정답 및 풀이 > 65쪽

B단계 유형 Master

집중공략

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이 — 개념 06-1

방정식 $P(x)=0$은 다음과 같은 방법으로 푼다.
① 인수분해 공식을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하여 푼다.
② $P(\alpha)=0$을 만족시키는 α를 찾은 후 인수 정리와 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하여 푼다.

0746 대표문제

삼차방정식 $x^3-x^2-4x+4=0$의 가장 큰 근을 α, 가장 작은 근을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하시오.

0747 B⁻

다음 중 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-4=0$의 허근인 것은?

① $-1-\sqrt{3}i$ ② $-1+3i$ ③ $1-3i$
④ $1+\sqrt{3}i$ ⑤ $\sqrt{3}-i$

0748 B⁰ 서술형

사차방정식 $x^4-3x^3-x^2+5x+2=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

0749 B⁰

사차방정식 $x^4-4x+3=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

0750 B⁺

삼차방정식 $x^3+(k-2)x^2-4k=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=-3$이다. 이때 실수 k의 값을 구하시오.

0754 B+ 서술형

방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$의 정수인 해를 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

집중공략

유형 07 삼차방정식과 사차방정식의 활용 개념 06-1

삼차방정식과 사차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 미지수로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.
(iii) 방정식을 풀어 해를 구한다.

0769 대표문제

어떤 정육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 1 cm, 2 cm씩 늘이고 높이를 $\frac{1}{2}$배가 되도록 줄여서 직육면체를 만들었더니 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{3}{2}$배가 되었다. 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는?

① 2 cm ② 3 cm ③ 4 cm
④ 5 cm ⑤ 6 cm

0770 B⁰ 서술형

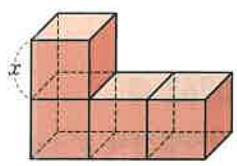
밑면의 반지름의 길이가 6 cm, 높이가 9 cm인 원뿔의 부피와 밑면의 반지름의 길이가 r cm, 높이가 $(r-3)$ cm인 원기둥의 부피가 같을 때, r의 값을 구하시오.

0771 B⁰

반지름의 길이가 각각 1 cm씩 차이 나는 3개의 구가 있다. 이 3개의 구의 부피를 합한 것과 부피가 같은 구를 새로 하나 만들 때, 새로 만든 구의 반지름의 길이는 처음 3개의 구 중 가장 큰 구의 반지름의 길이보다 1 cm만큼 더 길다. 이때 새로 만든 구의 반지름의 길이는?

① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm
④ 7 cm ⑤ 8 cm

0772 B⁰



오른쪽 그림은 한 모서리의 길이가 x인 정육면체 4개를 면끼리 맞붙여서 만든 입체도형이다. 이 입체도형의 겉넓이를 S, 부피를 V라 할 때, $S=V-50$이다. 이때 x의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

유형 13 $\begin{cases}(\text{일차방정식})\\(\text{이차방정식})\end{cases}$ 꼴의 연립이차방정식 개념 06-6

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 일차방정식에서 한 미지수를 다른 미지수에 대한 식으로 나타낸다.
(ii) (i)의 식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

0795 대표문제

연립방정식 $\begin{cases}x-y=1\\(x-1)^2+y^2=8\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $\alpha>0$, $\beta>0$)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

0796 B

연립방정식 $\begin{cases}y=x+1\\x^2+y^2=13\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

0797 B0

연립방정식 $\begin{cases}x-y=a\\x^2-xy+2y^2=b\end{cases}$의 한 근이 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$일 때, 나머지 한 근을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

0798 B+ 서술형

두 연립방정식 $\begin{cases}x+2y=1\\x^2+ay^2=7\end{cases}$, $\begin{cases}-4x+by=8\\x^2-3y^2=-2\end{cases}$의 공통인 해가 존재할 때, 자연수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

유형 14 $\begin{cases}(\text{이차방정식})\\(\text{이차방정식})\end{cases}$ 꼴의 연립이차방정식 개념 06-6

두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 인수분해가 되는 이차방정식에서 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식을 얻는다.
(ii) (i)의 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

0799 대표문제

연립방정식 $\begin{cases}x^2-y^2=0\\x^2+xy+2y^2=4\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하시오.

