Recursion

2023. Fall

국민대학교 소프트웨어학부
최 준수

Recursion

- Recursion (재귀, 점화, 귀납) in Mathematics
  - 어떤 수학적인 개체 (혹은 함수)를 정의함에 있어서, 그 개체 (혹은 함수)의 정의를 이용하여 정의하는 것

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \qquad \text{(base case)} \\ n \times (n-1)! & n > 0 \qquad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

- base case : 함수의 값을 직접 계산할 수 있는 단순한 경우
- recursive step : 직접적으로 그 함수의 값을 계산할 수 없고, base case가 만들어 질 때까지 계속 환산해 나가면서 계산하는 단계

Recursion

- Recursion (재귀, 되부름) in Computer Science
  - 프로그램에서 어떤 함수(혹은 프로시져, 서브프로그램)에서 직접적으로 혹은 간접적으로 자기 자신 함수를 다시 호출하는 것
    - base case : 직접 함수값을 계산할 수 있는 경우.
      - Recursion에서는 제일 먼저 입력값이 base case 에 해당하는 지를 먼저 검사하고 처리함.
      - 적어도 한 개 이상의 base case 가 있어야 함
    - recursive step : 직접 함수값을 계산할 수 없는 경우에는 base case를 이용하여 처리할 수 있도록 base case가 만들어 질 때까지 계속 자신을 재귀호출해 나가면서 계산하는 과정
      - 적절한 base case가 없으면 무한 loop 발생 (실제로는 stack overflow 발생)

Recursion

- 전산학에서 가장 기초적인 개념
- 많은 문제를 해결하는 가장 효율적인 알고리즘을 개발하는데 많이 사용되는 가장 강력한 수단
  - 분할정복기법
  - 동적계획법
  - 되추적기법
  - 기타
- 문제의 예
  - 가벼운 구슬 찾기
  - Merge/Quick Sort
  - 기타

Recursion

- Types of recursion
  - Unary recursion
    - a single recursive call for each recursion
    - examples
      - factorial, linear sum, reversing array, computing powers
  - Binary recursion
    - two recursive calls for each recursion
    - examples
      - Fibonacci numbers, Hanoi tower, merge sorting, quick sorting
  - Multiple recursion
    - more than two recursive calls for each recursion
    - example
      - flood fill, knight's tour

Factorial

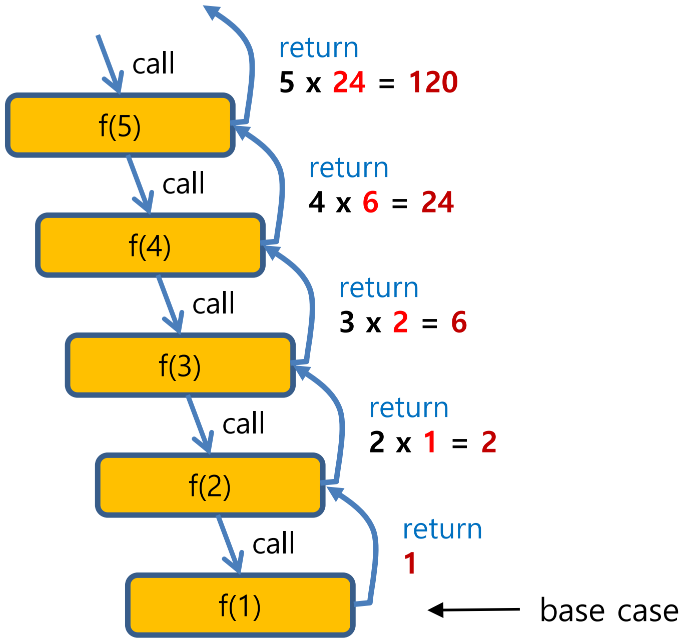
- Factorial (recursive)

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \qquad \text{(base case)} \\ n \times (n-1)! & n > 0 \qquad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

```
int f(int n)
{
    if (n <= 1) /* base case */
        return 1;
    else        /* recursive step */
        return n*f(n-1);
}
```

```
int main()
{
    f(5);
}
```

```
int f(int n)
{
    int i, fact = 1;

    for(i=1; i<=n; i++)
        fact *= i;

    return fact;
}
```

