윤영 : 10 함수(1)

2018년 8월 14일

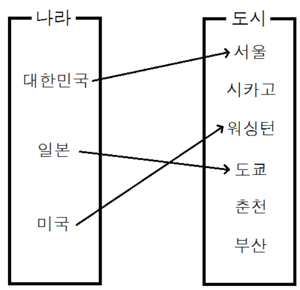
차 례

1 함수

예시 1)
두 집합

$$\text{나라} = \{\text{대한민국}, \text{일본}, \text{미국}\}$$
$$\text{도시} = \{\text{서울}, \text{시카고}, \text{워싱턴}, \text{도쿄}, \text{춘천}, \text{부산}\}$$

을 나란히 놓고, 각각의 나라에 그 나라의 수도를 연결하자.



정의 2) 대응과 함수, 정의역, 공역

(1) 이처럼 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다.

(2) 특히, 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩 대응될 때, 이 대응 f를 집합 X에서 집합 Y로의 **함수**라고 하고 이것을 기호로

$$f : X \to Y$$

와 같이 나타낸다. 이때 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 부른다.

따라서, 위의 예제 1은 대응이면서 함수이다. 이 함수의 정의역은 '나라'이고, 공역은 '도시'이다.

정의 3) 함숫값, 치역
함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x가 공역 Y의 원소 y에 대응될 때, 이것을 기호로

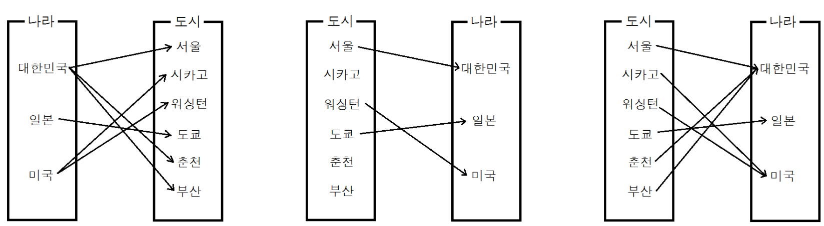
$$y = f(x)$$

와 같이 나타내고, $f(x)$를 함수 f에 의한 x의 **함숫값**이라고 한다. 또 함숫값 전체의 집합 $\{f(x)\,|\,x \in X\}$을 함수 f의 **치역**이라고 한다. 이때 치역은 공역의 부분집합이다.

따라서, 위의 예시 1의 함수에서 $f(\text{대한민국}) = \text{서울}$, $f(\text{일본}) = \text{도쿄}$, $f(\text{미국}) = \text{워싱턴}$이고, 치역은

$$\begin{aligned}\text{치역} &= \{f(x)\,|\,x \in \text{나라}\} = \{f(\text{대한민국}), f(\text{일본}), f(\text{미국})\} \\ &= \{\text{서울}, \text{도쿄}, \text{워싱턴}\}\end{aligned}$$

예시 4)
아래의 세 그림은 (1) 나라와 도시를 연결, (2) 수도와 나라를 연결, (3) 도시와 나라를 연결한 것이다.



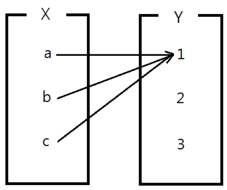
(1) 함수는 X의 각 원소가 Y의 원소에 하나씩 대응되어야 하는데 X의 원소인 대한민국은 Y의 세 개 원소 서울, 춘천, 부산에 대응되었다. 따라서 함수가 아니다.

(2) 함수는 X의 각 원소가 Y의 원소에 하나씩 대응되어야 하는데 X의 원소인 시카고는 Y의 원소에 대응되지 않았다. 따라서 함수가 아니다.

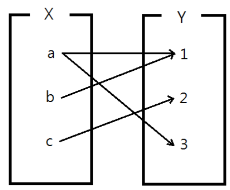
(3) 이 대응은 함수의 조건을 모두 만족시키므로 함수이다. 이때 정의역은 '도시', 공역은 '나라'이며 치역은 $\{\text{대한민국}, \text{일본}, \text{미국}\}$으로 공역과 같다.

