< 행렬식의 성질과 크래머 법칙 >

행렬식을 효율적으로 계산하기 위해서는 앞 자료에서 다룬 정리 1의 성질 3개 외에도 추가적인 성질이 필요하다.

정리 1

$n \times n$ 행렬식은 추가적으로 다음 성질을 만족한다.

(a) 인접한 두 열을 바꾸면 행렬식은 부호만 바뀐다. 즉 j가 $1 \le j \le n$인 정수이면

$$D(\cdots, A^{j+1}, A^{j}, \cdots) = -D(\cdots, A^{j}, A^{j+1}, \cdots)$$

이다.

(b)행렬 A에서 두 열 A^i, A^j가 같고 $i \neq j$이면 $D(A) = 0$이다.

(c) i, j가 $1 \le i, j \le n$이고 $i \neq j$인 정수라고 하자. i번째 열과 j번째 열으 교환하면 행렬식의 부호만 바뀐다. 즉

$$D(\cdots, A^{j}, \cdots, A^{i}, \cdots) = -D(\cdots, A^{i}, \cdots, A^{j}, \cdots)$$

이다.

(d) 어떤 열의 스칼라배를 다른 열에 더하여도 행렬식의 값은 변하지 않는다.

(예제 1) 행렬식

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$$

을 계산하여라.

(예제 2) 행렬식

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

을 계산하여라.

행렬식의 성질을 이용하면 일차 연립방정식의 해를 구하는데 이용할 수 있다.

정리 2 [크래머 법칙]

일차 연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{n}x_{nn} &= b_n \end{aligned}$$

에서 계수행렬을 $A = [a_{ij}]$라 하고, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$이라 하면 위의 연립방정식은 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$로 나타낼 수 있다. 이때 $\det(A) \neq 0$이면 이 연립방정식의 해는

$$x_j = \frac{D(A^1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots, A^n)}{\det(A)} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

를 갖는다. 여기서 분자의 $\boldsymbol{b}$ 는 A^j 대신 j번째 열에 나타나 있다. 즉

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots b_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots b_2 \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots b_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ s_{21} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}$$

(예제 3)

크래머 법칙을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 2y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

(예제 4) 크래머 법칙을 이용하여 다음 동차 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$