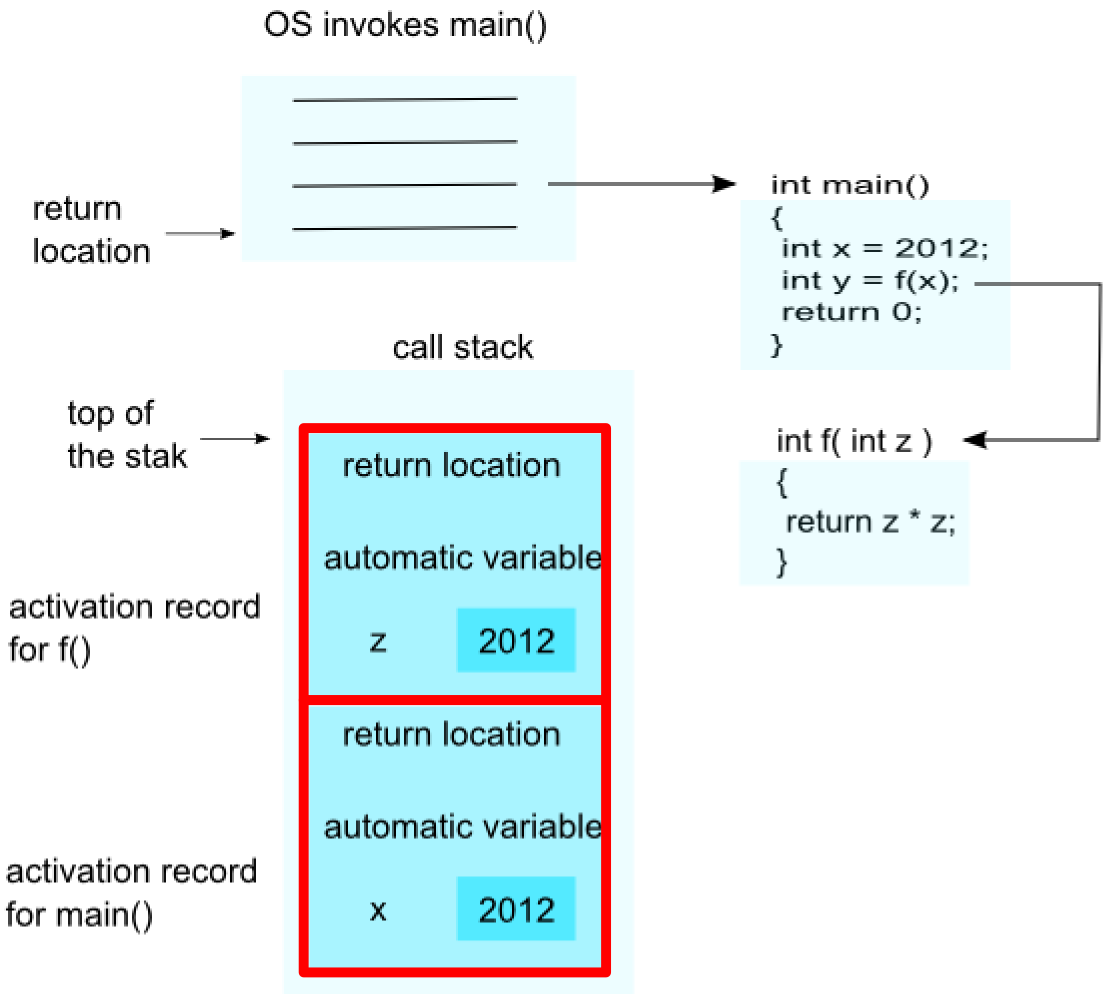


Call Stack

- Function call stack
  - 필요성:
    - 프로그램 실행 중 함수를 호출 할 때, 지금 실행중인 함수는 지역변수 등과 같은 자신이 가지고 있는 정보를 저장할 필요가 있다.
    - 새로운 함수 수행이 완료되면 다시 원래 호출했던 함수로 제어가 돌아와야 하고, 그 함수에서 사용하던 지역변수등과 같은 정보를 복원해서 사용해야 한다.
    - 또한 원래 함수로 되돌아 왔을 때 수행해야 할 프로그램의 주소(반환주소, return address)도 저장해야 한다.
    - 현재함수가 가지고 있던 정보를 저장하는 연속적인 메모리 공간을 "activation record"라 하고, 이 activation record 를 "call stack"이라는 공간에서 관리함.
  - Why stack?
    - 함수를 호출하고 반환하는 과정이 "last call first return" 이므로 함수의 activation record를 LIFO(last in first out) 구조인 stack 에 저장하는 것이 가장 적합함.

