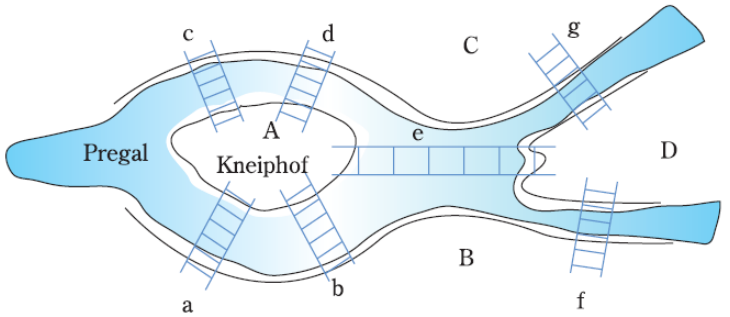
10장 그래프

그래프(graph)

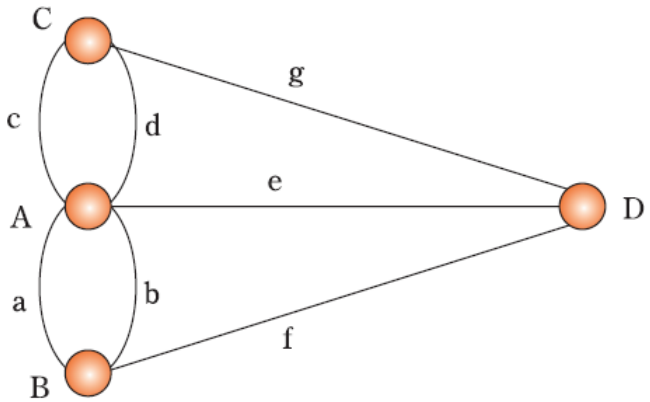
- 연결되어 있는 객체 간의 관계를 표현하는 자료구조
  - (예) 우리가 배운 트리(tree)도 그래프의 특수한 경우임
  - (예) 전기회로의 소자 간 연결 상태
  - (예) 지도에서 도시들의 연결 상태

그래프 역사

- 1800년대 오일러에 의하여 창안
- 오일러 문제
  - 모든 다리를 한번만 건너서 처음 출발했던 장소로 돌아오는 문제
- A,B,C,D 지역의 연결 관계 표현
  - 위치: 정점(node)
  - 다리: 간선(edge)
- 오일러 정리
  - 모든 정점에 연결된 간선의 수가 짝수이면 오일러 경로 존재함
  - 따라서 그래프 (b)에는 오일러 경로가 존재하지 않음



