Contents

❖ 3장 집합

- 학습목표
  - 집합에 관련한 기본 개념과 표현 방법을 이해한다.
  - 집합 연산을 이해한다.
  - 분할과 집합류를 이해한다.
- 내용
  - 집합의 개념
  - 집합의 종류
  - 집합의 연산
  - 집합의 대수법칙
  - 집합의 분할

1. 집합의 개념

정의 5-1 집합(Set): 영문 대문자(A, B, $C \cdots$)

명확한 기준에 의해 분류되어 공통된 성질을 가지며 중복되지 않는 원소(Element, Member)의 모임

정의 5-2 집합의 표기 방식

(1) 원소나열법: 집합에 포함되는 원소들을 일일이 나열하는 방법

예 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(2) 조건제시법: 집합에 포함되는 원소들의 공통적인 성질을 조건식으로 제시하는 방법

예 $A = \{x \mid 0 < x \leq 7,\ x\text{는 정수}\}$

(3) 벤다이어그램: 집합과 원소의 포함관계를 그림으로 보여주는 방법

1. 집합의 개념

- 조건제시법 : 집합에 포함된 원소들의 특징을 설명이나 식으로 표현하는 방법 입니다.

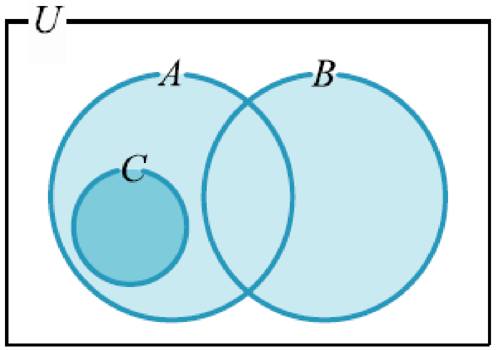
$$A = \{\boxed{x} \mid \boxed{0 \leq x \leq 7, x \in N}\}$$

❷ 원소들의 공통된 특징

❶ 원소를 대표하는 변수

[그림 5-1] 조건제시법의 구조

- 벤다이어그램 : 원이나 사각형으로 집합과 원소 사이의 포함관계를 표현



[그림 5-2] 벤다이어그램의 예

예제 5-1

원소나열법으로 표기한 집합은 조건제시법으로, 조건제시법으로 표기한 집합은 원소나열법으로 표기하라.

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $B = \{A, B, C, D, \cdots, W, X, Y, Z\}$

(3) $C = \{c \mid c^2 = 16,\ c \in N\}$

(4) $D = \left\{d \mid d = \dfrac{k}{3},\ k \in Z\right\}$

정의 5-3 기수(Cardinality): $|A|$

집합 A에 포함되는 원소의 개수

예제 5-2

다음 집합의 기수를 구하라.

(1) $A=\{x|-4 \le x \le 4,\ x\text{는 정수}\}$

(2) $B=\{y|-3 \le y \le 3,\ y \in Q\}$

(3) $C=\{z|z^3 = 2,\ z \in Z\}$

1. 집합의 개념

정의 5-4 유한집합(Finite Set) / 무한집합(Infinite Set)

- 유한집합: 집합에 포함된 원소의 개수가 유한한 집합
- 무한집합: 집합에 포함된 원소의 개수가 무한한 집합

정의 5-5 원소의 집합에 대한 포함관계

- a가 집합 A의 원소이다: $a \in A$
- a가 집합 A의 원소가 아니다: $a \notin A$

예제 5-3

집합 $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$에 대해 $2, 6, 9, 11$의 집합 A에 대한 원소 포함관계를 표기하라.

