이산수학

11/22(수)

소프트웨어학부
김형균 교수

공지사항

- **Report 3**
  - 주제 : 주어진 문제를 해결하는 프로그램을 작성하시오.
  - 제출기한 : 12/6(수) 까지 이 캠퍼스 제출 : 제출기한 넘길 시 제출 차단
  - 제출방법 : PPT형태로 작성해 PDF로 변환해서 제출
    - 필수 내용
      - 프로그램 언어에 제한은 없음
      - 프로그램 전체 구조 설명
      - 주어진 조건에 해당하는 코드와 실행 화면을 단계별로 캡쳐해서 이미지 삽입하고 설명
  - 배점기준
    - 5점 : 주어진 조건을 모두 만족하고, 정상 실행 결과 제시하면서 설명이 우수한 경우
    - 4점 : 주어진 조건을 모두 만족하고, 정상 실행 결과 제시한 경우
    - 2점 : 정상 실행 결과는 제시 못했지만 기본 구성 제시한 경우
    - 0점 : 미참여, 레포트 복제시

Contents

- 6장 함수

- 학습목표
  - 함수의 개념을 이해하여 정의역과 공변역의 대응을 이해한다.
  - 단사함수, 전사함수, 전단사함수를 판별한다.
  - 함수들을 합성하고 합성함수가 갖는 특징을 이해한다.
  - 다양한 종류의 함수를 알아본다.

1. 함수의 개념

정의 8-1 함수(Function: $f: A \to B$)

집합 A, B에 대해 집합 A에서 B로 가는 관계가 성립할 때, 집합 A의 원소 a에 대해 집합 B의 원소 b 하나가 대응되는 관계

정의 8-2 원상(Preimage), 상(Image), 정의역(Domain), 공변역(Codomain), 치역(Range)

집합 A, B에 대해 집합 A에서 B로 가는 함수 $f: A \to B$에 대해,

- 원상: 집합 B의 원소 b와 대응하는 집합 A의 원소 a
- 상: 집합 A의 원소 a에 대응되는 집합 B의 원소 b: $f(a)$
- 정의역: 원상의 집합, 집합 A: $dom(f)$
- 공변역: 상에 대한 전체집합, 집합 B: $codom(f)$
- 치역: 상의 집합, 집합 B의 부분집합: $ran(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$

1. 함수의 개념

정리 8-1 **관계와 함수의 차이**

집합 A에서 집합 B로의 관계	집합 A에서 집합 B로의 함수
집합 A(정의역)의 어떤 원소는 집합 B(공변역) 원소와 대응하지 않거나 하나 이상의 원소와 대응할 수 있다.	집합 A(정의역)의 모든 원소는 집합 B(공변역)에서 하나의 원소와 반드시 대응해야 한다.

- 집합 A={a,b,c}에서 집합 B={1,2,3,4}로 가는 관계가 다음과 같음

$$f_1 = \{(a,2), (b,1), (c,4)\}$$

$$f_2 = \{(a,2), (a,3), (c,1), (c,3), (c,4)\}$$

- 관계 f_1의 경우, 정의역인 집합 A의 모든 원소 각각은 공변역인 집합 B에서 하나의 원소와 대응

$$f_1(a) = 2,\ \ f_1(b) = 1,\ \ f_1(c) = 4$$

- 이때 집합 B의 원소 중에서 3은 대응되는 집합 A의 원소가 없지만 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소와 대응하고 있으므로 문제되지 않으므로 관계 f_1은 함수
- 관계 f_2의 경우는 정의역인 집합 A의 원소 중 b에 대응하는 공변역 집합 B의 원소가 없고 또한 집합 A의 원소 a와 c는 두 개 혹은 세 개의 상을 가지고 있으므로 관계 f_2는 함수가 될 수 없음

예제6-1

다음 집합 $A=\{a, b, c, d\}$에서 집합 $B=\{1, 2, 3, 4\}$로의 관계를 보고 함수인지 아닌지 판별하고, 함수면 정의역, 공변역, 치역을 구하라.