Call Stack

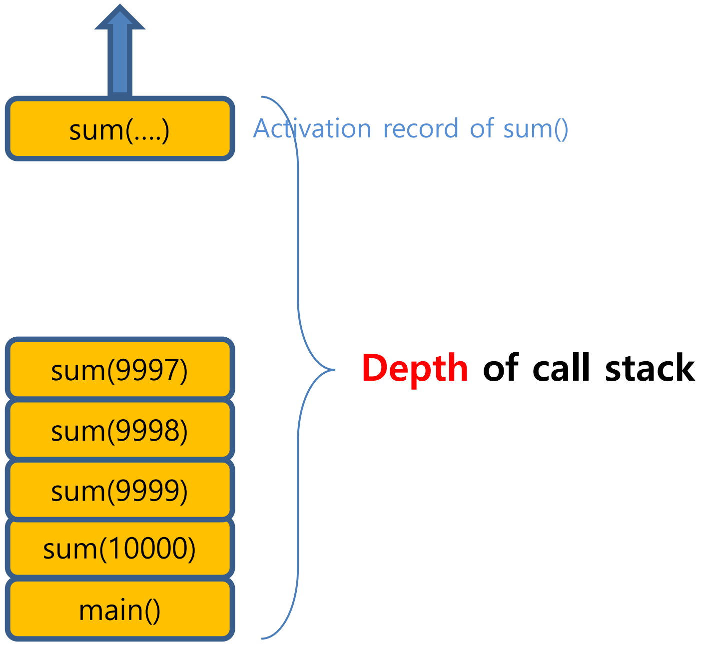
- Function call stack



Stack Overflow

```
int sum(int n)
{
    if (n == 1) /* base case */
        return 1;
    else        /* recursive step */
        return sum(n-1) + n;
}
```

```
int main()
{
    sum(10000);
}
```



Call Stack

Maximum Depth of call stack : 10000

Call Stack Overflow:
Shortage of memory for a call stack caused by too many successive calls for recursion.

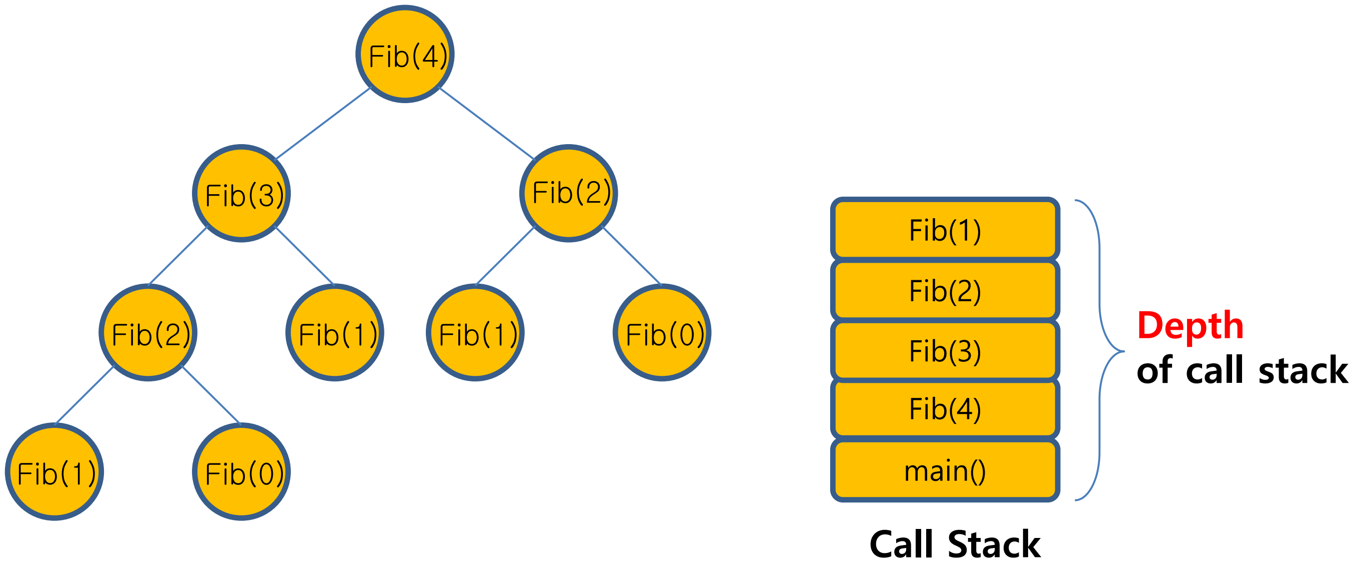
Fibonacci

- Fibonacci (recursive)