0800 B0

연립방정식 $\begin{cases}4x^2-y^2=0\\2x^2-xy+y^2=16\end{cases}$을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하시오.

0801 B0

연립방정식 $\begin{cases}x^2+xy-2y^2=0\\x^2+xy+y^2=3\end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 모두 구하시오.

0802 B0

연립방정식 $\begin{cases}x^2-y^2+x+y=0\\x^2-xy+2y^2=1\end{cases}$을 만족시키는 정수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4
④ 5 ⑤ 8

0738 $x+y=1$에서 $\quad y=1-x \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(1-x)^2=5, \quad 2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0, \quad (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 　　답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

0739 $2x+y=3$에서 $\quad y=3-2x \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $y^2-x^2=24$에 대입하면

$(3-2x)^2-x^2=24, \quad 3x^2-12x-15=0$

$x^2-4x-5=0, \quad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=5$

$x=5$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-7$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$ 　　답 $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-7 \end{cases}$

0740 $x-y=6$에서 $\quad y=x-6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+xy+y^2=12$에 대입하면

$x^2+x(x-6)+(x-6)^2=12, \quad 3x^2-18x+24=0$

$x^2-6x+8=0, \quad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-4$

$x=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad y=-2$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 　　답 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

0741 $x^2+xy-2y^2=0$에서

$(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$8y^2+y^2=9, \quad 9y^2=9, \quad y^2=1$

$\therefore y=\pm1, x=\mp2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2y^2+y^2=9, \quad 3y^2=9, \quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}, x=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 풀이 참조

0742 $x^2-2xy-3y^2=0$에서

$(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$y^2+y^2=18, \quad 2y^2=18, \quad y^2=9$

$\therefore y=\pm3, x=\mp3$ (복호동순)

(ii) $x=3y$를 $x^2-xy=18$에 대입하면

$9y^2-3y^2=18, \quad 6y^2=18, \quad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}, x=\pm3\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

답 풀이 참조

0743 $x^2-y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 $x^2+5xy-2y^2=24$에 대입하면

$y^2-5y^2-2y^2=24, \quad -6y^2=24, \quad y^2=-4$

$\therefore y=\pm2i, x=\mp2i$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $x^2+5xy-2y^2=24$에 대입하면

$y^2+5y^2-2y^2=24, \quad 4y^2=24, \quad y^2=6$

$\therefore y=\pm\sqrt{6}, x=\pm\sqrt{6}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2i \\ y=2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2i \\ y=-2i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

답 풀이 참조

0744 x, y는 이차방정식 $t^2-4t-12=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-6)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=6$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$ 　　답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$

0745 $x-xy+y=1$에서 $x+y=-2$이므로

$xy=-3$

즉 x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 　　답 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

0746 $x^3-x^2-4x+4=0$에서

$x^2(x-1)-4(x-1)=0, \quad (x-1)(x^2-4)=0$

$(x-1)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -2이므로

$\alpha=2, \beta=-2 \quad \therefore \alpha-\beta=4$ 　　답 4

0747 $P(x)=x^3+x^2+2x-4$라 하면

$P(1)=1+1+2-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 주어진 방정식의 허근인 것은 ①이다. 답 ①

0748 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라 하면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0$,

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$ ··· ❶

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$ ··· ❷

따라서 모든 실근의 합은

$-1+2+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 실근의 합을 구할 수 있다.	20 %

0749 $P(x)=x^4-4x+3$이라 하면

$P(1)=1-4+3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

— $Q(x)=x^3+x^2+x-3$으로 놓으면 $Q(1)=0$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

