집중공략

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 개념 05-2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0636 대표문제

x에 대한 이차함수 $y=x^2+2kx+k^2-3k+9$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0637 B+

이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프가 x축과 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오.

0638 B0

이차함수 $y=x^2+kx+k-1$의 그래프가 x축에 접할 때, 접점의 x좌표는? (단, k는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

0639 B0 서술형

이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나고, 이차함수 $y=-2x^2+x+k-1$의 그래프는 x축과 만나지 않도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

0640 B+

x에 대한 이차함수 $y=x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -8 ② -4 ③ -2
④ 2 ⑤ 4

집중공략

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 개념 05-3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 판별식을 D라 할 때
① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0646 대표문제

이차함수 $y=x^2+kx+3$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오.

0647 B

이차함수 $y=2x^2+(m-3)x+m-1$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 m의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

0648 B0

이차함수 $y=kx^2+2kx+1$의 그래프와 직선 $y=x-k$가 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k>a$이다. 이때 a의 값을 구하시오.

0649 B0 서술형

x에 대한 이차함수 $y=x^2-2kx+k^2$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

0650 B0

이차함수 $y=x^2+kx+k$의 그래프가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 실수 k의 값은?

(가) x축에 접한다.
(나) 직선 $y=(k+1)x$와 서로 다른 두 점에서 만난다.

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

유형 06 이차함수의 최대, 최소 개념 05-4

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$ ➡ $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$ ➡ $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

0655 대표문제

이차함수 $y=-3x^2+18x+k-7$의 최댓값이 6일 때, 상수 k의 값은?

① -14 ② -7 ③ 3
④ 7 ⑤ 14

0656 서술형

이차함수 $y=x^2+ax-8$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지날 때, 이 이차함수의 최솟값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

0657

이차함수 $y=-2x^2-ax+3$이 $x=-1$에서 최댓값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오.

집중공략

유형 07 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소 개념 05-4

$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은
① $\alpha \le p \le \beta$일 때
→ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
→ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0660 대표문제

$1 \le x \le 4$에서 이차함수 $f(x)=2x^2-8x+k$의 최댓값이 4일 때, 상수 k의 값은?

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

0661 B

$2 \le x \le 6$에서 이차함수 $f(x)=x^2-6x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① -18　② -9　③ 3
④ 9　⑤ 18

0662 B⁰ 서술형

$-2 \le x \le 2$에서 이차함수 $f(x)=-x^2-2x+a$의 최솟값이 -9일 때, $f(x)$의 최댓값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

0663 B⁰

$0 \le x \le 4$에서 이차함수 $y=ax^2-2ax+b$의 최댓값이 7, 최솟값이 -2일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?
(단, $a>0$)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

0664 B⁺

$-1 \le x \le a$에서 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 최솟값이 -2일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

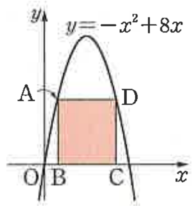
정답 및 풀이 > 58쪽

유형 10 이차함수의 최대, 최소의 활용 개념 05-4

이차함수의 최대, 최소의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 변수 x를 정하고, x의 값의 범위를 구한다.
(ii) 주어진 상황을 x에 대한 이차식으로 나타낸다.
(iii) 이차식을 완전제곱식을 포함한 식으로 변형한 후 (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0673 대표문제

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD는 한 변이 x축 위에 있고 두 꼭짓점이 이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프 위에 있다. 이때 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은?



(단, 점 D는 제1사분면 위의 점이다.)

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

0674 B0

지면에서 초속 40 m로 똑바로 위로 던져 올린 공의 t초 후 지면으로부터의 높이 y m는 $y=-5t^2+40t$라 한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때, 지면으로부터의 높이는 몇 m인지 구하시오.

0675 B0

길이가 28 cm인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?