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 & \text{(base case)} \\ 1 & n = 1 & \text{(base case)} \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & n > 1 & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

```
int fib(int n)
{
    if (n <= 1) /* base case */
        return n;
    else        /* recursive step */
        return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

```
int main()
{
    fib(4);
}
```



Maximum Depth of fib(n)? Call stack overflow?

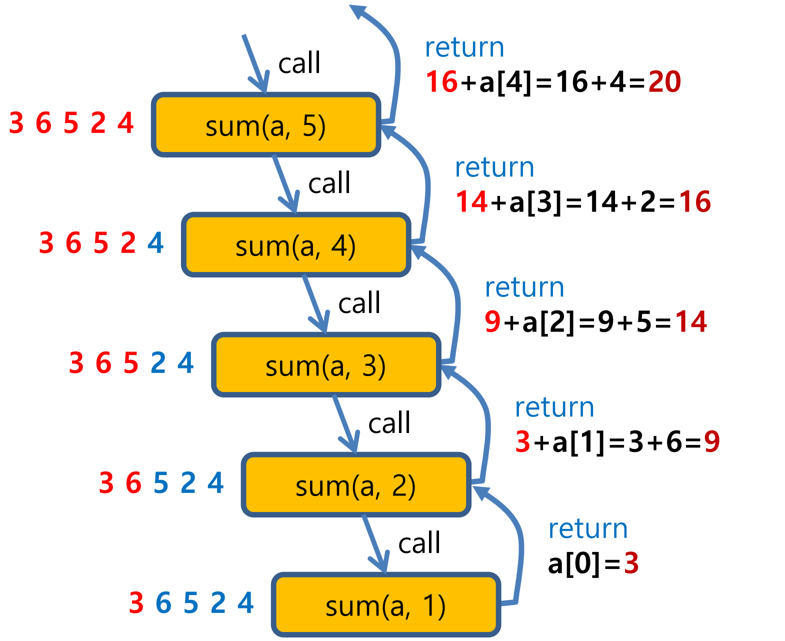
Linear Sum

- Linear Sum (recursive)
  - n 개의 정수 a_1, a_2, …, a_n 이 주어졌을 때, 그 정수의 합 $S(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 을 계산하시오.

$$S(n)=\begin{cases} a_1 & n=1 \quad \text{(base case)} \\ S(n-1)+a_n & n>1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

```
int sum(int a[], int n)
{
    if (n == 1) /* base case */
        return a[0];
    else        /* recursive step */
        return sum(a, n-1)+a[n-1];
}
```

```
int main()
{
    int a[5] = {3, 6, 5, 2, 4};
    sum(a, 5);
}
```



Maximum Depth of sum()? Call stack overflow?

Reversing Array

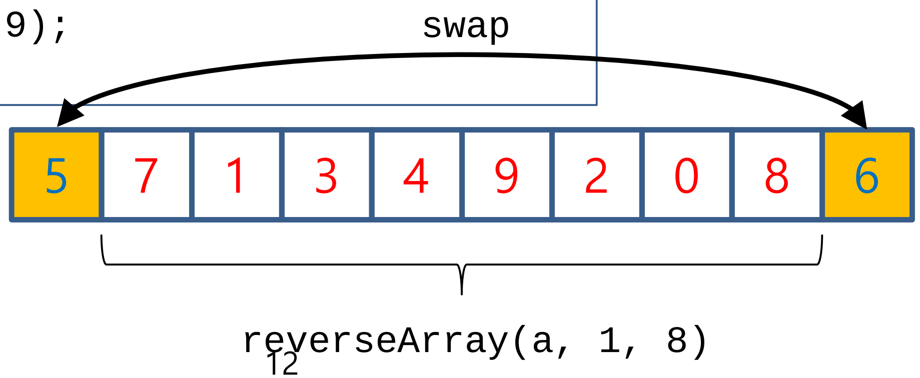
- Reversing Array (recursive)

$$[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n] \Rightarrow [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_3, a_2, a_1]$$

```
void reverseArray(int a[], int i, int j)
{
    /* base case ?? */
    if (i < j)
    {
        swap(a, i, j); /*swap a[i] and a[j] */
        reverseArray(a, i+1, j-1);
    }
}
```

Maximum Depth of reverseArray()?
Call stack overflow?

