Arima Model - 6

강의 : 김성범 교수님

정리 : 김선중

December 14, 2022

이것은 ARIMA 모델 개요 - Part 6 강의에 대한 노트이다. 이번 내용은 계산이 많으므로, 설명을 길게 쓰는 것보다는 계산을 나열하는 것 위주로 정리했다. 다만, conditional expectation과 prediction interval에 대해서는 조금 공부해야 할 것 같아서 간략하게 적어보았다. 지난 번에는 영어로 적었었는데, 이번에는 다시 한글로 적었다.

Contents

아리마 모델 (ARIMA Model) – Part 6

Prediction (Forecasting)

Given $X_1, X_2, \cdots, X_t$, want to predict X_{t+1}.

$X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}$: error

$\min E[(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2]$

$\boxed{\hat{X}_{t+1} = E[X_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t]}$ ⇒ conditional expectation.

AR(1) : $X_t = \phi X_{t-1} + a_t + \mu$

$X_{t+1} = \phi X_t + a_{t+1} + \mu$

$\hat{X}_{t+1} = E[X_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \phi E[X_t \mid X_1, \cdots, X_t] + \underbrace{E[a_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t]}_{=0} + E[\mu \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \phi X_t + \mu$

$\boxed{\therefore \hat{X}_{t+1} = \phi X_t + \mu}$

$X_{t+1} \to \hat{X}_{t+1}$ (P.I)

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ prediction interval for X_{t+1},

$\boxed{\hat{X}_{t+1} \pm C.V.(\alpha)\sqrt{Var(\hat{X}_{t+1})}}$

$X_{t+1} = \phi X_t + a_{t+1} + \mu$

$- \quad \hat{X}_{t+1} = \phi X_t + \mu$

$X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} = a_{t+1}$

$V(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}) = V(a_{t+1}) = \sigma_a^2 = Var(\hat{X}_{t+1})$

Assume $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ P.I. for X_{t+1}

$\boxed{\hat{X}_{t+1} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sigma_a}$

AR(1) $X_{t+2} = \phi X_{t+1} + a_{t+2} + \mu$.

$\hat{X}_{t+2} = E[X_{t+2} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \phi E[X_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t] + E[a_{t+2} \mid X_1, \cdots, X_t] + E[\mu \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \phi \hat{X}_{t+1} + \mu$, → 점예측값

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ P.I. for X_{t+2},

$X_{t+2} = \phi X_{t+1} + a_{t+2} + \mu$

$- \quad \hat{X}_{t+2} = \phi \hat{X}_{t+1} + \mu$

$X_{t+2} - \hat{X}_{t+2} = \phi(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}) + a_{t+2}$

$V(\quad " \quad) = \phi^2 V[(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})] + V(a_{t+2})$

$= \phi^2 \cdot \sigma_a^2 + \sigma_a^2$

$= (1+\phi^2)\sigma_a^2$

$\therefore (1-\alpha)\cdot 100\%$ P.I. for X_{t+2}, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$

$\boxed{\hat{X}_{t+2} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{(1+\phi^2)\sigma_a^2}}$,

AR(2). $X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + a_t$.

$\boxed{X_{t+1}} = \mu + \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1} + a_{t+1}$.

$\hat{X}_{t+1} = E[X_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= E[\mu \mid X_1, \cdots, X_t] + \phi_1 E[X_t \mid X_1, \cdots, X_t] + \phi_2 E[X_{t-1} \mid X_1, \cdots, X_t] + E[a_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$\boxed{= \mu + \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1}}$

$\boxed{(1-\alpha)\cdot 100\% \text{ P.I. for } X_{t+1}}$ ⇒ $\hat{X}_{t+1} \pm C.V(\alpha)\sqrt{V(\hat{X}_{t+1})}$

$X_{t+1} = \mu + \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1} + a_{t+1}$

$- \quad \hat{X}_{t+1} = \mu + \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1}$

$X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} = a_{t+1}$

$V(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}) = \sigma_a^2$.

$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$.

$\boxed{\hat{X}_{t+1} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sigma_a}$,

$\boxed{X_{t+2} \sim}$ 추정 vs. 예측.

$X_{t+3} = \mu + \phi_1 X_{t+2} + \phi_2 X_{t+1} + a_{t+3}$

$\hat{X}_{t+3} = E[X_{t+3} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \mu + \phi_1 E[X_{t+2} \mid X_1, \cdots, X_t] + \phi_2 E[X_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t] + E[a_{t+3} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \mu + \phi_1 \hat{X}_{t+2} + \phi_2 \hat{X}_{t+1}$ → Point predicted value.

