B 단계 유형 Master

유형 01 행렬의 $(i,\ j)$ 성분 개념 11-1

주어진 식에서 행렬의 $(i,\ j)$성분을 구할 때는 $i,\ j$에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 구한다.

1336 대표 문제

3×2 행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=i+j-ij$$

일 때, 행렬 A를 구하시오.

1337 B⁰

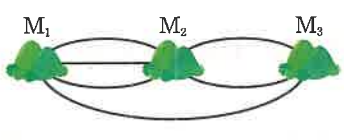
행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=\begin{cases} 2i-j & (i>j) \\ i^2 & (i=j) \\ i+2j & (i<j) \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

1338 B⁰

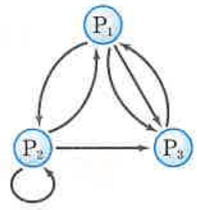


오른쪽 그림은 세 개의 산 M_1, M_2, M_3을 연결하는 등산로를 나타낸 것이다. 삼차 정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 다음과 같을 때, 행렬 A를 구하시오.

(단, 한 번 지나간 산은 다시 지나지 않는다.)

> (가) $i=j$일 때, $a_{ij}=0$이다.
> (나) $i\neq j$일 때, a_{ij}는 산 M_i에서 산 M_j로 가는 방법의 수이다.

1339 B⁺



오른쪽 그림은 세 지점 P_1, P_2, P_3 사이의 길의 방향을 화살표로 나타낸 것이다. 삼차 정사각행렬 A의 성분 a_{ij}를 P_i 지점에서 P_j 지점으로 직접 가는 길의 수라 할 때, 행렬 A는?

① $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

유형 02 서로 같은 행렬 개념 11-1

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$에 대하여

$A=B$ ⇔ $\begin{cases} a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12} \\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22} \end{cases}$

1340 대표 문제

두 행렬

$$A=\begin{pmatrix} x+y & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & x^3+y^3 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $A=B$일 때, xy의 값은?

(단, x, y는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1341 B⁰

등식 $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b-c & b+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & b \\ -2 & 7-c \end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 a, b, c의 값을 구하시오.

정답 및 풀이 > 133쪽

1342 B+ 서술형

두 행렬

$$A=\begin{pmatrix} x^2-2 & 5 \\ 3x-2 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} & x^2+1 \\ -x^2+2x & 9 \end{pmatrix}$$

에 대하여 $A=B$일 때, 실수 x의 값을 구하시오.

집중공략

유형 03 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 개념 11-2, 3

(1) 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

① $A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}$ (복호동순)

② $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

(2) 행렬을 포함한 식이 주어지면 먼저 식을 간단히 한 후 행렬을 대입한다.

1343 대표문제

두 행렬 $X=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $3(X+Y)-(X+4Y)$는?

① $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$

1344 B

등식 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

1345 B0 서술형

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $3X-B=2(X-A)-4B$를 만족시키는 행렬 X의 $(2,\ 2)$ 성분을 구하시오.

1346 B0

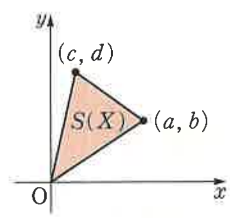
세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $xA+yB=3C$가 성립할 때, $x+y$의 값은? (단, x, y는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

1347 B+

오른쪽 그림과 같이 행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 각 행의 성분을 좌표로 하는 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$와 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $S(X)$라 하자. 이때 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $S(3A-B)$의 값은?



① 42 ② 44 ③ 46

④ 48 ⑤ 50

유형 04 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 ; 행렬에 대한 두 등식이 주어진 경우 개념 11-2, 3

행렬 X, Y에 대한 두 등식이 주어진 경우
➡ X, Y에 대한 연립방정식으로 생각하고 풀어 X 또는 Y를 구한다.

1348 대표문제

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$2X+Y=A,\ X-Y=B$$

를 만족시키는 행렬 X, Y를 구하시오.

1349 B⁰ 서술형

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix},\ 2A-B=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

일 때, $A+B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$이다. 이때 $ps+qr$의 값을 구하시오.

1350 B⁺

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$에 대하여

$$X+2Y=A+B,\ 2(X-Y)=A-B$$

를 만족시키는 행렬 X, Y가 있다. $X=(x_{ij})$, $Y=(y_{ij})$에서 $x_{12}+y_{21}$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

유형 05 행렬의 곱셈 개념 11-4

① $(a\ \ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(ax+by)$

② $(a\ \ b)\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=(ax+by\ \ au+bv)$

③ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$

1351 대표문제

등식 $\begin{pmatrix} x & y \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

1352 B⁰

세 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=(-3\ \ 2)$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 행렬의 곱을 구할 수 없는 것은?

① AB ② AC ③ BA
④ BC ⑤ CA

1353 B⁰ 서술형

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} y & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$이 $AB=O$를 만족시킬 때, 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하시오.

1354 B0

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $\frac{1}{2}(AB-BA)$는?

① $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1355 B+

등식 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

유형 06 행렬의 거듭제곱; A^2 구하기 개념 11-4

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이면

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

1356 대표문제

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2의 모든 성분의 합을 구하시오.

