Contents

❖ 5장 관계

- 학습목표
  - 관계의 개념을 이해하고 표현한다.
  - 관계의 성질을 이해하고 판별한다.
  - 여러 관계를 합성하여 새로운 관계의 도출을 유도한다.
  - 관계가 특정 성질을 갖도록 만든다.
  - 동치관계와 부분순서관계를 이해한다.

1. 관계의 개념

- 원소들 간의 관계 정의는 매우 중요

정의 7-1 관계(Relation, 이항관계, Binary Relation): $_aR_b$

집합 A, B가 있을 때 집합 A에서 집합 B로 가는 관계로, $A \times B$의 부분집합

$$a \in A\text{고},\ b \in B\text{일 때},\ (a, b) \in A \times B\text{이면 } {}_aR_b$$
$$(a, b) \notin A \times B\text{이면 } {}_a\not{R}_b$$

예제 5-1

집합 $A = \{a, b, c\}$, 집합 $B = \{1, 2\}$일 때, A에서 B로 가는 가능한 관계 R을 구하라.

예제 5-2

집합 $A=\{a, b, c, d\}$, 집합 $B=\{p, q, r\}$에 대해 A에서 B로 가는 관계 R이 다음과 같을 때, 표현 ${}_aR_p$, ${}_aR_q$, ${}_aR_r$, ${}_bR_p$, ${}_bR_q$, ${}_bR_r$, ${}_cR_p$, ${}_cR_q$, ${}_cR_r$, ${}_dR_p$, ${}_dR_q$, ${}_dR_r$이 바른지 판별하라.

$$R=\{(a, p), (b, p), (b, r), (c, p), (d, r)\}$$

1. 관계의 개념

정의 7-2 정의역(Domain: $dom(R)$)

집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 첫 번째 원소가 포함되어 있는 집합, 즉 집합 A

$$dom(R) = \{a \mid a \in A\}$$

정의 7-3 공변역(Codomain: $codom(R)$)

집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 두 번째 원소가 포함되어 있는 집합, 즉 집합 B

$$codom(R) = \{b \mid b \in B\}$$

정의 7-4 치역(Range: $ran(R)$)

집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R에 속한 순서쌍의 두 번째 원소들을 모아놓은 집합, 즉 공변역의 부분집합

$$ran(R) = \{b \mid (a, b) \in R\} \subseteq B$$

예제 5-3

[예제 7−2]처럼 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, 집합 $B = \{p, q, r\}$에 대해 A에서 B로 가는 관계 R이 다음과 같을 때 관계 R의 정의역, 공변역, 치역을 구하라.

$$R = \{(a, p), (b, p), (b, r), (c, p), (d, r)\}$$

1. 관계의 개념

- 관계가 이루어지는 집합이 셋 이상일 때, n항 관계

정의 7-5 n항 관계(n-ary Relation)

집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 있을 때 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$의 부분집합

예제 5-4

집합 $A = \{2, 3, 4\}$, 집합 $B = \{$이산수학, 프로그래밍$\}$, 집합 $C = \{$신정인, 최정환, 박나운$\}$일 때, 이 세 집합 사이에 가능한 관계 R을 구하라.

1. 관계의 개념

정의 7-6 역관계(Inverse Relation: R^{-1})

집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R이 있을 때, R에 대한 역관계

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

- 관계 R에서의 정의역이 역관계 R^{-1}에서는 공변역이 되고, 관계 R에서의 공변역이 역관계 R^{-1}에서의 정의역이 됨

예제 5-5

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 집합 $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$이고, A에서 B로 가는 관계 R이 다음과 같을 때 역관계 R^{-1}을 구하라.

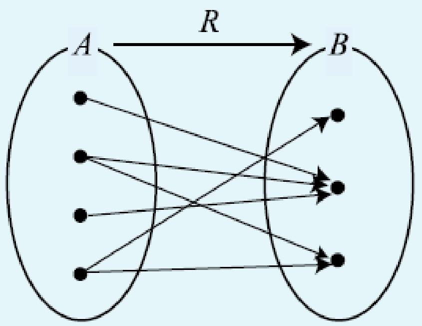
$$R = \{(1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 7), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (4, 9), (5, 6), (5, 8), (5, 10)\}$$

2. 관계의 표현

❖ 화살표 선도를 이용한 관계 표기

정의 7-7 화살표 선도(Arrow Diagram)