└ 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot3=-2<0$

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\cdot3\cdot(-2)=10$ 답 ⑤

0750 $P(x)=x^3+(k-2)x^2-4k$라 하면

$P(2)=8+4(k-2)-4k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & k-2 & 0 & -4k \\ & & 2 & 2k & 4k \\ \hline & 1 & k & 2k & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)(x^2+kx+2k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2+kx+2k)=0$

이때 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+kx+2k=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$

$\alpha+\beta=-3$이므로 $-k=-3$

$\therefore k=3$ 답 3

0751 $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+1)(X-3)=5$, $X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$ $\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+3x+2=0$에서

$(x+2)(x+1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=4$일 때, $x^2+3x-4=0$에서

$(x+4)(x-1)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|$

$=|-4|+|-2|+|-1|+|1|=8$ 답 ④

0752 $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+X-12=0$, $(X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$일 때, $x^2-2x+4=0$에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0753 $x^2+4x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)^2-2X-19=0$, $X^2+2X-15=0$

$(X+5)(X-3)=0$ $\therefore X=-5$ 또는 $X=3$

(i) $X=-5$일 때,

$x^2+4x+5=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

즉 방정식 $x^2+4x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=3$일 때,

$x^2+4x-3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-1\cdot(-3)=7>0$

즉 방정식 $x^2+4x-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+4x-3=0$의 근이고, 두 허근은 방정식 $x^2+4x+5=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-4$, $b=5$

$\therefore a-b=-9$ 답 -9

0754 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$에서

$\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15=0$ 상수항의 합이 같아지도록 짝을 짓는다.

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+15=0$

$x^2+6x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X(X+8)+15=0$ ⋯ ❶

$X^2+8X+15=0,\quad (X+5)(X+3)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=-3$

(i) $X=-5$일 때, $x^2+6x+5=0$에서

$(x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

(ii) $X=-3$일 때, $x^2+6x+3=0$에서

$x=-3\pm\sqrt{6}$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 α, β의 값은 -5, -1이므로

$\alpha^2+\beta^2=(-5)^2+(-1)^2=26$ ⋯ ❸

답 26

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 한 문자에 대한 이차방정식으로 변형할 수 있다.	40 %
❷ 방정식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0755 $x^4-14x^2+25=0$에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0,\quad (x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

따라서 주어진 방정식의 양수인 근은 $-1+\sqrt{6}$, $1+\sqrt{6}$이므로 구하는 합은

$(-1+\sqrt{6})+(1+\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

답 ⑤

0756 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+3X-4=0,\quad (X+4)(X-1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

즉 $x^2=-4$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm 2i$ 또는 $x=\pm 1$

따라서 주어진 방정식의 실근은 1, -1이므로 모든 실근의 곱은

$1\cdot(-1)=-1$

답 -1

0757 $x^4-x^2+16=0$에서

$(x^4+8x^2+16)-9x^2=0,\quad (x^2+4)^2-(3x)^2=0$

$\therefore (x^2+3x+4)(x^2-3x+4)=0$ ⋯ ❶

방정식 $x^2+3x+4=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=4,\ \gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=4$ ⋯ ❷

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(-3)^2-2\cdot 4+3^2-2\cdot 4$

$=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $x^2+3x+4=0$, $x^2-3x+4=0$에서 근과 계수의 관계를 이용할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0758 방정식 $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+5x+6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X+4=0,\quad (X+4)(X+1)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-4$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-4$에서

$x^2+4x+1=0\quad \therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=2^2-1=3>0$ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-1$에서

$x^2+x+1=0\quad \therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})=-4$

답 ③

0759 방정식 $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X=0,\quad X(X-4)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=4$

(i) $X=0$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=0$에서

$x^2+1=0,\quad x^2=-1\quad \therefore x=\pm i$

(ii) $X=4$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=4$에서

$x^2-4x+1=0\quad \therefore x=2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근의 합은