$\boxed{95\% \text{ P.I. for } X_{t+3}}$ ⇒ $\hat{X}_{t+3} \pm \underbrace{Z_{(1-\frac{0.05}{2})}}_{1.96} \cdot \sqrt{V(\hat{X}_{t+3})}$

$X_{t+3} = \mu + \phi_1 X_{t+2} + \phi_2 X_{t+1} + a_{t+3}$

$- \quad \hat{X}_{t+3} = \mu + \phi_1 \hat{X}_{t+2} + \phi_2 \hat{X}_{t+1}$

$V(X_{t+3} - \hat{X}_{t+3}) = \phi_1^2 V(X_{t+2} - \hat{X}_{t+2}) + \phi_2^2 V(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}) + V(a_{t+3})$

$= \phi_1^2 (1+\phi_1^2)\sigma_a^2 + \phi_2^2 \sigma_a^2 + \sigma_a^2$

$= \{1 + \phi_1^2(1+\phi_1^2) + \phi_2^2\}\sigma_a^2$.

95%. PI for X_{t+3}. $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$

$\boxed{\hat{X}_{t+3} \pm 1.96\sqrt{\{1+\phi_1^2(1+\phi_1^2)+\phi_2^2\} \cdot \sigma_a^2}}$,

P.I. for X_{t+1}, ψ ⇒ psi (프사이)

$X_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots$, $\psi_1 = \phi + \theta$, $\psi_2 = \phi^2 + \phi \cdot \theta, \cdots$

$X_{t+1} = \mu + a_{t+1} + \psi_1 a_t + \psi_2 a_{t-1} + \cdots$

$\hat{X}_{t+1} = E[X_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t]$

$= \mu + E[a_{t+1} \mid X_1, \cdots, X_t] + \psi_1 E[a_t \mid X_1, \cdots, X_t] + \psi_2 E[a_{t-1} \mid X_1, \cdots, X_t] + \cdots$

$= \mu + \psi_1 a_t + \psi_2 a_{t-1} + \cdots$

$X_{t+1} = \mu + a_{t+1} + \psi_1 a_t + \psi_2 a_{t-1} + \cdots$

$- \quad \hat{X}_{t+1} = \mu + \psi_1 a_t + \psi_2 a_{t-1} + \cdots$

$V(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}) = \cancel{\phi} V(a_{t+1}) = \sigma_a^2$,

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ P.I. for X_{t+1}

$\hat{X}_{t+1} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sigma_a$,

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ P.I. for X_{t+2} ARMA(1, 1)

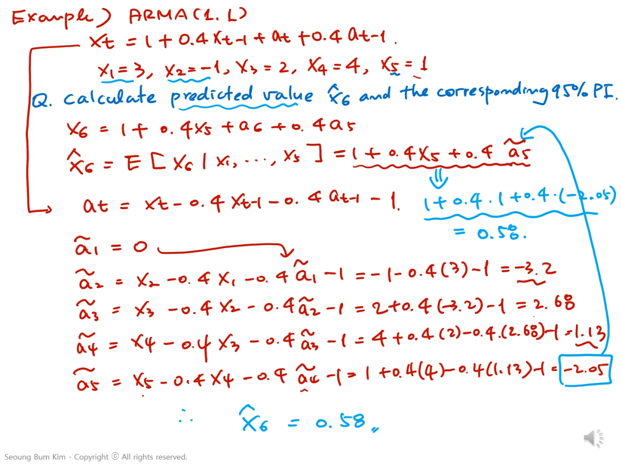
$\hat{X}_{t+2} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{(1+\psi_1^2)\cdot \sigma_a^2}$; $\psi_1 = \phi + \theta$,

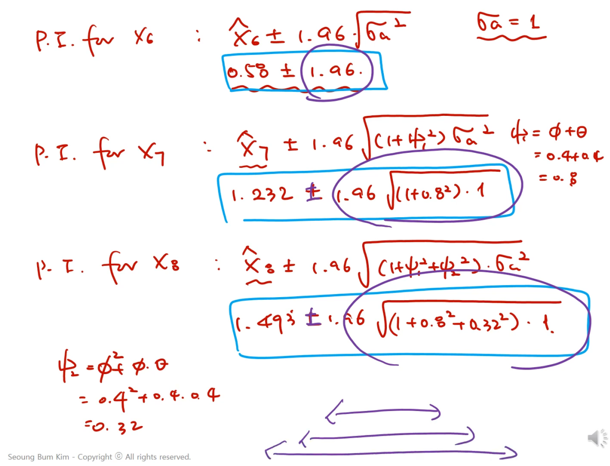
$(1-\alpha)\cdot 100\%$ P.I. for X_{t+3}.

