+3=(x-1)(x^2+1)+a$$

가 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 참이 되어야 한다. $x=1$을 대입하면

$$1-1+1+3=a$$

이다. 따라서 $a=4$이다.

[다른 풀이]
등식의 우변을 정리하면

$$x^3-x^2+x+3=x^3-x^2+x-1+a$$

이다. 항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항을 비교하면

$$3=-1+a$$

이다. 따라서 $a=4$이다.

5. [출제의도] 조립제법 이해하기

$$\begin{array}{c|cccc}
a & 2 & 0 & 3 & 4 \\
 & & 2a & \square & \square \\
\hline
 & 2 & 2a & \square & b
\end{array}$$

에서 $2a=2$이므로 $a=1$이다.
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\
 & & 2 & 2 & 5 \\
\hline
 & 2 & 2 & 5 & \boxed{9}
\end{array}$$

이므로 $b=9$이다. 따라서 $a+b=1+9=10$이다.

6. [출제의도] 인수분해 이해하기

$$x(x+2)+a=x^2+2x+a$$

이고

$$(x+b)^2=x^2+2bx+b^2$$

이므로 $x^2+2x+a=x^2+2bx+b^2$에서
$2=2b$, $a=b^2$이다. 그러므로 $a=1$, $b=1$이다.
따라서 $ab=1$이다.

7. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

$|x-a|<2$를 풀면 $-2+a<x<2+a$이다.
a가 자연수이므로 부등식을 만족하는 정수 x는

$$-1+a,\ a,\ 1+a$$

이다. 모든 정수 x의 값의 합이

$$(-1+a)+a+(1+a)=3a$$

이므로 $3a=33$이다. 따라서 $a=11$이다.

8. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$ax^3+x^2+x-3=0$의 한 근이 1이므로

$$a+1+1-3=0$$

이고 $a=1$이다. 그러므로 주어진 방정식은

$$x^3+x^2+x-3=0$$

이다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\
 & & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$$

이다. 그러므로 삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 나머지 두 근은 이차방정식

$$x^2+2x+3=0$$

의 두 근과 같다. 따라서 두 근을 α, β라 하면 두 근의 곱 $\alpha\beta=3$이다.

9. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 문제 해결하기

이차함수 $y=x^2-5x+k$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-5x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
그러므로 이차방정식의 판별식 $D>0$이어야 하므로

$$D=(-5)^2-4k=25-4k>0$$

에서 $k<\frac{25}{4}=6.25$이다. 따라서 자연수 k의 최댓값은 6이다.

10. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기

연립이차방정식

$$\begin{cases} r+2h=8 \\ r^2-2h^2=8 \end{cases}$$

에서 $(8-2h)^2-2h^2=8$이고 $h^2-16h+28=0$이므로

$$h=2 \text{ 또는 } h=14$$

이다. $h=2$일 때, $r=4$이고 $h=14$일 때, $r=-20$이다.
그러므로 $r=4$, $h=2$이다.
따라서 이 용기의 부피는 32π이다.

11. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 문제 해결하기

두 연립방정식

$$\begin{cases} 3x+y=a \\ 2x+2y=1 \end{cases},\quad \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x-y=b \end{cases}$$

의 일치하는 해는 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$$

의 해와 같다. 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ 2x+2y=1 \end{cases}$$

을 풀면

$$x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{5}{4}$$

이다. 그러므로 $3x+y=a$에

$$x=-\frac{3}{4},\ y=\frac{5}{4}$$

를 대입하면

$$a=-1$$

이다. 또한 $x-y=b$에 $x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{5}{4}$를 대입하면

$$b=-2$$

이다. 따라서 $ab=2$이다.

12. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 $2x^3+x^2+x-1$을 일차식 $x-a$로 나누었을 때 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이므로

$$2x^3+x^2+x-1=(x-a)Q(x)+3$$

이다. 나머지정리에 의해 양변에 $x=a$를 대입하면

$$2a^3+a^2+a-1=3$$

이므로 $2a^3+a^2+a-4=0$이고 $(a-1)(2a^2+3a+4)=0$이다. $2a^2+3a+4=0$이 실근을 갖지 않으므로 $a=1$이다. $2x^3+x^2+x-1=(x-1)Q(x)+3$에서
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\
 & & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 2 & 3 & 4 & \boxed{3}
\end{array}$$

$$2x^3+x^2+x-1=(x-1)(2x^2+3x+4)+3$$

이다. 따라서 $Q(x)=2x^2+3x+4$이고,
$Q(a)=Q(1)=9$이다.