2. 집합의 종류

정의 5-6 전체집합(Universal Set): U

논의 대상이 되는 원소 전체를 포함하는 집합

정의 5-7 공집합(Empey Set): $\varnothing$ 또는 { }

원소를 하나도 포함하지 않는 집합으로 기수가 0인 집합. $|\varnothing| = 0$

정의 5-8 상등(Equal): $A = B$

두 집합 A, B에 속하는 원소가 모두 동일할 때, "두 집합 A와 B가 서로 같다" 또는 "두 집합 A와 B가 서로 상등이다"라고 한다.

$$A = B \leftrightarrow \{a \in A \wedge a \in B\}$$

예제 5-4

다음 중 상등인 집합끼리 짝지어라.

$A = \{a \mid -3 < a \leq 3,\ a \in Z\}$	$B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$
$C = \{c \mid c = 2^k,\ k \geq 0,\ k \in Z\}$	$D = \{d \mid d \in R\}$
$E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$F = \{e \mid e$는 유리수이거나 무리수$\}$

2. 집합의 종류

정의 5-9 부분집합(Subset): $A \subseteq B$

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 포함되는 경우, $|A| \le |B|$

정의 5-10 진부분집합(Proper subset): $A \subset B$

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 포함되지만 집합 A와 B가 상등이 아닌 경우, $|A| < |B|$

- 집합 A와 B가 상등이면 서로 부분집합일수 있으나 진부분집합은 아님
- 포함관계의 기호 사용시 유의
  - $\in$: 원소와 집합 간의 포함관계
  - $\subset$(또는 $\subseteq$): 집합과 집합 간의 포함관계
  - 어떠한 포함관계도 존재하지 않을때 : $A \not\subset B$

정리 5-1 집합 간의 포함관계

(1) 모든 집합 A에 대해 $A \subseteq A$

집합 A에 속하는 모든 원소 a에 대해 $a \in A$이 성립한다. 따라서 $A \subseteq A$가 성립한다.

∴ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이 된다.

(2) 모든 집합 A에 대해 $\varnothing \subseteq A$

$\varnothing \subseteq A$를 증명하기 위해, 어떤 원소 a에 대해 $a \in \varnothing \rightarrow a \in A$를 증명한다.

공집합에는 원소가 존재할 수 없기 때문에 $a \in \varnothing$은 거짓이다. 조건이 거짓인 함축명제는 항상 참이므로 $a \in \varnothing \rightarrow a \in A$는 참이다. 따라서 $\varnothing \subseteq A$는 참이다.

∴ 공집합($\varnothing$)은 모든 집합의 부분집합이다.

(3) 모든 집합 A에 대해 $A \subseteq U$

$A \subseteq U$를 증명하기 위해, 어떤 원소 a에 대해 $a \in A \rightarrow a \in U$를 증명한다.

집합 U는 전체집합이므로 논의영역의 모든 원소를 포함하고 있다. 따라서 $a \in A$이면, $a \in U$가 성립한다.

∴ 모든 집합은 전체집합 U의 부분집합이다.

(4) 집합 A, B, C에 대해 $A \subseteq B$이고, $B \subseteq C$이면 $A \subseteq C$

어떤 원소 a에 대해 $a \in A$이면, $A \subseteq B$에 의해 $a \in B$이다. $a \in B$이면, $B \subseteq C$에 의해 $a \in C$이다. 결국 $a \in A$이면, $a \in C$가 된다. 따라서 $A \subseteq C$는 참이다.

(5) 집합 A, B에 대해 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

어떤 원소 a에 대해 $A \subseteq B$인 것은 $a \in A$이면 $a \in B$인 것이다. 또한 $B \subseteq A$인 것은 $a \in B$면 $a \in A$인 것이다. 어떤 원소 a는 집합 A의 원소면서 집합 B의 원소다. 따라서 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$는 참이다.

∴ 집합 A와 B가 상등이면 집합 A와 집합 B는 서로의 부분집합이다.

예제 5-5

전체집합이 $U=\{x|-5 \le x \le 5, x \in Z\}$이고 주어진 집합이 다음과 같을 때 포함관계를 써라.