집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R이 있을 때, 두 집합 원소 사이의 관계를 화살표로 나타내는 방법



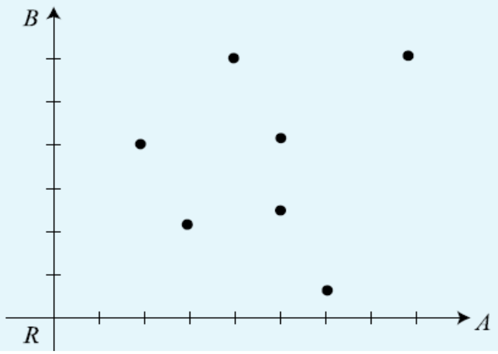
- 정의역에 해당하는 원소에서 시작하여 순서쌍의 뒤에 있는 공변역에 해당하는 원소로 향하는 화살표로 표기

2. 관계의 표현

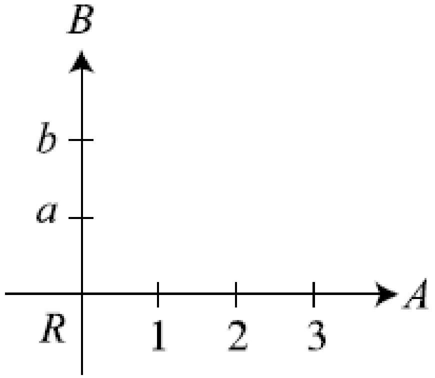
❖ 좌표도표를 이용한 관계 표기

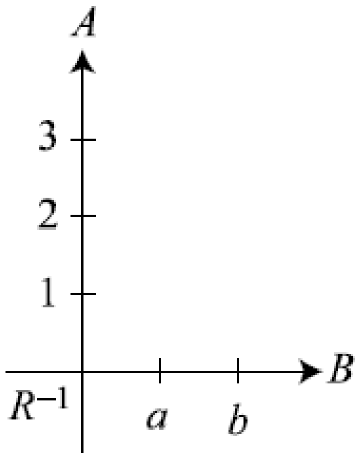
정의 7-8 좌표도표(Coordinate Diagram)

집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R이 있을 때, 집합 A(정의역)의 원소들을 x축에, 집합 B(공변역)의 원소들을 y축에 표시하여 관계 R을 좌표에 나타내는 방법



- 관계 R에 대한 역관계 R^{-1}은 관계 R의 공변역이었던 집합을 가로축으로, 관계 R의 정의역이었던 집합을 세로축으로 두어 순서쌍의 만나는 지점에 표시





2. 관계의 표현

❖ 관계행렬을 이용한 관계 표기

정의 7-9 관계행렬(Relation Matrix)

집합 $A=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$에서 집합 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$으로 가는 관계 R에 대한 $n\times m$ 행렬

$M_R=[m_{ij}]$

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & (a_i, b_j)\in R \\ 0, & (a_i, b_j)\notin R\end{cases}$$

- 관계행렬은 관계 R의 정의역 원소를 행으로 나열하고 공변역 원소들을 열로 나열하여 관계의 순서쌍에 해당하는 원소를 1로, 그렇지 않으면 0으로 표시

- 집합 A={1,2,3}과 집합 B={a,b}의 이항관계 R={(1,b),(2,a),(2,b),(3,a)}를 관계행렬로 표기하기

2. 관계의 표현

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 관계 R에 대한 관계행렬은 3×2 행렬
- 역관계 R^{-1}에 대한 관계행렬은 관계 R에서 공변역이었던 집합 B가 행으로, 정의역이었던 집합 A는 열로, 2×3 행렬이 되므로 관계 R에 대한 관계행렬 M_R과 역관계 R^{-1}에 대한 관계행렬 $M_{R^{-1}}$은 전치행렬의 관계가 있음

$$M_{R^{-1}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

예제 5-6

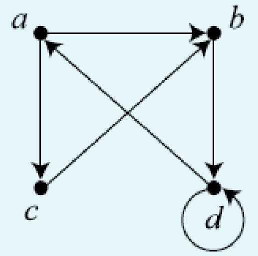
집합 $A = \{a, b, c\}$, 집합 $B = \{1, 2\}$에 대해 관계 $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$과 R^{-1}에 대한 관계행렬을 써라.