13. [출제의도] 복소수의 연산을 이용하여 문제 해결하기

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

이므로 $\frac{z}{\bar{z}}$의 실수부분이 0이 되기 위해서는

$$a^2-b^2=0$$

이어야 한다. a, b가 자연수이므로 $a=b$이다.
a, b가 5이하의 자연수이므로
$z=1+i$, $2+2i$, $3+3i$, $4+4i$, $5+5i$이다. 따라서 조건을 만족하는 모든 복소수 z의 개수는 5이다.

14. [출제의도] 인수정리를 이용하여 삼차방정식 문제 해결하기

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$$x^3+2x^2-3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

이다.
이때 $(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$의 값은 양변에 $x=-3$을 대입한 다음 -1을 곱해준 것과 같으므로

$$-(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)$$
$$=-\{(-3)^3+2\times(-3)^2-3\times(-3)+4\}$$
$$=-4$$

따라서 $(3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=-4$이다.

15. [출제의도] 인수분해 이해하기

$a=2018$, $b=3$이라 하면

$$2018\times 2021+9=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2$$

이고

$$2018^3-27=a^3-b^3$$

이다. 인수분해 공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하면

$$\begin{aligned}2018^3-27&=a^3-b^3\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=2015\times(2018\times 2021+9)\end{aligned}$$

따라서 몫은 2015이다.

16. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 이차함수의 최대, 최소 이해하기

$$z^2=(a+2bi)^2=(a^2-4b^2)+4abi$$
$$(\bar{z})^2=(a-2bi)^2=(a^2-4b^2)-4abi$$

이다. $z^2+(\bar{z})^2=2(a^2-4b^2)=0$이므로 $a^2=4b^2$이다.

$$6a+12b^2+11=3a^2+6a+11=3(a+1)^2+8$$

이므로 $a=-1$일 때, $6a+12b^2+11$의 최솟값은 8이다.

17. [출제의도] 다항식을 이용하여 통합 교과적 문제 해결하기

실린더 A에 담긴 액체의 높이를 h_A, 실린더 B에 담긴 액체의 높이를 h_B, 실린더 A에 담긴 액체의

밀도를 ρ_A, 실린더 B에 담긴 액체의 밀도를 ρ_B라 하면, 실린더 A에 담긴 액체의 높이가 실린더 B에 담긴 액체의 높이의 15배이므로

$$h_A = 15h_B$$

이고 실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이므로

$$\rho_A = \frac{3}{5}\rho_B$$

이다. 따라서

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A g h_A}{\rho_B g h_B} = \frac{\left(\frac{3}{5}\rho_B\right) g (15h_B)}{\rho_B g h_B} = 9$$

이다.

18. [출제의도] 이차함수의 성질 추론하기

$y=x^2$의 꼭짓점은 $(0, 0)$이고, $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 n(n은 자연수)만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수 $y=f(x)$의 꼭짓점은 $(n, 3)$이다. 그러므로 함수

$$f(x) = (x-n)^2 + 3$$

이다.

ㄱ. $f(x) = (x-n)^2 + 3$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 3이다. (참)

ㄴ. $n=3$일 때, $f(x) = (x-3)^2 + 3$이므로

$$(x-3)^2 + 3 = 10$$

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

이므로 근과 계수의 관계에 의해 서로 다른 두 실근의 합은 6이다. (참)

[다른 풀이]

$n=3$일 때, $f(x)=(x-3)^2+3$이므로 $y=f(x)$의 대칭축은 $x=3$이다. 따라서 방정식 $f(x)=10$의 서로 다른 두 실근의 합은 6이다.