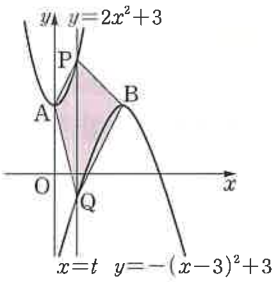
① 6 cm ② 7 cm ③ 8 cm
④ 9 cm ⑤ 10 cm

0676 B0

어느 제과점에서 쿠키 한 개의 가격이 1000원일 때, 하루에 200개씩 팔린다고 한다. 이 쿠키 한 개의 가격을 x원 내리면 하루 판매량이 x개 증가한다고 할 때, 쿠키의 하루 판매액이 최대가 되게 하려면 쿠키 한 개의 가격을 얼마로 정해야 하는지 구하시오.

0677 B0 서술형

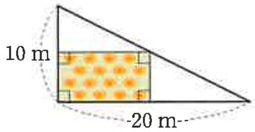
오른쪽 그림과 같이 직선 $x=t$가 두 이차함수 $y=2x^2+3$, $y=-(x-3)^2+3$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A(0, 3), B(3, 3)에 대하여 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값을 구하시오.



(단, $0<t<3$)

0678 B+

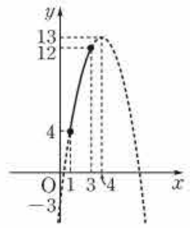
오른쪽 그림과 같이 밑변의 길이가 20 m, 높이가 10 m인 직각삼각형 모양의 땅에 직사각형 모양의 꽃밭을 만들려고 한다. 꽃밭의 최대 넓이는?



① 40 m^2 ② 45 m^2 ③ 50 m^2
④ 55 m^2 ⑤ 60 m^2

0629 $f(x)=-x^2+8x-3$

$=-(x-4)^2+13$



$1\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 꼭짓점의 x좌표가 4이므로 이 범위에 속하지 않는다.

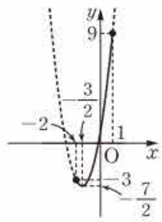
$f(1)=4,\ f(3)=12$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 12, 최솟값은 4이다.

답 최댓값: 12, 최솟값: 4

0630 $f(x)=2x^2+6x+1$

$=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$



$-2\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 꼭짓점의 x좌표가 $-\dfrac{3}{2}$이므로 이 범위에 속한다.

$f(-2)=-3,\ f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{7}{2},\ f(1)=9$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 $-\dfrac{7}{2}$이다.

답 최댓값: 9, 최솟값: $-\dfrac{7}{2}$

0631 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\dfrac{a}{2},\ 1\cdot 3=\dfrac{b}{2}$

$\therefore a=-8,\ b=6$

$\therefore b-a=14$

답 14

0632 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 합이 3, 곱이 -4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3=-a,\ -4=b$

$\therefore a=-3,\ b=-4$

$\therefore ab=12$

답 ④

0633 이차방정식 $3x^2-9x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{-9}{3}=3,\ \alpha\beta=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)\cdot 3$

$=39$

답 ⑤

0634 이차방정식 $x^2-ax+4a=0$의 두 근이 2, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2+b=a,\ 2\cdot b=4a$

$\therefore a-b=2,\ 2a-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-4$ ··· ❶

이차함수 $y=x^2-bx+6a$, 즉 $y=x^2+4x-12$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+4x-12=0$의 근이므로

$(x+6)(x-2)=0\qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=2$ ··· ❷

따라서 두 점 $(-6,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 사이의 거리는

$2-(-6)=8$ ··· ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 이차함수 $y=x^2-bx+6a$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	10 %

0635 이차함수 $y=x^2+kx-2$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=-2$ ······ ㉠

이때 두 교점 사이의 거리가 3이므로

$|\alpha-\beta|=3$

양변을 제곱하면 $\quad(\alpha-\beta)^2=9$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad k^2+8=9,\qquad k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

다른 풀이 이차함수 $y=x^2+kx-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, $\alpha+3$이라 하면 이차방정식 $x^2+kx-2=0$의 두 근이 α, $\alpha+3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=-k$ ······ ㉠

$\alpha(\alpha+3)=-2$ ······ ㉡

㉡에서 $\quad\alpha^2+3\alpha+2=0,\qquad(\alpha+1)(\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-2$ ······ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하여 풀면 $\quad k=-1$ 또는 $k=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

0636 이차방정식 $x^2+2kx+k^2-3k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(k^2-3k+9)>0$

$3k-9>0\qquad\therefore k>3$

따라서 정수 k의 최솟값은 4이다.