1357 B+

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -2 & b \end{pmatrix}$가 $A^2=E$를 만족시킬 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

1358 B0

행렬 $A=\begin{pmatrix} k & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 0이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

1359 B0 서술형

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2=pA+qE$를 만족시키는 실수 p, q의 값을 구하시오.

1360 B+

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

일 때, 행렬 A^2+B^2의 $(2, 1)$성분은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

유형 07 행렬의 거듭제곱; 규칙 찾기 개념 11-4

정사각행렬 A에 대하여 A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례대로 구하여 규칙성을 찾는다.

1361 대표문제

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

1362 B0

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{20}을 구하시오.

1363 B0 서술형

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{100}의 $(1, 2)$성분을 구하시오.

1364 B+

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

일 때, $a-b+c-d$의 값은?

① -55 ② -10 ③ 0
④ 55 ⑤ 75

집중공략

유형 08 행렬의 거듭제곱; $A^n=E$의 이용 개념 11-4

A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례대로 구한 후 $A^n=E$ 또는 $A^n=-E$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구한다.
① $A^n=E$이면
$A^{n+1}=A,\ A^{n+2}=A^2,\ \cdots,\ A^{2n}=E$
② $A^n=-E$이면 $A^{2n}=E$

1365 대표문제

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^{2025}의 모든 성분의 합은?

① -3 ② -1 ③ 2
④ 5 ⑤ 8

1366 B⁰

행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

1367 B⁺

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이 $A^{25}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 실수 x, y에 대하여 $2x-y$의 값은?

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

유형 09 행렬의 곱셈의 실생활에의 활용　개념 11-4

주어진 자료를 행렬로 표현하고, 행렬의 곱셈에서 각 성분이 의미하는 것을 파악한다.

1368 대표문제

어느 자동차 매장에서 2월과 3월에 판매한 S 자동차와 T 자동차의 대수는 오른쪽 표와 같다. S 자동차와 T 자동차의 한 대당 판매 가격이 각각 p만 원, q만 원일 때, 세 행렬 A, B, C를

(단위: 대)

	S 자동차	T 자동차
2월	a	b
3월	c	d

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ C=(p\ \ q)$$

라 하면 S 자동차와 T 자동차의 3월 판매 금액의 총합은 x만 원이라 한다. 다음 중 x의 값과 같은 것은?

① AB의 $(1,\ 1)$ 성분　② AB의 $(2,\ 1)$ 성분
③ BC의 $(1,\ 1)$ 성분　④ CA의 $(1,\ 1)$ 성분
⑤ CA의 $(2,\ 1)$ 성분

1369 B⁰

두 마트 P, Q에서 판매하는 감자와 양파의 가격은 [표 1]과 같고, 승진이와 재욱이가 사려는 감자와 양파의 수는 [표 2]와 같다.

(단위: 원)

	감자	양파
P 마트	a	b
Q 마트	c	d

[표 1]

(단위: 개)

	승진	재욱
감자	e	f
양파	g	h

[표 2]

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB의 $(2,\ 2)$ 성분이 의미하는 것은?

① 승진이가 P 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액
② 재욱이가 P 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액
③ 승진이가 Q 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액
④ 재욱이가 Q 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액
⑤ 승진이와 재욱이가 Q 마트에서 감자를 살 경우 지불해야 하는 금액

1370 B⁰

사과와 복숭아를 섞어 오른쪽 표와 같은 두 종류의 선물 상자 A, B를 만들려고 한다. 다음 중 사과는 한 개에 3000원, 복숭아는 한 개에 5000원일 때, A 상자를 20개, B 상자를 10개 만들기 위해 사과와 복숭아를 구입하는 데 필요한 금액을 나타낸 것은?

(단위: 개)

	사과	복숭아
A 상자	8	2
B 상자	6	4

① $(20\ \ 10)\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \end{pmatrix}$

② $(20\ \ 10)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \end{pmatrix}$

③ $(20\ \ 10)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$

④ $(3000\ \ 5000)\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

⑤ $(3000\ \ 5000)\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

유형 10 행렬의 곱셈의 성질 개념 11-4

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여
① $AB \neq BA$
- 행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.
- $(A\pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ (복호동순)

② $(AB)C = A(BC) = ABC$ ➡ 결합법칙
③ $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$ ➡ 분배법칙

1371 대표문제

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^2-AB+BA-B^2$의 $(2, 2)$ 성분은?

① -8 ② -5 ③ -3
④ 1 ⑤ 3

1372 B0

세 행렬

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

에 대하여 행렬 $ABA+ABC$를 구하시오.

1373 B0 서술형

두 행렬 A, B에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $AB+BA=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합을 구하시오.

1374 B+

두 행렬 A, B에 대하여 $(A+B)(A-2B)=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2-2B^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(A-B)(A+2B)$는?

① $\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

집중공략

유형 11 $AB=BA$가 성립하는 경우 개념 11-4

행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하면 곱셈 공식을 적용할 수 있다.
- 두 행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$이면
  $(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ (복호동순),
  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

1375 대표문제

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

이 성립할 때, 실수 k의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

1376 B

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ y & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립한다. 이때 실수 x, y에 대하여 $x-2y$의 값을 구하시오.

1377 B⁰ 서술형

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

이 성립할 때, 행렬 A^3B^3의 모든 성분의 합을 구하시오.