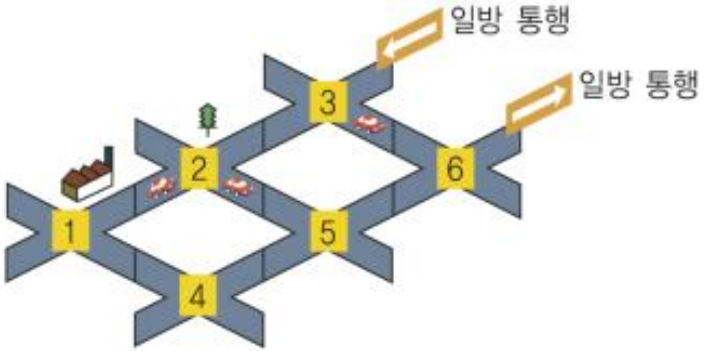
(a) 모든 다리를 한 번만 건너 돌아오는 경로 문제

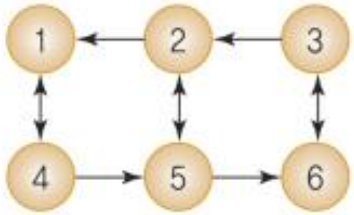


(b) 문제 (a)의 그래프 표현

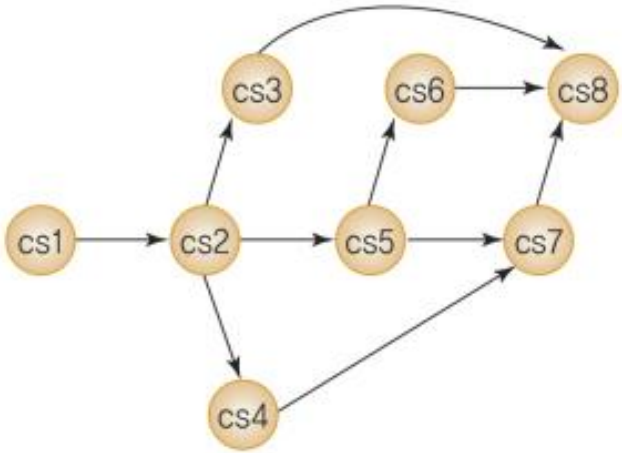
그래프로 표현하는 것들

- 도로망



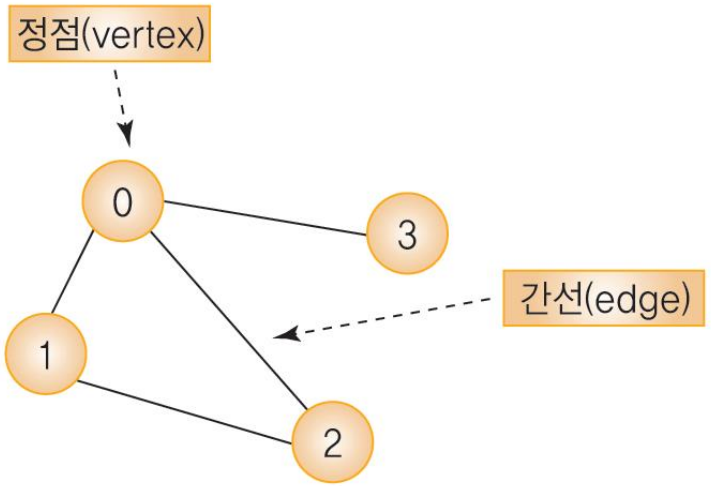


- 선수과목 관계

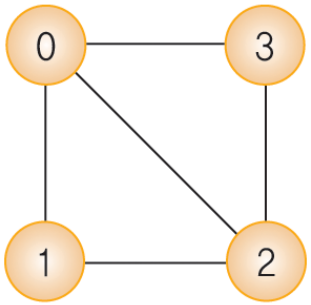


그래프 정의

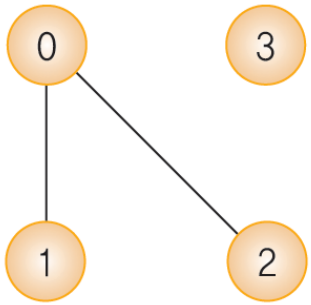
- 그래프 G는 (V, E)로 표시
- 정점(vertices)
  - 여러 가지 특성을 가질 수 있는 객체 의미
  - V(G) : 그래프 G의 정점들의 집합
  - 노드(node)라고도 불림
- 간선(edge)
  - 정점들 간의 관계 의미
  - E(G) : 그래프 G의 간선들의 집합
  - 링크(link)라고도 불림



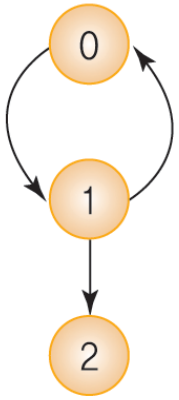
그래프 표현의 예



G1



G2



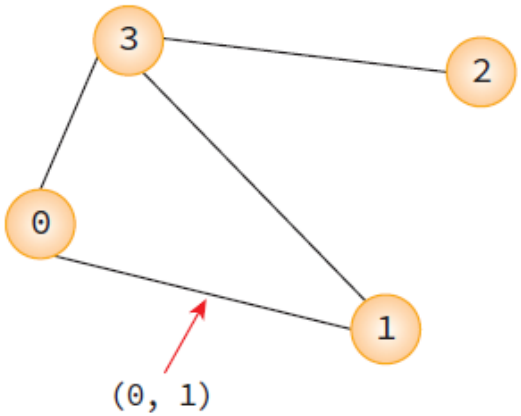
G3

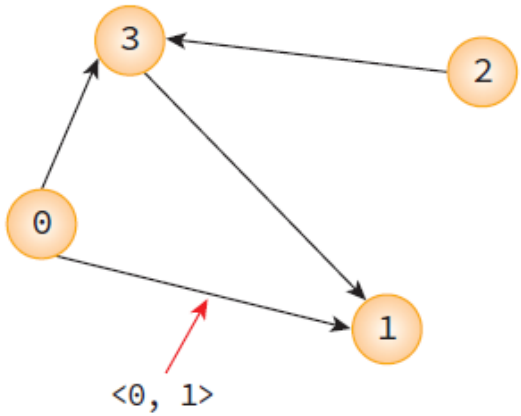
V(G1)= {0, 1, 2, 3}, E(G1)= {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 3)}

V(G2)= {0, 1, 2, 3}, E(G3)= {(0, 1), (0, 2))}

V(G2)= {0, 1, 2}, E(G2)= {<0, 1>, <1, 0>, <1, 2>}

그래프의 종류






```
V(G1)= {0, 1, 2, 3},
E(G1)= {(0, 1), (0, 3), (1, 3), (2, 3)}
```

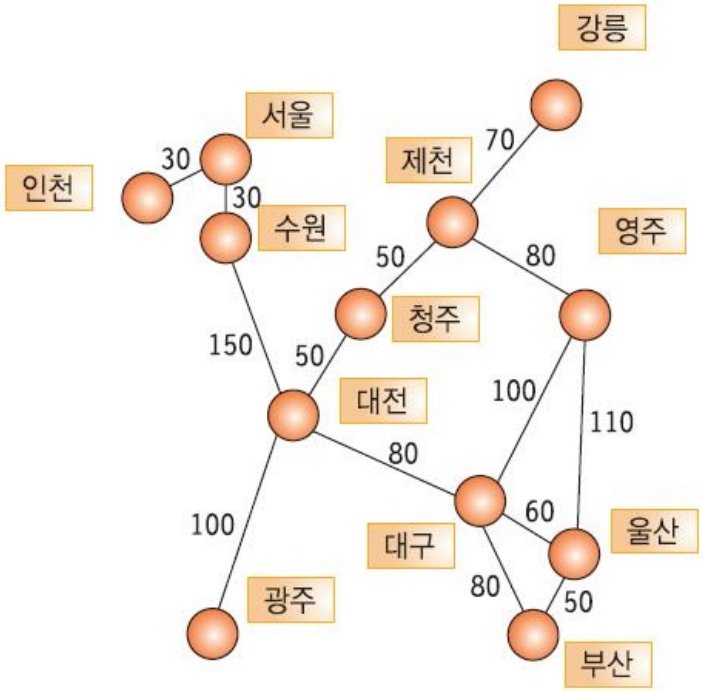
```
V(G2)= {0, 1, 2, 3},
E(G2)= {<0, 1>, <0, 3>, <3, 1>, <2, 3>}
```

[그림 10-9] 무방향 그래프와 방향 그래프

네트워크

- 가중치 그래프(weighted graph)는 네트워크(network)라고도 함
- 간선에 비용(cost)이나 가중치(weight)가 할당된 그래프

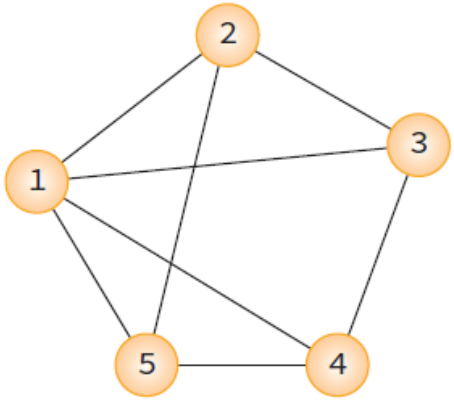
- 네트워크 예
  - 정점 : 각 도시를 의미
  - 간선 : 도시를 연결하는 도로 의
  - 가중치 : 도로의 길이



