태희, 추가 과제 01 – 문제

문제 01–01)

x에 대한 다항식 x^4+ax+b가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $Q(x)$라 하자. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b+Q(2)$의 값을 구하시오. [4점]

문제 01–02)

2018^3-27을 $2018\times2021+9$로 나눈 몫은? [4점]

① 2015 ② 2025 ③ 2035 ④ 2045 ⑤ 2055

문제 01–03)

모든 실수 x에 대하여 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $P(x)+Q(x)=4$
> (나) $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$P(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때, $P(2)+Q(3)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

태희, 추가 과제 01 – 풀이

문제 01–01) 40, 2018년 6월 고1 학력평가 26번

26. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$$x^4+ax+b=(x-2)^2Q(x)$$

조립제법을 이용하면

2	1	0	0	a	b
		2	4	8	$2a+16$
	1	2	4	$a+8$	$b+2a+16$

x^4+ax+b는 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$b+2a+16=0$$

이고 $(x-2)Q(x)=x^3+2x^2+4x+a+8$이다.

$x^3+2x^2+4x+a+8$을 $x-2$로 나누면

2	1	2	4	$a+8$
		2	8	24
	1	4	12	$a+32$

$x^3+2x^2+4x+a+8$은 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$a+32=0$$

이고

$$x^4+ax+b=(x-2)^2(x^2+4x+12)$$

이다. 그러므로 $Q(x)=x^2+4x+12$이다.

따라서 $a=-32$, $b=48$, $Q(2)=4+8+12=24$이고 $a+b+Q(2)=40$이다.

문제 01–02) ①, 2018년 6월 고1 학력평가 15번

15. [출제의도] 인수분해 이해하기

$a=2018$, $b=3$이라 하면

$$2018\times2021+9=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2$$

이고

$$2018^3-27=a^3-b^3$$

이다. 인수분해 공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하면

$$\begin{aligned}2018^3-27&=a^3-b^3\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=2015\times(2018\times2021+9)\end{aligned}$$

따라서 몫은 2015이다.

문제 01–03) ⑤, 2018년 6월 고1 학력평가 21번

21. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$에서

$$\begin{aligned}&\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}\\&=12x^4+24x^3+12x^2+16\end{aligned}$$

$P(x)+Q(x)=4$이므로

$$\begin{aligned}64-12P(x)Q(x)&=12x^4+24x^3+12x^2+16\\-12P(x)Q(x)&=12x^4+24x^3+12x^2-48\\-P(x)Q(x)&=x^4+2x^3+x^2-4\\&=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)\\&=(x^2+x-2)(x^2+x+2)\end{aligned}$$

$P(x)+Q(x)=4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 조건(가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$는

$$P(x)=-x^2-x+2,\ Q(x)=x^2+x+2$$

이다. 따라서 $P(2)+Q(3)=10$이다.

[다른 풀이]

$$P(x)=ax^2+bx+c\ (a<0)$$
$$Q(x)=4-(ax^2+bx+c)$$

라 하자.

$$\begin{aligned}&\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3\\&=(ax^2+bx+c)^3+64-48(ax^2+bx+c)\\&\quad+12(ax^2+bx+c)^2-(ax^2+bx+c)^3\\&=12a^2x^4+24abx^3+(12b^2+24ac-48a)x^2+\\&\quad(24bc-48b)x+(12c^2-48c+64)\\&=12x^4+24x^3+12x^2+16\end{aligned}$$

에서 $12a^2=12$이므로 $a=-1$ ($\because$ $a<0$)이다.
$24ab=24$에서 $b=-1$이다. $12b^2+24ac-48a=12$에서 $c=2$이다.
$b=-1$, $c=2$를 $24bc-48b=0$, $12c^2-48c+64=16$에 대입하면 등식이 성립하므로

$$P(x)=-x^2-x+2$$
$$Q(x)=4-(-x^2-x+2)=x^2+x+2$$

이다. 따라서 $P(2)+Q(3)=-4+14=10$이다.

태희, 추가 과제 02 – 문제

문제 02–01)

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여

$iz=\overline{z}$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $i=\sqrt{-1}$ 이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $z+\overline{z}=-2b$

ㄴ. $i\overline{z}=-z$

ㄷ. $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 02–02)

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2-a^2x \ge 0 \\ x^2-4ax+4a^2-1<0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이 되기 위한 모든 실수 a의 값의 합은? (단, $0<a<\sqrt{2}$) [4점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{25}{16}$ ③ $\dfrac{13}{8}$ ④ $\dfrac{27}{16}$ ⑤ $\dfrac{7}{4}$

문제 02–03)

다음 조건을 만족시키는 모든 이차다항식 $P(x)$의 합을 $Q(x)$라 하자.

(가) $P(1)P(2)=0$
(나) 사차다항식 $P(x)\{P(x)-3\}$은 $x(x-3)$으로 나누어 떨어진다.

$Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지를 구하시오. [4점]

문제 02–01) ⑤, 2017년 6월 고1 학력평가 18번

18. [출제의도] 복소수의 성질 추론하기

$z=a+bi$에 대하여 $iz=i(a+bi)=-b+ai$, $\bar{z}=a-bi$인데 $iz=\bar{z}$이므로 $a=-b$이다. 따라서

$$z=a-ai$$

이다.

ㄱ. $z+\bar{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a=-2b$이다. (참)

ㄴ. $iz=\bar{z}$의 양변에 i를 곱하면 $i\bar{z}=-z$이다. (참)

ㄷ. $iz=\bar{z}$이므로 $\dfrac{\bar{z}}{z}=i$이고 $i\bar{z}=-z$이므로 $\dfrac{z}{\bar{z}}=-i$

이다. 따라서 $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=0$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 옳다.

[다른 풀이 1]

ㄴ. $i\bar{z}=i(a+ai)=ai-a=-(a-ai)=-z$

ㄷ. $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{a+ai}{a-ai}+\dfrac{a-ai}{a+ai}=\dfrac{(a+ai)^2+(a-ai)^2}{(a-ai)(a+ai)}=0$

[다른 풀이 2]

ㄷ. $iz=\bar{z}$의 양변을 제곱하면 $z^2+(\bar{z})^2=0$이고 $z\bar{z}=2a^2\neq 0$이므로 $\dfrac{\bar{z}}{z}+\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{z^2+(\bar{z})^2}{z\bar{z}}=0$이다.