유형 12 행렬의 변형 개념 11-2, 3, 4

이차 정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$이면

① $A\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$일 때, 등식의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=xA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+yA\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$=x\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xp+yr \\ xq+ys \end{pmatrix}$

1378 대표문제

이차 정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix} 3a \\ -2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -a \\ 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

가 성립할 때, 다음 중 행렬 $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$와 같은 행렬은?

① $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1379 B⁰

이차 정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} a-2c \\ b-2d \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

1380 B⁰ 서술형

이차 정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

이 성립할 때, 행렬 $A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$를 구하시오.

1381 B⁺

이차 정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

가 성립할 때, 행렬 $A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$는?

① $\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

유형 13 단위행렬 E를 포함한 식 (1) 개념 11-4

같은 꼴의 정사각행렬 A와 단위행렬 E에 대하여

$AE=EA=A$

이므로 곱셈 공식이 성립한다.

① $(A\pm E)^2=A^2\pm 2A+E$ (복호동순)

② $(A+E)(A-E)=A^2-E$

③ $(A\pm E)(A^2\mp A+E)=A^3\pm E$ (복호동순)

1382 대표문제

행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬

$(A-E)(A^2+A+E)$를 구하시오.

11 행렬과 그 연산

1383 B⁰ 서술형

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $(E+2A)^2=xE+yA$일 때, $x+y$의 값을 구하시오.

(단, x, y는 실수이다.)

1384 B⁰

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$에 대하여 $(A+E)(A-E)=E$가 성립할 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

1385 B⁺

이차 정사각행렬 A가 $A^2-2A+4E=O$를 만족시킬 때, $A^{30}=kE$에서 실수 k의 값은?

① -8^{10} ② -4^{10} ③ 2^{10}
④ 4^{10} ⑤ 8^{10}

유형 14 단위행렬 E를 포함한 식 (2)

개념 11-4

두 이차 정사각행렬 A, B와 실수 k에 대하여 A와 B의 합과 곱에 대한 조건이 주어진 경우에는 다음과 같이 주어진 식을 변형한다.

① $A+B=kE$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면
$A^2+AB=kA$
② $A+B=kE$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면
$AB+B^2=kB$

1386 대표문제

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=2E$, $AB=O$가 성립할 때, 행렬 A^3+B^3을 구하시오.

1387 B⁰

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2-A=E$, $AB=3E$가 성립할 때, 행렬 B^2을 A와 E로 나타내면?

① $-9A+9E$ ② $-9A+18E$
③ $-6A+12E$ ④ $-6A+18E$
⑤ $-3A+12E$

1388 B⁰

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=O$, $AB=E$가 성립할 때, 다음 중 행렬 $A^{2024}+B^{2025}$과 같은 것은?

① $-E$ ② $A+E$ ③ O
④ $B-E$ ⑤ $B+E$

정답 및 풀이 > 139쪽

유형 15 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질 개념 11-4

① 수나 식의 계산에서 성립하는 성질이 행렬에서는 성립하지 않음에 주의한다.

예 $A \neq O$, $B \neq O$이지만 $AB=O$인 경우

➡ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

② 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않으므로 행렬을 곱하는 순서에 주의한다.

예 $AB \neq BA$인 경우

➡ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1389 대표 문제

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A+B=E$이면 $AB=BA$이다.

ㄴ. $A-B=E$이면 $A^2-B^2=A+B$이다.

ㄷ. $AB=O$, $A \neq O$이면 $B=O$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1390 B⁰

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $(A-B)^2=E$이면 $A=B$이다.
② $AB=O$이면 $BA=O$이다.
③ $(AB)^2=A^2B^2$이다.
④ $A^3=A^5=E$이면 $A=E$이다.
⑤ $A^2=B^2=E$이면 $A=B$ 또는 $A=-B$이다.

1391 B⁺

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$$(A-B)(A+B)=A^2-2BA-B^2$$

일 때, 옳은 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $A^2B^2=(AB)^2$

ㄴ. $A^2B^2=B^2A^2$

ㄷ. $(A-B)^2=A^2+B^2$

유형 16 케일리-해밀턴 정리 개념 11-4

단위행렬 E와 영행렬 O가 모두 이차 정사각행렬일 때

① $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ➡ $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

② 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-pA+qE=O$이면

(i) $A \neq kE$ (k는 실수)

➡ $p=a+d$, $q=ad-bc$

(ii) $A=kE$ (k는 실수)

➡ $A=kE$를 $A^2-pA+qE=O$에 대입하여 k의 값을 구한다.

1392 대표 문제

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 중 행렬 $A^3-3A^2+4A-2E$와 같은 것은?

① $7A-3E$ ② $7A+2E$ ③ $9A-3E$
④ $9A+3E$ ⑤ $9A+5E$

1393 B⁰

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$이 $A^2-2A+3E=O$를 만족시킬 때, 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

1394 B⁺ 서술형

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^2+5A-6E=O$를 만족시킬 때, 실수 a, b, c, d에 대하여 $a+d$의 최솟값을 구하시오.