답 ④

0637 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-k\ge 0$ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만난다. ⭘ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\ge 0$

$\therefore k\le 4$

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

0638 이차방정식 $x^2+kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k-1)=0$

$k^2-4k+4=0,\qquad(k-2)^2=0$

$\therefore k=2$

따라서 $x^2+2x+1=0$에서 $\qquad(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

즉 접점의 x좌표는 -1이다.

답 ②

0639 이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(-k)^2-(k+6)=0$

$k^2-k-6=0,\quad (k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 이차방정식 $-2x^2+x+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot(k-1)<0$

$8k-7<0\quad \therefore k<\frac{7}{8}$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad k=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2-2kx+k+6$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차함수 $y=-2x^2+x+k-1$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0640 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2+4k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2+4k+b)=0$

$a^2-2ak+k^2-k^2-4k-b=0$

$\therefore (-2a-4)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a-4=0,\ a^2-b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=4$

$\therefore ab=-8$

답 ①

0641 이차방정식 $2x^2+ax+3=2x+b$, 즉 $2x^2+(a-2)x+3-b=0$의 두 근이 -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-\frac{a-2}{2},\ -1\cdot 2=\frac{3-b}{2}$

$a-2=-2,\ 3-b=-4\quad \therefore a=0,\ b=7$

$\therefore b-a=7$

답 ①

0642 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 두 교점의 x좌표가 -2, 2이므로 이차방정식 $-x^2+ax+b=x+2$, 즉 $x^2+(1-a)x+2-b=0$의 두 근이 -2, 2이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+2=-(1-a),\ -2\cdot 2=2-b$

$\therefore a=1,\ b=6$

$\therefore ab=6$

답 6

0643 이차방정식 $2x^2-x-1=3x+k$, 즉 $2x^2-4x-1-k=0$의 한 근이 3이므로

$18-12-1-k=0\quad \therefore k=5$ ⋯ ❶

$2x^2-4x-6=0$에서 $\quad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0\quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$ ⋯ ❷

$x=-1$을 $y=3x+5$에 대입하면 $\quad y=2$

따라서 점 B의 좌표는 $\quad (-1,\ 2)$ ⋯ ❸

답 $(-1,\ 2)$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

0644 이차방정식 $x^2-4x+5=ax+b$, 즉 $x^2-(4+a)x+5-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=4+a,$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=5-b$

이므로

$6=4+a,\ 1=5-b\quad \therefore a=2,\ b=4$

$\therefore a+b=6$

답 ③

0645 이차방정식 $x^2-ax+3=2x-4$, 즉 $x^2-(a+2)x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+2,\ \alpha\beta=7$ …… ㉠

한편 $|\alpha-\beta|=6$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=36$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad (a+2)^2-4\cdot 7=36$

$a^2+4a-60=0,\quad (a+10)(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 6

0646 이차방정식 $x^2+kx+3=-x+2$, 즉 $x^2+(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4=0$

$k^2+2k-3=0,\quad (k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

0647 이차방정식 $2x^2+(m-3)x+m-1=mx$, 즉 $2x^2-3x+m-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(m-1)>0$

$17-8m>0\quad \therefore m<\frac{17}{8}$

따라서 정수 m의 최댓값은 2이다.

답 ②

0648 이차방정식 $kx^2+2kx+1=x-k$, 즉 $kx^2+(2k-1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k(k+1)<0$

$-8k+1<0\quad \therefore k>\frac{1}{8}$

$\therefore a=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

0649 이차방정식 $x^2-2kx+k^2=2x+1$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k^2-1)\ge 0$ ⋯ ❶

05 이차방정식과 이차함수

$2k+2\geq 0 \qquad \therefore k\geq -1$ ⋯ ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 -1이다. ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 그래프와 직선이 적어도 한 점에서 만나기 위한 조건을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0650 조건 (가)에서 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4k=0, \qquad k(k-4)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=4$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+kx+k=(k+1)x$, 즉 $x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4k>0, \qquad 1-4k>0$

$\therefore k<\frac{1}{4}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=0$

답 ③

0651 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+k$라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-4x+3=2x+k$, 즉 $x^2-6x+3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(3-k)=0$

$6+k=0 \qquad \therefore k=-6$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=2x-6$

답 $y=2x-6$

0652 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-3x+5$에 평행하므로

$a=-3$ 서로 평행한 두 직선의 기울기는 같다.