2. 관계의 표현

❖ 방향그래프를 이용한 관계 표기

정의 7-10 방향그래프(Directed Graph)

하나의 집합 A에서 집합 A로 가는 관계 R을 꼭짓점과 화살표를 이용해 나타낸 그래프



- 루프 : 원소에서 시작하여 그 원소로 끝나는 화살표가 그려짐
- 집합 A={1,2,3}이 있고 집합 A에 대한 이항관계 R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)}를 방향그래프로 그리기

예제 5-7

집합 $A = \{a, b, c, d\}$에 대해 관계 $R = \{(a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, d), (d, b), (d, d)\}$와 R^{-1}에 대한 방향그래프를 그려라.

3. 관계의 성질

❖ 반사 성질과 관련된 관계

- 반사관계

정의 7-11 반사관계(Reflexive Relation)

집합 A에 대한 관계 R이 있을 때, 모든 $a \in A$에 대해 $(a, a) \in R$인 관계

- 집합 A={1,2,3}

  R_1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

  R_2={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)}

  - 관계 R_1의 경우 집합 A에 포함되는 모든 원소에 대해 자신과 대응하는 순서쌍 (1, 1), (2, 2), (3, 3)을 포함하므로 R_1은 반사관계
  - 관계 R_2는 (1, 1)을 포함하지 않으므로 반사관계가 아님

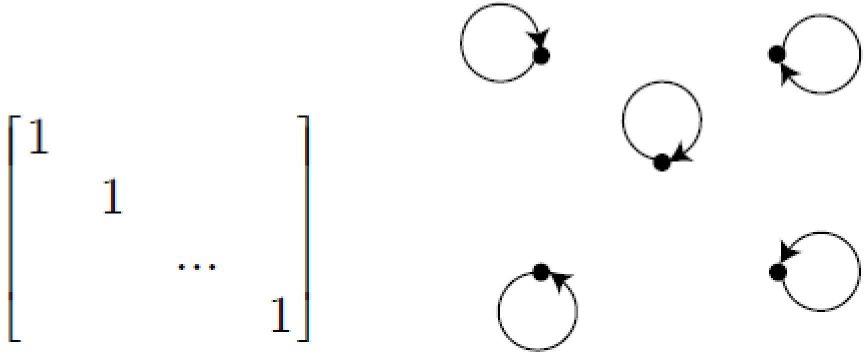
3. 관계의 성질

❖ 반사 성질과 관련된 관계

- 반사관계
  - 집합 A={1,2,3}

    R_1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

    R_2={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)}
  - 반사관계에 대한 관계행렬은 대각원소들이 모두 1로 표기되어 있고,
  - 방향그래프로 나타내면 모든 원소에 대해 루프가 존재
  - 반사관계였던 R_1을 관계행렬과 방향그래프로 그리기



[그림 7-6] 반사관계에 대한 관계행렬과 방향그래프

3. 관계의 성질

- 비반사관계

정의 7-12 비반사관계(Irreflexive Relation)

집합 A에 대한 관계 R이 있을 때, 모든 $a \in A$에 대해 $(a, a) \notin R$인 관계

- 집합 A={1,2,3}

  R_1 ={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

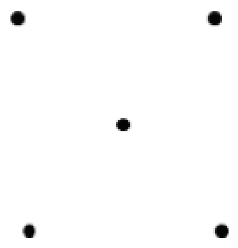
  R_2 ={(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)}

  - (a,a) 형태의 순서쌍이 하나도 존재하지 않아야 하는데, 관계 R_1은 집합 A의원소 중 1에 대해 (1,1) 존재하므로 비반사관계가 아님
  - 관계 R_2의 경우 집합 A의 모든 원소에 대해 (a,a)형태의 순서쌍이 하나도 존재하지 않으므로 비반사관계가 성립

3. 관계의 성질

- 비반사관계에 대한 관계행렬은 대각원소들이 모두 0으로 표기되어 있고, 방향그래프로 나타냈을 때는 모든 원소에 대해 루프가 존재하지 않음

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$



[그림 7-7] 비반사관계에 대한 관계행렬과 방향그래프

- 비반사관계였던 R_2을 관계행렬과 방향그래프로 그리기

  $R_2 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)\}$

3. 관계의 성질

❖ 대칭 성질과 관련된 관계

▪ 대칭관계

정의 7-13 대칭관계(Symmetric Relation)