$a=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

두 허근의 곱은 $\quad b=i\cdot(-i)=1$

$\therefore a+b=5$

답 5

0760 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0,\quad x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0,\quad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$ ⋯ ❶

0766 $x^3+x^2+kx+k=0$에서

$x^2(x+1)+k(x+1)=0$

$\therefore (x^2+k)(x+1)=0$ ··· ❶

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot1\cdot k<0 \quad \therefore k>0$ ··· ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0767 $P(x)=x^3-(1+3k)x+3k$라 하면

$P(1)=1-(1+3k)+3k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -(1+3k) & 3k \\ & & 1 & 1 & -3k \\ \hline & 1 & 1 & -3k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-3k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+x-3k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$1+1-3k=0 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$

(ii) 방정식 $x^2+x-3k=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-3k)=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은

$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{12}$

답 ④

0768 방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 $x=2$를 근으로 가질 때,

$4-8k+3k+1=0 \quad \therefore k=1$

그런데 $k=1$이면 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+4)=0$, 즉 $(x-2)^3=0$

이므로 서로 같은 세 실근을 갖는다.

$\therefore k\neq1$

(ii) 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 중근을 가질 때,

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(3k+1)=0$

$4k^2-3k-1=0, \quad (4k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=1$

(i), (ii)에서 $\quad k=-\frac{1}{4}$

답 ②

라쎈 특강

삼차방정식 $(x-2)(x^2-4kx+3k+1)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 2와 2가 아닌 실근을 갖는 경우와 2가 아닌 중근을 갖는 경우의 두 가지가 있다. 그런데 (i)에서 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$이 2를 근으로 가지면 다른 한 근도 2이므로 주어진 삼차방정식은 서로 같은 세 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $x^2-4kx+3k+1=0$은 2가 아닌 중근을 가져야 한다.

0769 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+1)(x+2)\cdot\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x^3$

$2x^3-3x^2-2x=0, \quad x(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=2$ 길이는 양수이어야 한다.

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다.

답 ①

0770 $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot6^2\cdot9=\pi\cdot r^2\cdot(r-3)$이므로

$r^3-3r^2-108=0$ ··· ❶

$P(r)=r^3-3r^2-108$이라 하면

$P(6)=216-108-108=0$

조립제법을 이용하여 $P(r)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -3 & 0 & -108 \\ & & 6 & 18 & 108 \\ \hline & 1 & 3 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(r)=(r-6)(r^2+3r+18)$

따라서 방정식은

$(r-6)(r^2+3r+18)=0$

$\therefore r=6 \ (\because r^2+3r+18>0)$ ··· ❷

$r^2+3r+18=\left(r+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{63}{4}>0$

답 6

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ r의 값을 구할 수 있다.	60 %

0771 처음 3개의 구의 반지름의 길이를 각각 $(x-1)$ cm, x cm, $(x+1)$ cm라 하면 새로 만든 구의 반지름의 길이는 $(x+2)$ cm이므로

$\frac{4}{3}\pi(x-1)^3+\frac{4}{3}\pi x^3+\frac{4}{3}\pi(x+1)^3=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3$

$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3$

$\therefore x^3-3x^2-3x-4=0$

$P(x)=x^3-3x^2-3x-4$라 하면

$P(4)=64-48-12-4=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -3 & -3 & -4 \\ & & 4 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-4)(x^2+x+1)$

즉 방정식은

$(x-4)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=4 \ (\because x^2+x+1>0)$ $\quad x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

따라서 새로 만든 구의 반지름의 길이는

$4+2=6\ (\text{cm})$ 답 ③

0772 $S=18x^2$, $V=4x^3$이므로 $S=V-50$에서

$18x^2=4x^3-50, \qquad 2x^3-9x^2-25=0$

$P(x)=2x^3-9x^2-25$라 하면

$P(5)=250-225-25=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 2 & -9 & 0 & -25 \\ & & 10 & 5 & 25 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-5)(2x^2+x+5)$