직선 $y=-3x+b$가 이차함수 $y=x^2-7x+2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-7x+2=-3x+b$, 즉 $x^2-4x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2-b)=0$

$2+b=0 \qquad \therefore b=-2$

$\therefore ab=6$

답 ④

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0653 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+2$라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=2x^2-x+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-x+1=a(x-1)+2$, 즉 $2x^2-(1+a)x+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1+a)\}^2-4\cdot 2\cdot(a-1)=0$

$a^2-6a+9=0, \qquad (a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

따라서 직선의 방정식은 $y=3(x-1)+2=3x-1$이므로 구하는 y절편은 -1이다.

답 -1

0654 점 $(2, 4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-2)+4$라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+7x-4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+7x-4=a(x-2)+4$, 즉 $2x^2+(a-7)x-2a+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-7)^2-4\cdot 2\cdot(-2a+8)=0$

$a^2+2a-15=0, \qquad (a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=3$

따라서 두 직선의 기울기는 -5, 3이므로 구하는 곱은

$-5\cdot 3=-15$

답 ②

0655 $y=-3x^2+18x+k-7=-3(x-3)^2+k+20$
이므로 $x=3$에서 최댓값 $k+20$을 갖는다.
즉 $k+20=6$이므로

$k=-14$

답 ①

0656 $y=x^2+ax-8$의 그래프가 점 $(1, -3)$을 지나므로

$-3=1+a-8 \qquad \therefore a=4$ ⋯ ❶

따라서 $y=x^2+4x-8=(x+2)^2-12$이므로 $x=-2$에서 최솟값 -12를 갖는다. ⋯ ❷

답 -12

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

0657 이차함수 $y=-2x^2-ax+3$이 $x=-1$에서 최댓값 b를 가지므로

$$\begin{aligned}-2x^2-ax+3&=-2(x+1)^2+b\\&=-2x^2-4x-2+b\end{aligned}$$

따라서 $-a=-4$, $3=-2+b$이므로

$a=4$, $b=5$

$\therefore a+b=9$

답 9

라쎈 특강

이차함수가 $x=p$에서 최댓값 또는 최솟값을 가지면 이 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이고 꼭짓점의 x좌표는 p이다.
따라서 $x=p$에서 최댓값 또는 최솟값 q를 갖는 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q$이다.

0658 $y=-2x^2+8x+6+2k=-2(x-2)^2+14+2k$
이므로 $x=2$에서 최댓값 $14+2k$를 갖는다.
또

$$\begin{aligned}y&=(x+3)(x-5)-k\\&=x^2-2x-15-k\\&=(x-1)^2-16-k\end{aligned}$$

이므로 $x=1$에서 최솟값 $-16-k$를 갖는다.
따라서 $14+2k=-16-k$이므로 $\qquad 3k=-30$

$\therefore k=-10$

답 -10

0659 $y=-x^2-2ax+6a-4=-(x+a)^2+a^2+6a-4$
이므로 $x=-a$에서 최댓값 a^2+6a-4를 갖는다.

따라서

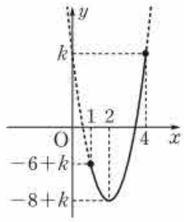
$m=a^2+6a-4=(a+3)^2-13$

이므로 m은 $a=-3$에서 최솟값 -13을 갖는다. 답 ③

0660 $f(x)=2x^2-8x+k$

$=2(x-2)^2-8+k$

이므로 $1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



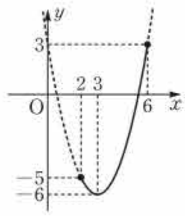
따라서 $x=4$에서 최댓값 k를 가지므로

$k=4$ 답 ②

0661 $f(x)=x^2-6x+3$

$=(x-3)^2-6$

이므로 $2\le x\le 6$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=6$에서 최댓값 3을 갖고, $x=3$에서 최솟값 -6을 가지므로

