

자연수의 거듭제곱의 합

2018년 12월 16일

자연수의 거듭제곱의 합

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

증명)

(1) 첫항이 1이고 공차가 1인 등비수열의 합이므로

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{n\{2 + (n-1) \cdot 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 항등식 $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ 에 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ 을 차례로 대입하면

$$2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

\vdots

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$$

이 식들을 모두 더하면

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$

이다. 이것을 정리하면

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 1 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 = 2 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 3n^2 + 3n + 2n$$

$$6 \sum_{k=1}^n k^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 된다.

문제 1) 항등식 $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ 을 이용하여 (3)을 증명하여라.