

## 운영 : 06 집합(1)

2018년 7월 18일

### 차 례

차 례 . . . . .	1
1 집합의 뜻 . . . . .	2
2 집합의 표현 . . . . .	4
3 부분집합 . . . . .	6
4 보충·심화 문제 . . . . .	14

## 1 집합의 뜻

### 정의 1) 집합과 원소

어떤 조건이나 기준에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 **집합**이라고 한다. 또 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

### 예시 2)

‘6의 약수의 모임’은 그 대상이 1, 2, 3, 6으로 분명하기 때문에 집합이다. 이때 1, 2, 3, 6은 원소이다.

### 문제 3)

- |                      |                 |
|----------------------|-----------------|
| (1) 10보다 작은 자연수의 모임  | (집합이다, 집합이 아니다) |
| (2) 1에 가까운 수의 모임     | (집합이다, 집합이 아니다) |
| (3) 성북구에 위치한 중학교의 모임 | (집합이다, 집합이 아니다) |
| (4) 수학 점수가 높은 학생의 모임 | (집합이다, 집합이 아니다) |

### 정의 4)

$a$ 가 집합  $A$ 의 원소일 때, ‘ $a$ 는 집합  $A$ 에 속한다’라고 말하고

$$a \in A$$

로 나타낸다. 반대로  $a$ 가 집합  $A$ 의 원소가 아니면 ‘ $a$ 는 집합  $A$ 에 속하지 않는다’라고 말하며

$$a \notin A$$

로 나타낸다.

또한, 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라고 하고 기호로는

$$\emptyset$$

로 나타낸다.

**예시 5)**

예시 2의 집합을  $A$ 라고 하면  $1 \in A$ 이고  $3 \in A$ 이다. 그리고  $4 \notin A$ 이다.

**문제 6)**

10보다 작은 자연수의 집합을  $A$ 라고 할 때, 다음 빈 칸에  $\in$ ,  $\notin$  중 알맞은 기호를 써넣어라.

(1)  $0 \square A$

(2)  $1 \square A$

(3)  $7 \square A$

(4)  $13 \square A$

(5)  $5 \square \emptyset$

## 2 집합의 표현

### 예시 7)

$A$ 를 ‘8의 약수들의 집합’이라고 하자.  $A$ 는 다음의 세 방법으로 나타낼 수 있다.

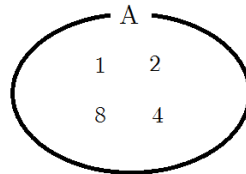
- (1)  $A$ 의 원소들을 일일이 나열하는 방법;

$$A = \{1, 2, 4, 8\}$$

- (2)  $A$ 에 속하는 조건을 제시하는 방법;

$$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$$

- (3) 그림으로 표현하는 방법;



### 정의 8) 집합의 표현

집합은 예시 7의 세 가지 방식으로 표현될 수 있다. (1)의 방법을 **원소나열법**, (2)의 방법을 **조건제시법**이라고 부른다. (3)의 그림은 **벤 다이어그램**(Venn diagram)이라고 부른다.

### 예시 9)

- (1) 집합  $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$ 는 원소나열법으로  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 와 같이 나타낼 수 있다.
- (2) 집합  $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 는  $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$ 로 나타낼 수 있다. 아니면  $\{5k \mid k \text{는 자연수}\}$ 로 나타낼 수도 있다.

**문제 10)**

다음 집합을 원소나열법으로 나타내어라.

(1) 10보다 작은 소수의 집합 =

(2) 18의 약수의 집합 =

(3)  $\{x \mid 6 < x < 12, x \text{는 짝수}\} =$

(4)  $\{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\} =$

(5)  $\{y \mid y \text{는 홀수}\} =$

(6)  $\{3k - 1 \mid k \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\} =$

**문제 11)**

다음 집합을 조건제시법으로 나타내어라.