문제 5)

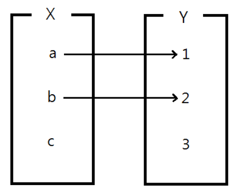
다음 대응 중 함수인 것을 찾고, 함수인 경우 정의역, 공역, 치역을 각각 말하여라.



(1)



(2)



(3)

함수 $y = f(x)$의 정의역이나 공역이 주어지지 않은 경우에는 함숫값 $f(x)$가 정의되는 x의 값 전체의 집합을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합을 공역으로 한다.

예시 6)

함수 $y = -x + 3$에서 모든 실수 x에 대하여 y의 값이 $-x + 3$으로 한 개씩 정해지므로 함수 $y = -x + 3$의 정의역과 치역은 모두 실수 전체의 집합이다.

문제 7)

다음 함수의 정의역과 치역을 말하여라.

(1) $y = 2x - 3$

(2) $y = x^2 - 3$

(3) $y = \frac{1}{x}$

(4) $y = 4$

답 : (1) 정의역=　　　　　　, 치역=
(2) 정의역=　　　　　　, 치역=
(3) 정의역=　　　　　　, 치역=
(4) 정의역=　　　　　　, 치역=

정의 8)

두 함수 $f : X \to Y$, $g : X \to Y$에서 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 이것을 기호로

$$f = g$$

와 같이 나타낸다.

예시 9)

(1) $X = \{0, 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x$와 $g(x) = x^2$는 $f(0) = 0 = g(0)$, $f(1) = 1 = g(1)$이므로 $f = g$이다.

(2) $X = \{1, 2, 3\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - x$와 $g(x) = 2x - 2$는 $f(1) = 0 = g(1)$, $f(2) = 2 = g(2)$이지만 $f(3) = 6 \neq 4 = g(3)$이므로 $f \neq g$이다.

문제 10)

(1) $X = \{-1, 0, 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = |x|$와 $g(x) = x^2$는 서로 (같다 / 다르다).

(2) $X = \{-1, 1\}$을 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x + 1$와 $g(x) = x - 1$는 서로 (같다 / 다르다).

2 함수의 그래프

정의 11) 함수의 그래프

함수 $f: X \to Y$에 대하여 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 전체의 집합인

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

를 함수 f의 **그래프**라고 한다.

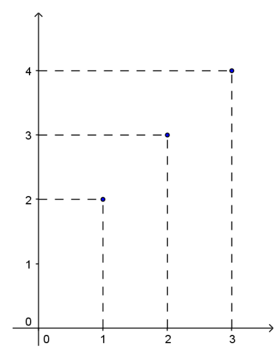
예시 13)

예를 들어 정의역이 $X = \{1, 2, 3\}$인 함수 $f(x) = x+1$의 그래프는 $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$이므로

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

이다.

이것을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

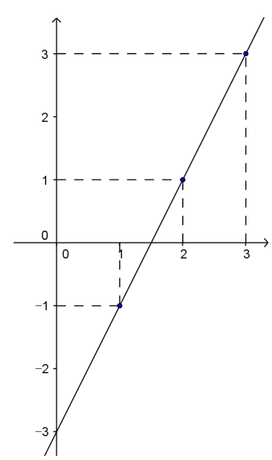


예시 15)

예시 7 (1)의 함수 $y = 2x - 3$는 정의역이 실수 전체이다. 따라서 그래프인 $\{(x, 2x - 3) \mid x$는 실수$\}$는 무한집합이고

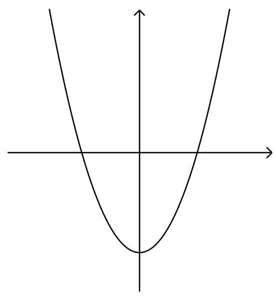
$$(0, -3), (1, -1), (2, 1), (3, 3)$$

등의 점을 원소로 포함한다. 이 무한개의 점들을 좌표평면에 찍으면 오른쪽 그림과 같은 직선이 나온다.

