

## 미적분 1 : 04 연속함수

2017년 3월 16일

### 차 례

차 례 . . . . .	1
1 한 점에서의 연속 . . . . .	2
2 구간에서의 연속 . . . . .	5
3 연속함수의 성질 . . . . .	8
4 최대·최소의 정리와 사이값 정리 . . . . .	10

## 1 한 점에서의 연속

### 정의 1)

함수  $f(x)$ 와 실수  $a$ 에 대하여,

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

가 성립하면

함수  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속이다

라고 말한다.

따라서 다음 세 가지를 만족시켜야만  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속이다.

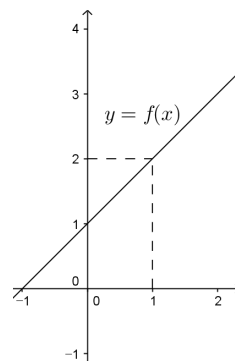
1.  $f(a)$ 가 존재한다.
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 성립한다.

### 예시 2)

함수  $f(x) = x + 1$ 와 실수 1에 대해

1.  $f(1)$ 이 존재한다(= 2).
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재한다(= 2).
3.  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 성립한다.

따라서  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 연속이다.

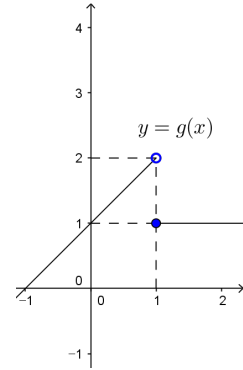


예시 3)

함수  $g(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$  와 실수 1에 대해

1.  $g(1)$ 이 존재한다 (= 2).
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 가 존재하지 않는다.  
(좌극한과 우극한이 일치하지 않기 때문이다.)
3.  $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 가 성립하지 않는다.

따라서  $g(x)$ 는  $x = 1$ 에서 연속이 아니다.

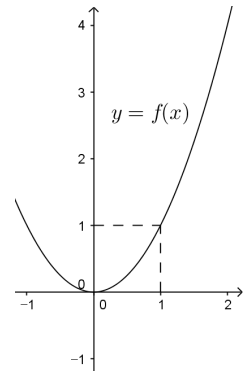


문제 4)

함수  $f(x) = x^2$ 와 실수 1에 대해

1.  $f(1)$ 이 존재한다 (= ) / 존재하지 않는다.
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재한다 (= ) / 존재하지 않는다.
3.  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 성립한다 / 성립하지 않는다.

따라서  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

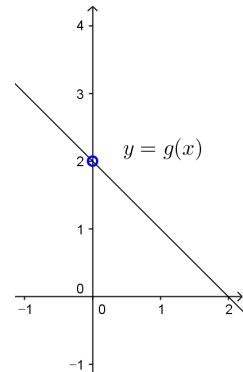


문제 5)

함수  $g(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x}$ 와 실수 0에 대해

1.  $g(0)$ 이 존재한다 (= ) / 존재하지 않는다.
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 존재한다 (= ) / 존재하지 않는다.
3.  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 가 성립한다 / 성립하지 않는다.

따라서  $g(x)$ 는  $x = 0$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.

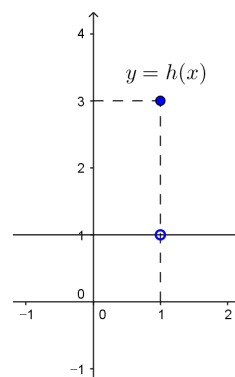


문제 6)

함수  $h(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 1) \\ 3 & (x = 1) \end{cases}$  와 실수 1에 대해

1.  $h(1)$ 이 존재한다(= ☐) / 존재하지 않는다.
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ 가 존재한다(= ☐) / 존재하지 않는다.
3.  $h(1) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ 가 성립한다 / 성립하지 않는다.

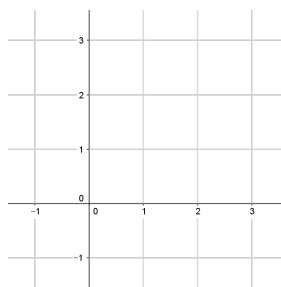
따라서  $h(x)$ 는  $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.