집합 A에 대한 관계 R이 있을 때, 어떤 $a, b \in A$에 대해 $(a, b) \in R$이면 $(b, a) \in R$인 관계

- 집합 A={1,2,3}

  R1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)}

  R2={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)}

  – 관계 R_1의 경우 (1, 1)의 대칭 (1, 1), (1, 2)의 대칭 (2, 1),
  (2, 1)의 대칭 (1, 2), (2, 3)의 대칭 (3,2),
  (3, 2)의 대칭 (2, 3), (3, 3)의 대칭 (3, 3)이 모두 R_1에 존재하므로 R_1은 대칭관계

  – 관계 R_2는 (1, 2)의 대칭 (2, 1)이 R_2에 존재하지 않으므로 대칭관계가 아님

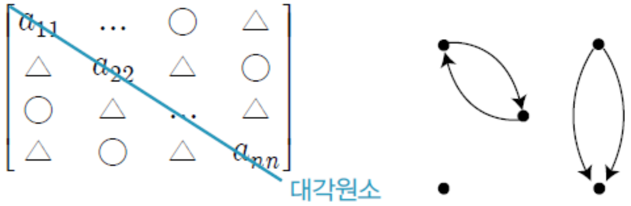
3. 관계의 성질

❖ 대칭 성질과 관련된 관계

- 대칭관계
  - 집합 A={1,2,3}

    R1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)}

    R2={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)}



[그림 7-8] 대칭관계에 대한 관계행렬과 방향그래프

  - 대칭관계에 대한 관계행렬은 대각원소들을 기준으로 마주보는 원소들이 같아함 방향그래프로 나타냈을 때는 두 개의 원소 사이에 반드시 양방향 화살표가 존재
  - 대칭관계 인 R1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)} 대한 관계행렬과 방향그래프

3. 관계의 성질

- 반대칭관계

정의 7-14 반대칭관계(Asymmetric Relation)

집합 A에 대한 관계 R이 있을 때, 어떤 $a, b \in A$에 대해 $(a,b) \in R$이고 $(b, a) \in R$이면 $a = b$인 관계

- 집합 A={1,2,3}

  R1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

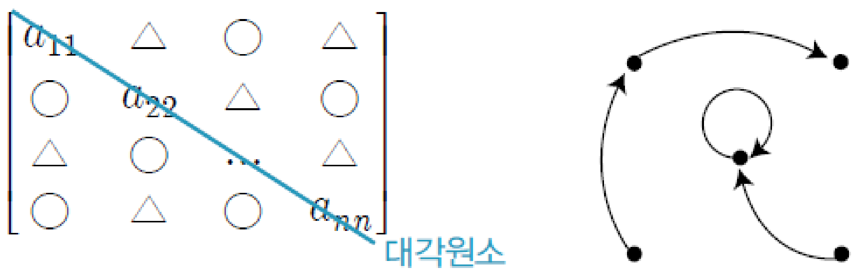
  R2={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)}

- 관계 R_1은 (1, 2)의 경우 1≠2 인데, (2, 1)이 관계 R_1에 존재. 관계 R_1은 반대칭관계가 성립안됨
- 관계 R_2의 경우, (1, 2), (1, 3), (3, 2)는 a≠b 의 형태로
- 이들에 대칭되는 순서쌍인 (2, 1), (3, 1), (2, 3)이 관계 R_2에 포함되지 않음.
- 또한 (2, 2)의 경우 인 a=b 형태.

  그러므로 R_2는 반대칭관계가 성립

3. 관계의 성질

- 반대칭관계
  - 어떤 원소가 1이면 대각원소를 기준으로 마주하는 원소가 0이어야 함
    또한 어떤 원소가 0인데 대각원소를 기준으로 마주하는 원소가 0일 수도 있음
  - 방향그래프는 두 개의 원소 사이에 단방향의 화살표만 존재하는 형태로 나타남



[그림 7-9] 반대칭관계에 대한 관계행렬과 방향그래프

3. 관계의 성질

❖ 추이관계

정의 7-15 추이관계(Transitive Relation)

집합 A에 대한 관계 R이 있을 때, 어떤 $a, b, c \in A$에 대해 $(a, b) \in R$이고 $(b, c) \in R$이면 $(a, c) \in R$인 관계