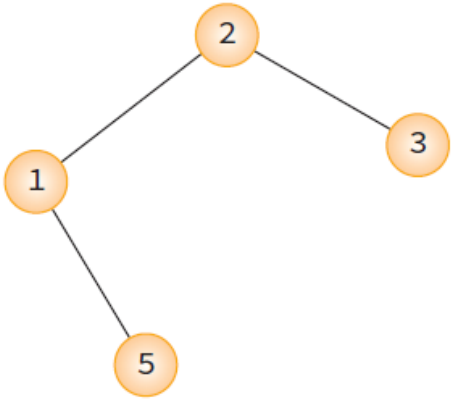
부분 그래프(subgraph)

- 정점 집합 V(G)와 간선 집합 E(G)의 부분 집합으로 이루어진 그래프
- 그래프 G1의 부분 그래프들

$$V(S) \subseteq V(G)$$
$$E(S) \subseteq E(G)$$

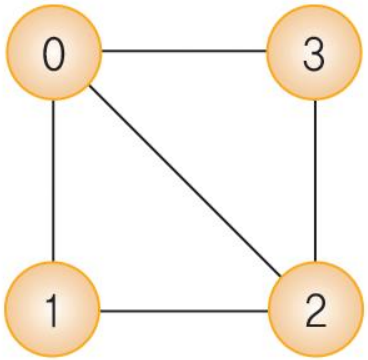


(a) 그래프



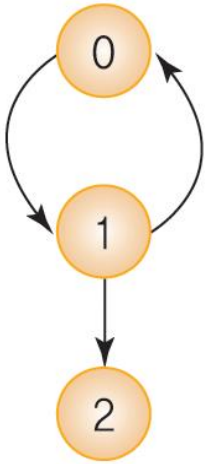
(b) 부분 그래프

- 인접 정점(adjacent vertex)
  - 하나의 정점에서 간선에 의해 직접 연결된 정점
  - G1에서 정점 0의 인접 정점: 정점 1, 정점 2, 정점 3
- 무방향 그래프의 차수(degree)
  - 하나의 정점에 연결된 다른 정점의 수
  - G1에서 정점 0의 차수: 3



G1

- 방향 그래프의 차수(degree)
  - 진입 차수(in-degree) : 외부에서 오는 간선의 수
  - 진출 차수(out-degree) : 외부로 향하는 간선의 수
  - G3에서 정점 1의 차수: 내차수 1, 외차수 2
  - 방향 그래프의 모든 진입(진출) 차수의 합은 간선의 수
    - G3의 진입 차수의 합: 3
    - G3의 진입 차수의 합: 3
    - G3의 간선 합: 3



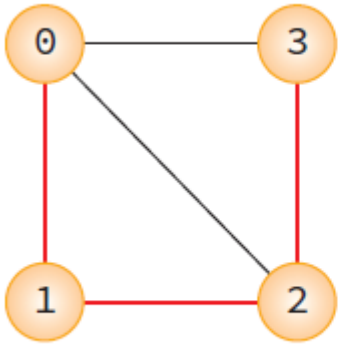
G3

그래프의 경로(path)

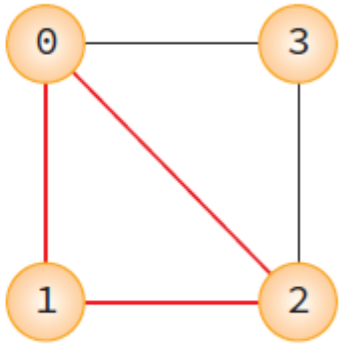
- 무방향 그래프의 정점 s로부터 정점 e까지의 경로
  - 정점의 나열 s, v1, v2, ..., vk, e
  - 나열된 정점들 간에 반드시 간선 (s, v1), (v1, v2), ... , (vk, e) 존재
- 단순 경로(simple path)
  - 경로 중에서 반복되는 간선이 없는 경로
- 사이클(cycle)
  - 단순 경로의 시작 정점과 종료 정점이 동일한 경로

그래프의 경로(path)

- G1의 0, 1, 2, 3은 경로지만 0, 1, 3, 2는 경로 아님
- G1의 1, 0, 2, 3은 단순경로이지만 1, 0, 2, 0은 단순경로 아님
- G1의 0, 1, 2, 0과 G3의 0, 1, 0은 사이클