(1)  $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\} =$

(2)  $\{1, 3, 5, \dots, 99\} =$

(3)  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} =$

**문제 12)**

다음 집합을 벤 다이어그램으로 나타내어라.

(1) 방정식  $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 해의 집합  $A$

(2) 30과 서로소인 20이하의 자연수의 집합  $B$

### 3 부분집합

#### 정의 13) 부분집합

집합  $A$ 의 모든 원소가 집합  $B$ 에 속할 때,  $A$ 를  $B$ 의 **부분집합**이라고 부른다.  
이때 ‘ $A$ 가  $B$ 에 포함된다’ 혹은 ‘ $B$ 가  $A$ 를 포함한다’고 말하며 기호로

$$A \subset B$$

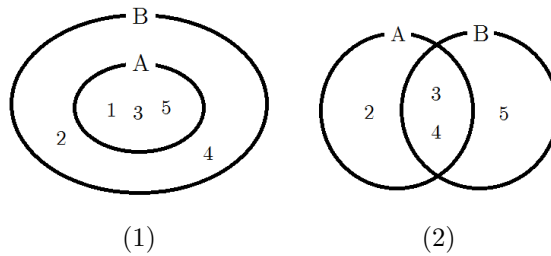
와 같이 나타낸다. 또  $A$ 가  $B$ 의 부분집합이 아니면 기호로

$$A \not\subset B$$

와 같이 나타낸다.

#### 예시 14)

- (1) 두 집합  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여  $A \subset B$ 이다.  
(2) 두 집합  $C = \{2, 3, 4\}$ ,  $D = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여  $C \not\subset D$ ,  $D \not\subset C$ 이다.



문제 15)

다음 두 집합을 벤 다이어그램으로 표현해보고, 빈칸에  $\subset$ ,  $\not\subset$  중 알맞은 기호를 써넣어라.

(1)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,

$B = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{보다 작은 자연수}\}$

답 :  $A \square B$ ,  $B \square A$

(2)  $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

답 :  $A \square B$ ,  $B \square A$

(3)  $A = \{3k \mid k \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

답 :  $A \square B$ ,  $B \square A$

**정의 16)**

두 집합  $A, B$ 에 대해서  $A \subset B, B \subset A$ 가 동시에 성립할 때, ‘두 집합  $A$ 와  $B$ 는 서로 같다’라고 말하고, 기호로

$$A = B$$

와 같이 나타낸다. 또  $A \subset B$ 이고  $A \neq B$ 이면  $A$ 를  $B$ 의 **진부분집합**이라고 부른다.

**문제 17)**

다음 두 집합  $A, B$ 에 대하여 집합  $A$ 가 집합  $B$ 의 진부분집합인 것을 말하여라.

(1)  $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}$

(2)  $A = \{x \mid x \text{는 자연수}\}, \quad B = \{x \mid x \text{는 정수}\}$

**예시 18)**

세 집합  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 2\}, C = \{1, 1, 2, 3\}$ 에 대하여  $A \subset B$ 이고  $B \subset A$ 이다. 따라서  $A = B$ 이다. 또,  $A \subset C$ 이고  $C \subset A$ 이다. 따라서  $A = C$ 이다.

정리하면

- (1) 집합에서 원소의 순서가 바뀌어도 같은 집합이다.
- (2) 중복된 원소는 하나의 원소로 생각한다.



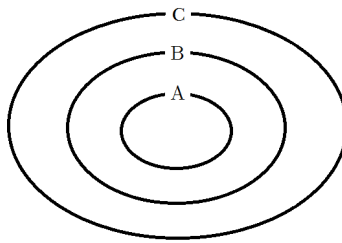
**정리 19) 부분집합의 성질**

세 집합  $A, B, C$ 에 대하여

- (a)  $A \subset A, \emptyset \subset A$
- (b)  $A \subset B$ 이고  $B \subset A$ 이면  $A = B$ 이다.
- (c)  $A \subset B$ 이고  $B \subset C$ 이면  $A \subset C$ 이다.