문제 02–02) ①, 2017년 6월 고1 학력평가 21번

21. [출제의도] 연립부등식의 해 추론하기

$$x^2-a^2x=x(x-a^2)\geq 0$$

에서 $x\leq 0$ 또는 $x\geq a^2$이고

$$x^2-4ax+4a^2-1=(x-(2a-1))(x-(2a+1))<0$$

에서 $2a-1<x<2a+1$이다.

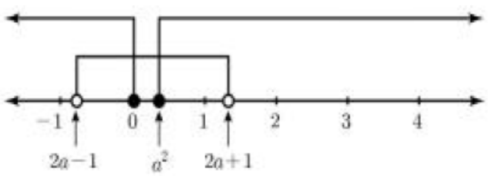
ⅰ) $0<a<\dfrac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$-1<2a-1<x\leq 0 \text{ 또는 } a^2\leq x<2a+1<2$$

인데 $0<a^2<\dfrac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로

$x=0, 1$의 2개 정수해가 존재한다.



ⅱ) $a=\dfrac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$\frac{1}{4}=a^2\leq x<2a+1=2$$

이므로 $x=1$의 1개 정수해가 존재한다.

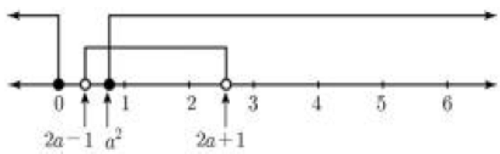
ⅲ) $\dfrac{1}{2}<a<1$일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\leq x<2a+1$$

인데 $\dfrac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로

$x=1, 2$의 2개 정수해가 존재한다.



ⅳ) $a=1$일 때

연립부등식의 해는

$$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$$

이므로 $x=2$의 1개 정수해가 존재한다.

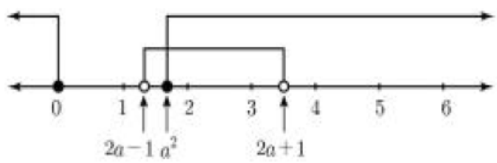
ⅴ) $1<a<\sqrt{2}$일 때

연립부등식의 해는

$$a^2\leq x<2a+1$$

인데 $1<a^2<2$이고 $3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로

$x=2, 3$의 2개 정수해가 존재한다.



그러므로 ⅰ) ~ ⅴ)에 의해

$a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개 정수해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{3}{2}$이다.

문제 **02–03)** 27, 2017년 6월 고1 학력평가 30번

30. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 이차다항식 추론하기

ⅰ) $P(1)=0,\ P(2)=0$ 인 경우

$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의해

$$P(0)=3,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

이다.

ⅱ) $P(1)=0,\ P(2)\neq 0$ 인 경우

$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의해 아래와 같이 세 가지 경우만 생각하면 된다.

① $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때,

$$P(1)=0,\ P(0)=0,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$$

이다.

② $P(0)=3,\ P(3)=0$일 때,

$$P(1)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=0$$

이다. 따라서

$$P(x)=(x-1)(x-3)$$

이다.

③ $P(0)=3,\ P(3)=3$일 때,

$$P(1)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

이다. 그런데 $P(2)=0$이므로 모순이다.

ⅲ) $P(1)\neq 0,\ P(2)=0$인 경우

$P(x)$는 이차다항식이므로 조건 (나)에 의해 아래와 같이 세 가지 경우만 생각하면 된다.

① $P(0)=0$, $P(3)=3$일 때,

$$P(2)=0,\ P(0)=0,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=x(x-2)$$

이다.

② $P(0)=3,\ P(3)=0$일 때,

$$P(2)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=0$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

이다.

③ $P(0)=3,\ P(3)=3$일 때,

$$P(2)=0,\ P(0)=3,\ P(3)=3$$

이다. 따라서

$$P(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-2)$$

이다. 그런데 $P(1)=0$이므로 모순이다.

그러므로 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해

$$\begin{aligned}Q(x)=&\frac{3}{2}(x-1)(x-2)+\frac{1}{2}x(x-1)\\&+(x-1)(x-3)+x(x-2)\\&+\frac{1}{2}(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $Q(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 $Q(4)=27$이다.

태희, 추가 과제 03 – 문제

문제 03–01)

복소수 $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,i}$ 에 대하여 $z^n = 1$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [4점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

문제 03–02)

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$-x^2+3x+2 \le mx+n \le x^2-x+4$$

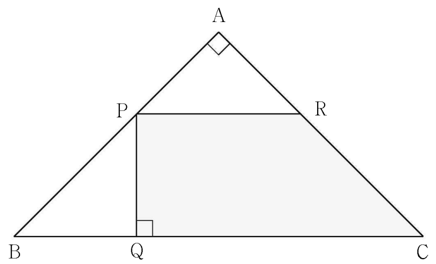
가 성립할 때, m^2+n^2 의 값은? (단, m, n 은 상수이다.) [4점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

문제 03–03)

그림과 같이 $\angle A = 90°$ 이고 $\overline{AB} = 6$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 한 점 P 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P 를 지나고 변 BC 와 평행한 직선이 변 AC 와 만나는 점을 R 라 하자. 사각형 PQCR 의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(단, 점 P 는 꼭짓점 A 와 꼭짓점 B 가 아니다.) [4점]



태희, 추가 과제 03 – 풀이

문제 03–01) ④, 2016년 6월 고1 학력평가 15번

15. [출제의도] 복소수 이해하기

$z^2 = z \cdot z = -i$

$z^3 = z^2 \cdot z = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4 = (z^2)^2 = -1$

$z^5 = z^4 \cdot z = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,i}$

$z^6 = z^4 \cdot z^2 = i$

$z^7 = z^6 \cdot z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8 = (z^4)^2 = 1$