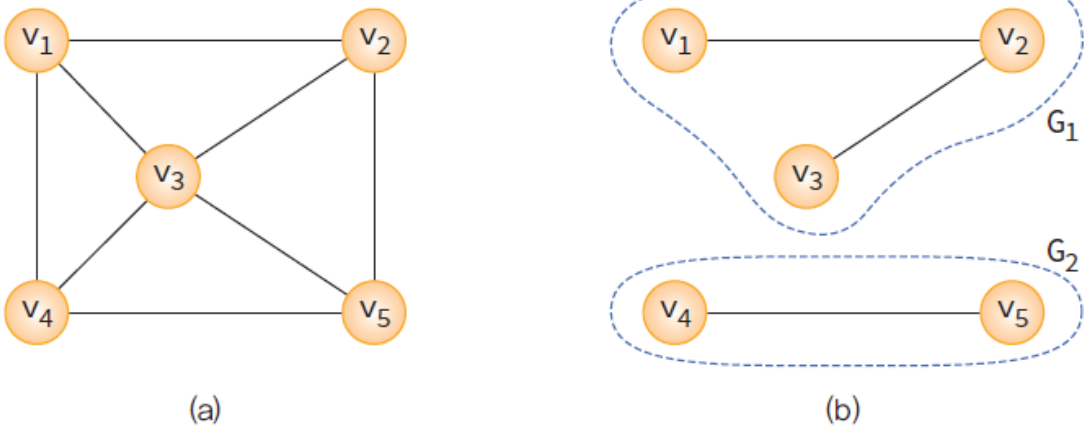
단순경로: 0, 1, 2, 3



사이클: 0, 1, 2, 0

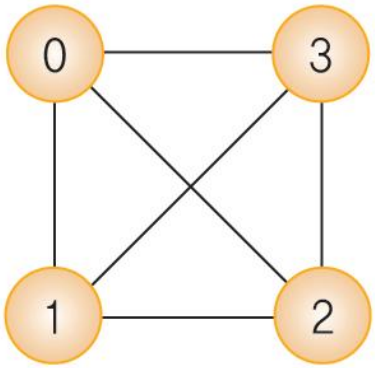
그래프의 연결정도

- 연결 그래프(connected graph)
  - 무방향 그래프 G에 있는 모든 정점쌍에 대하여 항상 경로 존재
  - G2는 비연결 그래프임



그래프의 연결정도

- 완전 그래프(complete graph)
  - 모든 정점이 연결되어 있는 그래프
  - n개의 정점을 가진 무방향 완전그래프의 간선의 수: $n \times (n-1)/2$
  - n=4, 간선의 수 = $(4 \times 3)/2 = 6$



그래프 ADT

.객체: 정점의 집합과 간선의 집합

.연산:

- create_graph() ::= 그래프를 생성한다.
- init(g) ::= 그래프 g를 초기화한다.
- insert_vertex(g,v) ::= 그래프 g에 정점 v를 삽입한다.
- insert_edge(g,u,v) ::= 그래프 g에 간선 (u,v)를 삽입한다.
- delete_vertex(g,v) ::= 그래프 g의 정점 v를 삭제한다.
- delete_edge(g,u,v) ::= 그래프 g의 간선 (u,v)를 삭제한다.
- is_empty(g) ::= 그래프 g가 공백 상태인지 확인한다.
- adjacent(v) ::= 정점 v에 인접한 정점들의 리스트를 반환한다.
- destroy_graph(g) ::= 그래프 g를 제거한다.

그래프 표현 방법

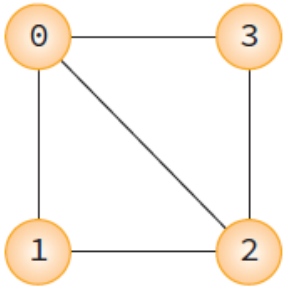
- 인접행렬 (adjacent matrix) 방법
- 인접 리스트(adjacent list) 방법

인접행렬 방법

- 인접행렬 (adjacent matrix) 방법

  if(간선 (i, j)가 그래프에 존재) M[i][j] = 1,

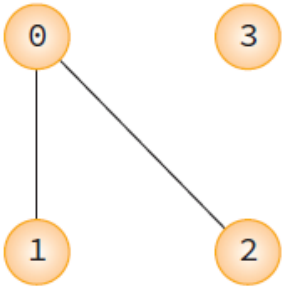
  그렇지않으면 M[i][j] = 0.



정점 0의 차수
=0+1+1+1=3

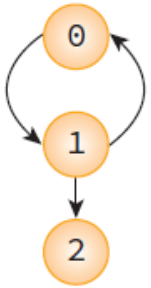
	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	0
2	1	1	0	1
3	1	0	1	0

(a)



	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0

(b)

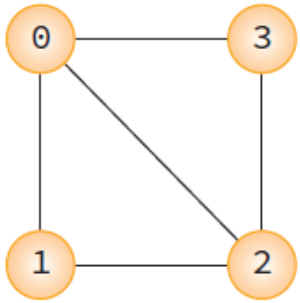


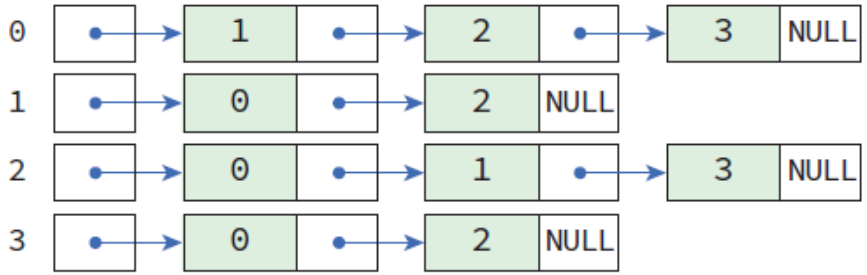
	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	1
2	0	0	0

(c)

인접 리스트 방법

- 인접리스트 (adjacency list) 방법
  - 각 정점에 인접한 정점들을 연결리스트로 표현





인접 행렬 구현

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define MAX_VERTICES 50
typedef struct GraphType {
        int n;       // 정점의 개수
        int adj_mat[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];
} GraphType;

// 그래프 초기화
void init(GraphType* g)
{
        int r, c;
        g->n = 0;
        for (r = 0; r<MAX_VERTICES; r++)
                for (c = 0; c<MAX_VERTICES; c++)
                        g->adj_mat[r][c] = 0;
}
```

인접 행렬 구현