1332 (1) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\cdot2+0\cdot(-1) & 2\cdot0+0\cdot1 \\ -1\cdot2+1\cdot(-1) & -1\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4\cdot2+0\cdot(-1) & 4\cdot0+0\cdot1 \\ -3\cdot2+1\cdot(-1) & -3\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

1333 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+0\cdot(-2) & 2\cdot1+0\cdot0 \\ 4\cdot(-3)-1\cdot(-2) & 4\cdot1-1\cdot0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3\cdot2+1\cdot4 & -3\cdot0+1\cdot(-1) \\ -2\cdot2+0\cdot4 & -2\cdot0+0\cdot(-1) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

답 풀이 참조

1334 (1) $5E=5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $E^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $(-E)^5=-E^5=-E=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $(-E)^{49}+E^{50}=-E^{49}+E^{50}=-E+E=O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1335 (1) $(A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2$

$=A^2-A+A-E$

$=A^2-E$

(2) $(A-E)^2=(A-E)(A-E)=A^2-AE-EA+E^2$

$=A^2-A-A+E=A^2-2A+E$

답 풀이 참조

1336 $a_{11}=1+1-1\cdot1=1$, $a_{12}=1+2-1\cdot2=1$,

$a_{21}=2+1-2\cdot1=1$, $a_{22}=2+2-2\cdot2=0$,

$a_{31}=3+1-3\cdot1=1$, $a_{32}=3+2-3\cdot2=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1337 $a_{11}=1^2=1$, $a_{12}=1+2\cdot2=5$, $a_{13}=1+2\cdot3=7$,

$a_{21}=2\cdot2-1=3$, $a_{22}=2^2=4$, $a_{23}=2+2\cdot3=8$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+5+7+3+4+8=28$

답 ③

1338 $a_{11}=0$, $a_{12}=3$, $a_{13}=3\cdot2+1=7$, $a_{21}=3$, $a_{22}=0$, $a_{23}=2$,

$a_{31}=2\cdot3+1=7$, $a_{32}=2$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1339 $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{13}=2$, $a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=1$,

$a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

답 ②

1340 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=3$, $x^3+y^3=9$

이때 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$9=3^3-3xy\cdot3$, $9xy=18$

$\therefore xy=2$

답 ⑤

1341 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=3$, $a-b=b$, $b-c=-2$, $b+c=7-c$

$a+b=3$, $a-b=b$를 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$

$b=1$을 $b-c=-2$에 대입하여 정리하면

$c=3$

답 $a=2$, $b=1$, $c=3$

1342 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-2=\dfrac{x^2}{2}$, $x^2+1=5$, $3x-2=-x^2+2x$ ··· ❶

$x^2+1=5$에서 $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$ ······ ㉠

$3x-2=-x^2+2x$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=-2$ ··· ❷

답 -2

채점 기준	비율
❶ x에 대한 식을 구할 수 있다.	50 %
❷ x의 값을 구할 수 있다.	50 %

11 행렬과 그 연산

1343 $3(X+Y)-(X+4Y)=3X+3Y-X-4Y=2X-Y$

$$=2\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

답 ④

1344 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2y \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3 & 2+2y \\ 1 & x+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+4=3,\ 2+2y=6 \qquad \therefore x=-1,\ y=2$

$\therefore xy=-2$

답 -2

1345 $3X-B=2(X-A)-4B$에서

$3X-B=2X-2A-4B$

$\therefore X=-2A-3B$ ⋯ ❶

$$=-2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 19 & -17 \end{pmatrix}$$ ⋯ ❷

따라서 행렬 X의 $(2,\ 2)$ 성분은 -17이다. ⋯ ❸

답 -17

채점 기준	비율
❶ 행렬 X를 두 행렬 A, B로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 행렬 X를 구할 수 있다.	50 %
❸ 행렬 X의 $(2,\ 2)$ 성분을 구할 수 있다.	20 %

1346 $xA+yB=3C$에서

$$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2y & -y \\ y & 6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2x-2y & x-y \\ -x+y & 6y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-2y=6,\ x-y=3,\ -x+y=-3,\ 6y=-6$

$\therefore x=2,\ y=-1$

$\therefore x+y=1$

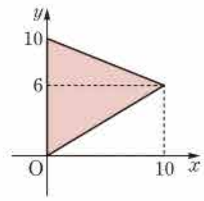
답 ④

1347 $3A-B=3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

오른쪽 그림에서 $S(3A-B)$는 세 점 $(0,\ 10)$, $(10,\ 6)$, $(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이이므로



$$S(3A-B)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10=50$$

답 ⑤

1348 $2X+Y=A$ ⋯⋯ ㉠

$X-Y=B$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3X=A+B$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$을 ㉡에 대입하면

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-Y=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

답 $X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1349 $A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉠

$2A-B=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ ⋯⋯ ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$$7B=2\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 28 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ ⋯ ❶

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$$A+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$ ⋯ ❷

$$\therefore A+B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

따라서 $p=5,\ q=3,\ r=10,\ s=4$이므로

$ps+qr=5\cdot4+3\cdot10=50$ ⋯ ❸

답 50

채점 기준	비율
❶ 행렬 B를 구할 수 있다.	40 %
❷ 행렬 A를 구할 수 있다.	40 %
❸ $ps+qr$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1350 $X+2Y=A+B$ ⋯⋯ ㉠