$A=\{x\|-5 < x < 5, x \in Z\}$	$B=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$D=\{-10, 10\}$

(1) $U(\quad)A$ (2) $U(\quad)B$ (3) $U(\quad)C$ (4) $A(\quad)B$ (5) $C(\quad)D$

3. 집합의 연산

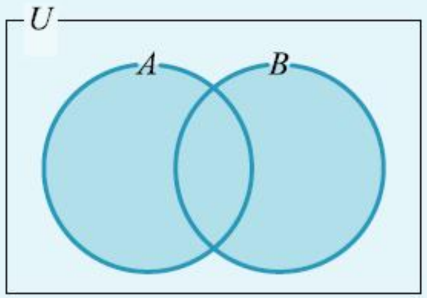
❖ 합집합과 교집합

- 합집합

정의 5-11 합집합(Union): $A \cup B$

집합 A, B가 있을 때 집합 A와 B에 모두 속하거나, 둘 중 한 집합에 속하는 원소들로 만들어진 집합

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$



[그림 5-3] 합집합 벤다이어그램

예제 5-7

집합 A, B, C를 보고 다음을 구하라.

$A = \{a, b, c, d\}$ $\quad$ $B = \{e, f, g, h\}$ $\quad$ $C = \{c, d, e\}$

(1) $A \cup B$ $\quad$ (2) $A \cup C$ $\quad$ (3) $A \cup B \cup C$

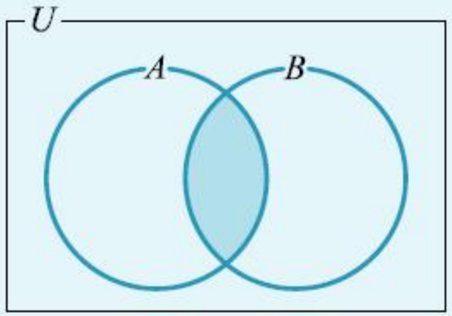
3. 집합의 연산

- 교집합

정의 5-12 교집합(Union): $A \cap B$

집합 A, B가 있을 때 집합 A와 B에 모두 원소들로 만들어진 집합

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$



[그림 5-4] 교집합 벤다이어그램

예제 5-8

집합 A, B, C를 보고 다음을 구하라.

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{e, f, g, h\}$ $C = \{c, d, e\}$

(1) $A \cap B$ (2) $A \cap C$ (3) $B \cap C$

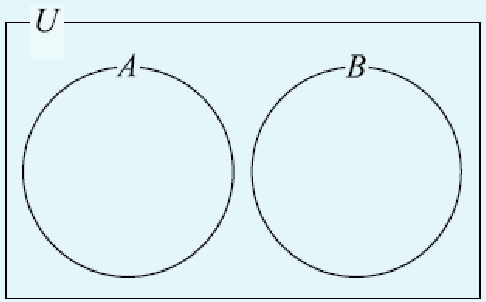
3. 집합의 연산

- [예제 5-8]의 (1)의 결과에서
- 서로소 : 두 집합 사이에 교집합의 원소들이 하나도 없는 공집합(∅)인 경우
- (1)은 "집합 A와 집합 B 는 서로소 관계이다" 라고 함

정의 5-13 서로소(Disjoint)