증명)

(a), (b)는 당연하다. (c)에서  $A \subset B$ 이고  $B \subset C$ 이면 벤 다이어그램이 아래와 같다.



따라서  $A \subset C$ 이다.

**문제 20)**

다음 집합의 부분집합을 모두 구하고, 그 개수를 말하여라.

(1)  $A = \{a\}$

(        ) 개

(2)  $B = \{a, b\}$

(        ) 개

(3)  $C = \{a, b, c\}$

(        ) 개

(4)  $D = \{a, b, c, d\}$

(        ) 개

**문제 21)**

문제 20를 바탕으로 다음 집합의 부분집합의 개수를 유추하여라.

(1)  $E = \{a, b, c, d, e\}$

(            ) 개

(2)  $F = \{a, b, c, d, e, f\}$

(            ) 개

문제 20-21로부터 다음 정리를 유추할 수 있다.

**정리 22) 부분집합의 개수**

원소의 개수가  $n$  개인 집합의 부분집합의 개수는  개이다.

**문제 23)**

$A = \{1, 2, 3\}$  일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1)  $A$ 의 부분집합을 모두 구하여라.

(2)  $A$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

(        ) 개

(3)  $A$ 의 진부분집합의 개수를 구하여라.

(        ) 개

(4)  $\{1, 3\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

(        ) 개

(5)  $A$ 의 부분집합 중 2를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

(        ) 개

(6)  $A$ 의 부분집합 중 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

(        ) 개

**문제 24)**

$B = \{1, 3, 5, 7\}$  일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1)  $B$ 의 부분집합을 모두 구하여라.

(2)  $B$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

(            ) 개

(3)  $\{5, 7\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

(            ) 개

(4)  $B$ 의 부분집합 중 1, 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

(            ) 개

(5)  $B$ 의 부분집합 중 1, 3을 반드시 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

(            ) 개

**문제 25)**

$C = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중 1은 반드시 포함하고, 2는 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

(            ) 개

#### 4 보충·심화 문제

##### 문제 26)

집합  $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 20, x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라.

- ①  $\{3\} \in A$                       ②  $\emptyset \in A$                       ③  $10 \notin A$   
④  $\emptyset \subset A$                       ⑤  $\{3, 6, 15, 18\} \subset A$

##### 문제 27)

집합  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라.

- ①  $1 \in A$                       ②  $2 \in A$                       ③  $\frac{1}{3} \subset A$   
④  $\emptyset \in A$                       ⑤  $\{\frac{1}{6}\} \subset A$

##### 문제 28)

두 집합  $A = \{-1, 2, a^2 + 1\}$ ,  $B = \{1, a - 1, b - 1\}$ 에 대하여  $A \subset B$ 이고  $B \subset A$ 일 때,  $a + b$ 의 값을 구하여라. (단  $a, b$ 는 실수)

- ①  $-1$                       ②  $0$                       ③  $1$                       ④  $2$                       ⑤  $3$

##### 문제 29)

두 집합  $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{x \mid -1 \leq x \leq k\}$ 에 대하여  $A \subset B$ 가 되도록 하는 실수  $k$ 의 값의 범위를 구하여라.

- ①  $k \leq 3$                       ②  $k \geq 3$                       ③  $k < 3$                       ④  $k > 3$                       ⑤  $k \leq 1$

##### 문제 30)

집합  $\{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

- ①  $1$                       ②  $2$                       ③  $4$                       ④  $8$                       ⑤  $16$

**문제 31)**

집합  $\{1, 4, 5\}$ 의 진부분집합의 개수를 구하여라.

- ① 0                      ② 1                      ③ 3                      ④ 7                      ⑤ 15

두 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라 (문제 32-35).

**문제 32)**

집합  $A$ 의 부분집합 중 원소 1을 포함하는 것의 개수를 구하여라.