$2(X-Y)=A-B$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$$3X=2A=2\begin{pmatrix}6&12\\0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&24\\0&-12\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12&24\\0&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}+2Y=\begin{pmatrix}6&12\\0&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\4&-8\end{pmatrix}$$

$$2Y=\begin{pmatrix}7&15\\4&-14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&8\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\4&-10\end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&7\\4&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\\2&-5\end{pmatrix}$$

따라서 $x_{12}=8,\ y_{21}=2$이므로

$x_{12}+y_{21}=10$

답 ③

1351 $\begin{pmatrix}x&y\\x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\y&x\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&-1\\x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&5\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}2x+y^2&x+xy\\2x&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\2x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&5\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}2x+y^2&x+xy\\2x&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+y&3\\2x&1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y^2=4+y,\ x+xy=3,\ x=1$

$\therefore x=1,\ y=2$

$\therefore x^2+y^2=1^2+2^2=5$

답 ③

1352 ② A는 2×1 행렬, C는 2×2 행렬이므로 AC는 구할 수 없다.

답 ②

1353 $AB=O$에서

$$\begin{pmatrix}-1&x\\3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}-y+2x&-2+x\\3y-12&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-y+2x=0,\ -2+x=0,\ 3y-12=0$ ⋯ ❶

$\therefore x=2,\ y=4$

$\therefore xy=8$ ⋯ ❷

답 8

채점 기준	비율
❶ $x,\ y$에 대한 식을 구할 수 있다.	60 %
❷ xy의 값을 구할 수 있다.	40 %

1354 $\frac{1}{2}(AB-BA)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&8\\-2&4\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-8\\2&-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}$$

답 ④

1355 $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&0\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\ab&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}b&bd\\ab&abd+c\end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix}b&bd\\ab&abd+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\6&-5\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$b=2,\ bd=-4,\ ab=6,\ abd+c=-5$

$\therefore a=3,\ b=2,\ c=7,\ d=-2$

$\therefore a+b+c+d=10$

답 10

1356 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$A=\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+1&\alpha+\beta\\\alpha+\beta&1+\beta^2\end{pmatrix}$$

따라서 A^2의 모든 성분의 합은

$(\alpha^2+1)+(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+(1+\beta^2)$

$=\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+2$

$=3^2-2\cdot1+2\cdot3+2=15$

답 15

1357 $A^2=\begin{pmatrix}a&4\\-2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&4\\-2&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-8&4a+4b\\-2a-2b&-8+b^2\end{pmatrix}$

이므로

$$\begin{pmatrix}a^2-8&4a+4b\\-2a-2b&-8+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-8=1,\ 4a+4b=0,\ -2a-2b=0,\ -8+b^2=1$

$\therefore a+b=0$

답 ①

1358 $A^2=\begin{pmatrix}k&-1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&-1\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2+3&-k-1\\-3k-3&4\end{pmatrix}$

이때 행렬 A^2의 모든 성분의 합이 0이 되려면

$(k^2+3)+(-k-1)+(-3k-3)+4=0$

$k^2-4k+3=0,\qquad (k-1)(k-3)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은

$1\cdot3=3$ 답 ⑤

1359 $A^2=pA+qE$이므로

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&3p\\2p&4p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q&0\\0&q\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}7&15\\10&22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+q&3p\\2p&4p+q\end{pmatrix}$$ ··· ❶

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$7=p+q,\ 15=3p,\ 10=2p,\ 22=4p+q$

$\therefore p=5,\ q=2$ ··· ❷

답 $p=5,\ q=2$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식에 행렬을 대입하여 정리할 수 있다.	50 %
❷ p, q의 값을 구할 수 있다.	50 %

1360 $A+B=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}$ ······ ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&-2\end{pmatrix}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2A=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-4\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2&2\\1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2+B^2=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-3\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&9\\3&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\3&13\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^2+B^2의 $(2,\ 1)$ 성분은 3이다. 답 ①

1361 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}3^2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}3^3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^4&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore n=4$ 답 4

라쎈 특강

다음과 같이 특수한 꼴로 정리되는 행렬의 거듭제곱은 자주 나오므로 기억해 두면 편리하다. (단, n은 자연수)

① $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&an\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\an&1\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&a^n\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{pmatrix}$

1362 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^3\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^4\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{20}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{20}\end{pmatrix}$$ 답 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{20}\end{pmatrix}$

1363 $A=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\cdot5\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\cdot5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\cdot5\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&3\cdot5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\cdot5\\0&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&5n\\0&1\end{pmatrix}$$ ··· ❶

$$\therefore A^{100}=\begin{pmatrix}1&500\\0&1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{100}의 $(1,\ 2)$ 성분은 500이다. ··· ❷

답 500

채점 기준	비율
❶ 행렬 A^n을 구할 수 있다.	70 %
❷ 행렬 A^{100}의 $(1,\ 2)$ 성분을 구할 수 있다.	30 %

1364 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}10&1+2+3+\cdots+10\\0&10\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}10&55\\0&10\end{pmatrix}$$

따라서 $a=10$, $b=55$, $c=0$, $d=10$이므로

$a-b+c-d=-55$ 답 ①

1365 $A=\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-7\\1&2\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-3&-7\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$
$$\therefore A^{2025}=(A^3)^{675}=E$$

따라서 행렬 A^{2025}의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$ 답 ③

1366 $A=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$$
$$A^3=A^2A=(-E)A=-A$$
$$\therefore A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$$

따라서 $A^n=E$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 4

1367 $A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$$
$$A^4=A^3A=(-E)A=-A$$
$$A^5=A^4A=-AA=-A^2$$
$$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$$
$$\therefore A^{25}=(A^6)^4A=A$$

$A^{25}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix}2x+3y\\-x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3y=-1$, $-x-y=-2$

$\therefore x=7$, $y=-5$

$\therefore 2x-y=19$ 답 ②

1368 3월 S 자동차의 판매 금액의 총합은 cp만 원이고, 3월 T 자동차의 판매 금액의 총합은 dq만 원이므로 S 자동차와 T 자동차의 3월 판매 금액의 총합은 $(cp+dq)$만 원이다.

