An Example with Two Lagrange Multiplier

November 9, 2023

$$\text{Maximize } f(x,y,z) \text{ subject to } \begin{cases} g(x,y,z) = c \\ h(x,y,z) = k \end{cases}$$

Contents

1 라그랑지 승수법 (두 개의 제약조건)

만약 f가 (x_0, y_0, z_0)에서 최솟값을 가지면

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \qquad \text{at } (x_0, y_0, z_0)$$

을 만족시킨다. (단, λ, μ는 실수)

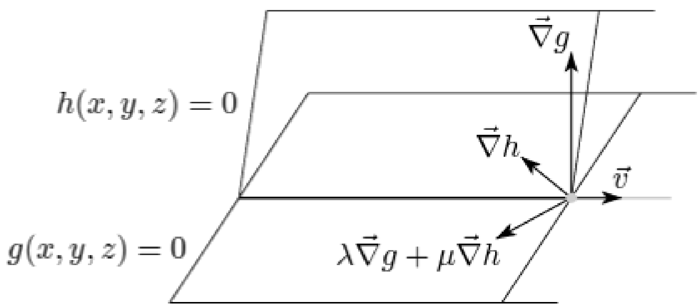
다시 말해

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ h(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

이다. 더 자세히 쓰면

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0, z_0) + \lambda g_x(x_0, y_0, z_0) + \mu h_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0, z_0) + \lambda g_y(x_0, y_0, z_0) + \mu h_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_z(x_0, y_0, z_0) + \lambda g_z(x_0, y_0, z_0) + \mu h_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ g(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ h(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

이다. (단, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$)



2 설명

두 조건 $g(x,y,z) = 0$, $h(x,y,z) = 0$ 하에서 f가 최솟값을 가진다고 가정하자. 곡면 $g(x,y,z) = 0$과 곡면 $h(x,y,z) = 0$은 (대부분의 상황에서) 교선 $g = h = 0$을 가진다. P는 이 교선 위에 위치한다.

이때 교선 $g = h = 0$은 (일반적으로) 곡선인데, 이 곡선 위의 점 P에서의 한 접벡터(tangent vector)를 v라고 하자. f가 교선 $g = h = 0$ 상에서의 최댓값을 점 P에서 가지므로, f의 P에서의 v방향의 방향도함수(directional derivative)는 0보다 크거나 같다 ;

$$D_v f(x_0, y_0, z_0) \geq 0, \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot v \geq 0 \tag{$*$}$$

마찬가지의 이유로, f의 P에서의 $-v$방향의 방향도함수도 0보다 크거나 같다 ;

$$D_{-v} f(x_0, y_0, z_0) \geq 0, \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (-v) \geq 0, \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot v \leq 0 \tag{$**$}$$

($*$), ($**$)로부터

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot v = 0 \tag{1}$$

이다.

한편, 벡터 v는 곡면 $g(x,y,z) = 0$에 속하므로,
벡터 v는 곡면 $g(x,y,z) = 0$의 $P(x_0, y_0, z_0)$에서의 접평면에 속하고,
벡터 v는 곡면 $g(x,y,z) = 0$의 $P(x_0, y_0, z_0)$에서의 접평면의 법선벡터($= \nabla g(x_0, y_0, z_0)$)와 직교한다;

$$v \perp \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot v = 0 \tag{2}$$

이다. 마찬가지로,

$$\nabla h(x_0, y_0, z_0) \cdot v = 0 \tag{3}$$

이다.

대부분의 상황에서는 $g(x_0, y_0, z_0)$와 $h(x_0, y_0, z_0)$가 평행하지 않다. 즉, 두 벡터가 평행하지 않는 상황만을 가정하자. 그러면 (1), (2), (3)으로부터 $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$는 $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$와 $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$의 일차결합이다. 즉

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (-\lambda) \nabla g(x_0, y_0, z_0) + (-\mu) \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

인 실수 λ, μ가 존재한다.

따라서

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0) = 0$$

이 성립한다. 한편, $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, $h(x_0, y_0, z_0) = 0$이 성립하는 것은 당연하므로, **1**에서 말한 라그랑지 승수법이 성립한다.

원 글 출처

https://personal.math.ubc.ca/~feldman/m226/multiLagrange.pdf