(1) $f_1=\{(a,4), (b,1), (c,3)\}$

(2) $f_2=\{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

2. 함수의 특성

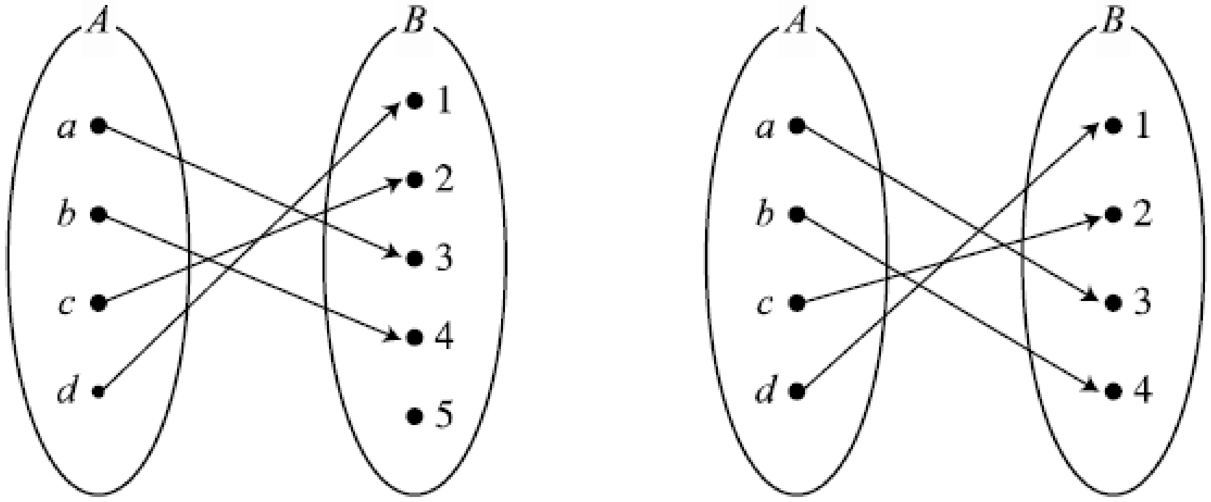
❖ 단사함수

정의 8-3 단사함수(Injective Function 또는 Injection)

함수 $f: X \rightarrow Y$가 있을 때, 임의의 두 정의역 원소 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면, $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

$$|dom(f)| \leq |codom(f)| \quad / \quad |ran(f)| \leq |codom(f)|$$

- 단사함수 : 정의역의 모든 원소들이 서로 다른 공변역 원소와 대응 하는 함수



[그림 8-1] 단사함수의 예

예제6-2

다음 함수들이 단사함수임을 보여라.

(1) 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 집합 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$에 대해 $f_1 : A \rightarrow B$일 때, $f_1 = \{(1, a), (2, c), (3, d), (4, b)\}$

실습문제 6-1

집합 A={a,b,c}에서 집합 B={1,2,3,4}로 가는 관계가 다음과 같을 때 단사함수를 판별하라.

$$f_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 4)\}$$

$$f_2 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$$

2. 함수의 특성

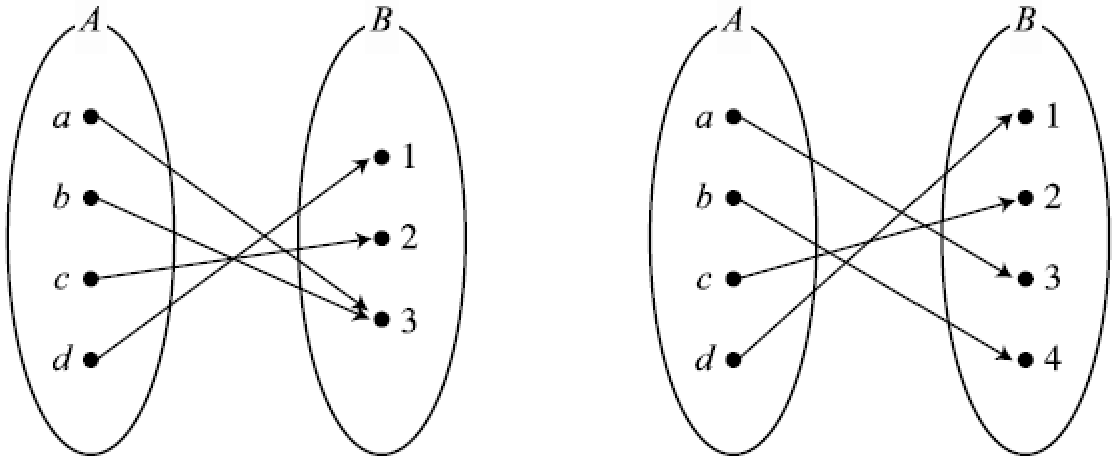
❖ 전사함수

정의 8-4 전사함수(Subjective Function 또는 Subjection)