$\therefore x=cp+dq$

이때

$$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap+bq\\cp+dq\end{pmatrix}$$

이므로 x의 값은 행렬 AB의 $(2, 1)$ 성분과 같다. 답 ②

1369 $AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg&af+bh\\ce+dg&cf+dh\end{pmatrix}$이므로 AB의 $(2, 2)$ 성분은

$cf+dh$

따라서 행렬 AB의 $(2, 2)$ 성분은 재욱이가 Q 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액이다. 답 ④

참고 행렬 AB의 각 성분이 의미하는 것은 다음과 같다.

① $(1, 1)$ 성분 $ae+bg$
→ 승진이가 P 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액

② $(1, 2)$ 성분 $af+bh$
→ 재욱이가 P 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액

③ $(2, 1)$ 성분 $ce+dg$
→ 승진이가 Q 마트에서 감자와 양파를 살 경우 지불해야 하는 금액

1370 A 상자를 20개, B 상자를 10개 만들기 위해 구입하려는 사과와 복숭아의 개수를 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}\text{사과의 개수}\\\text{복숭아의 개수}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot20+6\cdot10\\2\cdot20+4\cdot10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$$

따라서 필요한 금액은

$3000\times$(사과의 개수)$+5000\times$(복숭아의 개수)

이므로

$$(3000\quad 5000)\begin{pmatrix}\text{사과의 개수}\\\text{복숭아의 개수}\end{pmatrix}$$
$$=(3000\quad 5000)\begin{pmatrix}8&6\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}$$ 답 ⑤

참고 A 상자를 1개, B 상자를 1개 만들기 위해 사과와 복숭아를 구입하는 데 필요한 금액을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}\text{A 상자 1개 금액}\\\text{B 상자 1개 금액}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot3000+2\cdot5000\\6\cdot3000+4\cdot5000\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}8&2\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3000\\5000\end{pmatrix}$$

따라서 필요한 금액은

$20\times$(A 상자 1개 금액)$+10\times$(B 상자 1개 금액)

이므로

$$(20\quad 10)\begin{pmatrix}\text{A 상자 1개 금액}\\\text{B 상자 1개 금액}\end{pmatrix}=(20\quad 10)\begin{pmatrix}8&2\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3000\\5000\end{pmatrix}$$

1371 $A^2-AB+BA-B^2$

$=A(A-B)+B(A-B)$

$=(A+B)(A-B)$

$=\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&-8\\0&-5\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A^2-AB+BA-B^2$의 (2, 2) 성분은 -5이다.

답 ②

1372 $ABA+ABC$

$=AB(A+C)$

$=\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\-2&4\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&3\\-2&5\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}1&-3\\-8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3\\0&8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4&-21\\32&120\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}-4&-21\\32&120\end{pmatrix}$

1373 $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$이므로

$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$ ··· ❶

$=\begin{pmatrix}5&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-1\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&7\\7&-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}23&-4\\8&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&7\\7&-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}19&-11\\1&5\end{pmatrix}$ ··· ❷

따라서 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합은

$19-11+1+5=14$ ··· ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ A^2+B^2을 $A+B$, $AB+BA$로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 행렬 A^2+B^2을 구할 수 있다.	50 %
❸ 행렬 A^2+B^2의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	20 %

1374 $(A+B)(A-2B)=\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}$에서

$A^2-2AB+BA-2B^2=\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-1\end{pmatrix}-2AB+BA=\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}$

$\therefore 2AB-BA=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&4\\7&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-6\\-9&0\end{pmatrix}$

$\therefore (A-B)(A+2B)=A^2+2AB-BA-2B^2$

$=A^2-2B^2+2AB-BA$

$=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-6\\-9&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&-8\\-11&-1\end{pmatrix}$

답 ①

1375 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$

이므로 $-AB-BA=-2AB$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&1\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}-k+2&7\\2k-3&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k+2&2k-3\\7&-10\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2k-3=7,\quad 2k=10$

$\therefore k=5$

답 ③

1376 $AB=BA$에서

$\begin{pmatrix}2&x\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4\\y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\y&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&x\\-1&1\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}-2+xy&8\\1+y&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-x+4\\2y&xy\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2+xy=-6,\ 8=-x+4,\ 1+y=2y,\ -4=xy$

$\therefore x=-4,\ y=1$

$\therefore x-2y=-6$

답 -6

1377 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

이므로 $-AB+BA=O$

$\therefore AB=BA$ ··· ❶

즉 $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}3a-2&0\\2a-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a-2&a-1\\0&1\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-1=0\quad \therefore a=1$ ··· ❷