ㄷ. $$(x-n)^2 + 3 = x - \frac{3n-4}{2}$$

$$x^2 - (2n+1)x + n^2 + \frac{3}{2}n + 1 = 0$$

에서 $x^2 - (2n+1)x + n^2 + \frac{3}{2}n + 1 = 0$의 판별식

$$D = (2n+1)^2 - 4\left(n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right) = -2n - 3$$

이고 n이 자연수이므로 $D<0$이다. 그러므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y = x - \frac{3n-4}{2}$는 만나지 않는다. (참)

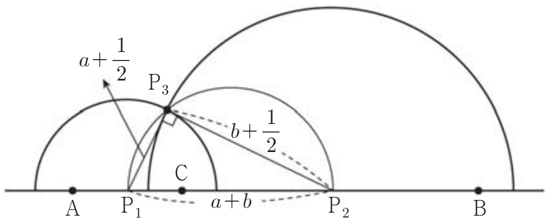
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 추론하기

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CB}}$이므로

$$6 = 2a + 2b, \quad a + b = 3$$

이다. 두 반원 O_1과 O_2의 교점을 P_3이라 하자. 그림과 같이 반원에 대한 원주각은 90°이므로 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$은 직각삼각형이다.



$$(a+b)^2 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \text{에서}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} + b^2 + b + \frac{1}{4}$$

$$2ab = a + b + \frac{1}{2}$$

이므로 $ab = \frac{7}{4}$이다.

20. [출제의도] 삼차방정식과 도형과의 관계 추론하기

삼차방정식 $2x^3 - 5x^2 + (k+3)x - k = 0$에서

$$(x-1)\left(\boxed{2x^2-3x} + k\right) = 0$$

이므로 삼차방정식 $2x^3 - 5x^2 + (k+3)x - k = 0$의 서로 다른 세 실근은 1과 이차방정식 $\boxed{2x^2-3x} + k = 0$의 두 근이다. 이차방정식 $\boxed{2x^2-3x} + k = 0$의 두 근을 α, β $(\alpha > \beta)$라 하자. 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같이 2가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2 + \beta^2 = 1$이므로 $(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1$이다.

이차방정식 $2x^2 - 3x + k = 0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta = \frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{k}{2}$이다.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times\frac{k}{2} = 1$$

이므로 $k = \boxed{\frac{5}{4}}$이다.

그런데 $\boxed{2x^2-3x} + \frac{5}{4} = 0$에서 판별식 $D<0$이므로 α, β는 실수가 아니다. 따라서 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ⅱ) 빗변의 길이가 α인 경우

$1 + \beta^2 = \alpha^2$이므로 $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = 1$이다.

$\alpha+\beta = \frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{k}{2}$에서 $\alpha - \beta = \frac{2}{3}$이고,

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\times\frac{k}{2}$$

이므로 $k = \boxed{\frac{65}{72}}$이다. 이때 $\alpha = \frac{13}{12}$, $\beta = \frac{5}{12}$이므로 1, α, β는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)에 의하여 $k = \boxed{\frac{65}{72}}$이다.

그러므로 $f(x) = 2x^2 - 3x$, $p = \frac{5}{4}$, $q = \frac{65}{72}$이다.

따라서 $f(3)\times\frac{q}{p} = 9\times\frac{\frac{65}{72}}{\frac{5}{4}} = \frac{13}{2}$이다.

21. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$에서

$$\{P(x)+Q(x)\}^3 - 3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$$
$$= 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

$P(x)+Q(x) = 4$이므로

$$64 - 12P(x)Q(x) = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$
$$-12P(x)Q(x) = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 48$$
$$-P(x)Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$$
$$= (x-1)(x+2)(x^2+x+2)$$
$$= (x^2+x-2)(x^2+x+2)$$

$P(x)+Q(x) = 4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 조건(가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$는

$$P(x) = -x^2 - x + 2, \quad Q(x) = x^2 + x + 2$$

이다. 따라서 $P(2) + Q(3) = 10$이다.