함수 $f: X \rightarrow Y$가 있을 때, 모든 공변역 원소 $y \in Y$에 대해, $f(x) = y$인 정의역 원소 $x \in X$가 적어도 하나 이상 존재하는 함수

$$|dom(f)| \geq |codom(f)| \quad / \quad |ran(f)| = |codom(f)|$$

- 공변역의 모든 원소들이 한 개 이상의 정의역 원소들과 대응하는 함수



[그림 8–2] 전사함수의 예

예제6-3

다음 함수들이 전사함수임을 보여라.

(1) 집합 $A=\{a,b,c,d\}$, 집합 $B=\{1,2\}$에 대해, $f_1: A \rightarrow B$일 때, $f_1=\{(a,2),(b,1),(c,2),(d,2)\}$

실습문제 6-2

집합 A={a,b,c,d} 에서 집합 B={1,2,3} 으로 가는 관계가 다음과 같을 때 전사함수임을 보여라.

$$f_1 = \{(a,2),(b,1),(c,1),(d,3)\}$$

$$f_2 = \{(a,2),(b,1),(c,1),(d,2)\}$$

2. 함수의 특성

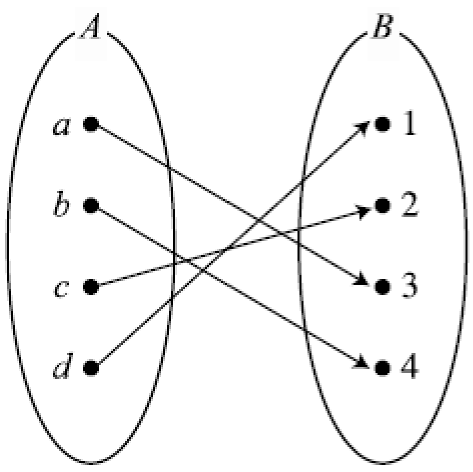
❖ 전단사함수

정의 8-5 전단사함수(Bijective Function 또는 One-to-one Correspondence)

단사함수이면서 전사함수인 함수

$$|dom(f)| = |codom(f)| \quad / \quad |ran(f)| = |codom(f)|$$

- 전단사함수는 한 개의 정의역 원소가 한 개의 공변역 원소와 서로 대응
  그러므로 정의역 원소의 수, 공변역 원소의 수, 치역 원소의 수가 같아야 함



[그림 8-3] 전단사함수의 예

예제6-4

집합 A={a,b,c,} 에서 집합 B={1,2,3} 으로 가는 관계가 다음과 같을 때 전단사함수임을 보여라.

$$f_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$$
$$f_2 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$$

실습문제 6-3

다음 함수들은 어떤 함수인가?

(1) $f_1 : R \rightarrow R$일 때, $f_1(x) = 2^x$

(2) $f_2 : Z \rightarrow N$일 때, $f_2(x) = |x| + 1$

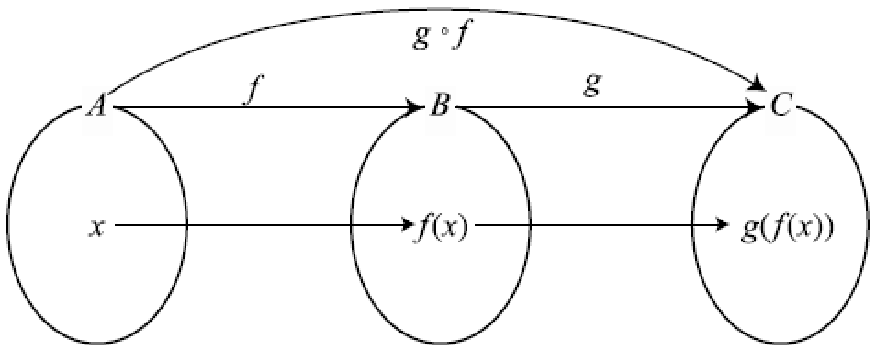
3. 합성함수

❖ 합성함수의 정의

정의 8-6 합성함수(Composition Function: $g \circ f$)