한편 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이므로

$A^3B^3=AAABBB=AABB$

$=AB=E$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ··· ❸

따라서 행렬 A^3B^3의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$ ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $AB=BA$임을 알 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 행렬 A^3B^3을 구할 수 있다.	20 %
❹ 행렬 A^3B^3의 모든 성분의 합을 구할 수 있다.	10 %

1378 주어진 조건에서

$A\begin{pmatrix}3a\\-2b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}-a\\4b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad 2A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 답 ④

1379 주어진 조건에서

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}-2A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} a-2c \\ b-2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix} a-2c \\ b-2d \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$-5+1=-4$ 답 -4

1380 주어진 조건에서

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ··· ❶

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$에서

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=AA^2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ··· ❷

답 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

채점 기준	비율
❶ 행렬 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$를 구할 수 있다.	50 %
❷ 행렬 $A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$를 구할 수 있다.	50 %

1381 실수 a, b에 대하여

$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

가 성립한다고 하면

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$이 주어졌으므로 $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$를 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$에 대한 식으로 나타낸다.

$\begin{pmatrix} a-b \\ 2a+3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=-3$, $2a+3b=4$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ 답 ②

1382 $(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E^3=A^3-E$

$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 19 & -27 \end{pmatrix}$

$\therefore A^3-E=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 19 & -27 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 19 & -28 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 19 & -28 \end{pmatrix}$

1383 $(E+2A)^2=xE+yA$에서

$(E+2A)^2=E+4A+4A^2$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$=5E+4A$ ··· ❶

따라서 $x=5$, $y=4$이므로

$x+y=9$ ··· ❷

답 9

채점 기준	비율
❶ 행렬 $(E+2A)^2$을 간단히 할 수 있다.	70 %
❷ $x+y$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1384 $(A+E)(A-E)=E$에서

$A^2-E=E \qquad \therefore A^2=2E$

이때 $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+a & -a+ab \\ -1+b & a+b^2 \end{pmatrix}$

이므로

$\begin{pmatrix} 1+a & -a+ab \\ -1+b & a+b^2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1+a & -a+ab \\ -1+b & a+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+a=2$, $-a+ab=0$, $-1+b=0$, $a+b^2=2$

$\therefore a=1$, $b=1$

$\therefore a-b=0$ 답 ③

1385 $A^2-2A+4E=O$의 양변에 $A+2E$를 곱하면

$(A+2E)(A^2-2A+4E)=O$

$A^3+8E=O \qquad \therefore A^3=-8E$

$\therefore A^{30}=(A^3)^{10}=(-8E)^{10}=8^{10}E$

따라서 $8^{10}E=kE$이므로

$k=8^{10}$ 답 ⑤

11 행렬과 그 연산

1386 $A+B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A(A+B)=A(2E)$, $\quad A^2+AB=2A$

$\therefore A^2=2A$ ($\because AB=O$)

$\therefore A^3=A^2A=2A^2=4A$

$A+B=2E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A+B)B=(2E)B$, $\quad AB+B^2=2B$

$\therefore B^2=2B$ ($\because AB=O$)

$\therefore B^3=B^2B=2B^2=4B$

$\therefore A^3+B^3=4A+4B=4(A+B)$

$=4(2E)=8E$

$=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

1387 $A^2-A=E$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A^2-A)B=EB$, $\quad A^2B-AB=B$

$A(3E)-3E=B$ ($\because AB=3E$)

$\therefore 3A-3E=B$

$\therefore B^2=(3A-3E)^2=9(A-E)^2$

$=9(A^2-2A+E)=9(E-A+E)$

$=9(-A+2E)=-9A+18E$ 답 ②

다른 풀이 $AB=3E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2B=3A$

이때 $A^2-A=E$에서 $A^2=A+E$이므로

$(A+E)B=3A$, $\quad AB+B=3A$

$3E+B=3A$ $\quad \therefore B=3A-3E$

1388 $A+B=O$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A(A+B)=O$, $\quad A^2+AB=O$

$A^2+E=O$ $\quad \therefore A^2=-E$

$A+B=O$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$(A+B)B=O$, $\quad AB+B^2=O$

$E+B^2=O$ $\quad \therefore B^2=-E$

$\therefore A^{2024}+B^{2025}=(A^2)^{1012}+(B^2)^{1012}B$

$=(-E)^{1012}+(-E)^{1012}B$

$=E+B=B+E$ 답 ⑤

1389 ㄱ. $A+B=E$에서 $B=-A+E$이므로

$AB=A(-A+E)=-A^2+A$,

$BA=(-A+E)A=-A^2+A$

$\therefore AB=BA$

ㄴ. $A-B=E$에서 $B=A-E$이므로

$B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E$

$\therefore A^2-B^2=2A-E=A+(A-E)$

$=A+B$

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 $AB=O$, $A\neq O$이지만 $B\neq O$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄴ. $A-B=E$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A-B)=AE$, $\quad A^2-AB=A$

$\therefore A^2=AB+A$

$A-B=E$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$(A-B)B=EB$, $\quad AB-B^2=B$

$\therefore B^2=AB-B$

$\therefore A^2-B^2=(AB+A)-(AB-B)=A+B$

1390 ② $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 $AB=O$이지만 $BA\neq O$이다.