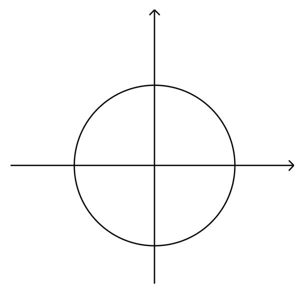


문제 16)

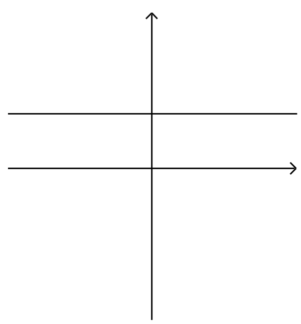
다음 그림 중 함수의 그래프인 것을 모두 찾아라.



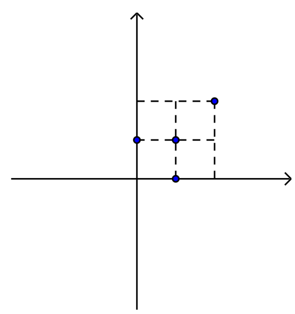
(1)



(2)



(3)



(4)

3 여러 가지 함수

정의 17)
함수 $f : X \to Y$ 에서

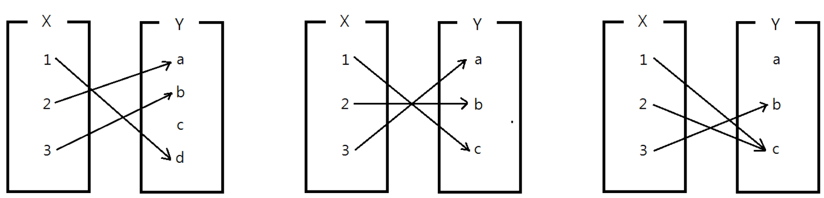
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

일 때, 혹은

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

일 때, 함수 f를 일대일 함수라고 한다. 또한, 일대일 함수이면서 공역과 치역이 같은 함수를 일대일 대응이라고 한다.

예시 18)



(1) (2) (3)

(1) 각각의 x에 대한 함숫값 $f(x)$가 모두 다르다. 즉,

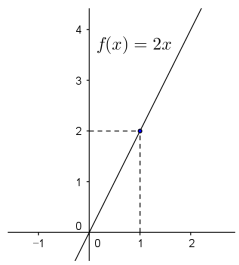
$$f(1) \neq f(2), \ \ f(2) \neq f(3), \ \ f(3) \neq f(1)$$

이다. 따라서 이 함수는 일대일 함수이다. 하지만 공역 $\neq$ 치역이므로 일대일 대응은 아니다.

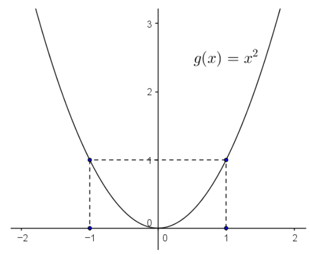
(2) 마찬가지로 일대일 함수이다. 또 공역 $=$ 치역이므로 일대일 대응이다.

(3) $f(1) = f(2)$이다. 즉, $1 \neq 2$임에도 불구하고 $f(1) = f(2)$이므로 일대일 함수가 아니고, 일대일 대응도 아니다.

예시 19)



(1)



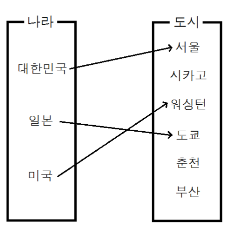
(2)

(1) 함수 $f(x) = 2x$에서 $f(x_1) = f(x_2)$를 가정하면 $2x_1 = 2x_2$이므로 $x_1 = x_2$이다. 따라서 f는 일대일 함수이다. 또한 치역이 실수 전체 집합으로, 공역과 같으므로 일대일 대응이기도 하다.

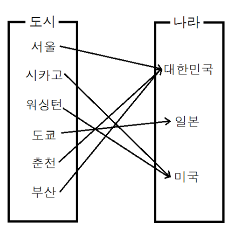
(2) 함수 $g(x) = x^2$은 $1 \neq -1$임에도 불구하고 $f(1) = 1 = f(-1)$이다. 따라서 g 일대일 함수가 아니고, 일대일 대응도 아니다.