따라서 $z^n = 1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

문제 03–02) ②, 2016년 6월 고1 학력평가 21번

21. [출제의도] 연립부등식 문제 해결하기

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2 \le mx+n$이므로
$x^2+(m-3)x+n-2 \ge 0$이다.
$x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m-3)^2-4n+8 \le 0$이다.
따라서

$$4n \ge m^2-6m+17 \cdots\cdots ①$$

이다.
모든 실수 x에 대하여 $mx+n \le x^2-x+4$이므로
$x^2-(m+1)x+4-n \ge 0$이다.
$x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D'라 하면
$D'=(m+1)^2-16+4n \le 0$이다.
따라서

$$4n \le -m^2-2m+15 \cdots\cdots ②$$

이다.
따라서 ①, ②에 의해

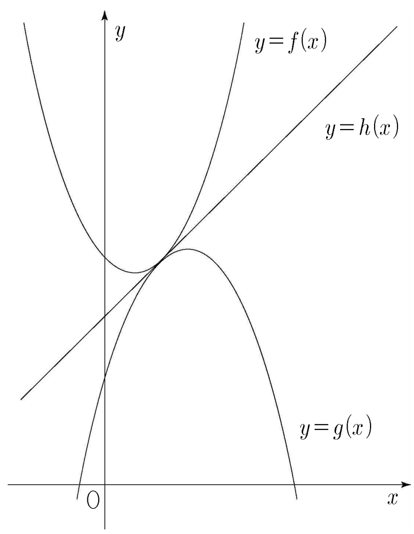
$$m^2-6m+17 \le 4n \le -m^2-2m+15 \cdots\cdots ③$$

$m^2-6m+17 \le -m^2-2m+15$
$2m^2-4m+2 \le 0$이다.
$2(m-1)^2 \le 0$이므로 $m=1$이고
③에서 $12 \le 4n \le 12$이므로 $n=3$이다.
따라서 $m^2+n^2=10$이다.

<참고>
$f(x)=x^2-x+4$, $g(x)=-x^2+3x+2$, $h(x)=mx+n$
이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le h(x) \le f(x)$가 성립하면 된다.
$f(x)-g(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 서로 접한다.
따라서 $g(x) \le h(x) \le f(x)$가 성립하기 위해서는 그림과 같이 $y=h(x)$의 그래프가 $y=g(x)$와 $y=f(x)$의 그래프에 동시에 접해야 한다.
따라서 $f(x)=h(x)$에서
$x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(m+1)^2-4(4-n)=0 \cdots\cdots ①$$

이다.



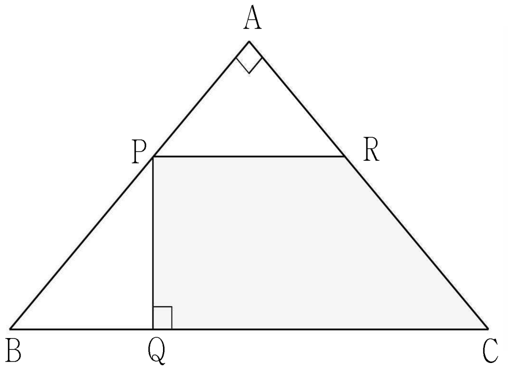
$g(x)=h(x)$에서
$x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D'라 하면

$$D'=(m-3)^2-4(n-2)=0 \cdots\cdots ②$$

이다.
①과 ②를 연립하면 $m=1$, $n=3$이므로
$m^2+n^2=10$이다.

문제 **03–03**) 12, 2016년 6월 고1 학력평가 29번

29. [출제의도] 이차함수의 성질을 이용하여 도형 문제 해결하기



$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}a)$ 이고 $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}=6\sqrt{2}-a$ 이다.

따라서 $\square\mathrm{PQCR}=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-2a+6\sqrt{2}-a)\times a$

$$=6\sqrt{2}a-\frac{3}{2}a^2$$

$$=-\frac{3}{2}(a^2-4\sqrt{2}a+8-8)$$

$$=-\frac{3}{2}(a-2\sqrt{2})^2+12$$

이다.

따라서 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\sqrt{2}$ 일 때,

$\square\mathrm{PQCR}$ 의 넓이의 최댓값은 12 이다.

[다른풀이]

$\overline{\mathrm{PA}}=2x$라 하면

삼각형 APR의 넓이는 $2x^2$이다.

$\overline{\mathrm{PB}}=6-2x$에서

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}x$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는 $(3-x)^2$이다.

따라서 사각형 PQCR의 넓이가 최대가 되기 위해서는 두 삼각형 APR와 PBQ의 넓이의 합이 최소가 되어야 한다.

따라서 두 삼각형 APR와 PBQ의 넓이의 합은 $3x^2-6x+9$ 이므로 $x=1$ 일 때, 넓이의 최솟값이 6 이다.

따라서 삼각형 ABC 의 넓이가 18 이므로 사각형 PQCR 의 넓이의 최댓값은 $18-6=12$ 이다.

태희, 추가 과제 04 – 문제

문제 04–01)

단면의 반지름의 길이가 R이고 길이가 l인 원기둥 모양의 혈관이 있다. 단면의 중심에서 혈관의 벽면 방향으로 r만큼 떨어진 지점에서의 혈액의 속력을 v라 하면, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$v=\frac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

(단, P는 혈관 양끝의 압력차, η는 혈액의 점도이고 속력의 단위는 cm/초, 길이의 단위는 cm이다.)

R, l, P, η가 모두 일정할 때, 단면의 중심에서 혈관의 벽면 방향으로 $\frac{R}{3}$, $\frac{R}{2}$만큼씩 떨어진 두 지점에서의 혈액의 속력을 각각 v_1, v_2라 하자. $\frac{v_1}{v_2}$의 값은? [4점]

① $\frac{28}{27}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{32}{27}$ ④ $\frac{34}{27}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

문제 04–02)

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(3)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(5)=0$

ㄴ. $f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(6)$

ㄷ. $f(0)=k$라 할 때, x에 대한 방정식 $f(x)=kx$의 두 실근의 합은 11이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 04–03)

삼차다항식 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫과 나머지가 같다.

$f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하자.
$R(0)=R(3)$일 때, $R(5)$의 값을 구하시오. [4점]

태희, 추가 과제 04 – 풀이

문제 04–01) ③, 2015년 6월 고1 학력평가 16번

16. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제 해결하기

i) $r=\dfrac{R}{3}$ 을 주어진 관계식에 대입하면

$$v_1=\frac{P}{4\eta l}\times\left(R^2-\left(\frac{R}{3}\right)^2\right)$$
$$=\frac{P}{4\eta l}\times\frac{8}{9}R^2$$

ii) $r=\dfrac{R}{2}$ 을 주어진 관계식에 대입하면

$$v_2=\frac{P}{4\eta l}\times\left(R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)$$
$$=\frac{P}{4\eta l}\times\frac{3}{4}R^2$$

따라서 i), ii)에 의해 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{32}{27}$ 이다.