④ $A^5=E$에서

$A^5=A^3A^2=EA^2=A^2$ $\quad \therefore A^2=E$

$A^3=E$에서

$A^3=A^2A=EA=A$ $\quad \therefore A=E$

⑤ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면

$A^2=E^2=E$,

$B^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

따라서 $A^2=B^2=E$이지만 $A\neq B$이고 $A\neq -B$이다.

답 ④

1391 $(A-B)(A+B)=A^2-2BA-B^2$에서

$A^2+AB-BA-B^2=A^2-2BA-B^2$

$\therefore AB=-BA$

ㄱ. $A^2B^2=A(AB)B=A(-BA)B$

$=-ABAB=-(AB)(AB)=-(AB)^2$

ㄴ. $A^2B^2=A(AB)B=A(-BA)B$

$=-ABAB=-(-BA)(-BA)$

$=-BABA=-B(AB)A$

$=-B(-BA)A=BBAA$

$=B^2A^2$

ㄷ. $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A^2-AB-BA+B^2$

$=A^2-AB+AB+B^2$

$=A^2+B^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

1392 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(2+2)A+\{2\cdot2-(-1)\cdot(-3)\}E=O$

$A^2-4A+E=O$

$\therefore A^2=4A-E$

위의 식의 양변에 행렬 A를 곱하면

$A^3=4A^2-A=4(4A-E)-A$

$=15A-4E$

$\therefore A^3-3A^2+4A-2E$
$=(15A-4E)-3(4A-E)+4A-2E$
$=7A-3E$ 답 ①

라쎈 특강

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$일 때, 케일리-해밀턴 정리를 이용하면

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$\rightarrow \underbrace{A^2}_{2\text{차식}}=\underbrace{(a+d)A-(ad-bc)E}_{1\text{차 이하의 식}}$

따라서 2×2 행렬 A에 대한 2차식을 1차 이하의 식으로 변형할 수 있다. 이와 같이 케일리-해밀턴 정리는 행렬 A에 대한 차수가 높은 식의 차수를 낮추는 데 활용할 수 있다.

1393 $A=\begin{pmatrix} a & -3 \\ b & 0 \end{pmatrix}\neq kE$ (k는 실수)이므로 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$a+0=2,\ 0+3b=3$
$\therefore a=2,\ b=1$
$\therefore a-b=1$ 답 1

1394 (i) $A\neq kE$ (k는 실수)일 때,
케일리-해밀턴 정리에 의하여
$a+d=-5$ ⋯ ❶
(ii) $A=kE$ (k는 실수)일 때,
$A=kE$를 $A^2+5A-6E=O$에 대입하면
$(kE)^2+5(kE)-6E=O$
$(k^2+5k-6)E=O,\quad (k+6)(k-1)E=O$
$\therefore k=-6$ 또는 $k=1$
따라서 $A=-6E$ 또는 $A=E$이므로
$A=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\therefore a+d=-12$ 또는 $a+d=2$ ⋯ ❷
(i), (ii)에서 $a+d$의 최솟값은 -12이다. ⋯ ❸
답 -12

채점 기준	비율
❶ $A\neq kE$일 때, $a+d$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $A=kE$일 때, $a+d$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+d$의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

참고 (ii)에서 $A=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$인 경우
$a+d\neq-5,\ ad-bc\neq-6$
임을 알 수 있다.
이와 같이 $A^2-pA+qE=O$ (p, q는 실수)를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 항상 $a+d=p$, $ad-bc=q$인 것은 아니다.
따라서 $A^2-pA+qE=O$를 만족시키는 행렬 A를 구할 때는 $A\neq kE$인 경우와 $A=kE$인 경우로 나누어 생각한다.

1395 **전략** 주어진 규칙에 따라 a_{ij}의 값을 구한다.

풀이 $a_{11}=3\cdot1-4\cdot1=-1$, $a_{12}=-a_{21}=-(3\cdot2-4\cdot1)=-2$,
$a_{13}=-a_{31}=-(3\cdot3-4\cdot1)=-5$, $a_{21}=3\cdot2-4\cdot1=2$,
$a_{22}=3\cdot2-4\cdot2=-2$, $a_{23}=-a_{32}=-(3\cdot3-4\cdot2)=-1$,
$a_{31}=3\cdot3-4\cdot1=5$, $a_{32}=3\cdot3-4\cdot2=1$,
$a_{33}=3\cdot3-4\cdot3=-3$

$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$-1-2-5+2-2-1+5+1-3=-6$ 답 ②

1396 **전략** 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배에 대한 성질을 이용한다.

풀이 $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

1397 **전략** 행렬 B를 두 행렬 A, E로 나타낸 후 행렬 $A-B$를 구한다.

풀이 $A+B=2E$에서 $B=2E-A$

$\therefore A-B=A-(2E-A)=2(A-E)$

$=2\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$=2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은
$0+4-4+4=4$ 답 ④

다른 풀이 $B=2E-A=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은
$0+4-4+4=4$

1398 **전략** 주어진 두 등식을 연립하여 X, Y를 A, B로 나타낸다.

풀이 $X+Y=3A$ ⋯⋯ ㉠
$X-2Y=-3B$ ⋯⋯ ㉡
㉠$-$㉡을 하면 $3Y=3A+3B$
$\therefore Y=A+B$