문제 20)

예시 1, 4의 두 함수 중



(1)



(2)

첫번째 함수는 (일대일 함수이다, 일대일 함수가 아니다.)
(일대일 대응이다, 일대일 대응이 아니다.)
두 번째 함수는 (일대일 함수이다, 일대일 함수가 아니다.)
(일대일 대응이다, 일대일 대응이 아니다.)

문제 21)

다음 함수들의 그래프를 그리고 일대일 함수와 일대일 대응을 찾아라.

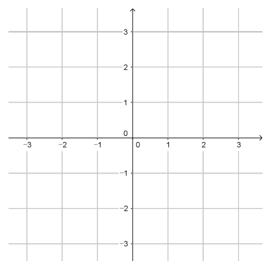
(1) $y = 2x + 4$

(2) $y = |x|$

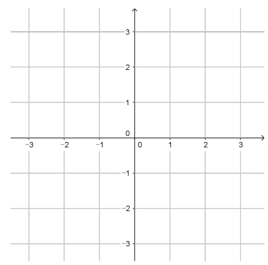
(3) $y = x^2 - 1$ $(x \geq 0)$

(4) $y = 2$

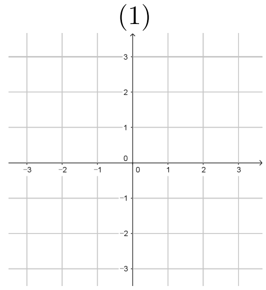
답 :



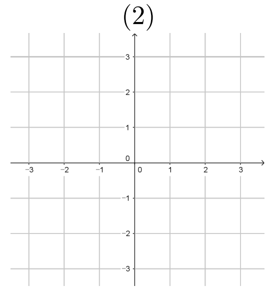
(1)



(2)



(3)



(4)

문제 22)

(1) 함수 $y = 3x - 2$가 일대일 함수임을 증명하여라.

(2) 함수 $y = x^2 - 5$가 일대일 함수가 아님을 증명하여라.

정의 23)
정의역과 공역이 같은 함수 $f : X \to X$ 에서, 모든 $x \in X$ 에 대해

$$f(x) = x$$

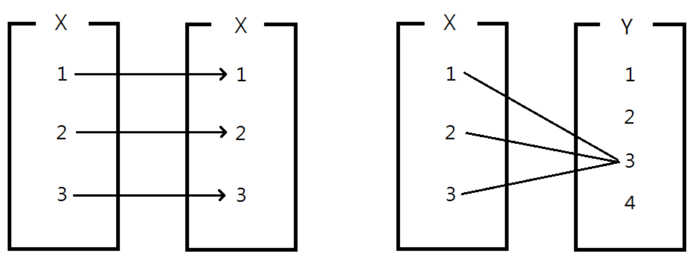
일 때, 함수 f 를 **항등함수**라고 한다. 항등함수는 보통 I 로 쓴다. 정의역과 공역을 강조하기 위해 I_X 라고 쓰기도 한다.

또, 함수 $f : X \to Y$ 에서, c 가 Y 의 원소일 때, 모든 $x \in X$ 에 대해

$$f(x) = c$$

일 때, 함수 f 를 **상수함수**라고 한다.

예시 24)



(1) (2)

(1) $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 이므로 모든 $x \in X$ 에 대해 $f(x) = x$ 이다. 따라서 f 는 항등함수이고 $f = I$ 혹은 $f = I_X$ 라고 쓸 수 있다.

(2) $f(1) = 3,\ f(2) = 3,\ f(3) = 3$ 이므로 모든 $x \in X$ 에 대해 $f(x) = 3$ 이다. 따라서 f 는 상수함수이다.

문제 25)
다음 함수 중 항등함수와 상수함수를 찾아라.