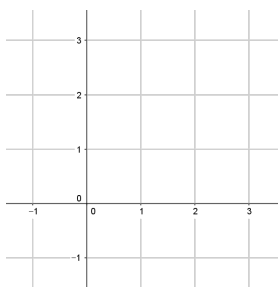
문제 7)

다음 함수의 그래프를 그리고 연속성을 조사하여라.

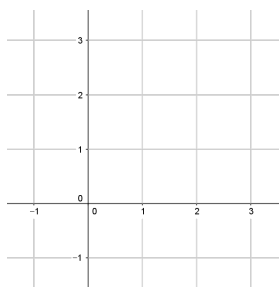
- (1)  $y = |2x - 2|$ 는  $x = 1$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.
- (2)  $y = [x]$ 는  $x = 0$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.  
(단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)
- (3)  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 2|}$ 는  $x = 2$ 에서 연속이다 / 연속이 아니다.



(1)



(2)



(3)

## 2 구간에서의 연속

### 정의 8) 구간

두 실수  $a, b$  ( $a < b$ )에 대하여 다음과 같은 기호를 쓴다.

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad \dots\dots \text{열린 구간}$$

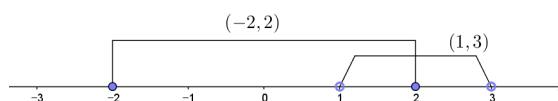
$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \dots\dots \text{닫힌 구간}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

### 예시 9)

- (1) 예를 들어, 열린 구간  $(1, 3)$ 은 집합  $\{x \mid 1 < x < 3\}$ 을 뜻한다. 또한, 닫힌구간  $[-2, 2]$ 는 집합  $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 를 뜻한다.



- (2)  $(2, 5]$ 이나  $[-3, \sqrt{2})$ 와 같이 한쪽이 닫혀있고, 한쪽은 열려있는 구간은 반열린구간, 혹은 반닫힌 구간이라고 불린다.
- (3)  $\{x \mid x > 2\}$ 와 같은 집합은  $(2, \infty)$ 와 같이 쓴다. 마찬가지로  $\{x \mid x \leq 5\} = (-\infty, 5]$ 가 성립하며, 실수 전체 집합은  $(-\infty, \infty)$ 와 같이 쓰기도 한다.

### 문제 10)

다음 부등식 혹은 등식의 해를 구간으로 나타내어라.

(1)  $x^2 - 6x + 5 < 0$

(2)  $x^2 - 10x \leq 0$

(3)  $2x + 4 \geq 0$

(4)  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

**정의 11)**

함수  $f(x)$ 와 구간  $I$ 에 대하여, 구간  $I$ 의 모든 실수  $a$ 에 대해 함수  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속이면

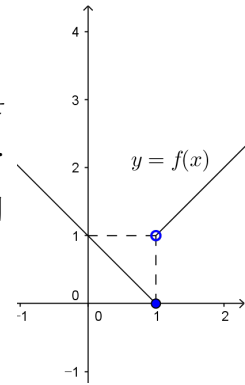
함수  $f(x)$ 가 구간  $I$ 에서 연속이다

라고 말한다.

**예시 12)**

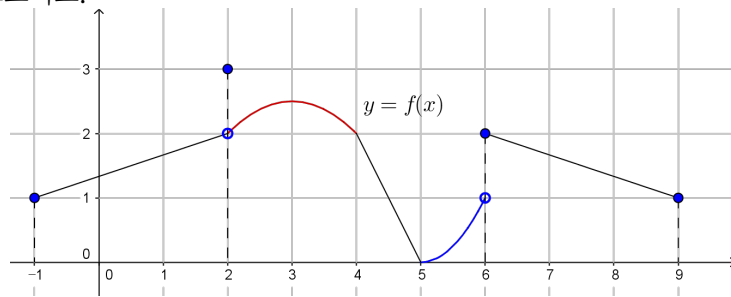
함수  $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & (x \leq 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$ 에 대해

- (1)  $f(x)$ 는  $(-1, 0)$ 에서 연속이다.  $-1 < a < 0$ 인 모든 실수  $a$ 에 대해  $f(x)$ 는  $x = a$ 에서 연속이기 때문이다.
- (2)  $f(x)$ 는  $[0, 2]$ 에서 연속이 아니다.  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 불연속이기 때문이다.