```
// 정점 삽입 연산
void insert_vertex(GraphType* g, int v)
{
        if (((g->n) + 1) > MAX_VERTICES) {
                fprintf(stderr, "그래프: 정점의 개수 초과");
                return;
        }
        g->n++;
}
// 간선 삽입 연산
void insert_edge(GraphType* g, int start, int end)
{
        if (start >= g->n || end >= g->n) {
                fprintf(stderr, "그래프: 정점 번호 오류");
                return;
        }
        g->adj_mat[start][end] = 1;
        g->adj_mat[end][start] = 1;
}
```

인접 행렬 구현

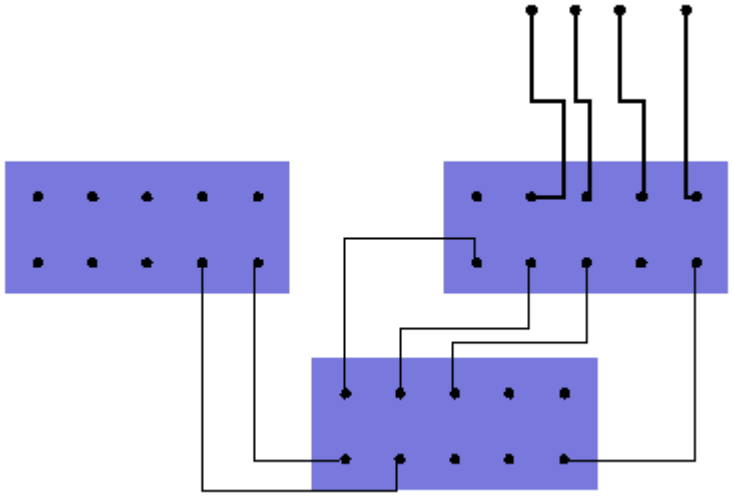
```
void main()
{
        GraphType *g;
        g = (GraphType *)malloc(sizeof(GraphType));
        init(g);
        for(int i=0;i<4;i++)

        insert_vertex(g, i);
        insert_edge(g, 0, 1);
        insert_edge(g, 0, 2);
        insert_edge(g, 0, 3);
        insert_edge(g, 1, 2);
        insert_edge(g, 2, 3);
        print_adj_mat(g);