[다른 풀이]

$$P(x) = ax^2 + bx + c \ (a<0)$$
$$Q(x) = 4 - (ax^2 + bx + c)$$

라 하자.

$$\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3$$
$$= (ax^2+bx+c)^3 + 64 - 48(ax^2+bx+c)$$
$$+ 12(ax^2+bx+c)^2 - (ax^2+bx+c)^3$$
$$= 12a^2x^4 + 24abx^3 + (12b^2 + 24ac - 48a)x^2 +$$
$$(24bc - 48b)x + (12c^2 - 48c + 64)$$
$$= 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

에서 $12a^2 = 12$이므로 $a = -1$ ($\because a<0$)이다.

$24ab = 24$에서 $b = -1$이다. $12b^2 + 24ac - 48a = 12$에서 $c = 2$이다.

$b = -1$, $c = 2$를 $24bc - 48b = 0$, $12c^2 - 48c + 64 = 16$에 대입하면 등식이 성립하므로

$$P(x) = -x^2 - x + 2$$
$$Q(x) = 4 - (-x^2 - x + 2) = x^2 + x + 2$$

이다. 따라서 $P(2) + Q(3) = -4 + 14 = 10$이다.

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$$x^2y + xy^2$$
$$= xy(x+y)$$
$$= 2\times 6$$
$$= 12$$

23. [출제의도] 이차방정식 계산하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3 + 4 = -a, \quad 3\times 4 = b$$

이므로 $a + b = -7 + 12 = 5$이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2 + ax + b$의 두 근이 3, 4이므로

$$3^2 + 3a + b = 0, \quad 4^2 + 4a + b = 0$$

이다. 연립방정식

$$\begin{cases} 3a + b = -9 \\ 4a + b = -16 \end{cases}$$

에서 $a = -7$, $b = 12$이다.

따라서 $a + b = -7 + 12 = 5$이다.

24. [출제의도] 연립부등식 이해하기

부등식 $x - 1 \geq 2$의 해는

$$x \geq 3$$

이고

$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) \leq 0$의 해는

$$2 \leq x \leq 4$$

이다. 그러므로 주어진 연립부등식의 해는

$$3 \leq x \leq 4$$

이다. 따라서 $\alpha = 3$, $\beta = 4$이므로 $\alpha + \beta = 7$이다.

25. [출제의도] 이차방정식의 근의 성질 이해하기

이차방정식 $2x^2 + 6x - 9 = 0$의 두 근이 α, β이므로

$$2\alpha^2 + 6\alpha - 9 = 0, \quad 2\beta^2 + 6\beta - 9 = 0$$

이다.

$$2(2\alpha^2 + \beta^2) + 6(2\alpha + \beta)$$
$$= 4\alpha^2 + 2\beta^2 + 12\alpha + 6\beta$$
$$= 2(2\alpha^2 + 6\alpha) + (2\beta^2 + 6\beta)$$
$$= 2\times 9 + 9$$
$$= 27$$

26. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$$x^4 + ax + b = (x-2)^2 Q(x)$$

조립제법을 이용하면

2	1	0	0	a	b
		2	4	8	$2a+16$
	1	2	4	$a+8$	$b+2a+16$

$x^4 + ax + b$는 $x - 2$로 나누어떨어지므로

$$b + 2a + 16 = 0$$

이고 $(x-2)Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8$이다.

$x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8$을 $x - 2$로 나누면

2	1	2	4	$a+8$
		2	8	24
	1	4	12	$a+32$

$x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8$은 $x - 2$로 나누어떨어지므로

$$a + 32 = 0$$

이고

$$x^4 + ax + b = (x-2)^2(x^2 + 4x + 12)$$

이다. 그러므로 $Q(x) = x^2 + 4x + 12$이다.

따라서 $a=-32$, $b=48$, $Q(2)=4+8+12=24$이고 $a+b+Q(2)=40$이다.

27. [출제의도] 이차함수 추론하기

$$f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-(b-7)^2$$

이고 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{2}=-1$에서 $a=2$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서 만나므로 x에 대한 방정식

$$f(x)-cx=0$$
$$x^2+ax-(b-7)^2-cx=0$$
$$x^2+(a-c)x-(b-7)^2=0$$

이 중근을 가지고 판별식

$$D=(a-c)^2+4(b-7)^2=0$$

이다. $(a-c)^2\geq 0$, $4(b-7)^2\geq 0$이므로

$$(a-c)^2=0,\ 4(b-7)^2=0$$

이다. 따라서 $a=c=2$, $b=7$이고 $a+b+c=11$이다.

28. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기

남아 있는 입체도형의 겉넓이 S는

$$S=6a^2-2\pi b^2+2\pi ab$$
$$=6a^2+2\pi(ab-b^2)$$
$$=216+16\pi$$

이고 a, b가 유리수이므로

$$6a^2=216,\ ab-b^2=8$$

이다. 그러므로 $a=6$이고 $b^2-6b+8=0$에서

$$b=2\ \text{또는}\ b=4$$

이다. $a>2b$이므로 $b=2$이다.

따라서 $15(a-b)=60$이다.

29. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$P(x)+x$가 이차다항식이므로

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$

$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{2}\right)^2-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

에서

$$(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)=0$$
$$a^4+10a^2-11=0$$
$$(a^2+11)(a^2-1)=0$$

이고 $a=1$ ($\because a>0$)이다.

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$에서

$$P(x)=x^2-x+2\ \text{또는}\ P(x)=-x^2-x-2$$

이고 이차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)=-x^2-x-2$$

이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$이다.

[다른 풀이]

$$\{P(x)+x\}^2=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$$
$$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$$

이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)+x=-x^2+px+q$$

라 하자.

$(-x^2+px+q)^2=x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

에서

$$-2p=0$$
$$p^2-2q=5-a^2$$
$$2pq=0$$
$$q^2=-5a^2+9$$

이므로 $p=0$이고 $a^2=2q+5$이다.

$$q^2+10q+16=0$$
$$(q+8)(q+2)=0$$
$$q=-8\ \text{또는}\ q=-2$$

$q=-8$이면 $a^2=-11<0$이므로 모순이다.

그러므로 $q=-2$이다. $a^2=2q+5$에 $q=-2$를 대입하면 a가 양수이므로 $a=1$이다.

그러므로 $P(x)+x=-x^2-2$ 즉, $P(x)=-x^2-x-2$이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$이다.

30. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식 추론하기

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
a & 1 & 0 & -290 & 0 & b \\
 & & a & a^2 & a^3-290a & a^4-290a^2 \\
\hline
 & 1 & a & a^2-290 & a^3-290a & b+a^4-290a^2
\end{array}$$

에서 몫은 $x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$이고 나머지 $b+a^4-290a^2=0$이다. 따라서 $b=a^2(290-a^2)$이고 b가 자연수이므로 $290-a^2>0$에서 이를 만족하는 a의 값은

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 17$$

이다. 몫 $x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$가 $x+a$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc}
-a & 1 & a & a^2-290 & a^3-290a \\
 & & -a & 0 & -a^3+290a \\
\hline
 & 1 & 0 & a^2-290 & 0
\end{array}$$

이고 다항식 $P(x)$는

$$x^4-290x^2+b=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$$

으로 인수분해된다.

조건에 의해 x^2+a^2-290이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 제외한다.

$$x^2+a^2-290=x^2-(290-a^2)$$

이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290-a^2$이 제곱수인 경우이다.

$$290=1^2+17^2=11^2+13^2$$

이므로 $290-a^2$이 제곱수가 되는 자연수 a는 $a=1$, $a=11$, $a=13$, $a=17$인 경우이다.

그러므로 조건을 만족하는 자연수 a의 값의 개수는 $17-4=13$이므로 모든 다항식 $P(x)$의 개수는 13이다.

$b=a^2(290-a^2)=-(a^2-145)^2+145^2$이고 a가 자연수이므로 b의 최댓값은 $a=12$일 때

$$12^2\times(290-12^2)$$

이다. 그러므로 $p=13$이고 $q=12^2\times(290-12^2)$이다.

따라서 $\frac{q}{(p-1)^2}=\frac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}=146$이다.