```
int main()
{
    int a[] = {5, 7, 1, 3, 4, 9, 2, 0, 8, 6};
    reverseArray(a, 0, 9);
}
```



Computing Powers

- Computing Powers (recursive)

$17^{2,147,483,647} = ?$

$$p(x,n) = x^n$$

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \quad \text{(base case)} \\ x \cdot p(x,n-1) & n > 0 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

```
double p(double x, int n)
{
    if (n == 0) /* base case */
        return 1.0;
    else        /* recursive step */
        return x*p(x,n-1);
}
```

Analysis:
- base operation : multiplication
- O(n)

Fast Computing Powers

- Fast Computing Powers (recursive)
  - double squaring

$$x^{2^n} = \Bigg(\cdots \underbrace{\Big(\big(x^2 \big)^2 \Big)^2 \cdots}_{n} \Bigg)^2$$

$$2^2 = 2^{2^1} = 4$$

$$2^4 = 2^{2^2} = \left(2^2\right)^2 = 16$$

$$2^8 = 2^{2^3} = \left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = 256$$

$$2^{16} = 2^{2^4} = \left(\left(\left(2^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 65536$$

Fast Computing Powers

- Fast Computing Powers (recursive)

$$p(x,n) = x^n$$

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & n = 0 & \text{(base case)} \\ x \cdot p(x,(n-1)/2)^2 & \text{if } \; n > 0 \text{ is odd} & \text{(recursive step)} \\ p(x,n/2)^2 & \text{if } \; n > 0 \text{ is even} & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 2 \cdot (2^1)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$2^4 = \left(2^{(4/2)}\right)^2 = \left(2^2\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$2^5 = 2 \cdot \left(2^{(4/2)}\right)^2 = 2 \cdot \left(2^2\right)^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$$

$$2^6 = \left(2^{(6/2)}\right)^2 = \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$$

$$2^7 = 2 \cdot \left(2^{(6/2)}\right)^2 = 2 \cdot \left(2^3\right)^2 = 2 \cdot 8^2 = 128$$

Fast Computing Powers

- Fast Computing Powers (recursive)

```
double p(double x, int n)
{
    double y;

    if (n == 0)                     /* base case */
        return 1.0;
    else if (n%2 == 1){             /* n is odd */
        y = p(x, (n-1)/2);
        return x*y*y;
    }
    else {                          /* n is even */
        y = p(x, n/2);
        return y*y;
    }
}
```

Analysis:
- base operation : multiplication
- O(log n)

Computing Powers

- Computing Powers (recursive)

$$p(x,n) = x^n$$

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \qquad \text{(base case)} \\ x \cdot p(x,n-1) & n > 0 \qquad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

```
double p(double x, int n)
{
    if (n == 0) /* base case */
        return 1.0;
    else        /* recursive step */
        return x*p(x,n-1);
}
```

Analysis:
- base operation : multiplication
- O(n)

Fast Computing Powers

- Fast Computing Powers (recursive)
  - double squaring

$$x^{2^n} = \left(\cdots \left(\left(x^2 \right)^2 \right)^2 \cdots \right)^2$$

$$2^2 = 2^{2^1} = 4$$

$$2^4 = 2^{2^2} = \left(2^2\right)^2 = 16$$

$$2^8 = 2^{2^3} = \left(\left(2^2\right)^2\right)^2 = 256$$

$$2^{16} = 2^{2^4} = \left(\left(\left(2^2\right)^2\right)^2\right)^2 = 65536$$

Fast Computing Powers

- Fast Computing Powers (recursive)

$$p(x,n) = x^n$$

$$p(x,n) = \begin{cases} 1 & n = 0 & \text{(base case)} \\ x \cdot p(x,(n-1)/2)^2 & \text{if } \; n > 0 \; \text{ is odd} & \text{(recursive step)} \\ p(x,n/2)^2 & \text{if } \; n > 0 \; \text{ is even} & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

$$2^4 = \left(2^{(4/2)}\right)^2 = \left(2^2\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$2^5 = 2 \cdot \left(2^{(4/2)}\right)^2 = 2 \cdot \left(2^2\right)^2 = 2 \cdot 4^2 = 32$$

$$2^6 = \left(2^{(6/2)}\right)^2 = \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$$

$$2^7 = 2 \cdot \left(2^{(6/2)}\right)^2 = 2 \cdot \left(2^3\right)^2 = 2 \cdot 8^2 = 128$$

Computing Fib(n) for large n

$F_{2,147,483,647} = ?$

- Fibonacci Number
  - for $n > 0$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

  - Proof by mathematical induction