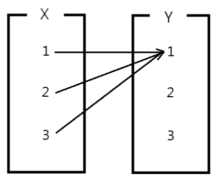
(1) $y = x$　　(2) $y = -1$

(3) $y = 2x$　　(4) $y = x^2$

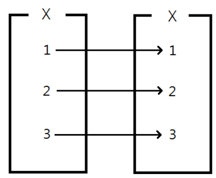
4 보충 · 심화문제

문제 26)

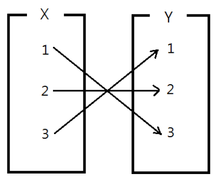
다음 함수들의 그래프를 그려라.



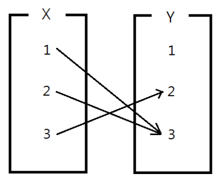
(1)



(2)

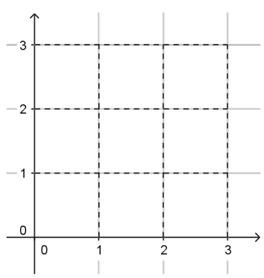


(3)

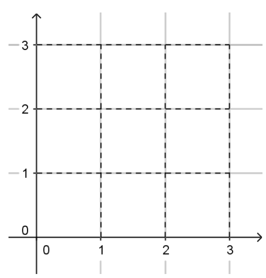


(4)

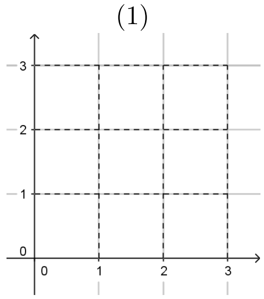
답 :



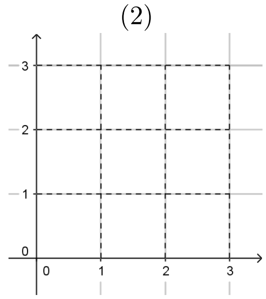
(1)



(2)



(3)



(4)

문제 27)

다음 함수들의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 각각 구하여라.

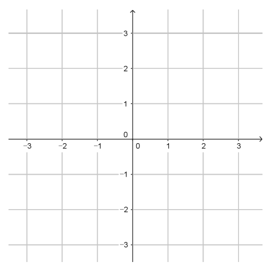
(1) $y = x + 2$

(2) $y = 2 - x^2$

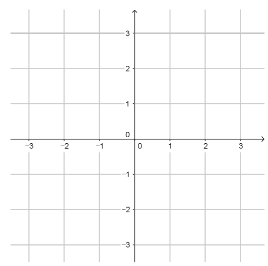
(3) $y = \frac{2}{x}$

(4) $y = \sqrt{4 - x^2}$

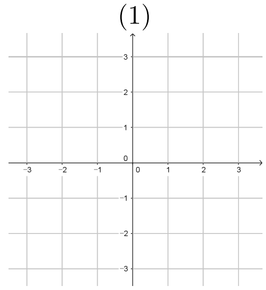
답 :



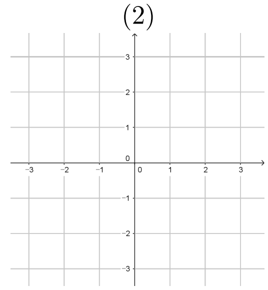
(1)



(2)



(3)



(4)

(1) 정의역= , 치역=

(2) 정의역= , 치역=

(3) 정의역= , 치역=

(4) 정의역= , 치역=

문제 28)

다음 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일 대응이 되도록 두 실수 a, b의 값을 정하여라.

$$X=\{x\,|\,1\le x\le 3\},\quad Y=\{y\,|\,-1\le y\le 5\}$$

답 : (**)**

문제 29)

두 집합 $X=\{x\,|\,x$는 $2\le x\le 15$인 자연수$\}$, $Y=\{y\,|\,y$는 자연수$\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$, $f(x)=(x$의 양의 약수의 개수$)$일 때, $f(x)=3$을 만족하는 x의 값을 모두 구하여라.

답 : (**)**

답

문제 5)

(1) 함수이다.
정의역 $= \{a, b, c\}$,
공역 $= \{1, 2, 3\}$,
치역 $= \{1\}$

(2) 함수가 아니다.

(3) 함수가 아니다.