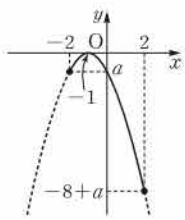
$M=3,\ m=-6$

$\therefore Mm=-18$ 답 ①

0662 $f(x)=-x^2-2x+a$

$=-(x+1)^2+1+a$

이므로 $-2\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$에서 최솟값 $-8+a$를 가지므로

$-8+a=-9$

$\therefore a=-1$ ··· ❶

즉 $f(x)=-(x+1)^2$이므로 $x=-1$에서 최댓값 0을 갖는다. ··· ❷

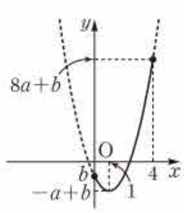
답 0

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

0663 $y=ax^2-2ax+b$

$=a(x-1)^2-a+b$

이므로 $0\le x\le 4$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=4$에서 최댓값 $8a+b$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-a+b$를 가지므로

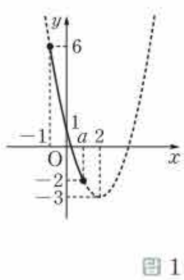
$8a+b=7,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

$\therefore a+b=0$ 답 ③

0664 $f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$이라 하면 $f(2)=-3$이므로

$-1<\underline{a<2}$ $a\ge 2$이면 최솟값이 -3이다.



따라서 $x=a$에서 최솟값 -2를 가지므로

$a^2-4a+1=-2,\quad a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1\ (\because -1<a<2)$ 답 1

0665 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-1\ge -1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t-3=(t+2)^2-7\ (t\ge -1)$

따라서 $t=-1$에서 최솟값 -6을 갖는다. 답 -6

0666 $2x-1=t$로 놓으면 $x=1$일 때 $t=1$, $x=4$일 때 $t=7$이므로 $1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1\ (1\le t\le 7)$

따라서 $t=2$에서 최솟값 1, $t=7$에서 최댓값 26을 가지므로 구하는 합은

$26+1=27$ 답 ④

0667 $x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-2\ge -2$ ··· ❶

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+6(\underline{t+1})+k$ ··· ❷ $x^2+2x-1=t$이므로 $x^2+2x=t+1$

$=-2t^2+6t+6+k$

$=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{2}+k\ (t\ge -2)$

따라서 $t=\frac{3}{2}$에서 최댓값 $\frac{21}{2}+k$를 가지므로

$\frac{21}{2}+k=10 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$ ··· ❸

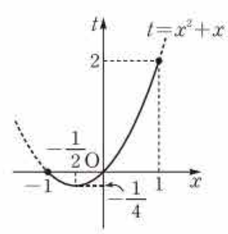
답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ $x^2+2x-1=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ y를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0668 $x^2+x=t$로 놓으면

$t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$-1\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서



$-\frac{1}{4}\le t\le 2$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\le t\le 2\right)$

따라서 $t=2$에서 최댓값 3, $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{3}{4}$을 가지므로

$M=3,\ m=\frac{3}{4}$

$\therefore Mm=\frac{9}{4}$ 답 ④

0669 $2x-y=8$에서 $y=2x-8$

$\therefore xy=x(2x-8)=2x^2-8x=2(x-2)^2-8$

이때 $0\le x\le 5$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 10, $x=2$일 때 최솟값은 -8이다.

따라서 구하는 합은 $10+(-8)=2$ 답 ①

0670 $x+y=2$에서 $\quad y=2-x$

$\therefore \underline{2x+y^2}=2x+(2-x)^2$ — $x=2-y$를 대입하여 $2(2-y)+y^2$에서 최솟값을 구해도 된다.