        free(g);
}
```

그래프 탐색

- 하나의 정점으로부터 시작하여 차례대로 모든 정점들을 한번씩 방문
- 많은 문제들이 단순히 그래프의 노드를 탐색하는 것으로 해결

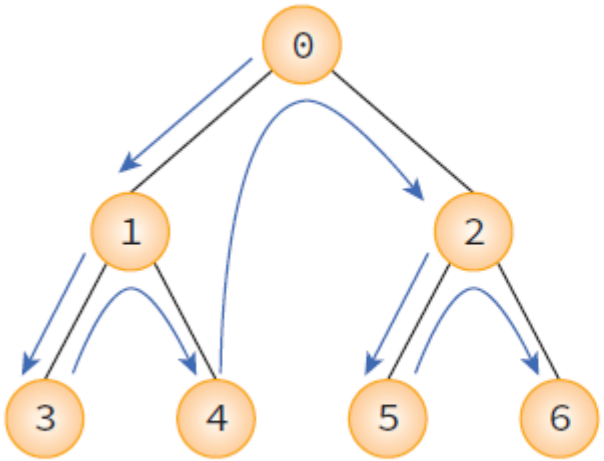
  (예) 도로망에서 특정 도시에서 다른 도시로 갈 수 있는지 여부

  (예) 전자회로에서 특정 단자와 다른 단자가 서로 연결되어 있는지 여부

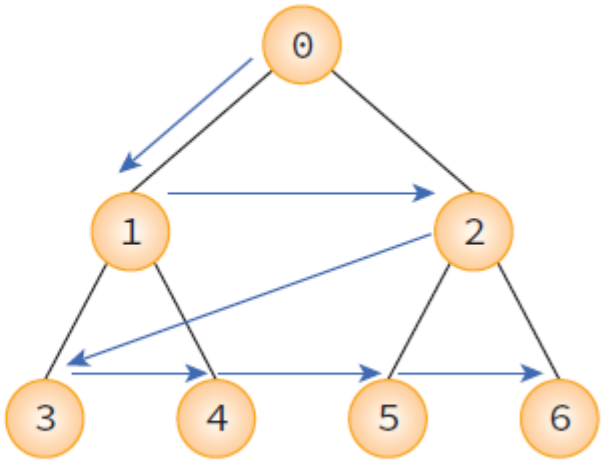


그래프 탐색

- 깊이 우선 탐색(DFS: depth first search)
- 너비 우선 탐색(BFS: breath first search)



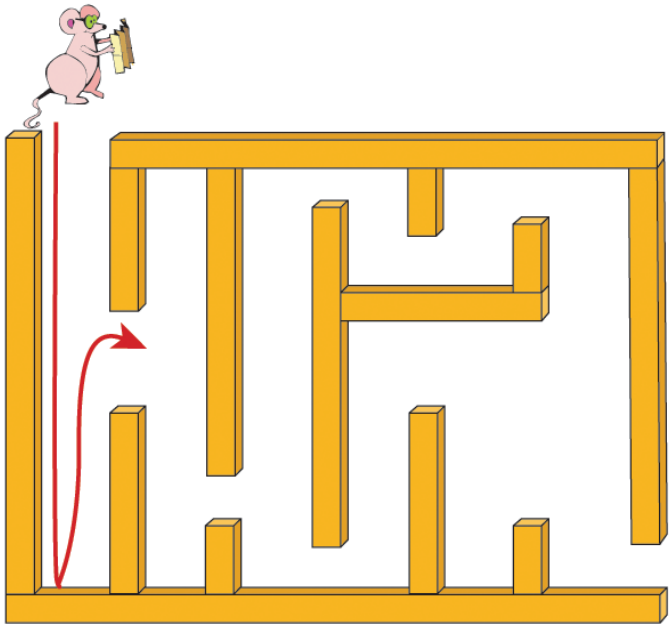
깊이 우선 탐색



너비 우선 탐색

깊이 우선 탐색(DFS)

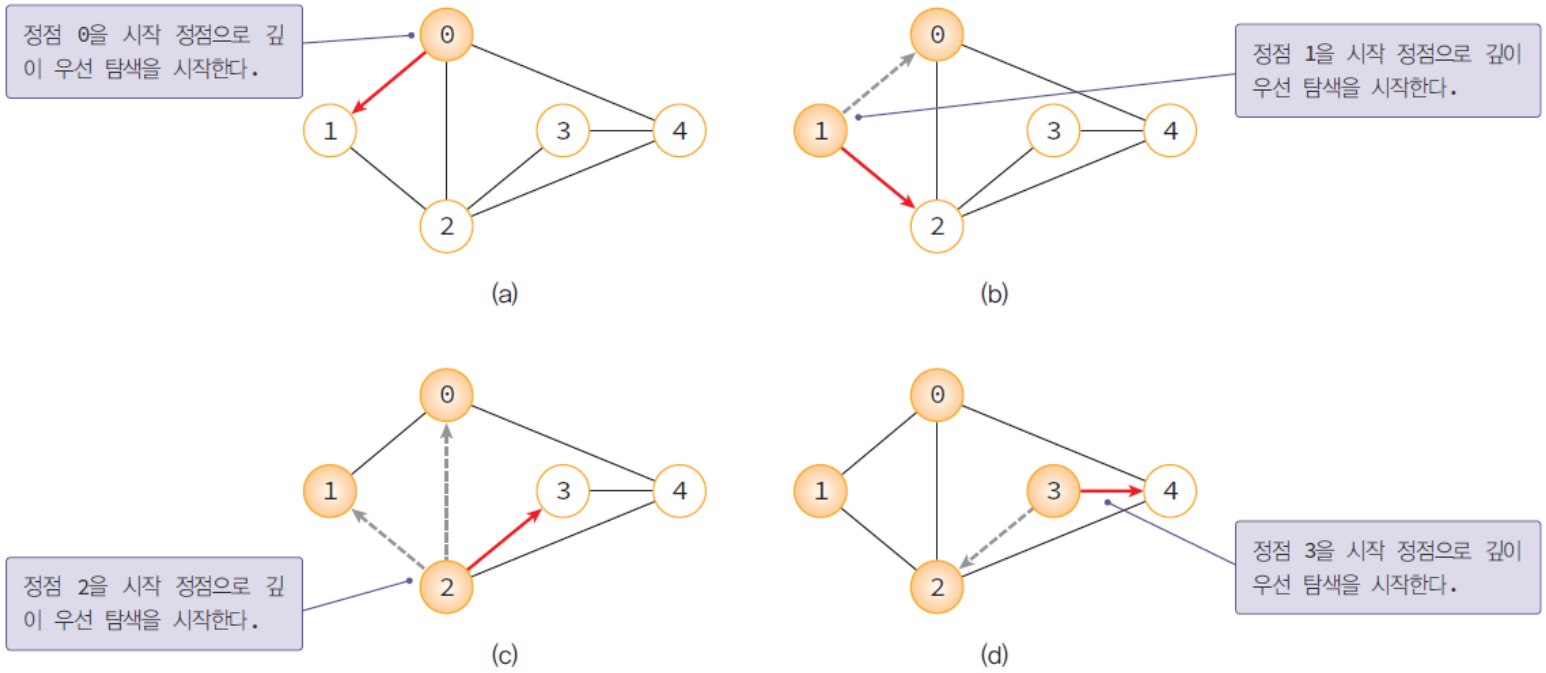
- 깊이 우선 탐색 (DFS: depth-first search)
  - 한 방향으로 갈 수 있을 때까지 가다가 더 이상 갈 수 없게 되면 가장 가까운 갈림길로 돌아와서 이 곳으로부터 다른 방향으로 다시 탐색 진행
  - 되돌아가기 위해서는 스택 필요(순환함수 호출로 묵시적인 스택 이용 가능)



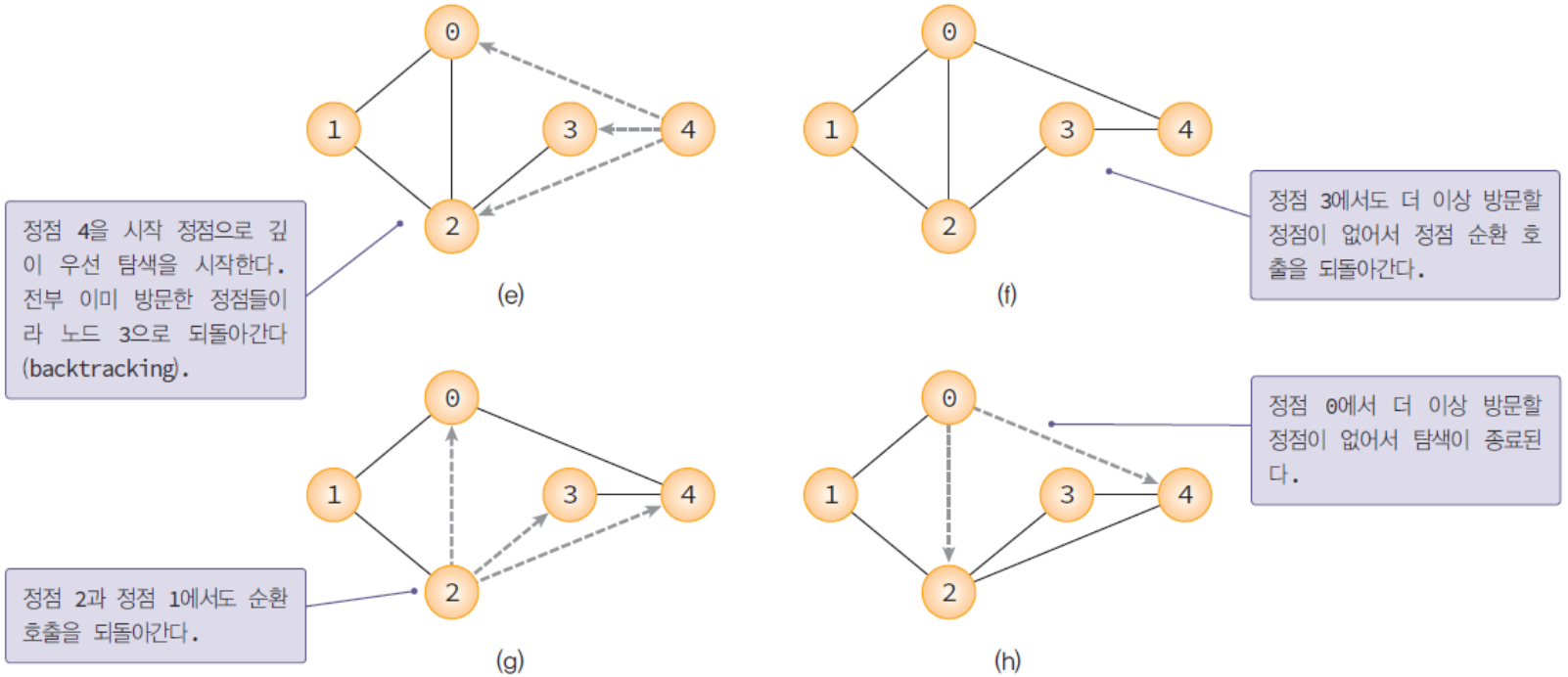
DFS 알고리즘

