< 행렬의 역행렬 >

정방행렬의 곱셈에 대한 역원인 역행렬이 존재할 때 역행렬을 구하는 방법에 대해 알아보자.

<u>정의 1</u>
항등행렬 I_n에 한 번의 기본행연산을 하여 얻어진 행렬을 **기본행렬**(elementary matrix)이라 한다.

예를 들어 2×2 항등행렬 I_2에서 얻어진 기본행렬은 다음과 같은 형태이다.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 또는 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\ (r \neq 0),\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 또는 } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}\ (s \neq 0)$$

기본행렬을 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$에 곱하면

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rb \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ rc & rd \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+sc & b+sd \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+sa & d+sb \end{bmatrix}$$

이 연산을 살펴보면 기본행렬과 같은 기본행연산을 주어진 행렬 A에 적용한 것과 같다.

(예제 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$이라 하자. 다음을 만족하는 기본행렬 E를 구하여라.

(1) $EA = B$

(2) $EA = C$

(3) $EA = D$

(예제 2) 1.2절의 예제 6에서 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$를 기약 행사다리꼴 행렬 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$로 바꾸었다. $E_n \cdots E_2 E_1 A = B$를 만족하는 기본행렬 $E_1, E_2, \cdots, E_n$을 구하여라.

(예제 3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$를 기약 행사다리꼴 행렬 B로 바꾸고 $E_n \cdots E_2 E_1 A = B$를 만족하는 기본행렬 $E_1, E_2, \cdots, E_n$을 구하여라.

<u>정의 2</u>
정방행렬 $A \in M_n$에 대하여 $AB = BA = I_n$를 만족하는 정방행렬 $B \in M_n$이 존재하면 행렬 A를 **가역행렬**(invertible matrix or non-singular matrix)이라 하고 행렬 B를 A의 **역행렬**(inverse matrix)이라 한다. 이때 $B = A^{-1}$로 나타낸다.

항등행렬 I은 $II = I$이므로 $I^{-1} = I$이다. 모든 정방행렬이 역행렬을 가지지는 않는다. 예를 들면 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

<u>정리 3</u>
역행렬이 존재하면 그 역행렬은 유일하게 한 개 존재한다.

(예제 4) 만인 $ad - bc \neq 0$이면 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$은 가역이며

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

임을 보여라. 만일 $ad - bc = 0$이면 A의 역행렬은 존재하지 않음을 보여라.

위의 정리로부터 크기가 2×2인 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$가 가역행렬이기 위한 필요충분조건은 $ad - bc \neq 0$임을 알 수 있다.

(예제 5) 다음 행렬이 가역이면 역행렬을 구하여라

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>정리 4</u>

A가 가역행렬이면 임의의 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 연립방정식 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해는 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$이고 유일하다.

(예제 6)

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$가 가역임을 보이고 연립방정식 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$의 해를 구하여라.

가역행렬은 다음 성질을 만족한다.

<u>정리 5</u>

정방행렬 A, B와 C에 대하여 $BA = I$, $AC = I$이면 $B = C$이고 A는 가역행렬이며 $A^{-1} = B = C$이다.

또한 가역행렬에 대하여 다음 정리가 성립한다.

<u>정리 6</u>

A가 정방행렬이라 하자.

(a) A가 가역행렬이면, A^{-1}도 가역행렬이고 $(A^{-1})^{-1} = A$이다.

(b) A가 가역행렬이고 c가 0이 아닌 상수이면, cA도 가역행렬이고 $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$이다.

(c) A와 B가 같은 크기의 가역행렬이면, AB도 가역행렬이고 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$이다.

(d) A가 가역행렬이면, A^T도 가역행렬이고 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$이다.

(e) A가 가역행렬이면, 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 A^n도 가역행렬이고 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$이다.

정리 6의 (e)는 유한개의 가역행렬의 곱에 대한 일반화이다. 즉, $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 같은 크기의 가역행렬이면, $A_1A_2\cdots A_n$은 가역행렬이고 역행렬은

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

이다.

가역행렬의 역행렬을 구하는 방법에 대해 알아보자.

정방행렬을 기약 행사다리꼴 행렬로 바꾸었을 때, 기약 행사다리꼴 행렬이 항등행렬인 경우와 항등행렬이 아닌 경우가 있다. 기약 행사다리꼴 행렬이 항등행렬인 경우 주어진 행렬은 가역행렬이다.

<u>정리 7</u>

기본행렬이 가역일 때, 기본행렬에 행연산을 적용한 후 얻어진 기본행렬의 역행렬은 다음과 같다.

기본행렬 E	**역행렬 E^{-1}**
i행에 $c \neq 0$을 곱한다.	i행에 $\dfrac{1}{c}$을 곱한다.
i행에 c을 곱한 것을 j행에 더한다.	i행에 $-c$을 곱한 것을 j행에 더한다.
i행과 j행을 바꾼다.	i행과 j행을 바꾼다.

(예제 7) 다음 기본행렬의 역행렬을 구하여라.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

정의 2에서는 정방행렬 A가 가역이 되려면 $AB = BA = I$를 만족하는 정방행렬 B가 존재하여야 하지만 다음 정리에 의하여 $AB = I$ 또는 $BA = I$ 중 하나만 만족하는 정방행렬 B가 존재하면 A가 가역임을 알 수 있다.

<u>정리 8</u>

A가 정방행렬이라 하자. $AB = I$ 또는 $BA = I$를 만족하는 정방행렬 B가 존재하면, A는 가역행렬이고 $B = A^{-1}$이다.

정방행렬 A가 가역행렬이면 $E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n$를 만족하는 기본행렬 $E_1, E_2, \cdots, E_k$가 존재한다. A의 역행렬 A^{-1}은 다음과 같다.

$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = E_k \cdots E_2 E_1 I$$

이는 A를 기약 행사다리꼴 행렬로 만드는 기본행연산을 항등행렬 I에 동시에 똑같이 적용하는 것과 같다.

(예제 8) 다음 행렬의 역행렬이 존재하면 역행렬을 구하여라. 이때 행렬 A를 기본행렬의 곱으로 표현하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

좀 더 간편한 방법으로 역행렬을 구하는 방법에 대해 알아보자.

(예제 9) 가역행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$의 역행렬을 구하여라.