

## 4 확률과 확률분포

### Topics:

- 4.2 확률의 정의
- 4.3 확률의 계산
- 4.4 확률의 법칙
- 4.5 베이즈의 정리
- 4.6 이산확률변수
- 4.7 두 확률변수의 결합분포

## 4.2 확률의 정의

### Topics:

- 상대적 접근
- 고전적 접근
- 주관적 접근
- 공리적 접근

### 상대적 접근:

확률(probability)은 똑같은 실험을 무수히 많이 반복할 때 어떤 일이 일어나는 \_\_\_\_\_을 극한적인 개념으로 정의

- 예: 윷이 나온 횟수

	A	B	C	D	E	F	G
1	윷이 나온 횟수	1	3	7	33	...	667
2	던진 횟수	10	50	100	500	...	10000
3	윷이 나온 비율	0.1	0.06	0.07	0.066	...	0.067

### 고전적 접근: 표본공간의 모든 원소가 일어날 가능성이 같은 경우에 사건 A의 확률은

$$P(A) = \frac{\text{사건 A에 속하는 원소의 개수}}{\text{표본공간 전체 원소의 개수}}$$

- 예: 동전의 앞면과 뒷면이 나올 가능성은 똑같다고 생각할 수 있으므로 무수히 많은 실험을 할 경우 앞면과 뒷면이 나올 확률은  $\frac{1}{2}$ 이라 할 수 있다.
- 표본공간(sample space)과 사건(event)의 정의:

- 예: 주사위를 던질 때 표본공간은?

주관적 접근: 믿음에 대한 정도가 무엇인가?

---

공리적 접근:

표본공간이 사건  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ 들로 구성되었을 때 기본 공리의 예:

- (1)
- (2)
- (3)

### 4.3 확률의 계산

Topics:

- 나뭇가지 그림
- 조합

**나뭇가지 그림(tree diagram):** 복잡한 문제를 도표로 그려 이해하기 쉽게 한 것

- 예: 5마리의 말이 있다. 이 중 3마리의 말을 선택하였을 때 1, 2등이 포함되어 있을 확률은 얼마인가?  
(단, 등수가 같은 말은 없다.)

**조합(combination):** 서로 다른  $n$ 개 중 비복원추출로 순서에 상관없이  $r$ 개를 뽑는 방법의 수

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- 복원추출과 비복원추출이란?
- 예: 조합을 이용하여 위 문제를 해결한다면?
- 예: 불량품 4개가 섞인 50개의 제품 중에서 비복원추출로 랜덤하게 5개를 뽑아 검사할 때 2개의 불량품이 발견될 확률은?

## 4.4 확률의 법칙

### Topics:

- 덧셈법칙
- 조건부확률
- 곱셈법칙
- 여사건과 확률의 분할법칙

### 덧셈법칙:

(1)  $A \cap B \neq \emptyset$ 일 때:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(2) 서로 배반인 사건(mutually exclusive event)일 때:

$$P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- 벤다이어그램(Venn diagram): 집합들 사이의 관계를 도형으로 표현
- 예: 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수이거나 또는 2의 배수일 확률은?

- 예: 52장의 트럼프 카드에서 랜덤하게 한 장을 뽑을 때 킹이나 검은 색 무늬 카드가 나올 확률은?

- 예: 52장의 트럼프 카드에서 랜덤하게 한 장을 뽑을 때 킹이나 퀸 카드가 나올 확률은?

**조건부 확률(conditional probability):** 어떤 상황이 조건으로 걸려 있는 상태에서의 확률

$$P(B|A) = \quad \quad \quad \text{혹은} \quad P(A|B) =$$

(단,  $P(A) > 0$  또는  $P(B) > 0$ )

- 예: 주사위를 한 번 던질 때 눈의 수가 4 이상일 때 홀수가 나올 확률은?

- 예: 통계학 수강생 중에서 20%가 A학점을 받았으며, 1학년 중에서 A학점을 받은 학생은 전체 수강생의 15%라 한다. 랜덤하게 뽑은 한 학생이 A학점을 받았을 때 그 학생이 1학년일 확률은?

	A	B	C	D	E	F	G
1	통계시험	1학년	그 외 학년				
2	A학점	0.15	0.05	0.2			
3	그 외 학점	0.35	0.45	0.8			
4		0.5	0.5				

- 예: 취업상황에서 여학생 중 대학원을 선택한 확률은?