- 집합 A={1,2,3}에 대한 관계 R={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)}이 추이관계인지 알아보기

4. 합성관계

❖ 합성관계의 정의

- 두 개 이상의 관계를 합성하여 새로운 관계를 생성

학생		
학번	이름	학과

과목	
과목코드	과목명

교수		
교수코드	교수명	소속학과

담당과목	
교수코드	과목코드

수강	
과목코드	학번

담당학생	
교수코드	학번

[그림 7-10] 수강 관련 데이터베이스 3

정의 7-16 합성관계(Composition Relation: $S \circ R$)

집합 A에서 집합 B로의 관계 R이 있고 집합 B에서 집합 C로의 관계 S가 있을 때, 이 두 관계를 이용해 구하는 집합 A에서 집합 C로의 관계

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C,\ (a, b) \in R,\ (b, c) \in S\}$$

예제 5-8

세 개의 집합 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{x, y, z\}$에 대해 집합 A에서 집합 B로 가는 관계가 R이고, 집합 B에서 집합 C로의 관계가 S일 때, 합성관계 $S \circ R$을 구하고 합성관계 $S \circ R$의 정의역, 공변역, 치역도 함께 구하라.

$R=\{(a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$

$S=\{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y)\}$

4. 합성관계

- 집합 A에서 집합 B로의 관계 R과 집합 B에서 집합 C로의 관계 S가 있을 때, 관계 R에 대해서 공변역이면서 관계 S에 대해서는 정의역인 집합 B가 있기 때문에 관계 R과 S는 합성 가능

$R: A \to B$ 관계 R의 공변역

$S: B \to C$

관계 S의 정의역

- 집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R (R:A→B)과 집합 C에서 집합 B로 가는 관계 S(S:C→B)의 경우는 관계 R의 공변역(집합 B)과 관계 S의 정의역(집합 C)이 같지 않으므로 합성관계가 성립될 수 없다.

$R: A \to B$ 관계 R의 공변역

$S: C \to B$

관계 S의 정의역

- 합성관계는 교환법칙이 성립하지 않음

예제 5-9

두 집합 $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 4, 8\}$에 대해 A에서 B로 가는 관계 R과 B에서 A로 가는 관계 S가 다음과 같을 때, 합성관계 $S \circ R$과 $R \circ S$를 구하고 각 합성관계의 정의역, 공변역, 치역을 구하라.

$R = \{(1, 4), (1, 8), (6, 2), (6, 8)\}$ $\qquad$ $S = \{(2, 3), (4, 1), (8, 6)\}$

4. 합성관계

❖ 합성관계의 거듭제곱

- 집합 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$에서 집합 $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$으로 가는 관계 R은 m×n 크기의 관계행렬 M_R로 작성
- 집합 B에서 집합 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_s\}$로 가는 관계 S는 n×s 크기의 관계행렬 M_S로 작성
- 관계 S∘R은 이 두 관계행렬 M_R과 M_S의 부울곱으로 구함

$$S \circ R = M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

예제 5-10

예제 5-8 에서 제시하였던 관계 R, S에 대해 관계행렬을 이용해 합성관계 $S \circ R$을 구하라.

$$R = \{(a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$

$$S = \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y)\}$$

정의 7-17 합성관계의 거듭제곱: R^n

집합 A에 대한 관계 R에 대하여 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 일 때 거듭제곱

$$R^n = \begin{cases} R & n = 1 \text{ 일 때} \\ R^{n-1} \circ R & n > 1 \text{ 일 때} \end{cases}$$

예제 5-11

집합 $A = \{1, 2, 3\}$에 대한 관계 R이 다음과 같을 때, R^2, R^3, R^4를 구하라.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 합성관계

정리 7-1 **추이관계와 거듭제곱의 관계**

기수[Cardinality]가 n인 집합 A에 대한 관계 R이 추이관계인 필요충분조건은 모든 양의 정수 n에 대하여 $R^n \subseteq R$이다.

증명

기본가정) $n=1$일 때, $R^1 \subseteq R$로 성립한다.

귀납가정) $n=k$일 때, $R^k \subseteq R$로 가정한다.

귀납증명) $n=k+1$일 때, $R^{k+1} \subseteq R$임을 증명한다.