**문제 13)**

구간  $[-1, 9]$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 의 그래프가 다음과 같이 주어질 때, 옳은 것을 모두 고르시오.



㉠.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

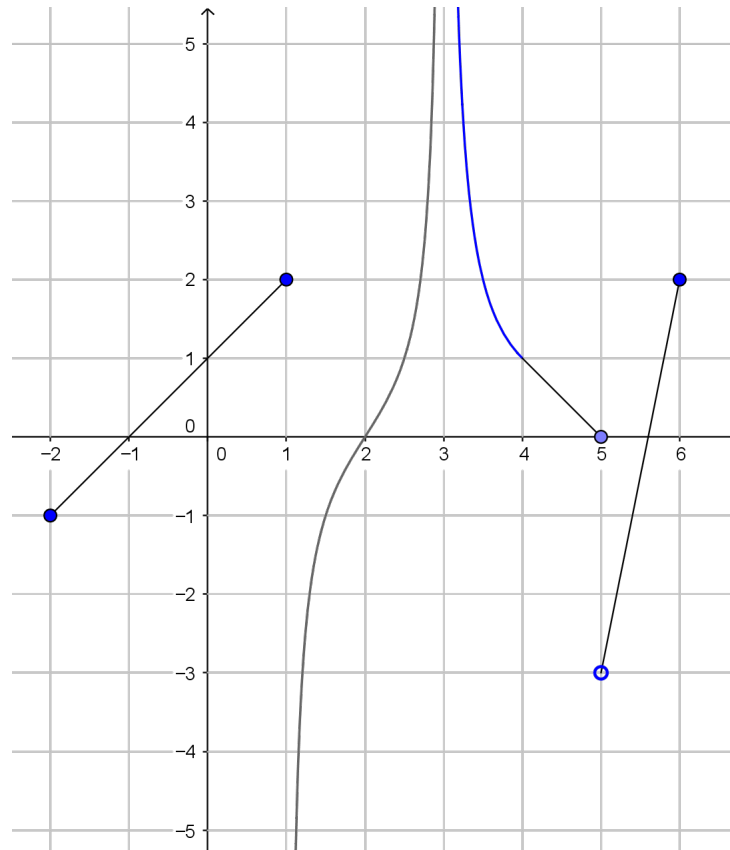
㉡.  $f(x)$ 는  $x = 6$ 에서 연속이다.

㉢.  $f(x)$ 는  $[3, 5]$ 에서 연속이다.

ㄹ. 불연속인 점은 3개이다.

문제 14)

$-2 \leq x < 3$ ,  $3 < x \leq 6$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 의 그래프가 다음과 같이 주어질 때, 옳은 것을 모두 고르시오.



ㄱ.  $f(x)$ 는  $[4, 6]$ 에서 연속이다.

ㄴ.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$

ㄷ.  $f(x)$ 는  $x = 3$ 에서 연속이다.

### 3 연속함수의 성질

#### 예시 15)

함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속일 때, 함수  $f(x) + g(x)$ 도  $x = a$ 에서 연속임을 증명하여라.

$f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속이므로,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) \end{aligned}$$

이다. 그러므로  $f(x) + g(x)$ 는  $x = a$ 에서 연속이다.

#### 문제 16)

함수  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속일 때,  $kf(x)$ 도  $x = a$ 에서 연속임을 증명하여라.



**문제 17)**

함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속일 때,  $f(x)g(x)$ 도  $x = a$ 에서 연속임을 증명하여라.

일반적으로 다음 정리가 성립한다

**정리 18)**

함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속이면 다음 함수들도  $x = a$ 에서 연속이다.