[다른 풀이]

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-a$를 인수로 가지므로

$P(a)=a^4-290a^2+b=0$을 만족한다.

$$b=-a^4+290a^2,\ b=a^2(290-a^2)$$

에서 b가 자연수이므로 이를 만족하는 a의 값은

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 17$$

이고

$$P(x)=x^4-290x^2+b$$
$$=x^4-290x^2+a^2(290-a^2)$$
$$=(x^2-a^2)(x^2-290+a^2)$$

이다.

$a=1$이면 $b=1^2\times(290-1^2)=289$

$P(x)=(x^2-1)(x^2-289)=(x+1)(x-1)(x+17)(x-17)$

으로 인수분해된다.

$a=2$이면 $b=2^2\times(290-2^2)=1144$

$P(x)=(x^2-2^2)(x^2-286)=(x+2)(x-2)(x^2-286)$

으로 인수분해된다.

$a=3$이면 $b=3^2\times(290-3^2)=2529$

$P(x)=(x^2-3^2)(x^2-281)=(x+3)(x-3)(x^2-281)$

으로 인수분해된다.

$a=4$이면 $b=4^2\times(290-4^2)=4384$

$P(x)=(x^2-4^2)(x^2-274)=(x+4)(x-4)(x^2-274)$

로 인수분해된다.

$a=5$이면 $b=5^2\times(290-5^2)=6625$

$P(x)=(x^2-5^2)(x^2-265)=(x+5)(x-5)(x^2-265)$

로 인수분해된다.

$a=6$이면 $b=6^2\times(290-6^2)=9144$

$P(x)=(x^2-6^2)(x^2-254)=(x+6)(x-6)(x^2-254)$

로 인수분해된다.

$a=7$이면 $b=7^2\times(290-7^2)=11809$

$P(x)=(x^2-7^2)(x^2-241)=(x+7)(x-7)(x^2-241)$

으로 인수분해된다.

$a=8$이면 $b=8^2\times(290-8^2)=14464$

$P(x)=(x^2-8^2)(x^2-226)=(x+8)(x-8)(x^2-226)$

으로 인수분해된다.

$a=9$이면 $b=9^2\times(290-9^2)=16929$

$P(x)=(x^2-9^2)(x^2-209)=(x+9)(x-9)(x^2-209)$

로 인수분해된다.

$a=10$이면 $b=10^2\times(290-10^2)=19000$

$P(x)=(x^2-10^2)(x^2-190)=(x+10)(x-10)(x^2-190)$

으로 인수분해된다.

$a=11$이면 $b=11^2\times(290-11^2)=20449$

$P(x)=(x^2-11^2)(x^2-169)=(x+11)(x-11)(x+13)(x-13)$

으로 인수분해된다.

$a=12$이면 $b=12^2\times(290-12^2)=21024$

$P(x)=(x^2-12^2)(x^2-146)=(x+12)(x-12)(x^2-146)$

으로 인수분해된다.

$a=13$이면 $b=13^2\times(290-13^2)=20449$

$P(x)=(x^2-13^2)(x^2-121)=(x+13)(x-13)(x+11)(x-11)$

으로 인수분해된다.

$a=14$이면 $b=14^2\times(290-14^2)=18424$

$P(x)=(x^2-14^2)(x^2-94)=(x+14)(x-14)(x^2-94)$

로 인수분해된다.

$a=15$이면 $b=15^2\times(290-15^2)=14625$

$P(x)=(x^2-15^2)(x^2-65)=(x+15)(x-15)(x^2-65)$

로 인수분해된다.

$a=16$이면 $b=16^2\times(290-16^2)=8704$

$P(x)=(x^2-16^2)(x^2-34)=(x+16)(x-16)(x^2-34)$

로 인수분해된다.

$a=17$이면 $b=17^2\times(290-17^2)=289$

$P(x)=(x^2-17^2)(x^2-1)=(x+17)(x-17)(x+1)(x-1)$

으로 인수분해된다.

계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식으로 인수분해되는 경우는 a가 1, 11, 13, 17일 때를 제외한 13가지이므로 모든 다항식 $P(x)$의 개수 $p=13$이고 $a=12$일 때, b의 최댓값 $q=12^2\times(290-12^2)$이다.

따라서 $\frac{q}{(p-1)^2}=\frac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}=146$이다.