```
depth_first_search(v):

        v를 방문되었다고 표시;
        for all u ∈ (v에 인접한 정점) do
                if (u가 아직 방문되지 않았으면)
                        then depth_first_search(u)
```

DFS 알고리즘



DFS 알고리즘



DFS 프로그램

```
// 인접 행렬로 표현된 그래프에 대한 깊이 우선 탐색
void dfs_mat(GraphType* g, int v)
{
        int w;
        visited[v] = TRUE;                  // 정점 v의 방문 표시
        printf("정점 %d -> ", v);                   // 방문한 정점 출력
        for (w = 0; w<g->n; w++)                    // 인접 정점 탐색
                if (g->adj_mat[v][w] && !visited[w])
                        dfs_mat(g, w);          //정점 w에서 DFS 새로 시작
}
```

DFS 프로그램

```
int main(void)
{
        GraphType *g;
        g = (GraphType *)malloc(sizeof(GraphType));
        init(g);
        for (int i = 0; i<4; i++)
                insert_vertex(g, i);
        insert_edge(g, 0, 1);
        insert_edge(g, 0, 2);
        insert_edge(g, 0, 3);
        insert_edge(g, 1, 2);
        insert_edge(g, 2, 3);

        printf("깊이 우선 탐색\n");
        dfs_mat(g, 0);
        printf("\n");
        free(g);
        return 0;
}
```

실행결과

```
깊이 우선 탐색
정점 0 -> 정점 1 -> 정점 2 -> 정점 3 ->
```

DFS 프로그램(인접 리스트 버전)

```
int visited[MAX_VERTICES];

// 인접 리스트로 표현된 그래프에 대한 깊이 우선 탐색
void dfs_list(GraphType* g, int v)
{
        GraphNode* w;
        visited[v] = TRUE;                  // 정점 v의 방문 표시
        printf("정점 %d -> ", v);                    // 방문한 정점 출력
        for (w = g->adj_list[v]; w; w = w->link)// 인접 정점 탐색
                if (!visited[w->vertex])
                        dfs_list(g, w->vertex); //정점 w에서 DFS 새로 시작
}
```

DFS 프로그램(명시적 스택 사용)

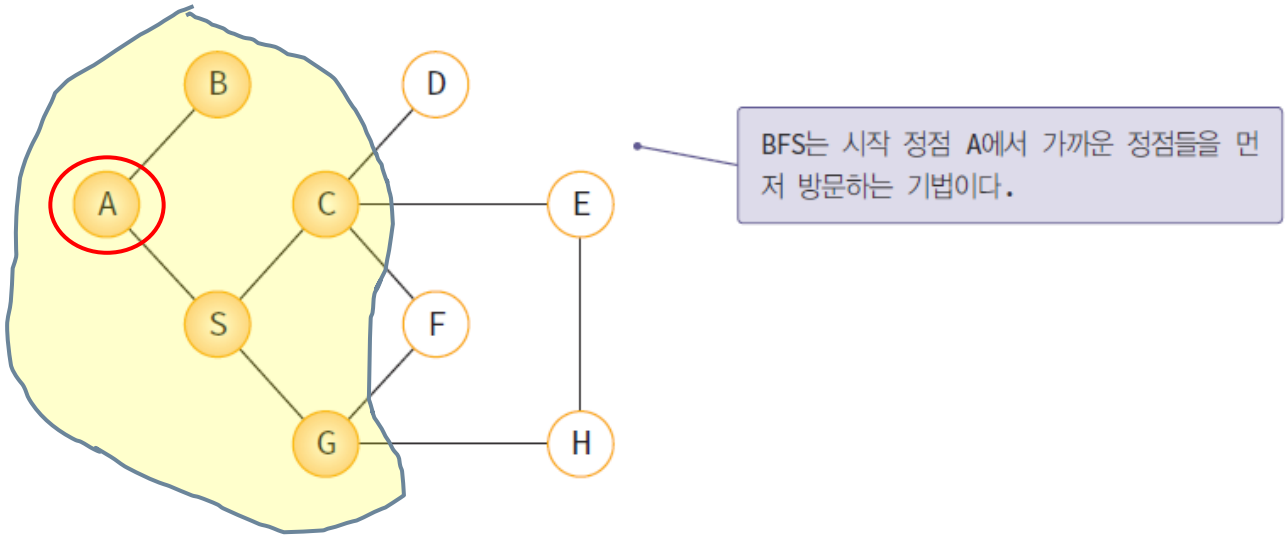
```
DFS-iterative(G, v):