두 함수 $f: A \rightarrow B$와 $g: B \rightarrow C$가 있을 때, 집합 A의 각 원소를 집합 C의 원소에 대응하는 새로운 함수

$$g \circ f = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \forall x \in A$$



[그림 8-4] 합성함수

3. 합성함수

예제6-5 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{w, x, y, z\}$일 때 집합 A에서 집합 B로 가는 함수가 $f=\{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$이고, 집합 B에서 집합 C로 가는 함수는 $g=\{(a, x), (b, w), (c, z)\}$라고 할 때 $g \circ f$를 구해보자.

실습문제 6-4

세 개의 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y, z\}$에 대해 함수 $f: A \to B$, $g: B \to C$가 다음과 같이 정의될 때, 합성함수 $g \circ f$를 구하라.

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2)\}$$
$$g = \{(1, z), (2, y), (3, x)\}$$

3. 합성함수

- [실습문제 6-4 에서 풀었던 g◦f 도 마찬가지로 함수 f의 정의역 집합 A가 입력되어 함수 g의 공변역 집합 C의 원소 중에 상을 갖게 되므로 합성함수 g ◦f 의 정의역은 집합 A={a,b,c,d}, 공변역은 집합 C={x,y,z}, 치역 역시 집합 C={x,y,z} 합성함수는 교환법칙이 성립하지 않음

예제6-6

집합 $A=\{1,2,3,4\}$에 대하여 함수 $f: A \to A$와 $g: A \to A$가 다음과 같을 때, $f \circ g$와 $g \circ f$를 각각 구하라.

$$f=\{(1,2),(2,4),(3,3),(4,1)\}$$
$$g=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$$

실습문제 6-5

두 함수 $f: R \to R$, $g: R \to R$에 대해 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x - 5$일 때 다음을 구하라.

(1) $g \circ f$ (2) $f \circ g$ (3) $f \circ f$ (4) $g \circ g$

3. 합성함수

- 세 개 이상의 함수를 합성한다면? → 결합법칙은 항상 성립

예제6-7

집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{x,y,z\}$, $D=\{11,12,13,14\}$에 대해 세 함수 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$가 아래와 같다면 다음을 구하라.

$$f=\{(1,c),(2,a),(3,e),(4,b)\}$$
$$g=\{(a,x),(b,y),(c,y),(d,z),(e,z)\}$$
$$h=\{(x,12),(y,11),(z,14)\}$$

(1) $h \circ (g \circ f)$ (2) $(h \circ g) \circ f$

3. 합성함수

예제6-8

집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{x,y,z\}$, $D=\{11,12,13,14\}$에 대해 세 함수 $f: A\rightarrow B$, $g: B\rightarrow C$, $h: C\rightarrow D$가 아래와 같다면 다음을 구하라.

$$f=\{(1,c),(2,a),(3,e),(4,b)\}$$
$$g=\{(a,x),(b,y),(c,y),(d,z),(e,z)\}$$
$$h=\{(x,12),(y,11),(z,14)\}$$

(1) $h\circ(g\circ f)$

(2) $(h\circ g)\circ f$

실습문제 6-6

실수 집합 R에 대해 $f: R \to R$, $g: R \to R$, $h: R \to R$이고 $f(x) = x - 3$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = \frac{x}{2}$일 때, 다음을 구하라.

(1) $h \circ (g \circ f)$

(2) $(h \circ g) \circ f$

3. 합성함수

❖ 합성함수의 특성

정리 8-2 합성함수의 특성

집합 A, B, C가 있고 $f: A \to B$, $g: B \to C$에 대해, $g \circ f$가 합성함수일 경우

(1) f와 g가 단사함수이면 $g \circ f$도 단사함수이다.

(2) f와 g가 전사함수이면 $g \circ f$도 전사함수이다.

(3) f와 g가 전단사함수이면 $g \circ f$도 전단사함수이다.