따라서 방정식은

$(x-5)(2x^2+x+5)=0$

$\therefore x=5\ (\because \underline{2x^2+x+5>0})$ 답 ④

$2x^2+x+5=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

0773 삼차방정식 $x^3+2x^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5,\ \alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\cdot(-5)=14$ 답 ④

0774 삼차방정식 $x^3+3x-5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=5$ ··· ❶

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-0+3-5=-1$ ··· ❷

답 -1

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	50 %

0775 삼차방정식 $x^3-x^2+4x-6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=6$

$\therefore \dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{3}{\beta}+\dfrac{3}{\gamma}=\dfrac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$

$=\dfrac{3\cdot4}{6}=2$ 답 2

0776 $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=2$에서

$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$ ······ ㉠

이때 삼차방정식 $x^3-ax^2+8x+5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=a,\ \alpha\beta\gamma=-5$

따라서 ㉠에서 $\dfrac{a}{-5}=2$이므로

$a=-10$ 답 ①

0777 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β, 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-4=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 이차방정식과 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha+\beta+\gamma=3$

이므로 $\quad \gamma=1$

또 $\alpha\beta=a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=4$이므로

$\underline{a+2=b},\ a=4$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$에서 $a+\beta+\alpha=b \quad \therefore a+2=b$

$\therefore a=4,\ b=6$

$\therefore a+b=10$ 답 10

다른 풀이 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근이 삼차방정식 $x^3-3x^2+bx-4=0$의 근이므로 x^3-3x^2+bx-4는 x^2-2x+a를 인수로 갖는다. 즉

$x^3-3x^2+bx-4=(x-c)(x^2-2x+a)$

$=x^3-(2+c)x^2+(a+2c)x-ac$ (c는 상수)

라 하면 이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3=2+c,\ b=a+2c,\ 4=ac$

$\therefore a=4,\ b=6,\ c=1$

$\therefore a+b=10$

0778 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, $3\alpha\ (\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=12, \qquad 6\alpha=12$

$\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$2\cdot4+4\cdot6+6\cdot2=a,\ 2\cdot4\cdot6=-b$

$\therefore a=44,\ b=-48$

$\therefore a+b=-4$ 답 ④

0779 주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=3, \qquad 3\alpha=3$

$\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 0, 1, 2이므로 ··· ❶

$0\cdot1+1\cdot2+2\cdot0=a,\ 0\cdot1\cdot2=-b$

$\therefore a=2,\ b=0$ ··· ❷

$\therefore a-b=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식의 세 근을 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0780 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, $\alpha+1$, β라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)+\beta=1$이므로 $\qquad \beta=-2\alpha$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)\beta+\beta\alpha=-10$이므로

$\alpha^2+2\alpha\beta+\alpha+\beta=-10$ ······ ㉡

$\alpha(\alpha+1)\beta=-k$ ······ ㉢

0795 $\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-1)^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-1$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2(x-1)^2=8,\qquad (x-1)^2=4$

$x-1=\pm2\qquad \therefore x=3$ 또는 $x=-1$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=3,\ y=2$ 또는 $x=-1,\ y=-2$

따라서 $\underbrace{\alpha=3,\ \beta=2}_{\alpha>0,\ \beta>0}$이므로

$\alpha+\beta=5$ 답 ③

0796 $\begin{cases} y=x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=13,\qquad x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0\qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=2$

이것을 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-3,\ y=-2$ 또는 $x=2,\ y=3$

따라서 $\alpha=-3,\ \beta=-2$ 또는 $\alpha=2,\ \beta=3$이므로

$\alpha\beta=6$ 답 ②

0797 $x=-1,\ y=1$을 $\begin{cases} x-y=a \\ x^2-xy+2y^2=b \end{cases}$에 대입하면

$a=-2,\ b=4$

$\therefore \begin{cases} x-y=-2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+2$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+2)+2(x+2)^2=4,\qquad x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0\qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=0$

