< 행렬식의 존재 >

귀납법을 이용하여 **행렬식**을 정의하고, 동시에 행렬식을 계산하는 공식을 도입하고자 한다.

2×2 행렬식

행렬

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

를 체 K에서의 2×2 행렬이라 하면, A의 행렬식을 $ad-bd$로 정의한다. 또한, 행렬식은 K의 원소가 된다. 이 행렬식을

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

로 나타낸다.

행렬식은 행렬 A의 함수로 생각할 수도 있지만, 또한 A의 두 열의 함수로도 생각할 수 있다. 즉, 이 두 열을 A^1, A^2라 하면 행렬식은

$$D(A),\ \det(A),\ D(A^1,A^2)$$

등으로 나타낸다.

다음 성질은 행렬식에서 기본이 되는 성질로서 직접 계산하여 쉽게 보일 수 있다.

(i) 열벡터의 함수로서 행렬식은 선형이다.

(ii) 두 열이 같으면 행렬식은 0이다.

(iii) A가 단위행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이면, $\det(A)=1$이다.

(iv) 어떤 열의 상수배를 다른 열에 더하여도 행렬식의 값은 변하지 않는다.

(v) 두 열을 교환하면 행렬식은 부호만 바뀐다.

(vi) A의 행렬식은 그 전치행렬의 행렬식과 같다.

3×3 행렬식

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

를 3×3 행렬이라 하자. A의 행렬식을 행에 관한 전개에 의하여, 특히 첫째 항에 대한 전개로 정의하면, 즉

$$\begin{aligned}\det(A)&=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ f & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\end{aligned}$$

로 정의한다. 또한 이 합을 다음과 같이 나타낼 수도 있다. A에서 i번째 행과 j번째 열으 제외한 행렬을 A_{ij}라 하면, 위의 $\det(A)$는

$$\det(A) = a\det(A_{11}) - b\det(A_{12}) + c\det(A_{13})$$

로 나타낼 수 있다.

(예제 1) 행렬 A를

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

라 하자. 이때 행렬식 $\det(A)$를 구하여라.

3×3 행렬의 행렬식은 2×2와 마찬가지로 세 열의 함수로 생각할 수 있다. 즉, 3×3 행렬 A의 세 열을 A^1, A^2, A^3라 하면 행렬식은

$$D(A) = D(A^1, A^2, A^3)$$

으로 나타낸다.

3×3 행렬식은 다음의 성질들이 성립하고, 이것은 일반적인 경우에도 성립하므로 기술은 일반적인 경우로 하고 증명은 3×3 행렬식에서 한다.

<u>정리 1</u>

행렬식은 다음 성질을 만족한다.

(a) 각 열벡터의 함수로서 행렬식은 선형함수이다. 즉 j번째 열 A^j가 두 열벡터의 합이면, 예를 들어 $A^j = C + C'$이면

$$\begin{aligned} &\det(A^1, \cdots, C + C', \cdots, A^n) \\ &= \det(A^1, \cdots, C, \cdots, A^n) + \det(A^1, \cdots, C', \cdots, A^n) \end{aligned}$$

이고, 또한 t가 수이면

$$\det(A^1, \cdots, tA^j, \cdots, A^n) = t\det(A^1, \cdots, A^j, \cdots, A^n)$$

이 성립한다.

(b) 두 개의 인접한 열이 같으면, 즉 어떤 $j = 1, 2, \cdots, n-1$에 대해 $A^i = A^{j+1}$이면, 행렬식 $D(A) = 0$이다.

(c) 단위행렬 I의 행렬식 $D(I) = 1$이다.

위의 증명에서 3×3 행렬식의 성질을 증명하기 위해서 2×2 행렬식의 성질이 이용되었음을 알 수 있다.

3×3 행렬식의 전개에서 첫째 행을 택한 특별한 이유는 없고, 다른 행 또는 열을 택하여도 전개할 수 있다. 부호는 다음 양식에 따라 결정된다.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

3×3 행렬식이 열의 함수로서 선형이므로 삼선형(tri-linear)이라고 할 수 있다. 이는 2×2 행렬식이 겹선형(bi-linear)이 것과 같은 맥락이다.

정리 2

$\det(A)=\det(A^T)$이다.
즉 행렬의 행렬식은 그 행렬의 전치행렬의 행렬식과 같다.

(예제 2)

형렬식

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

을 셋째 열에 대하여 전개하여 계산하여라.

$n\times n$ 행렬식

정리 3

행렬식은 행과 열에 관한 전개를 만족한다. $n\times n$ 행렬 $A=[a_{ij}]$의 임의의 열 A^j에 대하여

$$D(A)=(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}\det(A_{nj})$$

가 성립한다.