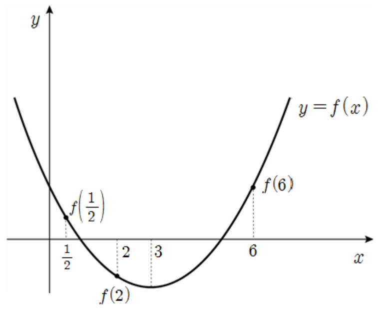
문제 04–02) ⑤, 2015년 6월 고1 학력평가 20번

20. [출제의도] 이차함수의 그래프 추론하기

조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$는 '모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(3)$'이므로 $x=3$에서 최솟값을 가지고, $x=3$이 대칭축이며 아래로 볼록이다.

ㄱ. $x=3$이 대칭축이고 $f(1)=0$이므로 $f(5)=0$이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 이차함수 $f(x)$가 $x=3$에 대칭이고 아래로 볼록이므로 $f(2)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(6)$이다. (참)



ㄷ. $f(x)=0$의 두 근이 1, 5이므로

$$f(x)=a(x-1)(x-5)$$
$$=a(x^2-6x+5)$$
$$=ax^2-6ax+5a$$

이다. $f(0)=k$이므로

$$k=5a$$

이다.

$f(x)=kx$에서

$$ax^2-6ax+5a=5ax$$

이고 $a>0$이므로

$$x^2-11x+5=0$$

이다. 근과 계수의 관계에 의해 두 실근의 합은 11이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

문제 04–03) 26, 2015년 6월 고1 학력평가 29번

29. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 나머지 정리 문제 해결하기

(나)조건에 의해

$$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+(ax+b)\ \cdots ㉠$$

라 둘 수 있다.

$f(1)=2$이므로 $ax+b=a(x-1)+2$이다.

㉠에 대입하여 정리하면

$$f(x)=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$$
$$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$$

이다.

그러므로 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나눈 나머지

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$이다.

$R(0)=R(3)$이므로

$$2-a+2=8+2a+2$$
$$a=-2$$

이다.

따라서 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=26$이다.

태희, 추가 과제 05 – 문제

문제 05–01)

다음은 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ일 때, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 삼차방정식을 구하는 과정의 일부이다.

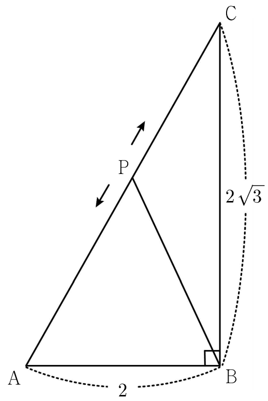
> α가 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 한 근이므로
> $$\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1=0$$
> 이다.
> α는 0이 아니므로 양변을 α^3으로 나누어 정리하면
> $$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\boxed{\text{(가)}}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$$
> 이다.
> 그러므로 $\frac{1}{\alpha}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식
> $$\boxed{\text{(나)}}=0$$
> 의 한 근이다.
> 같은 방법으로
> β, γ도 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 근이므로
> $$\vdots$$
> 이다.
> 따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식은
> $$\boxed{\text{(나)}}=0$$
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(x)$라 할 때, $p+f(2)$의 값은? [3점]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

문제 05–02)

그림과 같이 $\angle B=90^\circ$, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 직각삼각형 ABC에서 점 P가 변 AC 위를 움직일 때, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은? [4점]



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

문제 05–03)

x에 대한 사차방정식 $x^4-9x^2+k-10=0$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]

태희, 추가 과제 05 – 풀이

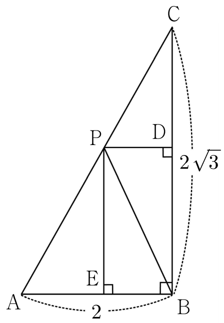
문제 05–01) ①, 2014년 6월 고1 학력평가 12번

12. [출제의도] 삼차방정식의 근의 성질을 이용하여 추론하기

α가 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 한 근이므로
$\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1=0$
이다.
α는 0이 아니므로 양변을 α^3으로 나누면
$1+\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=0$이므로
식을 정리하면
$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\boxed{3}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$
이다.
그러므로 $\frac{1}{\alpha}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한
삼차방정식 $\boxed{x^3+3x^2+2x+1}=0$
의 한 근이다.
같은 방법으로
β, γ도 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 근이므로
$\beta^3+2\beta^2+3\beta+1=0$ …… ㉠
이고,
$\gamma^3+2\gamma^2+3\gamma+1=0$ …… ㉡
이다.
β, γ는 0이 아니므로 식 ㉠, ㉡의 양변을 각각 β^3, γ^3으로 나누면
$1+\frac{2}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}=0$, $1+\frac{2}{\gamma}+\frac{3}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^3}=0$이므로
식을 정리하면
$\left(\frac{1}{\beta}\right)^3+3\left(\frac{1}{\beta}\right)^2+2\left(\frac{1}{\beta}\right)+1=0$, $\left(\frac{1}{\gamma}\right)^3+3\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2+2\left(\frac{1}{\gamma}\right)+1=0$
이다.
그러므로 $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2+2x+1=0$의 근이다.
따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
이다.
따라서 $p=3$, $f(2)=25$이므로 $p+f(2)=28$이다.

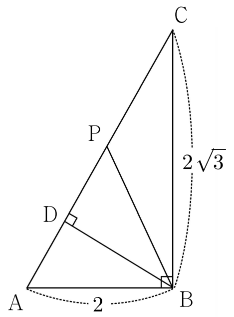
문제 05–02) ④, 2014년 6월 고1 학력평가 19번

19. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용한 문제해결하기



점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고 닮음을 이용하면
$\overline{PD}=a$이면 $\overline{CD}=\sqrt{3}a$, $\overline{BD}=(2-a)\sqrt{3}$이므로
$\overline{PB}^2=a^2+3(2-a)^2=4a^2-12a+12$이고,
$\overline{PC}^2=a^2+3a^2=4a^2$이다.
$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=8a^2-12a+12=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}$이므로
최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

[다른풀이]



변 AC위의 임의의 한 점 P에 대해 $\overline{\mathrm{PC}}=x$라 하자.
점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면
삼각형 BDP는 직각삼각형이다.