$(x,y) \in R^{k+1}$이면, $R^{k+1} = R^k \circ R$이기 때문에 $(x,y) \in R^k \circ R$이 된다. 그러므로 $(x,z) \in R$이고 $(z,y) \in R^k$인 z가 존재한다. 귀납가정에서 $R^k \subseteq R$이므로 $(z,y) \in R$이다. 결국 $(z,y) \in R$이고, $(x,z) \in R$이므로 $(x,y) \in R$이다. 따라서 $R^{k+1} \subseteq R$이 성립한다.

$\therefore$ 모든 양의 정수 n에 대하여 $R^n \subseteq R$이다.

예제 5-12

집합 $A = \{1, 2, 3\}$에 대한 관계 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$이 추이관계임을 밝혀라.

5. 관계의 폐포

❖ 폐포의 정의

- 폐포 : 원래의 관계에 순서쌍 원소를 추가하여 특정 성질에 맞게 만든 것

정의 7-18 폐포(Closure)

집합 A에 대한 관계를 R이라 하고, 관계가 가질 수 있는 성질을 P라고 할 때, 집합 A에 대한 관계 S가 관계 R을 포함하면서 성질 P를 갖는다면 S를 R에 대한 P의 폐포라고 한다.

❖ 반사폐포

정의 7-19 반사폐포(Reflexive Closure)

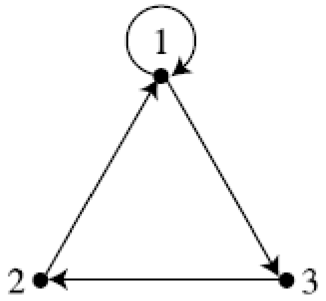
집합 A에 대해 관계 R을 포함하면서 반사관계를 갖는 관계 S

$$S = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

5. 관계의 폐포

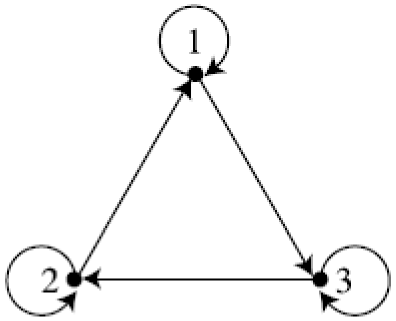
- 집합 A={1,2,3}에 대한 관계 R={(1,1),(1,3),(2,1),(3,2)}가 있을 때, 관계R은 (2,2) ∉ R , (3,3) ∉ R이기 때문에 반사관계가 아님
- 관계 R에 대한 반사폐포인 관계 S는 관계 R의 원소들과 함께 (2,2),(3,3) 가지고 있어야 하므로 관계 R에 대한 반사폐포인 관계 S ={(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)} 관계 S의 성질은 반사관계임
- 집합 A={1,2,3}에 대한 관계 R={(1,1),(1,3),(2,1),(3,2)} 에 대한 반사폐포 S를 관계 행렬과 방향그래프로 구하기

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



관계 R

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



반사폐포 S

[그림 7-11] 관계 R에 대한 반사폐포인 관계 S

정의 7-20 대칭폐포

- 집합 A에 대해 관계 R을 포함하면서 대칭관계를 갖는 관계 S

  $S = R \cup \{(b,a) \in A \times A \mid (a,b) \in R\} = R \cup R^{-1}$

- 대칭폐포 역시 이전 관계를 유지하면서 대칭관계가 되도록 필요한 순서쌍을 추가하는 것
- 예)
  - 집합 A={1,2,3}에 대한 관계 R={(1,1),(1,3),(2,1),(3,2)}를 이용해 대칭폐포인 관계 S를 구하면
  - 관계 R에서 (1,3)의 대칭인 (3,1)이 추가
  - 관계 R에서 (2,1)의 대칭인 (1,2)이 추가
  - 관계 R에서 (3,2)의 대칭인 (2,3)이 추가
  - 그러므로 S= R ∪ {(3,1),(1,2),(2,3)} ={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)}
  - 이것은 관계 $R \cup R^{-1}$ 로도 구할수 있다.
  - R^{-1}={(1,1),(3,1),(1,2),(2,3)} 그러므로 $S = R \cup R^{-1}$ ={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)}

5. 관계의 폐포

❖ 추이폐포

정의 7-21 추이폐포(Transitive Closure)