```
1) n=1
```

$$\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1$$

```
2) Suppose that the following is true
for k > 0
```

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k$$

```
3) for k+1,
```

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \end{aligned}$$

최대공약수

- Greatest Common Divisor (최대공약수)
  - 유클리드 호제법
    - 두 정수 a, b 의 최대공약수 gcd(a, b) 를 구하고자 한다.
    - a 를 b로 나눈 나머지를 r 이라고 하자.
    - a 와 b 의 최대공약수는 b와 r 의 최대공약수와 같다.
    - 따라서, b와 r에 대하여 위 방법을 반복적으로 적용한다.
    - 위 방법을 반복적으로 적용하여 나머지가 0 되었을 때, 나누는 수가 a, b 의 최대공약수이다.
  - 예
    - gcd (1071, 1029) => 1071을 1029로 나눈 나머지 : 42
    - gcd (1029, 42) => 1029를 42로 나눈 나머지 : 21
    - gcd (42, 21) => 42는 21로 나누어 떨어지므로
    - 최대공약수는 21이다.

최대공약수 (2)

- Greatest Common Divisor (recursive)

$$\gcd(a,b)=\begin{cases} a & b=0 \quad \text{(base case)} \\ \gcd(b, a\%b) & b>0 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

```
int gcd(int a, int b)
{
    if (b == 0) /* base case */
        return a;
    else /* recursive step */
        return gcd(b, a%b);
}
```

```
void main(void)
{
    gcd(1071, 1029);
}
```

```
int gcd(int a, int b)
{
    int r;

    do
    {
        r = a % b;
        a = b;
        b = r;
    } while ( r != 0 )

    return a;
}
```

Count Up / Count Down

- Count Up / Count Down (recursive)

```
void countUp(int nCount)
{
    if (nCount > 0)
        countUp(nCount-1);

    printf("%d \n", nCount);
}
```

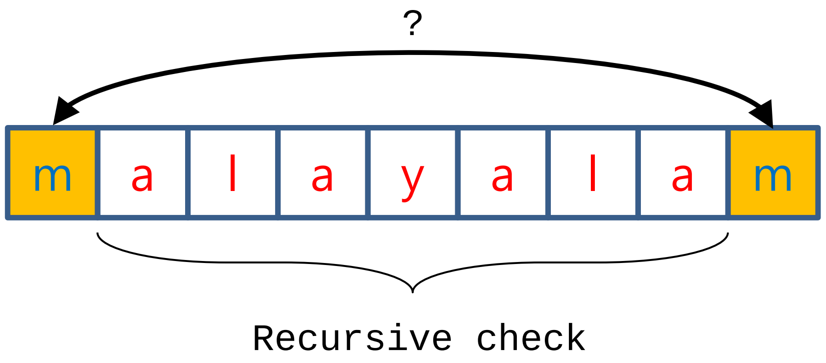
```
void countDown(int nCount)
{
    printf("%d \n", nCount);

    if (nCount > 0)
        countDown(nCount-1);
}
```

```
void main(void)
{
    countUp(4);
    countDown(4);
}
```

Count Up	Count Down
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0

팰린드롬 (Palindrome) 검사

- Palindrome (회문) 검사하기 (recursive)
  - “기러기”, “madam”, “malayalam”, …




```c
int checkPalindrome(char str[], int first, int last)
{
    if (last <= first)
        return 1;
    else if (str[first] != str[last])
        return 0;
    else
        return checkPalindrome(str, first+1, last-1);
}
```

```c
void main(void)
{
    char line[256] = "malayalam";
    printf("%d \n", checkPalindrome(line, 0, strlen(line)-1));
}
```

십진수 진수변환 출력하기

- 십진수 진수변환 출력하기 (recursive)
  - 주어진 십진수 정수를 다른 진수의 숫자로 변환하여 출력한다. 변환되는 진수의 기수(base)는 2~16 의 범위를 가진다.