- ① 1                      ② 2                      ③ 4                      ④ 8                      ⑤ 16

**문제 33)**

집합  $A$ 의 부분집합 중 원소 2, 3을 포함하지 않는 것의 개수를 구하여라.

- ① 1                      ② 2                      ③ 4                      ④ 8                      ⑤ 16

**문제 34)**

집합  $A$ 의 부분집합 중 원소 1은 포함하고, 2, 3은 포함하지 않는 것의 개수를 구하여라.

- ① 1                      ② 2                      ③ 4                      ④ 8                      ⑤ 16

**문제 35)**

$A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합  $X$ 의 개수를 구하여라.

- ① 1                      ② 2                      ③ 4                      ④ 8                      ⑤ 16

**문제 36)**

집합  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 집합  $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ 의 원소의 개수를 구하여라.

- ① 6개                      ② 7개                      ③ 8개                      ④ 9개                      ⑤ 10개

**문제 37)**

집합  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 집합  $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 의 원소의 개수를 구하여라.

- ① 6개                      ② 7개                      ③ 8개                      ④ 9개                      ⑤ 10개

두 집합  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라 (문제 38~39).

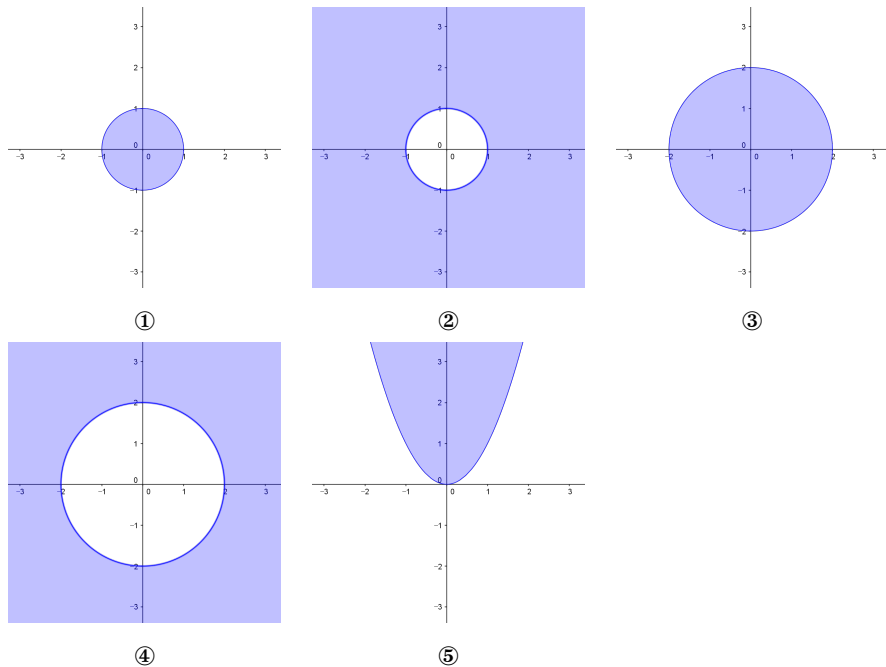
**문제 38)**

다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

- ①  $(1, 1) \in A$                       ②  $(2, -3) \in A$                       ③  $(-2, 0) \notin A$   
 ④  $\emptyset \in A$                       ⑤  $\{(0, 0), (-1, 1)\} \subset A$

**문제 39)**

집합  $A$ 를 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것을 고르시오.





문제 40)

집합  $A_n, B_n$  이

$$A_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수}\}$$

$$B_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 배수}\}$$

와 같이 정의될 때, 다음 중 틀린 것을 고르시오.

- ①  $2 \in A_6$       ②  $3 \notin A_1$       ③  $8 \in B_4$       ④  $A_4 \subset A_8$       ⑤  $B_4 \subset B_8$