스택 S를 생성한다.
S.push(v)
while (not is_empty(S)) do
   v = S.pop()
   if (v가 방문되지 않았으면)
     v를 방문되었다고 표시
     for all u ∈ (v에 인접한 정점) do
                  if (u가 아직 방문되지 않았으면)
                              S.push(u)
```

깊이우선탐색의 분석

- 인접 행렬 ->$O(n^2)$
- 인접 리스트->O(n+e)

너비우선 탐색(BFS)

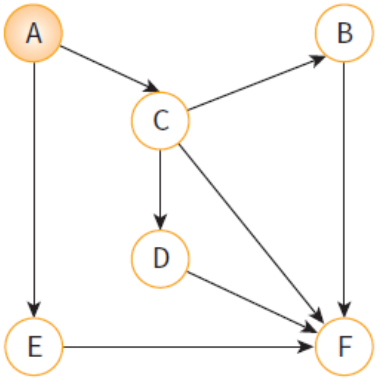
- 너비 우선 탐색(BFS: breadth-first search)
  - 시작 정점으로부터 가까운 정점을 먼저 방문하고 멀리 떨어져 있는 정점을 나중에 방문하는 순회 방법
  - 큐를 사용하여 구현됨



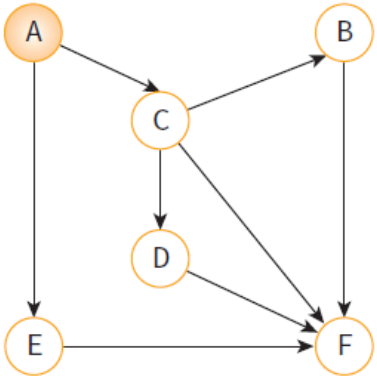
BFS 알고리즘

```
breadth_first_search(v):

v를 방문되었다고 표시;
큐 Q에 정점 v를 삽입;
while (Q가 공백이 아니면) do
        Q에서 정점 w를 삭제;
        for all u ∈ (w에 인접한 정점) do
                if (u가 아직 방문되지 않았으면)
                        then    u를 큐에 삽입;
                                u를 방문되었다고 표시;
```

너비우선 탐색(BFS)

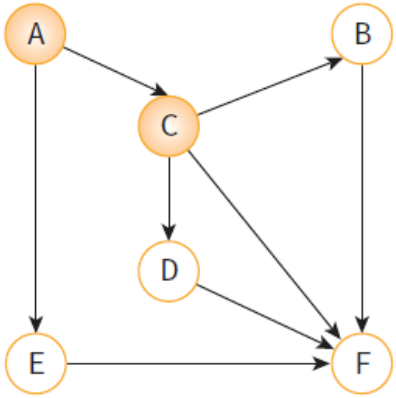


처음에는 시작 정점인 A를 큐에 추가한다.



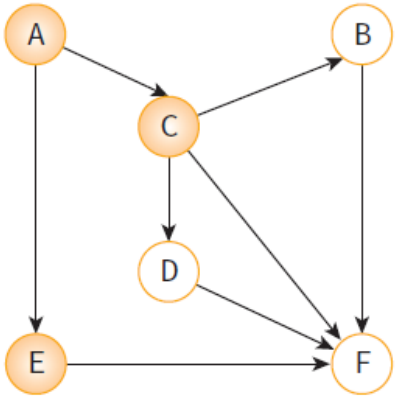
큐에서 A를 꺼내서 방문하고 정점 A의 인접 정점들을 큐에 추가한다.

너비우선 탐색(BFS)



E	B	D	F		

큐에서 C를 꺼내서 방문하고 C의 인접 정점들을 큐에 추가한다.



B	D	F			

큐에서 E를 꺼내서 방문하고 인접 정점인 F는 이미 큐에 들어 있으므로 추가하지 않는다.

BFS 프로그램(인접행렬)

```
void bfs_mat(GraphType* g, int v)
{
        int w;
        QueueType q;

        queue_init(&q);     // 큐 초기화
        visited[v] = TRUE;          // 정점 v 방문 표시
        printf("%d  방문 -> ", v);
        enqueue(&q, v);                                 // 시작 정점을 큐에 저장
        while (!is_empty(&q)) {
                v = dequeue(&q);                        // 큐에 정점 추출
                for (w = 0; w<g->n; w++)                // 인접 정점 탐색
                        if (g->adj_mat[v][w] && !visited[w]) {
                                visited[w] = TRUE;    // 방문 표시
                                printf("%d 방문 -> ", w);
                                enqueue(&q, w);         // 방문한 정점을 큐에 저장
                        }
        }
}
```

BFS 프로그램(인접행렬)

```
int main(void)
{
        GraphType *g;
        g = (GraphType *)malloc(sizeof(GraphType));
        graph_init(g);
        for (int i = 0; i<6; i++)
                insert_vertex(g, i);
        insert_edge(g, 0, 2);
        insert_edge(g, 2, 1);
        insert_edge(g, 2, 3);
        insert_edge(g, 0, 4);
        insert_edge(g, 4, 5);
        insert_edge(g, 1, 5);

        printf("너비 우선 탐색\n");
        bfs_mat(g, 0);
        printf("\n");
        free(g);
        return 0;
}
```

실행결과

```
너비 우선 탐색
0 방문 -> 2 방문 -> 4 방문 -> 1 방문 -> 3 방문 -> 5 방문 ->
```

BFS 프로그램(인접리스트)

```
void bfs_list(GraphType* g, int v)
{
        GraphNode* w;
        QueueType q;

        init(&q);                                       // 큐 초기 화
        visited[v] = TRUE;      // 정점 v 방문 표시
        printf("%d 방문 -> ", v);
        enqueue(&q, v);                                 // 시작정점을 큐에 저장
        while (!is_empty(&q)) {
                v = dequeue(&q);                        // 큐에 저장된 정점 선택
                for (w = g->adj_list[v]; w; w = w->link) //인접 정점 탐색
                        if (!visited[w->vertex]) {              // 미방문 정점 탐색
                                visited[w->vertex] = TRUE;   // 방문 표시
                                printf("%d 방문 -> ", w->vextex);
                                enqueue(&q, w->vertex);          //정점을 큐에
삽입
                        }
        }
}
```

너비우선탐색의 분석

- 인접 행렬 ->$O(n^2)$
- 인접 리스트->O(n+e)