(4) $g \circ f$가 단사함수이면 f도 단사함수이다.

(5) $g \circ f$가 전사함수이면 g도 전사함수이다.

(6) $g \circ f$가 전단사함수이면 f는 단사함수이고, g는 전사함수이다.

실습문제 6-7

- 다음 함수들을 합성하고 합성함수의 특성을 판별하라.
  - 집합 A={1,2,3,4,5} 에서 집합 B={a,b,c,d} 로 가는 함수 f={(1,b),(2,c),(3,a),(4,a),(5,d)}
  - 집합 B={a,b,c,d} 에서 집합 C={x,y,z} 로 가는 함수 g={(a,z),(b,x),(c,y),(d,z)}

4. 함수의 종류

❖ 항등함수

정의 8-7 항등함수(Identity Function: i_A 또는 I_A)

집합 A에 대한 함수 $f: A \rightarrow A$가 $f(a) = a$로 정의되는 관계

- 항등함수는 정의역의 원소 x_1, x_2 가 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이므로 단사함수
- 모든 공변역 원소 y에 대해 f(x)=y를 만족하는 정의역 원소 x를 가지므로 전사함수. 그러므로 항등함수는 전단사함수

예제6-9

집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $f: A \rightarrow A$이면 함수 $f(x) = x^5$는 어떤 함수인가?

4. 함수의 종류

정리 8-3 항등함수와의 합성

함수 $f: A \to B$이고 집합 A에 대한 항등함수가 I_A, 집합 B에 대한 항등함수가 I_B일 때

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f$$

예제6-10

집합 $A = \{1, 2, 3\}$에서 집합 $B = \{a, b, c, d\}$로 가는 함수 $f = \{(1, c), (2, a), (3, d)\}$에 대해 [정리 8-3]이 성립하는지 보여라.

실습문제 6-8

- 다음 함수를 보고 가능한 합성함수 중 항등함수를 찾아라.
  - 집합 A= {x,y,z}, 집합 B={a,b,c,d} 일 때 , 집합 A 에 대한 함수 f={(x,x),(y,y),(z,z)}
  - $h : A \rightarrow B$ 일 때 h ={(x,b),(y,c),(z,d)} $i : B \rightarrow A$ 일 때 i ={(a,z),(b,x),(c,y),(d,z)}

4. 함수의 종류

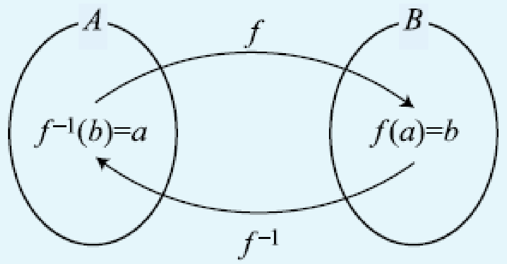
❖ 역함수

정의 8-8 역함수(Inverse Function: f^{-1})

전단사함수 $f: A \rightarrow B$에 대해 $B \rightarrow A$로 대응되는 관계

$a \in A$, $b \in B$에 대해 $f(a) = b$일 때, $f^{-1}(b) = a$

$f(a)$: 가역함수, f^{-1} (b) : 역함수



예제6-11

$f: Z \rightarrow Z$일 때, 다음 중 가역함수인 것을 구별하고 역함수를 구하라.

(1) $f(x) = x - 1$

4. 함수의 종류

정리 8-4 항등함수와 역함수의 관계

전단사함수 $f: A \to B$, $g: B \to C$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $f^{-1} \circ f = I_A$ (2) $f \circ f^{-1} = I_B$ (3) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

증명

$a \in A$, $b \in B$, $c \in C$에 대해 $f(a) = b$이면 f는 전단사함수이므로 $f^{-1}(b) = a$이다. 또한 $g(b) = c$이면 g는 전단사함수이므로 $g^{-1}(c) = b$이다.

(1) $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a = I_A$

(2) $(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = I_B$

(3) $(g \circ f)^{-1}$은 $g \circ f$의 역함수이므로 위 (1)의 관계대로 $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = I_A$이다.
$(g \circ f)^{-1}$ 대신 $f^{-1} \circ g^{-1}$을 대입하여 같은 결과가 나오는지 확인한다.

