< 행렬의 연산 >

행렬의 성분이 실수인 행렬의 덧셈과 곱셈 연산에 대하여 알아보자.

정의 1.3.1 [행렬의 상등]
행렬 A와 B의 크기가 같고 행렬의 각 성분이 서로 같으면 두 행렬은 같다. 즉, 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$과 $B=[b_{ij}]_{p\times q}$일 때, $A=B \Leftrightarrow m=p, n=q$이고 모든 $i=1,2,\cdots,m$과 $i=1,2,\cdots,n$에 대하여 $a_{ij}=b_{ij}$이다.

행렬의 덧셈과 곱셈을 정의하기 전에 덧셈과 곱셈에 관한 항등원을 먼저 정의하자.

정의 1.3.2 [영행렬과 항등행렬]
(a) 크기가 $m\times n$인 행렬의 모든 성분이 0일 때, 이 행렬을 영행렬(zero matrix)이라 하고 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{0}=[0]_{m\times n}$$

(b) $n\times n$인 정방행렬에서 대각성분이 모두 1이고 대각성분을 제외한 나머지 성분 모두가 0인 행렬을 항등행렬(identity matrix)이라 정의하고 I_n이라 표시한다. 즉, I_n은 다음과 같은 형태이다.

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

크기에 상관없이 항등행렬을 I로 나타내자.

행렬의 덧셈과 상수곱에 관하여 정의하자.

정의 1.3.3 [행렬의 연산]
(a) **(행렬의 상수곱)** c가 상수일 때, 행렬 A에 상수 c의 곱은 행렬 A의 각 성분 a_{ij}에 상수 c를 곱하는 것이다.

$$(cA)_{ij}=ca_{ij}$$

(b) **(행렬의 덧셈)** 행렬 A와 B의 크기가 같을 때, 행렬의 덧셈은 다음과 같이 정의된다. 두 행렬의 합 $A+B$의 (i,j)번째 성분 $(A+B)_{ij}$는 행렬 A의 (i,j)번째 성분 a_{ij}와 행렬 B의 (i,j)성분 b_{ij}의 합이다. 즉,

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

행렬의 상수곱과 덧셈의 정의에 의하여 크기가 같은 행렬 A와 B의 뺄셈은 다음과 같다.

$$(A-B)_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

정리 1.3.4 [행렬의 덧셈과 상수곱에 관한 연산법칙]
c_1과 c_2가 상수이고, A, B, C가 크기가 같은 행렬이며 $\mathbf{0}$를 주어진 행렬과 크기가 같은

영행렬이라 하면 다음 연산법칙이 성립한다.

(a) $A+B=B+A$

(b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $\mathbf{0}+A=A+\mathbf{0}=A$

(d) $A+(-A)=\mathbf{0}=(-A)+A$

(e) $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$

(f) $c_1(A+B)=c_1A+c_1B$

(g) 만일 $c_1A=\mathbf{0}$ 이면 $c_1=0$ 이든지 또는 $A=\mathbf{0}$ 이다.

이제 행렬의 곱셈에 관하여 정의하자.

정의 1.3.5 [행렬의 곱셈]

$A=[a_{ij}]_{m\times p}$ 이고 $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ 일 때, 두 행렬 A와 B의 곱 AB는 $m\times n$ 행렬로 정의되고 $AB=C$라 하면 행렬 C의 각각의 성분은 다음과 같다.

모든 $i=1,2,\cdots,m$ 과 $j=1,2,\cdots,n$ 에 대하여 $AB=C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 은

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

이다.

(예제 1) $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&0\\1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&-2&2\\4&-1&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&-2\\2&4\\-1&3\end{bmatrix}$

다음 행렬의 연산이 존재하면 행렬을 구하여라.

(1) $3A-4B$

(2) $B+C$

(3) AB

(4) BA

(5) DC

(6) CD

(7) AD

결론적으로 행렬의 곱 AB와 BA가 모두 정의될지라도 일반적으로 $AB\neq BA$이다. 따라서 행렬의 곱에 대한 교환법칙은 성립하지 않는다.

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 이고 $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 일 때 $AB=\mathbf{0}$ 이다. 즉 행렬 A와 B가 모두 영행렬이 아니어도 행렬의 곱 AB가 영행렬이 될 수 있다.

정리 1.3.6 [행렬의 곱셈법칙]

c가 상수이고 $A=[a_{ij}]_{m\times p}$, $B=[b_{ij}]_{p\times q}$, $C=[c_{ij}]_{q\times n}$ 이면 아래 연산이 정의되고 또한 이 연산은 다음의 성질을 만족한다.

(a) $(AB)C = A(BC)$
(b) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$, $-(AB) = (-A)B = A(-B)$
(c) $(A+B)C = AC + BC$
(d) $A(B+C) = AB + AC$
(e) $I_m A = A = A I_p$

연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

의 계수행렬은 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ 이고 상수행렬 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 이다.

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 이라 하면 위의 연립방정식은 행렬의 곱 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 로 표현된다.