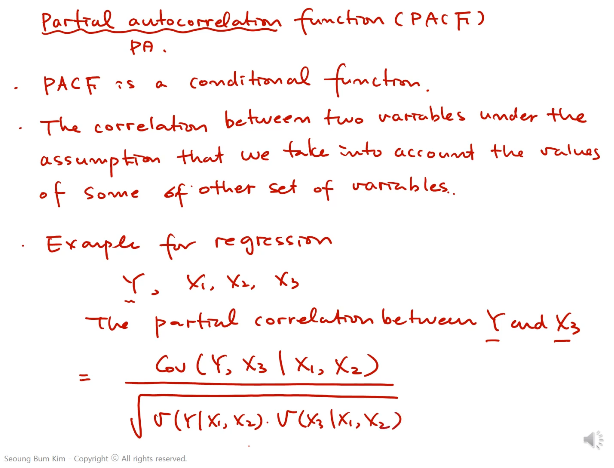
$\hat{X}_{t+3} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{(1+\psi_1^2+\psi_2^2)\sigma_a^2}$.

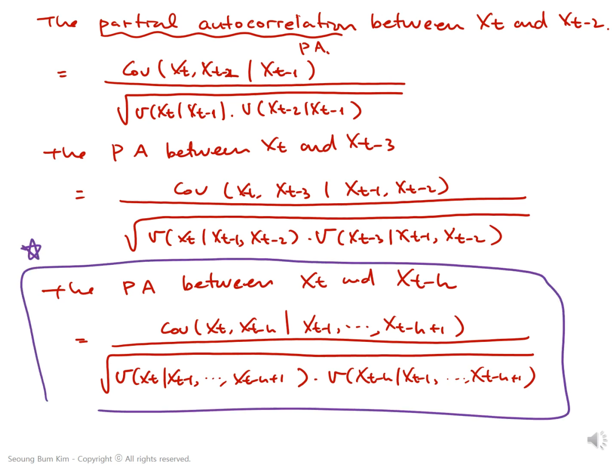
$\psi_2 = \phi^2 + \phi \cdot \theta$,

⋮









1 Preliminaries

1.1 Conditional Expectations

Conditional expectation에 관해서는 이 자료(A Conditional expectation - Arizona Math)참조했습니다. 해당 자료의 A.1, A.2를 옮겨서 적었습니다.

1.1.1 Probability Spaces

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$을 고려하자. 늘 그렇듯이 Ω는 표본공간(sample space)이고, $\mathcal{F}$는 사건공간(event space)이고, $\mathbb{P}$는 확률측도(probability measure)이다. 사건(event)이란, 표본 공간 Ω의 부분집합이고, $\mathcal{F}$는 사건들의 집합이지만 모든 사건들의 집합일 필요는 없다. 그보다는, $\mathcal{F}$는 Ω에 대한 σ-algebra이라서 세 가지 정도의 성질을 만족시키는 집합이다. $\mathbb{P}$는 유한측도(finite measure)로서 역시 세가지 정도의 성질을 만족시킨다.

1.1.2 Expectations

이산확률변수(discrete random variable) X에 대하여 기댓값(expectation) $\mathbb{E}[X]$은

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\mathbb{P}(X = x)$$

이다. 이때, $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$는 확률질량함수(probability mass function)이다. 연속확률변수(continuous random variable) X에 대하여는

$$\mathbb{E}[X] = \int_x xf(x)\,dx$$

와 같은 정의가 있다. 이때에는 $f(x)$는 확률밀도함수(probability density function)로서

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathbb{P}(a \le X \le b)$$

를 만족하는 함수이다.