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$ $\because$ 결합법칙 성립

$= f^{-1} \circ (I_B \circ f)$ $\because$ (1)에 의해

$= f^{-1} \circ f = I_A$ $\because$ [정리 8-3]에 의해

$\therefore (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$이 성립한다.

예제6-12

집합 $A = \{a, b, c\}$에서 집합 $B = \{x, y, z\}$로 가는 전단사함수 $f = \{(a, y), (b, z), (c, x)\}$에 대해 $f \circ f^{-1}$와 $f^{-1} \circ f$를 구하라.

실습문제 6-9

- 다음 함수의 역함수를 구하고 역함수와 가역함수를 합성하여 항등함수가 되는지 확인하라.
  - $h : R \rightarrow R$ 일때 $h(x) = 3x$

4. 함수의 종류

❖ 상수함수

정의 8-9 상수함수(Constant Function)

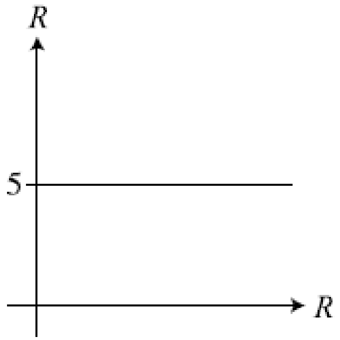
함수 $f: A \rightarrow B$에서 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소 하나에만 대응되는 관계

$$\forall a \in A,\ \exists b \in B \text{에 대해 } f(a) = b$$

- 상수함수 $f:A \rightarrow B$의 경우 정의역의 모든 원소 $x_1, x_2 \in A$ 에 대해 $x_1 \neq x_2$ 여도 $f(x_1)=f(x_2)=y$ 이므로 단사함수가 성립하지 않음
- 또한 단 하나의 공변역 원소를 제외하고 그 외의 $y \in B$ 에 대해 $f(x)=y$를 만족하게 하는 $x \in A$ 가 존재하지 않기 때문에 전사함수도 아님
- 하지만 공변역의 기수가 $|B|=1$인 경우는 전사함수의 특성을 가짐

예제6-13

다음 그래프가 함수 $f: R \to R$을 나타내고 있다면, 함수 f는 어떤 함수인가?



4. 함수의 종류

❖ 특성함수

- 관계행렬과 같이 어떤 집합에 원소가 있는지 없는지를 판별하는 함수
- 이 함수의 공변역은 입력에 대응하는 출력이 있다는 의미의 1과 없다는 의미의 0만 존재

정의 8-10 특성함수(Characteristic Function: f_A)

전체집합 U에 속한 어떤 집합 A에 대해 다음과 같은 특성을 갖는 관계

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A\text{일 때} \\ 0, & x \notin A\text{일 때} \end{cases}$$

예제6-14

전체집합 $U = \{x \mid x$는 알파벳$\}$일 때, $A = \{x \mid x$는 알파벳 소문자$\}$와 $B = \{x \mid x$는 알파벳 대문자$\}$에 대한 특성함수를 구하라.

4. 함수의 종류

❖ 바닥함수(최대정수함수)와 천정함수(최소정수함수)

정의 8-11 **바닥함수(Floor Function) / 최대정수함수(Greatest Integer Function: $\lfloor x \rfloor$)**

$x \in R$에 대해 x와 같거나 x보다 작은 정수들 중 가장 큰 정수를 대응하는 함수

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \le x < n+1,\ \ n \in Z$$

정의 8-12 **천정함수(Ceiling Function) / 최소정수함수(Least Integer Function: $\lceil x \rceil$)**

$x \in R$에 대해 x와 같거나 x보다 큰 정수들 중 가장 작은 정수를 대응하는 함수

$$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \le n,\ \ n \in Z$$

예제6-15

다음을 구하라.

(1) $\lceil \pi \rceil$, $\lfloor \pi \rfloor$

(2) $\lceil 7 \rceil$, $\lfloor 7 \rfloor$

실습문제 6-10

(1) $\left\lceil \frac{1}{3} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rceil$, $\left\lfloor \frac{1}{3} + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$

(2) $\left\lceil \frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \right\rceil$, $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil \right\rfloor$