집합 A, B가 있을 때 집합 A와 B 사이에 공통으로 속하는 원소가 하나도 없는 경우

$$A \cap B = \varnothing$$



[그림 5-5] 서로소 벤다이어그램

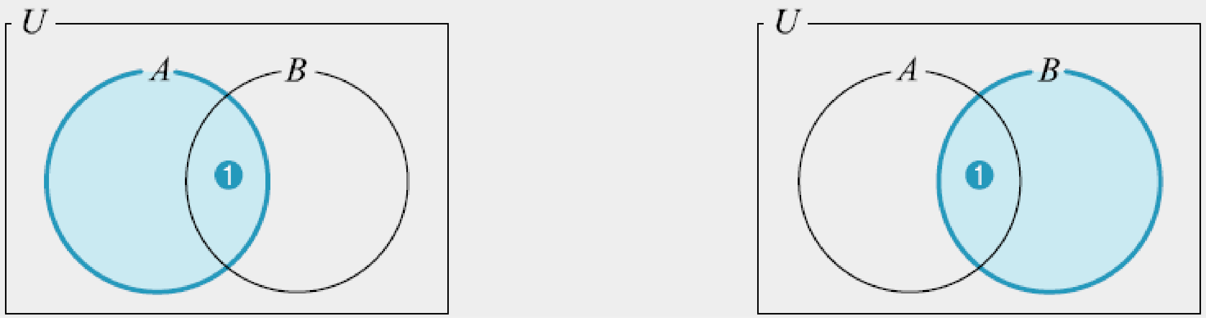
3. 집합의 연산

- 합집합과 교집합의 기수

정리 5-2 합집합과 교집합의 기수

(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A|$를 가리키는 벤다이어그램은 (a)이고, $|B|$를 가리키는 벤다이어그램은 (b)이다. 이때, $|A| + |B|$를 구하면 $|A \cap B|$에 해당되는 영역인 ❶이 두 번 더해진다. 그러므로 $|A| + |B|$ 결과에서 $|A \cap B|$를 한 번 빼서 $|A \cup B|$를 구하는 것이다.

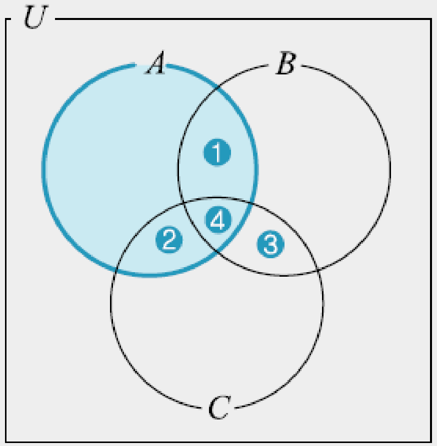


(a) (b)

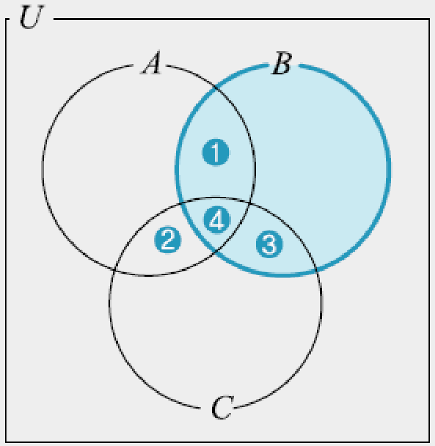
❖ 합집합과 교집합의 기수

(2) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

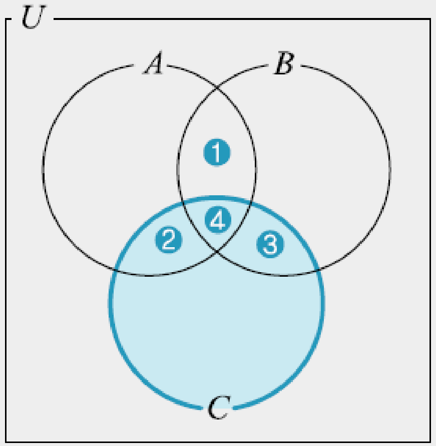
(1)에서와 같은 개념으로, $|A|$를 가리키는 벤다이어그램은 (c)이고, $|B|$를 가리키는 벤다이어그램은 (d), $|C|$를 가리키는 벤다이어그램은 (e)이다. $|A|+|B|+|C|$를 구하면 $|A \cap B|$에 해당되는 영역 ❶, $|A \cap C|$에 해당되는 영역 ❷, $|B \cap C|$에 해당되는 영역 ❸이 두 번씩 더해진다. 그래서 한 번씩 다시 빼주는 것이다. 그러나 이렇게 한 번씩 교집합 영역들을 빼고 나면 $|A \cap B \cap C|$에 해당되는 영역 ❹는 기수의 연산에서 제외되므로 한 번 더해준다.