$\quad =x^2-2x+4$

$\quad =(x-1)^2+3$

따라서 $x=1$일 때 최솟값은 3이다. 답 3

0671 점 P(a, b)가 직선 $3x+y-4=0$ 위의 점이므로

$3a+b-4=0 \quad \therefore b=4-3a$

$\therefore a^2+b^2=a^2+(4-3a)^2$

$\quad =10a^2-24a+16$

$\quad =10\left(a-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{8}{5}$

따라서 $a=\frac{6}{5}$일 때 최솟값은 $\frac{8}{5}$이다. 답 $\frac{8}{5}$

0672 $x-y^2=1$에서 $\quad y^2=x-1$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

y가 실수이므로 $\quad y^2=x-1\geq 0 \quad \therefore x\geq 1$

㉠을 x^2+4y^2에 대입하면

$x^2+4(x-1)=x^2+4x-4$

$\quad =(x+2)^2-8$

이때 $x\geq 1$이므로 $x=1$일 때 최솟값은 1이다. 답 ④

0673 $y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$이므로 이 이차함수의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $(a, -a^2+8a)$ $(\underline{0<a<4})$라 하면 — 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 4이므로 $a<4$

D$(8-a, -a^2+8a)$

$\therefore \overline{AD}=8-2a$, $\overline{AB}=-a^2+8a$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(8-2a-a^2+8a)=-2a^2+12a+16$

$\quad =-2(a-3)^2+34$

이때 $0<a<4$이므로 $a=3$일 때 최댓값은 34이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

답 ③

다른 풀이 점 C의 좌표를 $(b, 0)$ $(4<b<8)$이라 하면

B$(8-b, 0)$, D$(b, -b^2+8b)$

$\therefore \overline{BC}=2b-8$, $\overline{CD}=-b^2+8b$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(2b-8-b^2+8b)=-2b^2+20b-16$

$\quad =-2(b-5)^2+34$

이때 $4<b<8$이므로 $b=5$일 때 최댓값은 34이다.

0674 $y=-5t^2+40t$

$\quad =-5(t-4)^2+80$

따라서 $t=4$일 때 최댓값은 80이므로 구하는 높이는 80 m이다.

답 80 m

0675 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm라 하면 호의 길이는 $(28-2x)$ cm

이때 반지름의 길이와 호의 길이는 양수이므로

$0<x<14$ — $x>0$, $28-2x>0$이므로 $0<x<14$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}x(28-2x)=-x^2+14x$

$\quad =-(x-7)^2+49$

이때 $0<x<14$이므로 $x=7$일 때 최댓값은 49이다.

따라서 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는 7 cm이다.

답 ②

참고 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$

0676 쿠키 한 개의 가격이 $(1000-x)$원일 때 하루 판매량은 $(200+x)$개이므로 하루 판매액은

$(1000-x)(200+x)=-x^2+800x+200000$

$\quad =-(x-400)^2+360000$

따라서 $x=400$일 때 하루 판매액이 최대이므로 이때의 쿠키 한 개의 가격은

$1000-400=600$(원) 답 600원

0677 두 점 P, Q는 각각 P$(t, 2t^2+3)$, Q$(t, -(t-3)^2+3)$이므로

$\overline{PQ}=2t^2+3-\{-(t-3)^2+3\}$

$\quad =2t^2+3-(-t^2+6t-6)$

$\quad =3t^2-6t+9$ ··· ❶

한편 $\overline{AB}=3$이고 $\overline{AB}\perp\overline{PQ}$이므로 사각형 PAQB의 넓이는 — $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PQ}$

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3t^2-6t+9)=\frac{9}{2}(t^2-2t+3)$ ··· ❷

$\quad =\frac{9}{2}(t-1)^2+9$

이때 $0<t<3$이므로 $t=1$일 때 최솟값은 9이다.