피타고라스 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2$이고,
삼각형 ADB는 $\angle \mathrm{A}=60^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{DB}}=\sqrt{3}$이다.
$\overline{\mathrm{PD}}=4-\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{CP}}=4-1-x=3-x$이므로
$\overline{\mathrm{PB}}^2=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2$이다.
따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2&=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2+x^2\\&=x^2-6x+9+3+x^2\\&=2x^2-6x+12\\&=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}+12\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

이다.

따라서 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

문제 05–03) 21, 2014년 6월 고1 학력평가 29번

29. [출제의도] 사차방정식 해의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$x^2=t\,(t\geq 0)$라 하면 주어진 사차방정식은
$t^2-9t+k-10=0$이므로 t에 대한 이차방정식이다.
즉, 방정식 $t^2-9t+k-10=0$의 두 실근이 0이상이어야 한다.
따라서 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$, (두 근의 합)≥ 0, (두 근의 곱)≥ 0이어야 한다.

$D=9^2-4(k-10)\geq 0$이므로
$k\leq \frac{121}{4}$ …… ㉠
(두 근의 합)$=9\geq 0$이므로
k의 값에 관계없이 성립한다. …… ㉡
두 근의 곱 $k-10\geq 0$이므로
$k\geq 10$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의해 $10\leq k\leq \frac{121}{4}$이므로 모든 근이 실수가 되도록 하는 자연수 k는 10, 11, ⋯, 30
이므로 k의 개수는 21이다.

태희, 추가 과제 06 – 문제

문제 06–01)

실린더에 담긴 액체의 높이를 $h(\mathrm{m})$, 액체의 밀도를 $\rho(\mathrm{kg/m^3})$, 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력을 $P(\mathrm{N/m^2})$라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$P=\rho gh$ (단, g는 중력가속도이다.)

실린더 A에 담긴 액체의 높이는 실린더 B에 담긴 액체의 높이의 15배이고, 실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이다. 실린더 A에 담긴 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력과 실린더 B에 담긴 액체의 무게에 의한 밑면에서의 압력을 각각 P_A, P_B라 할 때, $\frac{P_A}{P_B}$의 값은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

문제 06–02)

이차함수 $f(x)=x^2+ax-(b-7)^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-1$에서 최솟값을 가진다. (나) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서만 만난다.

세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점]

문제 06–03)

최고차항의 계수가 음수인 이차다항식 $P(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{P(x)+x\}^2=(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

를 만족시킨다. $\{P(a)\}^2$의 값을 구하시오. (단, $a>0$) [4점]

태희, 추가 과제 06 – 풀이

문제 06–01) ④, 2018년 6월 고1 학력평가 17번

17. [출제의도] 다항식을 이용하여 통합 교과적 문제 해결하기

실린더 A에 담긴 액체의 높이를 h_A, 실린더 B에 담긴 액체의 높이를 h_B, 실린더 A에 담긴 액체의 밀도를 ρ_A, 실린더 B에 담긴 액체의 밀도를 ρ_B라 하면, 실린더 A에 담긴 액체의 높이가 실린더 B에 담긴 액체의 높이의 15배이므로

$$h_A = 15h_B$$

이고 실린더 A에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$배이므로

$$\rho_A = \frac{3}{5}\rho_B$$

이다. 따라서

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A g h_A}{\rho_B g h_B} = \frac{\left(\frac{3}{5}\rho_B\right) g (15h_B)}{\rho_B g h_B} = 9$$

이다.

문제 06–02) 11, 2018년 6월 고1 학력평가 27번

27. [출제의도] 이차함수 추론하기

$$f(x) = x^2 + ax - (b-7)^2$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - (b-7)^2$$

이고 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지므로

$-\frac{a}{2} = -1$에서 $a=2$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=cx$가 한 점에서 만나므로 x에 대한 방정식

$$f(x) - cx = 0$$
$$x^2 + ax - (b-7)^2 - cx = 0$$
$$x^2 + (a-c)x - (b-7)^2 = 0$$

이 중근을 가지고 판별식

$$D = (a-c)^2 + 4(b-7)^2 = 0$$

이다. $(a-c)^2 \ge 0$, $4(b-7)^2 \ge 0$이므로

$$(a-c)^2 = 0,\ 4(b-7)^2 = 0$$

이다. 따라서 $a=c=2$, $b=7$이고 $a+b+c=11$이다.

문제 06–03) 16, 2018년 6월 고1 학력평가 29번

29. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$P(x)+x$가 이차다항식이므로

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$
$$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$$
$$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$$
$$=x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$$
$$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$$
$$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{2}\right)^2-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$$

에서

$$(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)=0$$
$$a^4+10a^2-11=0$$
$$(a^2+11)(a^2-1)=0$$

이고 $a=1$ ($\because a>0$)이다.

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$ 에서

$$P(x)=x^2-x+2 \text{ 또는 } P(x)=-x^2-x-2$$

이고 이차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)=-x^2-x-2$$

이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$이다.

태희, 추가 과제 07 – 문제

문제 07–01)

별의 표면에서 단위 시간당 방출하는 총 에너지를 광도라고 한다. 별의 반지름의 길이를 R(㎞), 표면 온도를 T(K), 광도를 L(W)이라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$L = 4\pi R^2 \times \sigma T^4$$

(단, σ는 슈테판–볼츠만 상수이다.)