1.1.3 Joint and Marginal Distributions

두 확률변수 X, Y에 대하여는 이 확률변수들의 순서쌍 (X,Y)이 하나의 확률변수가 된다. 이 확률변수의 분포를 결합확률분포(joint distribution)라고 한다. 만약 X와 Y가 모두 이산확률변수이면, (X,Y) 또한 이산확률변수이고, 이때의 확률질량함수는

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

와 같은 이변수함수가 된다. X와 Y에 대한 함수 $g(X,Y)$가 있을 때, $g(X,Y)$에 대한 기댓값 $\mathbb{E}[g(X,Y)]$은

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x g(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

가 된다. 간단한 예로, 확률변수 $X+3Y$에 대한 기댓값 $\mathbb{E}[X+3Y]$은 $(g(X,Y) = X+3Y)$

$$\mathbb{E}[X+3Y] = \sum_{x,y}(x+3y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

이고, 확률변수 X^2Y에 대한 기댓값 $\mathbb{E}[X^2Y]$은 $(g(x,Y) = X^2Y)$

$$\mathbb{E}[X^2Y] = \sum_x x^2y\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

이다. 만약 X와 Y가 모두 연속확률변수이면 (X,Y) 또한 연속확률변수가 된다. X가 연속확률변수라고 할 때에는 $X : \Omega_X \to \mathbb{R}$이라는 의미였지만, (X,Y)가 연속확률변수라고 말할 때에는 $(X,Y) : \Omega_X \times \Omega_Y \to \mathbb{R}^2$이라는 의미가 된다. 확률변수 (X,Y)의 확률밀도함수 $f_{X,Y}$는

$$\int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \mathbb{P}(a \le x \le b, c \le x \le d)$$

를 만족시키는 이변수 함수이다. 함수 $g(X,Y)$에 대한 기댓값 $\mathbb{E}[g(X,Y)]$는

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \iint_{x,y} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

이다. 위에서와 같은 예를 들어서 설명하면

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+3Y] &= \iint_{x,y} (x+3y)f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ \mathbb{E}[X^2Y] &= \iint_{x,y} x^2yf_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

이 된다.

결합확률분포의 관점에서 보면 X의 확률분포(혹은 Y에 대한 확률분포)는 (X,Y)에 대한 주변확률분포(marginal distribution)이라고 말할 수 있다. X, Y 대한 확률질량함수[혹은 확률밀도함수]를 X에 대하여 (혹은 Y에 대하여) marginalize

하면 Y(혹은 X)에 대한 확률질량함수 [혹은 확률밀도함수]가 얻어지는 것이다. 이것을 수식으로 쓰면, 이산확률변수에 대해서는

$$\sum_x \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(Y=y)$$
$$\sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)$$

이 성립하고, 연속확률변수에 대해서는

$$\int_x f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)$$
$$\int_y f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)$$

이 성립한다는 말이 된다.

여러 개의 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_N$에 대해서도 새로운 확률변수 $(X_1, X_2, \cdots, X_N)$를 생각할 수 있다. 이것은, 그러니까 확률변수들의 tuple인 것이다. 확률변수 X_n $(1 \le n \le N)$들이 모두 이산확률변수일 경우, 확률질량함수

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_N = x_N)$$

을 생각할 수 있고, 모두 연속확률변수인 경우, 확률밀도함수

$$f_{X_1, X_2, \cdots, X_N}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

을 생각하게 된다.[1] 이것들은 당연히 이변수일 때와 비슷한 성질을 만족시킬 것이지만 여기에 적지는 않겠다. 함수 $g(X_1, X_2, \cdots, X_N)$에 대한 기댓값은

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2, \cdots, X_N)] = \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_N} g(x_1, x_2, \cdots, x_N)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_N = x_N)$$

혹은

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2, \cdots, X_N)] = \int_{x_1, x_2, \cdots, x_N} g(x_1, x_2, \cdots, x_N) f_{X_1, X_2, \cdots, X_N}(x_1, x_2, \cdots, x_N)\, dx_1, dx_2 \cdots dx_N$$

이다.

1.1.4 Conditional Probabilities and Conditinoal Expectations

(X, Y)의 결합확률분포에서의 사건 A, B를 고려하자. 사건 A가 일어났다고 가정했을 때, 사건 B가 일어날 확률을 $\mathbb{P}(B|A)$라고 쓰고

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

라고 정의한다.

Y가 주어졌을 때 X의 확률밀도함수 $f_{X|Y}(x|y)$는 다음과 같이 정의된다.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

[1] 그런데 위의 표현은 너무 복잡하므로, 그냥 간단하게

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

라고 쓸 수도 있을 것이다. 즉 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_N)$이라고 생각하는 것이다.

이때, $f_{X,Y}(x,y)$는 X, Y에 대한 결합확률분포(joint distribution)에 대한 확률밀도함수이다. $f_Y(y)$는 Y에 대한 확률밀도함수이면서, $f_{X,Y}(x,y)$에 대한 주변확률(marginal dis

1.2 Prediction Intervals