따라서 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은 9이다. ··· ❸

답 9

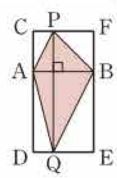
채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 사각형 PAQB의 넓이를 t에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

참고 오른쪽 직사각형 CDEF에서

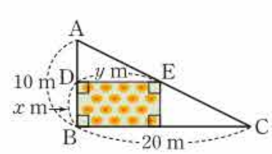
$\square PAQB=\frac{1}{2}\square CDEF$

$\quad =\frac{1}{2}\overline{CF}\cdot\overline{CD}$

$\quad =\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PQ}$



0678 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BD}=x$ m, $\overline{DE}=y$ m라 하면



$\underline{\triangle ADE\backsim\triangle ABC}$ (AA 닮음)이므로 — $\angle$A는 공통, $\angle ADE=\angle ABC=90^\circ$

$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$

즉 $(10-x):10=y:20$이므로

$y=20-2x$

이때 변의 길이는 양수이므로

$20-2x>0 \qquad \therefore 0<x<10$

꽃밭의 넓이는

$$\begin{aligned} xy&=x(20-2x) \\ &=-2x^2+20x \\ &=-2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

이때 $0<x<10$이므로 $x=5$일 때 최댓값은 50이다.

따라서 꽃밭의 최대 넓이는 50 m^2이다. 답 ③

0679 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\frac{a}{3}$, $-3\cdot 1=\frac{b}{3}$

$\therefore a=6,\ b=-9$

$\therefore ab=-54$ 답 ②

다른 풀이 $y=3x^2+ax+b=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$이므로 $a=6,\ b=-9$

0680 전략 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x+2)=0$이려면

$x+2=\alpha$ 또는 $x+2=\beta$

$\therefore x=\alpha-2$ 또는 $x=\beta-2$

따라서 이차방정식 $f(x+2)=0$의 두 근의 합은

$(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=5-4=1$ 답 1

0681 전략 꼭짓점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 나타낸 후 이차함수의 그래프가 축에 대하여 대칭임을 이용하여 x축과의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, -1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-1$이라 하면

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c \\ &=a(x-1)^2-1 \\ &=ax^2-2ax+a-1 \end{aligned}$$

이 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고 $\overline{\text{PQ}}=6$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -2, 4이다. $1-\frac{6}{2}=-2,\ 1+\frac{6}{2}=4$

즉 이차방정식 $ax^2-2ax+a-1=0$의 두 근이 -2, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2\cdot 4=\frac{a-1}{a}, \qquad 9a-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{9}$

따라서 $y=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{8}{9}$이므로

$b=-\frac{2}{9}$, $c=-\frac{8}{9}$

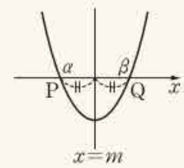
$\therefore a-b-3c=\frac{1}{9}-\left(-\frac{2}{9}\right)-3\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)=3$ 답 ⑤

라쎈 특강

이차함수 $y=a(x-m)^2+n$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 이 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $\text{P}(\alpha, 0)$, $\text{Q}(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$이면

$\alpha=m-\frac{\overline{\text{PQ}}}{2}$, $\beta=m+\frac{\overline{\text{PQ}}}{2}$

이다.



0682 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a^2-a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a^2-a+7)<0$

$a^2+2a+1-a^2+a-7<0$

$3a-6<0 \qquad \therefore a<2$

따라서 자연수 a는 1의 1개이다. 답 1

0683 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 곡선 $y=2x^2-5x+a$와 직선 $y=x+12$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식 $2x^2-5x+a=x+12$, 즉 $2x^2-6x+a-12=0$의 두 근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\frac{a-12}{2}$

이때 $\alpha\beta=-4$이므로

$\frac{a-12}{2}=-4, \qquad a-12=-8$

$\therefore a=4$ 답 ②

0684 전략 두 점 A, B의 x좌표가 이차방정식 $ax^2=x+6$의 두 근임을 이용하여 α, β에 대한 식을 세운다.

풀이 이차방정식 $ax^2=x+6$, 즉 $ax^2-x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{a}$, $\alpha\beta=-\frac{6}{a}$

이때 $\text{A}(\alpha, \alpha+6)$, $\text{B}(\beta, \beta+6)$이므로

$\overline{\text{BC}}=(\beta+6)-(\alpha+6)=\beta-\alpha=\frac{7}{2}$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{6}{a}\right), \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{24}{a}-\frac{49}{4}=0$

$49a^2-96a-4=0, \qquad (49a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{6}{2}=-3$이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-3)=\frac{25}{4} \end{aligned}$$

답 ②

05 이차방정식과 이차함수