# 헤론의 공식 증명

2018년 12월 7일

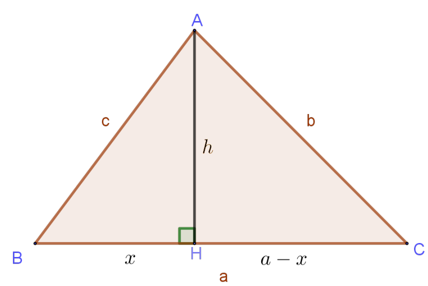
**헤론의 공식 (Heron's formula)**

세 변의 길이가 각각 $a$, $b$, $c$인 삼각형 $ABC$의 넓이는

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

이다. (단, $s = \frac{a+b+c}{2}$)

증명)




위의 그림처럼 꼭짓점 $A$에서 선분 $BC$에 내린 수선의 발을 $H$라고 하자. $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = x$라고 두면 $\triangle ABH$에서

$$h^2 = c^2 - x^2$$

이고 $\triangle ACH$에서

$$h^2 = b^2 - (a-x)^2$$

이다. 따라서

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$$

이것을 정리하면

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \tag{1}$$

$h$의 값을 구하면

$$h = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2a}$$

이를 통해 $\triangle ABC$를 구하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{4}$$

따라서

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} \tag{2}$$

이고

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{3}$$

이다.

**문제 1)**

$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$ 으로부터 $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ 를 유도하여라.

**문제 2)**

$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$ 을 인수분해하여라.

**문제 3)**

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

이 맞는지 확인하여라.