01 다항식의 연산

2016년 11월 19일

차 례

차 례 1
1 항등식과 미정계수 2
2 나머지정리와 인수정리 4

1 항등식과 미정계수

정의 1)
주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 그 문자에 관한 **항등식**이라고 한다.

예시 2)

(1) $x^2+2x+1=(x+1)^2$은 x에 어떤 값을 대입하여도 성립하는 등식이므로 x에 관한 항등식이다.

(2) $(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2$은 a와 b에 어떤 값을 대입하여도 성립하는 등식이므로 a와 b에 관한 항등식이다.

(3) $x^2-2x-3=0$는 x에 -1과 2를 대입하면 성립하지만, x에 0이나 1을 대입하면 성립하지 않으므로 항등식이 아니다. 몇몇 x에 대해서만 등식이 성립하는 이와 같은 등식을 **방정식**이라고 한다.

(4) $x^2-2x+3=0$는 x에 어떤 값을 대입하여도 성립하지 않는다. 따라서 항등식이 아니다.

문제 3)
다음 등식 중에서 항등식인 것을 찾아라.

① $x^2-2=0$
② $x^3+2x^2+3x=x^3+2x^2+x+2$
③ $xy=2x+2y-4$
④ $\frac{1}{2}\left\{(x-3)^2-(x-1)^2\right\}=-2x+4$
⑤ $y=2x+1$

정리 4)

(1) $ax + b = 0$ 이 x 에 관한 항등식이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.

(2) $ax + b = a'x + b'$ 이 x 에 관한 항등식이면 $a = a'$ 이고 $b = b'$ 이다.

(3) $ax^2 + bx + c = 0$ 가 x 에 관한 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ 이다.

(4) $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ 가 x 에 관한 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ 이다.

(5) $ax + by + c = 0$ 이 x, y 에 관한 항등식이면 $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ 이다.

(6) $ax + by + c = a'x + b'y + c' = 0$ 이 x, y 에 관한 항등식이면 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ 이다.

예시 5) 미정계수법

x 에 관한 등식

$$a(x-1) + b(x-2) = 2x - 3$$

이 항등식이 되도록 a 와 b 의 값을 정하여라.

(계수비교법)

주어진 식을 정리하면

$$(a+b)x + (-a-2b) = 2x - 3$$

이다. 여기에 정리 4의 (2)를 적용하면 $a + b = 2$, $a + 2b = 3$ 이다. 두 식을 연립하면 $a = 1$, $b = 1$ 이다.

(수치대입법)

x 에 관한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립하여야 한다. 그중 $x = 1$ 를 대입하면 $-b = -1$ 이 된다. 따라서 $b = 1$ 이다. 또 $x = 2$ 를 대입하면 $a = 1$ 이 된다. 따라서 $a = 1$ 이다.

답 : $a = 1$, $b = 1$

2 나머지정리와 인수정리

예시 6)
다항식 $f(x) = x^3 - 2x + 3$을 일차식 $x - 2$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

나누는 수가 1차 다항식이므로 나머지는 상수항이어야 한다. 몫을 $Q(x)$라고 하고, 나머지를 R이라고 하면

$$f(x) = (x-2)Q(x) + R$$

이다. 이 식은 항등식이므로 여기에 $x = 2$를 대입하여도 성립하여야 한다. 따라서 $f(2) = R$이다. $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 7$이므로 $R = 7$

답 : 7

정리 7) 나머지 정리
다항식 $f(x)$를 일차식 $x - \alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.

문제 8)
다항식 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 8$을 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $x + 1$ (2) $x - 3$

답 : (1) -3 **(2)** 41

나머지 정리의 특별한 경우로, 다음과 같은 인수정리도 얻을 수 있다.

정리 9) 인수정리

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어 떨어진다. $\iff$ $f(\alpha)=0$이다

다음은 모두 같은 말들이다 ;

다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어 떨어진다.
$\iff$ $R=0$
$\iff$ $f(\alpha)=0$이다
$\iff$ 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$라는 인수를 가진다.
$\iff$ 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 묶을 수 있다.

예시 10)
x^3-7x-6을 인수분해하여라.

주어진 식을 $f(x)=x^3-7x-6$라고 하자. $f(x)$에 여러 값을 대입해서 $f(a)=0$이 되는 a의 값을 찾으면 $f(-1)=0$이다. 따라서 $f(x)$는 $x+1$이라는 인수를 가진다. 조립제법을 사용하여 $x+1$로 나눈 몫을 구하면 x^2-x-6이고,

$$f(x)=(x+1)(x^2-x-6)$$

이다. x^2-x-6도 인수분해하여 정리하면

$$f(x)=(x+1)(x-3)(x+2)$$

이다.

답 : $f(x)=(x+1)(x-3)(x+2)$