집합 A에 대해 관계 R을 포함하면서 대칭관계를 갖는 관계 S

$$S = R \cup \{(a,c) \in A \times A \mid (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\}$$

- 집합 A={1,2,3}에 대한 관계 R={(1,1),(1,3),(2,1),(3,2)} 대해 추이폐포인 관계 S를 구해보기
  - (1,3)과 (3,2)가 관계 R에 존재하므로 각 순서쌍의 앞뒤 원소들을 이용해 (1,2)가 추가
  - (R∪ {(1,2)}) (2,1)과 (1,3)또한 관계 R에 존재해 각 순서쌍 앞뒤 원소들을 이용해 (2,3)이 추가
  - (R∪ {(1,2),(2,3)}) 또, (3,2)와 (2,1)이 관계 R에 존재하므로 (3,1)이 추가
  - 현재 (R∪ {(1,2),(2,3),(3,1)})
  - 새로 추가된 순서쌍 원소들 {(1,2),(2,3),(3,1)} 에 대해서도 추이폐포가 되도록 순서쌍을 추가
  - 즉 관계 R에 있는 (1,3)과 새로 추가된 (3,1)에 의해 (3,3)이 새로이 추가되며, 관계 R에 있는 (2,1)과 새로 추가된 (1,2)에 의해 (2,2)가 추가
  - ∴ 관계 R에 대한 추이폐포인 관계 S={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}

5. 관계의 폐포

- 연결관계

정의 7-22 연결관계(Connectivity Closure: R^*)

원소의 개수가 n인 집합 A에 대한 관계 R에 대하여

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$

정리 7-2 연결관계와 추이관계

연결관계 R^*는 관계 R의 추이폐포다.

예제 5-13

집합 $A = \{a, b, c, d\}$에 대한 관계 $R = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, a)\}$에 대해 추이폐포인 관계 S를 연결관계를 이용하여 구하라.

6. 동치관계와 부분순서관계

❖ 동치관계

- 동치는 ‘같다’라는 의미
- 동치관계라는 것은 집합의 원소들이 ‘같다’는 것을 의미

정의 7-23 동치관계(Equivalence Relation)

반사관계, 대칭관계, 추이관계가 모두 성립하는 관계

예제 5-14

집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대한 관계 $R = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (3, 4),\ (4, 3),$ $(4, 4)\}$가 동치관계인지 판별하라.

6. 동치관계와 부분순서관계

정의 7-24 동치류(Equivalence Class: $[a]$)

집합 A에 대한 관계 R이 동치관계일 때, 집합 A의 각 원소 a와 순서쌍을 이루는 원소들의 집합

$$[a] = \{x \mid (a, x) \in R\}$$

예제 5-15

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$에 대한 관계 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$가 동치관계인지 판별하라.

정리 7-3 동치류와 분할

집합 A에 대한 관계 R이 동치관계일 때, 동치류 집합 $S=\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$는 다음과 같은 특징을 갖는다.

(1) $i=1, 2, \dots, k$일 때, $A_i \neq \varnothing$

(2) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$

(3) $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \varnothing$

예제 5-16

예제 5-15 에서 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대한 관계 $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$이 동치관계임을 구해고, 동치류가 $[1]=[2]=\{1, 2\}$, $[3]=[4]=\{3, 4\}$임을 알 수 있다. 이 동치류 집합이 분할임을 증명하라.

6. 동치관계와 부분순서관계

❖ 부분순서관계

정의 7-25 부분순서관계(Partial Order Relation)

집합 A에 대한 관계 R이 반사관계, 반대칭관계, 추이관계가 성립하는 관계

정의 7-26 비교가능(Comparable), 비교불가능(Noncomparable)

집합 A에 대한 관계 R이 부분순서관계이고 $a, b \in A$이고 $(a, b) \in R$ 또는 $(b, a) \in R$일 때, a와 b는 비교가능이라 하고 $a \preccurlyeq b$ 또는 $b \preccurlyeq a$로 표기한다.

반면, $(a, b) \notin R$ 또는 $(b, a) \notin R$일 때는 a와 b는 비교불가능이라고 하고 $a \not\preccurlyeq b$ 또는 $b \not\preccurlyeq a$로 표기한다.

