현빈 : 05 이차방정식의 공통근

December 29, 2014

17장의 한 정리 (p191) 의 역

근을 가지는 두 이차방정식 (a_i, b_i, c_i 는 실수, $a_i \neq 0$)

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0 \tag{1}$$

$$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0 \tag{2}$$

에 대해

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) \tag{3}$$

이면 두 이차방정식은 공통근을 가진다.

Proof. (1) 의 두 근을 α_1, β_1, (2) 의 두 근을 α_2, β_2 라고 하면 (각각 서로다른 두 근을 가질 수도 있고 중근을 가질 수도 있다.)

$$\alpha_i + \beta_i = -\frac{b_i}{a_i} \tag{4}$$

$$\alpha_i \beta_i = \frac{c_i}{a_i} \tag{5}$$

이다.

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) = A$$

라고 하자. 그러면 $A = 0$ 이라는 것만 증명하면 된다.

$(a-x)(a-y)(b-x)(b-y)$ 를 전개하면

$$\begin{aligned}
&(a-x)(a-y)(b-x)(b-y)\\
=&a^2b^2-a^2by-a^2bx+a^2xy-ab^2y+aby^2+abxy-axy^2\\
&-ab^2x+abxy+abx^2-ax^2y+b^2xy-bxy^2-bx^2y+x^2y^2\\
=&(ab-xy)^2+ab(x+y)^2+xy(a+b)^2\\
&-[a^2b(x+y)+ab^2(x+y)]-[axy(x+y)+bxy(x+y)]\\
=&(ab-xy)^2+ab(x+y)^2+xy(a+b)^2-ab(a+b)(x+y)-xy(a+b)(x+y)\\
=&(ab-xy)^2+ab(x+y)^2+xy(a+b)^2-(ab-xy)(a+b)(x+y)
\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
A=(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)^2+\alpha_1\beta_1(\alpha_2+\beta_2)^2+\alpha_2\beta_2(\alpha_1+\beta_1)^2&\\
-(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2)(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)&
\end{aligned}$$

(4), (5) 를 적용하면

$$\begin{aligned}
A&=\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{c_2}{a_2}\right)^2+\frac{{b_2}^2c_1}{a_1{a_2}^2}+\frac{{b_1}^2c_2}{{a_1}^2a_2}-\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}\right)\frac{b_1b_2}{a_1a_2}\\
&=\frac{B}{{a_1}^2{a_2}^2}
\end{aligned}$$

(3) 을 적용하면

$$\begin{aligned}
B&=(a_2c_1-a_1c_2)^2+a_1{b_2}^2c_1+a_2{b_1}^2c_2-b_1b_2(a_2c_1+a_1c_2)\\
&=(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)+a_1{b_2}^2c_1+a_2{b_1}^2c_2-b_1b_2(a_2c_1+a_1c_2)\\
&=0
\end{aligned}$$

따라서 $A=0$ 이다. $\square$