	A	B	C	D	E	F	G
1	취업상황	일반직	전문직	유학	대학원	미결정	
2	남	0.27	0.1	0.03	0.07	0.03	0.5
3	여	0.28	0.1	0.02	0.08	0.02	0.5
4		0.55	0.2	0.05	0.15	0.05	

**곰셈법칙:**

$$P(A \cap B) =$$

$$\text{혹은 } P(A \cap B) =$$

- 예: 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 차례로 꺼낸다고 하자.  
이 때 처음 꺼낸 공이 흰 공이면 그 공만 다시 되돌려 넣고 두 번째 공을 꺼내며,  
만약 처음 꺼낸 공이 검은 공이면 검은 공 하나를 더 추가해서 넣은 후 두 번째 공을 꺼낸다.  
처음 공이 검은 공이고 두 번째 공이 흰 공일 확률은?
- 예: 취업상황에서 일반직 남학생 확률은?
- 예: 주사위를 두 번 던지는 실험에서 처음 눈이 홀수 인 사건을 A, 두 번째 눈이 홀수인 사건을 B라 할 때,  
 $P(B|A)$ 와  $P(B)$ 는?
- 예: 두 명의 궁수가 동시에 과녁에 활을 쏘려고 한다. 두 궁수가 과녁에 활을 명중시킬 확률이 각각 0.7,  
0.6이라 할 때, 두 명 모두가 과녁에 활을 명중시킬 확률은?
- 예: 취업상황에서 여학생중 대학원에 간 확률과 대학원에 간 확률을 비교하면?

## 여사건과 확률의 분할법칙:

$$\begin{aligned} \text{사건 } A \text{가 일어나지 않을 사건} &= A^C \\ P(A) &= \end{aligned}$$

- 예: 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 차례로 꺼낸다고 하자.  
이 때 처음 꺼낸 공이 흰 공이면 그 공만 다시 되돌려 넣고 두 번째 공을 꺼내며,  
만약 처음 꺼낸 공이 검은 공이면 검은 공 하나를 더 추가해서 넣은 후 두 번째 공을 꺼낸다.  
위 시행에서 두 개의 공 중 적어도 하나가 검은 공일 확률은?
- 예: 위 시행에서 두 번째 공이 흰 공일 확률은? 벤다이어그램으로 구성하면?
- 예: 평소에 하는 말 중 70%가 거짓말인 사람에게 거짓말탐지기로 어떤 물음에 대한 그 사람의 대답이 거짓인지 참인지를 조사하려 한다. 이 거짓말탐지기가 90%의 정확성을 가지고 있다고 할 때, 그 사람의 대답이 거짓이라는 조사결과가 나올 확률은?



## 4.5 베이즈의 정리

### Topics:

- 사전확률, 사후확률
- 베이즈 정리

---

### 사전확률(prior probability)과 사후확률(posterior probability):

어떤 시행결과에서 나온 정보를 이용해서 어떤 사건의 처음 확률을 개선할 수 있는데,  
이 때 처음의 확률은 \_\_\_\_\_, 수정된 확률은 \_\_\_\_\_

- 예: 거짓말탐지기에서 조사결과가 '거짓'으로 나왔을 때 그 사람이 실제로 거짓말을 했을 조건부확률은?
- 예: 자동차의 고장 원인과 사전 원인은?

**베이즈 정리(Bayes Theorem):**

(1) 두 사건  $A_1, A_2$ 에 대해서,

$$P(A_1|B) =$$

(2) (일반화) 서로 배반인 사건  $A_1, A_2, \dots, A_n$  중 하나는 반드시 일어날 때,

$$P(A_i|B) =$$

- 예: 한 보험회사에서 사람들의 성향을 두 가지 부류로 나눌 수 있다고 생각한다. 사고를 잘 일으키는 성향과 그렇지 않은 성향으로 나누는데, 인구의 30%는 사고를 잘 일으키는 성향을 가진 부류에 속한다고 가정하자.

각 부류의 사람들이 보험 가입 후 1년 안에 사고를 일으키는 확률은 경험에 의하면 0.4, 0.2라고 알려져 있다.

(1) 그러면 이 회사에서 새로운 보험상품을 개발하여 판매했을 때, 가입자 중 한 사람이 1년 안에 사고를 일으킬 확률은?

(2) 또한 새로운 보험가입자가 1년 안에 사고를 일으켰을 때, 그 사람이 사고를 일으키는 성향을 가진 부류의 사람일 확률은?