별 A의 반지름의 길이는 별 B의 반지름의 길이의 12배이고, 별 A의 표면 온도는 별 B의 표면 온도의 $\frac{1}{2}$배이다. 별 A와 별 B의 광도를 각각 L_A, L_B라 할 때, $\frac{L_A}{L_B}$의 값은? [4점]

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 12　　⑤ 15

문제 07–02)

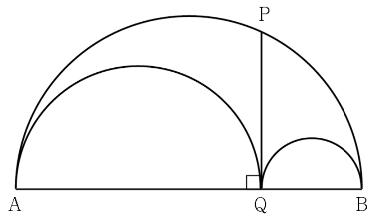
x에 대한 삼차다항식

$$P(x) = (x^2 - x - 1)(ax + b) + 2$$

에 대하여 $P(x+1)$을 $x^2 - 4$로 나눈 나머지가 -3일 때, $50a + b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

문제 07–03)

선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 호 AB 위의 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 AQ와 선분 QB를 지름으로 하는 반원을 각각 그린다. 호 AB, 호 AQ 및 호 QB로 둘러싸인  모양 도형의 넓이를 S_1, 선분 PQ를 지름으로 하는 반원의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{AQ} - \overline{QB} = 8\sqrt{3}$이고 $S_1 - S_2 = 2\pi$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [4점]



태희, 추가 과제 07 – 풀이

문제 **07–01)** ③, 2017년 6월 고1 학력평가 17번

17. [출제의도] 다항식을 이용하여 통합 교과적 문제 해결하기

별 A의 반지름의 길이를 R_A, 별 B의 반지름의 길이를 R_B, 별 A의 표면 온도를 T_A, 별 B의 표면 온도를 T_B라 하자.

별 A의 반지름의 길이는 별 B의 반지름의 길이의 12배이므로

$$R_A = 12R_B,$$

별 A의 표면 온도는 별 B의 표면 온도의 $\frac{1}{2}$배이므로

$$T_A = \frac{1}{2}T_B$$

이다.

그러므로

$$\begin{aligned}\frac{L_A}{L_B} &= \frac{4\pi {R_A}^2 \times \sigma {T_A}^4}{4\pi {R_B}^2 \times \sigma {T_B}^4} \\ &= \frac{4\pi(12R_B)^2 \times \sigma\left(\frac{1}{2}T_B\right)^4}{4\pi {R_B}^2 \times \sigma {T_B}^4} \\ &= 144 \times \frac{1}{16} \\ &= 9\end{aligned}$$

따라서 $\frac{L_A}{L_B} = 9$이다.

문제 **07–02)** 11, 2017년 6월 고1 학력평가 26번

26. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식의 나눗셈에 의해

$$\begin{aligned}P(x) &= (x^2-x-1)(ax+b)+2 \cdots ① \\ P(x+1) &= (x^2-4)Q(x)-3 \\ &= (x-2)(x+2)Q(x)-3 \cdots ②\end{aligned}$$

$x=2$를 ②에 대입하면

$$P(3) = -3$$

$x=-2$를 ②에 대입하면

$$P(-1) = -3$$

이 된다. ①의 식에 $x=3$, $x=-1$을 대입하여 정리하면 $3a+b=-1$, $-a+b=-5$이고

$$a=1, \ b=-4$$

이다. 따라서

$$50a+b = 50-4 = 46$$

이다.

문제 **07–03)** 16, 2017년 6월 고1 학력평가 29번

29. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$P(x)+x$가 이차다항식이므로

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$

$=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

$=x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}-\frac{(5-a^2)^2}{4}-5a^2+9$

$=\left\{x^4+(5-a^2)x^2+\frac{(5-a^2)^2}{4}\right\}-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

$=\left(x^2+\frac{5-a^2}{2}\right)^2-\frac{(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)}{4}$

에서

$$(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)=0$$
$$a^4+10a^2-11=0$$
$$(a^2+11)(a^2-1)=0$$

이고 $a=1$ ($\because a>0$)이다.

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$ 에서

$$P(x)=x^2-x+2 \text{ 또는 } P(x)=-x^2-x-2$$

이고 이차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)=-x^2-x-2$$

이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$이다.

[다른 풀이]

$$\{P(x)+x\}^2=(x^2-a^2)(x^2+5)+9$$
$$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$$

이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x)+x=-x^2+px+q$$

라 하자.

$(-x^2+px+q)^2=x^4-2px^3+(p^2-2q)x^2+2pqx+q^2$

$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$

에서

$$-2p=0$$
$$p^2-2q=5-a^2$$
$$2pq=0$$
$$q^2=-5a^2+9$$

이므로 $p=0$이고 $a^2=2q+5$이다.

$$q^2+10q+16=0$$
$$(q+8)(q+2)=0$$
$$q=-8 \text{ 또는 } q=-2$$

$q=-8$이면 $a^2=-11<0$이므로 모순이다.

그러므로 $q=-2$이다. $a^2=2q+5$에 $q=-2$를 대입하면 a가 양수이므로 $a=1$이다.

그러므로 $P(x)+x=-x^2-2$ 즉, $P(x)=-x^2-x-2$이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$이다.

$$2pq=0$$
$$q^2=-5a^2+9$$

이므로 $p=0$이고 $a^2=2q+5$이다.

$$q^2+10q+16=0$$
$$(q+8)(q+2)=0$$
$$q=-8 \text{ 또는 } q=-2$$

$q=-8$이면 $a^2=-11<0$이므로 모순이다.

그러므로 $q=-2$이다. $a^2=2q+5$에 $q=-2$를 대입하면 a가 양수이므로 $a=1$이다.

그러므로 $P(x)+x=-x^2-2$ 즉, $P(x)=-x^2-x-2$이다. 따라서 $\{P(a)\}^2=\{P(1)\}^2=16$이다.

태희, 추가 과제 08 – 문제

문제 08–01)

다음은 x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 다항식 x^2-x-1로 나누어떨어지기 위한 정수 a, b의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> 방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 p, q라 하면
> $$p+q=1,\ pq=-1$$
> 이다.
>
> 따라서 $p^2+q^2=$ $\boxed{(가)}$, $p^4+q^4=$ $\boxed{(나)}$ 이다.
>
> x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 x^2-x-1로 나누어떨어지면
> $$ap^9+bp^8=-1 \cdots\cdots ①$$
> $$aq^9+bq^8=-1 \cdots\cdots ②$$
> 이다.
>
> ①, ②의 양변에 각각 q^8, p^8을 곱하여 정리하면
> $$ap+b=-q^8 \cdots\cdots ③$$
> $$aq+b=-p^8 \cdots\cdots ④$$
> 이다.
>
> ③에서 ④를 뺀 식으로부터 $a(p-q)=p^8-q^8$이고,
>
> $p\neq q$이므로 $a=\dfrac{p^8-q^8}{p-q}$ 이다.
>
> 따라서 $a=$ $\boxed{(다)}$ 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 r, s, t라 할 때, $r+s+t$의 값은? [4점]

① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

문제 08–02)

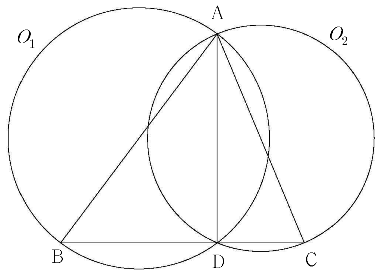
이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 -2와 4이다.
> (나) $5\leq x\leq 8$에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 80이다.