(a)  $kf(x)$

(b)  $f(x) + g(x)$

(c)  $f(x) - g(x)$

(d)  $f(x)g(x)$

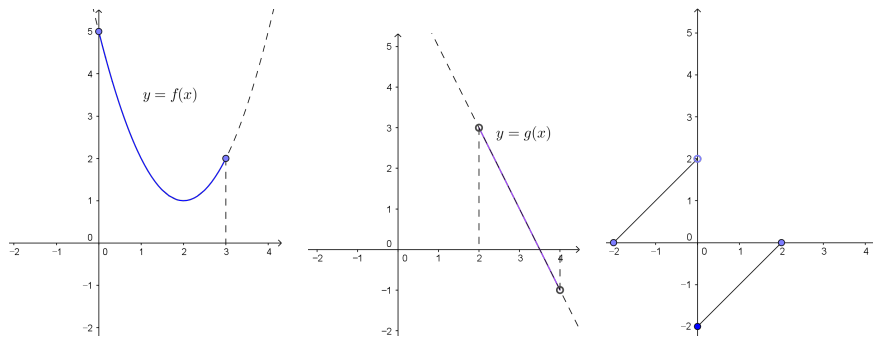
(e)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (단,  $g(x) \neq 0$ )

#### 4 최대·최소의 정리와 사이값 정리

##### 문제 19)

다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

- ㄱ. 닫힌 구간  $[0, 3]$  에서 함수  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  는 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.
- ㄴ. 열린 구간  $(2, 4)$  에서 함수  $g(x) = -2x + 7$  의 최솟값을 가진다.
- ㄷ. 닫힌구간  $[-2, 2]$  에서 함수  $h(x) = \begin{cases} x + 2 & (x < 0) \\ x - 2 & (x \geq 0) \end{cases}$  는 최댓값과 최솟값을 모두 가진다.



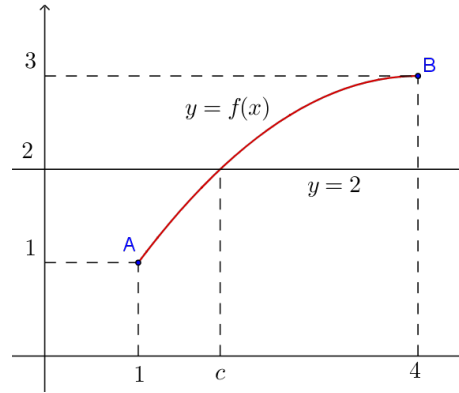
연속함수의 최솟값과 최댓값에 대해서는 다음 정리가 성립한다.

##### 정리 20) 최대·최소의 정리

함수  $f(x)$  가 닫힌 구간  $[a, b]$  에서 연속이면  $f(x)$  는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

**예시 21)**

연속 함수  $f(x)$ 가  $f(1) = 1$ ,  $f(4) = 3$ 를 만족한다고 하자.  $y = f(x)$ 의 그래프는 두 점  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 3)$ 을 연속적으로 이은 선이므로 직선  $y = 2$ 와 반드시 만나게 된다. 따라서  $f(c) = 2$ 를 만족시키는 실수  $c$ 가 반드시 존재한다.



일반적으로 다음 정리가 성립한다.

**정리 22) 사이값 정리**

함수  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 이며,  $k$ 가  $f(a)$ 와  $f(b)$  사이의 실수일 때,

$$f(c) = k$$

를 만족시키는 실수  $c$ 가 존재한다. (단,  $a < c < b$ )

**문제 23)**

실수 전체에서 연속인 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 3$ ,  $f(1) = -1$  일 때, 다음 물음에 답하여라.

- ㄱ.  $f(x) = -\frac{1}{2}$ 를 만족시키는  $x$ 가 적어도 하나 존재한다.
- ㄴ.  $f(x) = 2$ 를 만족시키는  $x$ 가 두 개 이상 존재한다.
- ㄷ. 방정식  $f(x) = 0$ 의 해가 적어도 하나 존재한다.

**답**

**문제 4)**

존재한다, 1, 존재한다, 1, 성립한다, 연속이다.

**문제 5)**

존재하지 않는다, 존재한다, 2, 성립하지 않는다, 연속이 아니다.

**문제 6)**

존재한다, 3, 존재한다, 1, 성립하지 않는다, 연속이 아니다.

**문제 7)**

- (1) 연속이다.
- (2) 연속이 아니다.
- (3) 연속이 아니다

**문제 10)**

- (1) (1, 5)
- (2)  $[0, 10]$
- (3)  $[-2, \infty)$
- (4)  $(-\infty, \infty)$

**문제 13)**

ㄱ, ㄷ.

**문제 14)**

ㄴ.

**문제 19)**

ㄱ.

**문제 23)**

ㄱ, ㄴ, ㄷ.