따라서 나머지 한 근은

$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

0798 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $x=1-2y$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(1-2y)^2-3y^2=-2,\qquad y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0\qquad \therefore y=1$ 또는 $y=3$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-5,\ y=3$ ··· ❶

(i) $x=-1,\ y=1$을 $x^2+ay^2=7,\ -4x+by=8$에 대입하면

$a=6,\ b=4$

(ii) $x=-5,\ y=3$을 $x^2+ay^2=7,\ -4x+by=8$에 대입하면

$a=-2,\ b=-4$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로

$a=6,\ b=4$ ··· ❷

$\therefore ab=24$ ··· ❸

답 24

채점 기준	비율
❶ 두 연립방정식의 공통인 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	20 %

0799 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+2y^2=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=4,\qquad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=4,\qquad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 값은 $\alpha=-1,\ \beta=-1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$-1+(-1)=-2$ 답 -2

0800 $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-xy+y^2=16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2+2x^2+4x^2=16,\qquad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\mp2\sqrt{2}$ (복호동순)

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$2x^2-2x^2+4x^2=16,\qquad x^2=4$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm4$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}),\ (2,\ 4),\ (-2,\ -4)$

답 $(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}),\ (2,\ 4),\ (-2,\ -4)$

0801 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-2y^2+y^2=3,\qquad y^2=1$

$\therefore y=\pm1,\ x=\mp2$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2+y^2=3,\qquad y^2=1$

$\therefore y=\pm1,\ x=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 -2, 1이다. 답 -2, 1

0802 $\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad (x+y)(x-y)+(x+y)=0$

$(x+y)(x-y+1)=0 \quad \therefore y=-x$ 또는 $y=x+1$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=1, \quad x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2},\ y=\mp\frac{1}{2}$ (복호동순)

(ii) $y=x+1$을 ㉡에 대입하면

$x^2-x(x+1)+2(x+1)^2=1$

$2x^2+3x+1=0, \quad (x+1)(2x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로

$x=-1,\ y=0$

$\therefore x^2+y^2=1$

답 ①

0803 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=34 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-30=34, \quad u^2=64$

$\therefore u=\pm 8$

(i) $u=8$, $v=15$, 즉 $x+y=8$, $xy=15$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0 \quad \therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=-8$, $v=15$, 즉 $x+y=-8$, $xy=15$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+8t+15=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+5)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=-5$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-5, -3), (-3, -5), (3, 5), (5, 3)$

답 $(-5, -3), (-3, -5), (3, 5), (5, 3)$

0804 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-4v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2-2xy+y^2=(x+y)^2-4xy$

㉠에서 $\quad v=u+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$u^2-4u-5=0, \quad (u+1)(u-5)=0$

$\therefore u=-1$ 또는 $u=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-1,\ v=0$ 또는 $u=5,\ v=6$

(i) $u=-1$, $v=0$, 즉 $x+y=-1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+t=0$의 두 근이므로

$t(t+1)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=-1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(ii) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로

$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 x^2-y^2의 값은 $x=3$, $y=2$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$3^2-2^2=5$

답 ⑤

0805 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad v=u^2-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0, \quad u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=0,\ v=-1$ 또는 $u=1,\ v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이므로

$(t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이므로

$t(t-1)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 $2x+y$의 값은 $x=-1$, $y=1$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$2\cdot(-1)+1=-1$

답 ③

0806 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=-x+k$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+(-x+k)^2=10$

$\therefore 2x^2-2kx+k^2-10=0$

이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-10)=0$

$k^2-2k^2+20=0, \quad k^2=20$

$\therefore k=\pm 2\sqrt{5}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$2\sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})=-20$

답 ②