문제 7)

(1) 정의역=실수 전체 집합,
치역=실수 전체 집합

(2) 정의역=실수 전체 집합,
치역=$\{y \,|\, y \geq -3\}$

(3) 정의역=$\{x \,|\, x \neq 0\}$,
치역=$\{y \,|\, y \neq 0\}$

(4) 정의역=실수 전체 집합,
치역=$\{4\}$

문제 10)

(1) 같다, (2) 다르다.

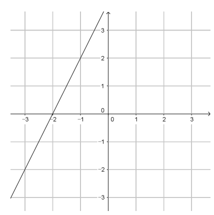
문제 16)

(1), (3)

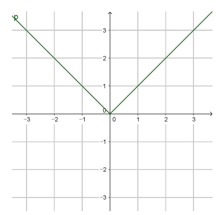
문제 20)

일대일 함수이다,
일대일 대응이 아니다.
일대일 함수가 아니다,
일대일 대응이 아니다.

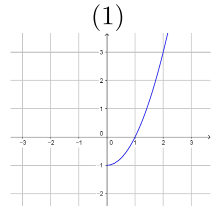
문제 21)



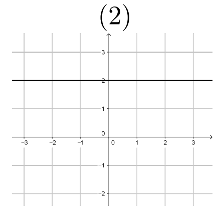
(1)



(2)



(3)



(4)

(1) 일대일 함수이면서 일대일 대응이다.

(2) 일대일 함수도, 일대일 대응도 아니다.

(3) 일대일 함수이지만 일대일 대응은 아니다.

(4) 일대일 함수도, 일대일 대응도 아니다.

문제 22)

(1) $f(x) = 3x - 2$라고 하자.
$f(x_1) = f(x_2)$를 가정하면,
$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$이다.
따라서 $x_1 = x_2$이다.

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

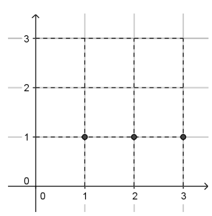
이므로 f는 일대일 함수이다.

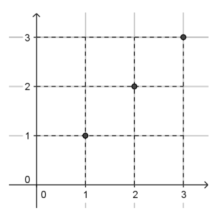
(2) $g(x) = x^2 - 5$라고 하자. $2 \neq -2$이지만 $g(2) = -1 = g(-2)$이다. 따라서 g는 일대일 함수가 아니다.

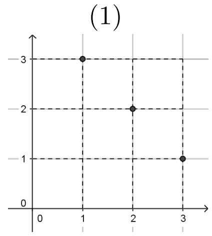
문제 25)

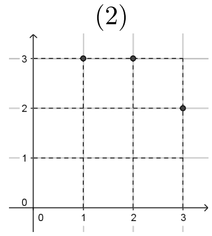
항등함수 : (1)
상수함수 : (2)

문제 26)

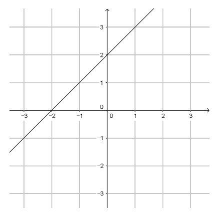

(1)

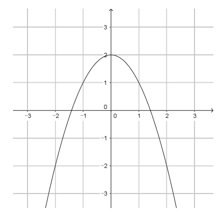

(2)

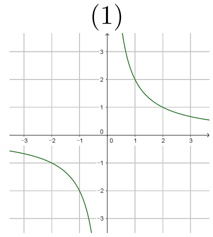

(3)

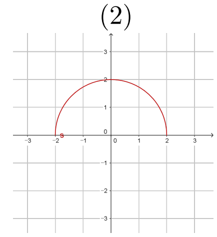

(4)

문제 27)


(1)


(2)


(3)


(4)

(1) 정의역=실수 전체 집합
치역=실수 전체 집합

(2) 정의역=실수 전체 집합
치역=$\{y \,|\, y \leq 2\}$

(3) 정의역=$\{x \,|\, x \neq 0\}$
치역=$\{y \,|\, y \neq 0\}$

(4) 정의역=$\{x \,|\, -2 \leq x \leq 2\}$
치역=$\{y \,|\, 0 \leq y \leq 2\}$

문제 28)

$a = 3,\ b = -4$ 또는 $a = -3,\ b = 8$

문제 29)

4, 9