(c)



(d)



(e)

(3) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

(1)에 대한 그림 (a), (b)를 보면, ❶은 두 번 더해짐을 알 수 있다. 그러므로 $|A \cap B|$를 구하기 위해서 $|A \cup B|$를 빼면 된다.

(4) $A \cap B = \varnothing$ 인 경우, $|A \cup B| = |A| + |B|$

예제 5-9

집합 $A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B=\{e, f, g, h, i, j, k, l\}$, $C=\{k, l, m, n\}$일 때, 다음을 구하라.

(1) $|A \cup B|$　　(2) $|A \cap C|$　　(3) $|A \cup B \cup C|$

예제 5-10

A 재단에서는 노인과 장애인을 돌보는 자원봉사자를 모집한다. 이들은 A 재단에 등록되어 있는 노인과 장애인을 1 : 1로 돌보는 일을 한다. 노인을 담당하는 봉사자 65명, 장애인을 담당하는 봉사자 55명을 모집하는데, 이중 30명은 장애를 가지고 있는 노인을 돌본다. A 재단에서는 몇 명의 자원봉사자를 모집해야 하는가?

3. 집합의 연산

❖ 그 외 집합의 연산

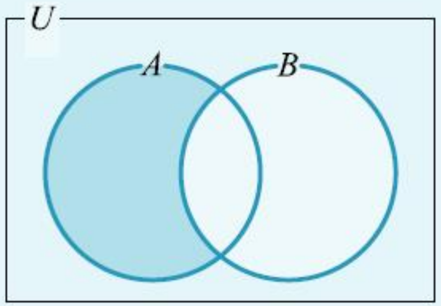
- 차집합

정의 5-14 차집합(Difference): $A-B$

집합 A, B가 있을 때 집합 A에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않는 원소로 구성되는 집합

$$A-B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A-B=A \cap \overline{B}$$



[그림 5-6] 차집합 벤다이어그램

- 두 집합 중 오직 한 집합에만 포함되는 원소들로 구성되는 집합이 차집합임
- 차집합은 교환법칙이 성립되지 않음

예제 5-12

집합 A, B, C를 보고 다음을 구하라.

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \qquad B = \{g, h, i, j, k, l, m, n\} \qquad C = \{a, c, e, g, i\}$$

(1) $A - B$ (2) $A - C$ (3) $B - A$ (4) $C - A$

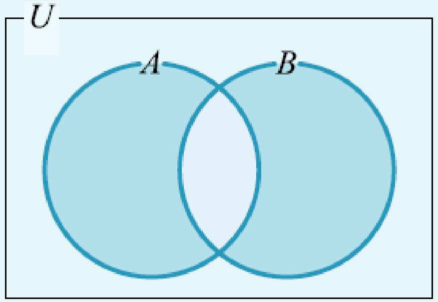
3. 집합의 연산

- 대칭차집합

정의 5-15 대칭차집합(Difference): $A \oplus B$

집합 A, B가 있을 때 $A-B$에 속하거나 $B-A$에 속하는 원소로 구성되는 집합

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \mid (x \in A-B) \vee (x \in B-A)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \mid x \in [(A \cup B)-(A \cap B)]\} \end{aligned}$$



[그림 5-7] 대칭차집합 벤다이어그램

예제 5-13

$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $B=\{g, h, i, j, k, l, m, n\}$일 때, $A \oplus B$를 구하라.