$f(-5)$의 값을 구하시오. [4점]

문제 08–03)

그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB와 변 AC를 각각 지름으로 하는 두 원 O_1, O_2가 두 점 A, D에서 만난다.



$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수일 때, 두 원 O_1, O_2의 넓이의 합은 S이다. $\dfrac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.

[4점]

태희, 추가 과제 08 – 풀이

문제 08–01) ③, 2016년 6월 고1 학력평가 20번

20. [출제의도] **다항식의 나눗셈 추론하기**

$p+q=1$, $pq=-1$이므로
$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=3$이고
$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=7$이다.
따라서 $r=3$, $s=7$이다.

$$a=\frac{p^8-q^8}{p-q}=(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)$$
$$=7\times3\times1$$
$$=21$$

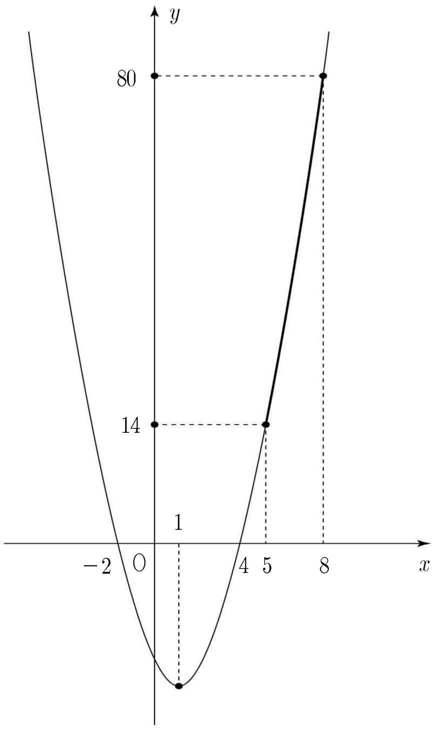
이므로 $t=21$이다.
따라서 $r+s+t=31$이다.

<참고>
x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어지므로 $ax^9+bx^8+1=(x^2-x-1)Q(x)$의 꼴로 나타낼 수 있다.
양변에 $x=p$, $x=q$를 각각 대입하면 ①, ②를 얻을 수 있다.
①, ②의 양변에 각각 q^8, p^8을 곱하면
$ap(pq)^8+b(pq)^8=-q^8$이고
$aq(pq)^8+b(pq)^8=-p^8$이므로
$pq=-1$을 대입하여 정리하면 ③, ④를 얻을 수 있다.

문제 08–02) 54, 2016년 6월 고1 학력평가 27번

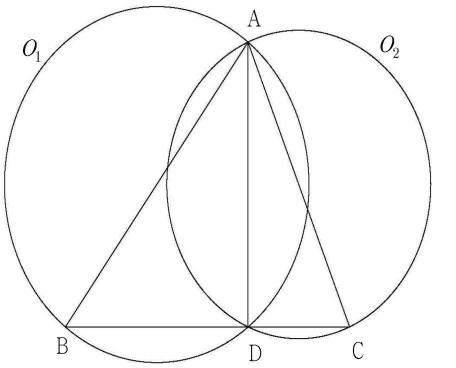
27. [출제의도] **이차함수의 성질 추론하기**

조건 (가)에서 $f(x)=a(x+2)(x-4)$라 두면
$f(x)=a(x-1)^2-9a$이다. (단, a는 상수)
조건 (나)에서
ⅰ) $a>0$이면 $x=8$에서 최댓값 80을 가지므로
$40a=80$ 즉, $a=2$이다.
ⅱ) $a<0$이면 $x=5$에서 최댓값 80을 가지므로
$7a=80$ 즉, $a=\frac{80}{7}$이다. (부적합)
ⅰ), ⅱ)에 의해 $a=2$이다.
따라서 $f(x)=2(x+2)(x-4)$이고, $f(-5)=54$이다.



문제 08–03) 394, 2016년 6월 고1 학력평가 30번

30. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기



$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$는 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$, $\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$ (단, n은 자연수)이라 두자.

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 두면

$x+y=2n+4$ ⋯⋯ ①

두 삼각형 ABD와 ACD는 직각삼각형이므로

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$이다.

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$ ⋯⋯ ②

②에서 $8(2n+4)=(2n+4)(x-y)$이므로

$x-y=8$ ⋯⋯ ③

이다.

①과 ③을 연립하여 풀면

$x=n+6,\ y=n-2$

이고 직각삼각형 ACD에서 $(2n+2)^2=4n^2+(n-2)^2$ 이다.

이 식을 정리하면 $n^2-12n=0$에서

$n=12$

이다. 따라서 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로

두 원의 넓이의 합 S는

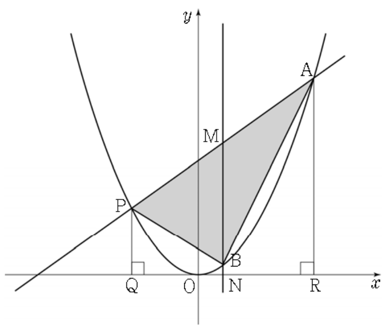
$S=15^2\pi+13^2\pi=394\pi$

이다. 그러므로 $\dfrac{S}{\pi}=394$이다.

문제 09–01)

18. 다음은 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 세 점 P$(-1,\ 1)$, A$(a,\ a^2)$, B$\left(\frac{a-1}{2},\ \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PAB의 넓이를 구하는 과정이다. (단, $a>1$이다.)

점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 PA와 만나는 점을 M, x축과 만나는 점을 N이라 하자.