정의 7-27 완전순서(Total Order)

집합 A에 대한 관계 R이 부분순서관계이고 집합 A의 모든 원소들을 그 관계에서 비교할 수 있으면 관계 R을 완전순서관계Total Order Relation라고 하고, 이때 집합 A를 완전순서집합Total Order Set이라고 한다.

6. 동치관계와 부분순서관계

- 하세도표
  - 방향그래프와 부분순서관계의 성질을 이용하여 표기하는 방식

정리 7-4 하세도표 그리는 규칙

(1) 부분순서관계에 대한 방향그래프에서 루프는 생략한다.

(2) 부분순서집합 A의 원소 a, b에 대해 $a \neq b$이고 $a \preccurlyeq b$이면, 정점 a를 정점 b보다 아래쪽에 그린다.

(3) $a \neq b$고 $a \preccurlyeq b$일 때, $a \preccurlyeq k \preccurlyeq b$이고 $a \neq k$이면서 $k \neq b$인 k가 집합 A에 존재하지 않으면 a에서 b로 가는 선을 그린다.

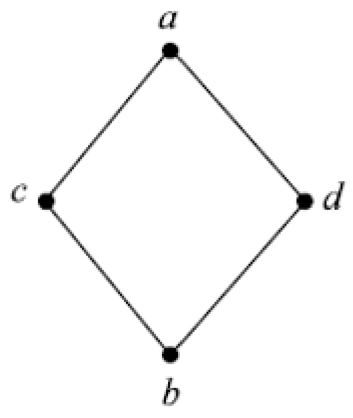
- 규칙 (1)은 부분순서관계는 반사관계가 성립하기 때문에 루프가 생략 가능함
- 규칙 (2)는 부분순서관계는 반대칭관계가 성립하기 때문
- 규칙 (3)의 경우는 부분순서관계는 추이관계가 성립하기 때문

6. 동치관계와 부분순서관계

정의 7-28 극대원소(Maximal Element)

부분순서집합 A의 원소 a에 대해 $a < b$인 원소 b가 A에 존재하지 않을 때 원소 a

- 극대원소는 집합 A에 대한 부분순서관계 R을 하세도표로 표현했을 때 가장 상위에 위치하는 하나 이상의 원소들로, 부분순서집합 A 에 포함되는 원소들 중 가장 우선순위가 높은 원소들을 의미, 하지만 이 극대원소들 간의 우선순위는 같음



정의 7-29 극소원소(Minimal Element)

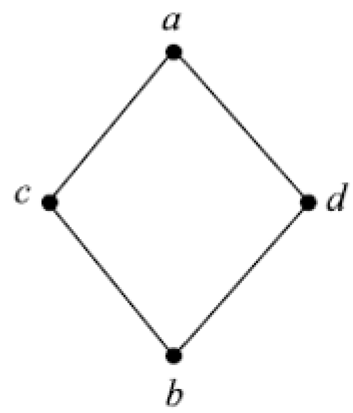
부분순서집합 A의 원소 a에 대해 $b < a$인 원소 b가 A에 존재하지 않을 때 원소 a

- 극소원소는 집합 A에 대한 부분순서관계 R을 하세도표로 표현했을 때 가장 하위에 위치하는 하나 이상의 원소들로, 부분순서집합 A 에 포함되는 원소들 중 가장 우선순위가 낮은 원소들을 의미

6. 동치관계와 부분순서관계

정의 7-30 최대원소(Greatest Element)

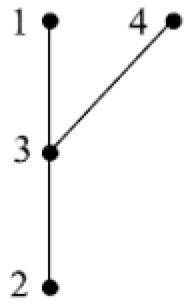
부분순서집합 A의 원소 a에 대해 $a \preccurlyeq b$인 A의 원소 b



- 최대원소는 집합 A에 대한 부분순서관계 R을 하세도표로 표현했을 때 가장 상위에 위치하는 단 하나의 원소
- 부분순서집합 A에 포함되는 원소들 중 가장 우선순위가 높은 원소를 의미

정의 7-31 최소원소(Least Element)

부분순서집합 A의 원소 a에 대해 $b \preccurlyeq a$인 A의 원소 b



- 최소원소는 집합 A에 대한 부분순서관계 R을 하세도표로 표현했을 때 가장 하위에 위치하는 단 하나의 원소
- 부분순서집합 A에 포함되는 원소들 중 가장 우선순위가 낮은 원소를 의미