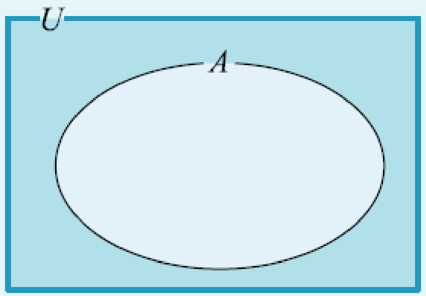
3. 집합의 연산

- 여집합

정의 5-16 여집합(또는 보집합, Complement): $\overline{A}$ 또는 A'

전체집합 U에는 속하지만 집합 A에는 속하지 않는 원소들로 구성된 집합

$$\overline{A} = A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$$



[그림 5-8] 여집합 벤다이어그램

예제 5-14

다음 집합의 여집합을 구하라.

(1) $W = \{w \mid w \geq 55, w \in Z\}$

(2) $X = \{x \mid -33 \leq x < 72, x \in R\}$

(3) $Y = \{y \mid y \in R\}$

3. 집합의 연산

- 곱집합

정의 5-17 곱집합(Cartesian Product): $A \times B$

집합 A, B에 대하여 $a \in A$, $b \in B$일 때, 순서쌍 (a, b)의 집합

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

예제 5-15

집합 A, B가 각각 $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$일 때, $A \times B$와 그 기수, $B \times A$와 그 기수를 구하라.

예제 5-16

피자 가게에서는 피자 도우, 크기, 주재료를 손님이 선택한다. 옵션이 다음과 같을 때, 얼마나 다양한 피자를 만들 수 있는가?

- 피자 도우: 씬, 팬
- 크기: small, medium, large
- 주재료: 콤비네이션, 불고기, 고구마, 하와이언

3. 집합의 연산

- 멱집합
  - 하나의 집합에서 발생할 수 있는 모든 부분집합을 집합으로 구한 것
  - 이때, 공집합(∅)은 모든 집합의 부분집합 (∅ ⊆ A)이고, 집합 자기 자신도 부분집합 (A ⊆ A)이어서 멱집합의 원소 중에는 공집합(∅)과 집합 자기 자신이 포함됨

정의 5-18 멱집합(Power Set): $P(A)$

n개의 원소를 갖는 집합 A에 대하여 집합 A의 가능한 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

$$|P(A)| = 2^n$$

예제 5-17

다음 집합에 대하여 멱집합과 멱집합의 기수를 구하라.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$

(2) $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

4. 집합의 대수법칙

- 대수법칙 : 집합 연산의 정해진 규칙

집합	대수법칙
$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap U = A$	항등법칙(Identity Law)
$A \cup U = U, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$	지배법칙(Domination Law)
$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$	멱등법칙(Idempotent Law)
$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$	교환법칙(Communitive Law)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	결합법칙(Associative Law)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$	분배법칙(Distribute Law)
$\overline{\overline{A}} = A$	이중 보법칙(Double negation Law)
$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$ $\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing$	보법칙(Complement Law)
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	드모르간의 법칙(De Morgan's Law)
$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$	흡수법칙(Absorption Law)

예제 5-22

집합 A, B에 대하여 다음 식을 간략화하라.

(1) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

5. 집합의 분할

정의 5-19 분할(Partition): $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$

공집합이 아닌 임의의 집합 A를 서로소이면서 공집합이 아닌 하나 이상의 부분집합($A_1, A_2, \cdots, A_n$)으로 나누는 것으로 집합 A가 있을 때 다음과 같은 성질을 만족해야 한다.($i = 1, 2, \cdots, n$)

(1) $A_i \subseteq A$

(2) $A_i \neq \varnothing$

(3) $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

(4) $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \varnothing$

정의 5-20 집합류(Set Class): A_i

집합 A에 포함되는 분할된 부분집합

예제 5-23

집합 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$일 때 다음 중 집합 A의 분할인 것을 찾아라.

(1) $P = \{\{a, c, f\}, \{b, d\}, \{e, g\}, \{h\}\}$

(2) $Q = \{\{a, b, c, d, e\}, \{e, f, g\}\}$