두 점 Q$(-1,\ 0)$, R$(a,\ 0)$에 대하여 사각형 PARQ는 사다리꼴이다. 두 점 M과 N은 각각 두 선분 PA, QR의 중점이므로

$$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AR}})=\boxed{\text{(가)}}$$

이다. 또한

$$\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MN}}-\overline{\mathrm{BN}}=\boxed{\text{(가)}}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\boxed{\text{(나)}}$$

이다.
따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S&=2\times\triangle\mathrm{MAB}\\ &=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MB}}\times\overline{\mathrm{NR}}\\ &=\frac{(a+1)^3}{\boxed{\text{(다)}}}\end{aligned}$$

이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고 (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(3)+g(5)+k$의 값은? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

문제 09–02)

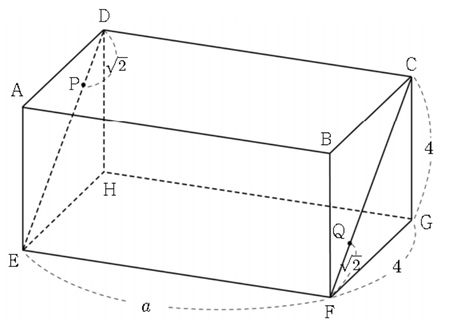
27. 등식

$$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})=a+bi$$

를 만족시키는 실수 a, b에 대하여 $4(a+b)^2$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

문제 09–03)

30. 그림과 같이 밑면의 두 변의 길이가 각각 $a\,(a>5)$와 4이고 높이가 4인 직육면체 ABCD−EFGH에서 선분 DE와 CF위에 각각 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{2}$인 점 P와 Q를 잡는다. 점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리가 $2\sqrt{34}$일 때, $30a$의 값을 구하시오. [4점]



태희, 추가 과제 09 – 풀이

문제 09–01) ④, 2015년 6월 고1 학력평가 18번

[출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 추론하기

$\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\overline{\mathrm{AR}}=a^2$ 이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AR}})=\boxed{\frac{1+a^2}{2}}$

이다. 또한

$$\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MN}}-\overline{\mathrm{BN}}=\boxed{\frac{1+a^2}{2}}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$
$$=\boxed{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2}$$

이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=2\times\triangle\mathrm{MAB}\\&=2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MB}}\times\overline{\mathrm{NR}}\\&=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{a+1}{2}\right)^2\times\frac{a+1}{2}\\&=\frac{(a+1)^3}{\boxed{8}}\end{aligned}$$

이므로 $f(a)=\frac{1+a^2}{2}$, $g(a)=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$, $k=8$ 이다.

따라서 $f(3)+g(5)+k=5+9+8=22$ 이다.

문제 09–02) 16, 2015년 6월 고1 학력평가 27번

[출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 규칙성 문제 해결하기

$$\begin{aligned}&(i+i^2)+(i^2+i^3)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\\&=(i+i^2+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+\cdots+i^{19})\\&=(i-1)+(-1-i)=-2\end{aligned}$$

그러므로 $a=-2$, $b=0$ 이다.

따라서 $4(a+b)^2=16$ 이다.

[다른 풀이]

$i+i^{19}=0$ 이므로

$$\begin{aligned}&i+\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\}+i^{19}\\&=(i+i)+(i^2+i^2)+\cdots+(i^{19}+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19})\\&=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19}+i^{20}-i^{20})\\&=2(-i^{20})\\&=-2\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $a=-2$, $b=0$ 이다.

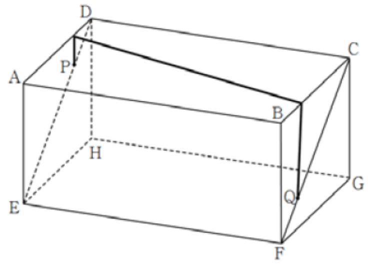
따라서 $4(a+b)^2=16$ 이다.

문제 **09–03)** 240, 2015년 6월 고1 학력평가 30번

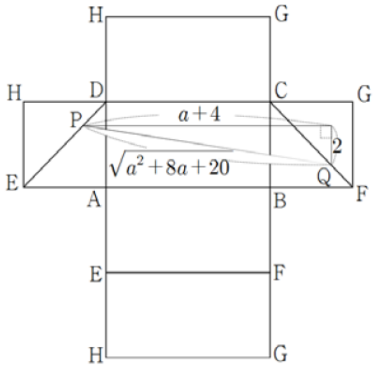
[출제의도] 이차방정식을 이용하여 최단거리 문제 해결하기

점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달하는 최단거리를 구하기 위해 고려해야 할 경로는 아래와 같이 두 가지가 있다.

i) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림1]과 같다.



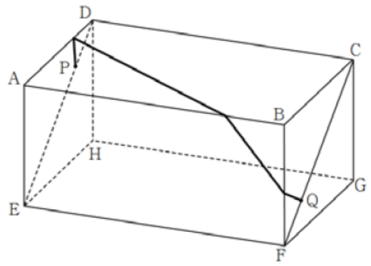
[그림1]

[그림1]에서

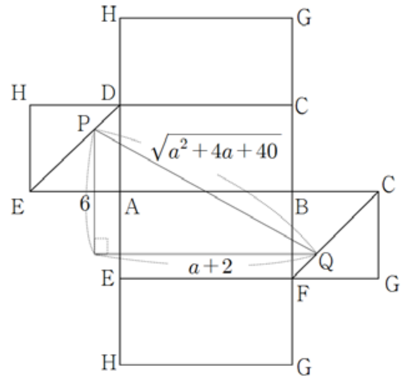
$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(a+4)^2+2^2} = \sqrt{a^2+8a+20}$$

이다.

ii) 아래 그림과 같은 경로로 이동하는 경우



그림의 전개도는 아래 [그림2]와 같다.



[그림2]

[그림2]에서

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(a+2)^2+6^2} = \sqrt{a^2+4a+40}$$

이다.

$a>5$이므로 i), ii)에 의해

$(a^2+4a+40)-(a^2+8a+20)=-4a+20<0$

이 되어 $\sqrt{a^2+4a+40}$이 최단거리이다.

정리하면

$$\sqrt{a^2+4a+40}=2\sqrt{34}$$
$$a^2+4a+40=136$$
$$a^2+4a-96=0$$
$$(a-8)(a+12)=0$$

이므로 $a=8$이다.

따라서 $30a=240$이다.