```
void baseConversion(int n, int base)
{
    static baseTable[] = "0123456789abcdef";

    if (n >= base)
        baseConversion(n/base, base);
    printf("%c\n", baseTable[n%base]);
}
```

```
void main(void)
{
    int num = 1234567;
    baseConversion(num, 16);
}
```

Permutation (순열)

- Permutation
  - 순열의 개수
    - n 개의 서로 다른 문자로 만들어진 순열의 수 : n!
  - 순열을 사전식 오름차순으로 출력

사전식으로
나열할 때의
순열 순서

P_1	abc
P_2	acb
P_3	bac
P_4	bca
P_5	cab
P_6	cba

나라나야 판디타 알고리즘

- 나라나야 판디타 알고리즘:
  - Narayana Pandita: 14세기 인도 수학자
  - 모든 순열을 사전식 오름차순으로 출력
    - 주어진 순열의 다음 순열 계산 알고리즘
      - Example: 9개 문자 'a' ~ 'i' 로 구성된 다음과 같은 순열 P_k의 그 다음 순열 P_{k+1}은?

P_k									
	c	a	h	f	i	g	e	d	b

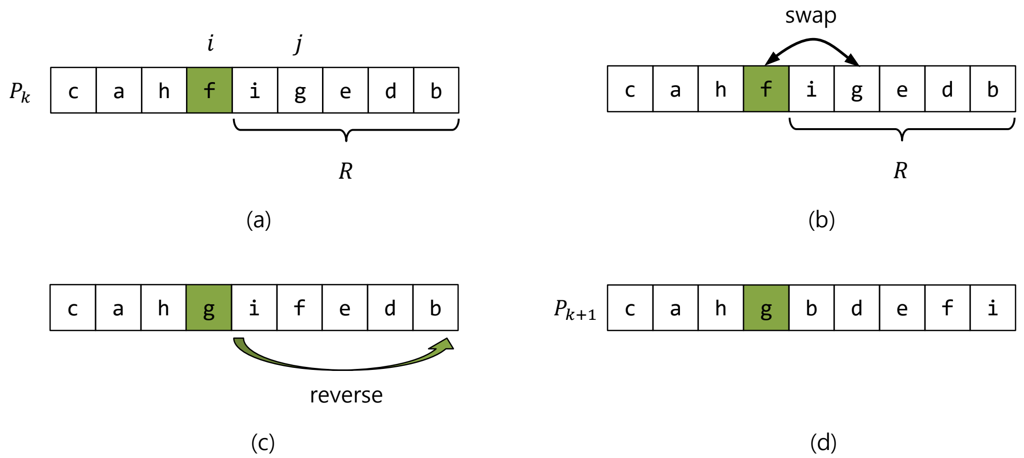
국민대학교 KOOKMIN UNIVERSITY

Algorithmic Engineering Laboratory

나라나야 판디타 알고리즘

- 주어진 순열의 다음 순열 계산 알고리즘

FindNextPermutation(P)
(1) $P_k = P = c_1 c_2 \cdots c_n$ 라고 하자.
(2) // 순열 P_k에서 가장 마지막 문자에서 시작해서 역순으로 오름차순으로
    // 나열된 최대 구간 R을 찾음.
    i = n - 1;
    while (i >= 1 && $c_i >= c_{i+1}$)
        i = i - 1;
(3) // i는 (2)에서 구한 최대 구간 R의 바로 앞의 인덱스임
    // i가 0인 경우는 주어진 순열 P_k는 가장 마지막 $n!$ 번째 순열임
    if (i == 0)
        return;
(4) // 최대 구간 R에서 c_i 보다 큰 문자중에서 가장 작은 문자 c_j를 찾음
    j = n;
    while ($c_i > c_j$)
        j = j - 1;
(5) swap(c_i, c_j);
(6) reverse $c_{i+1} \cdots c_n$;

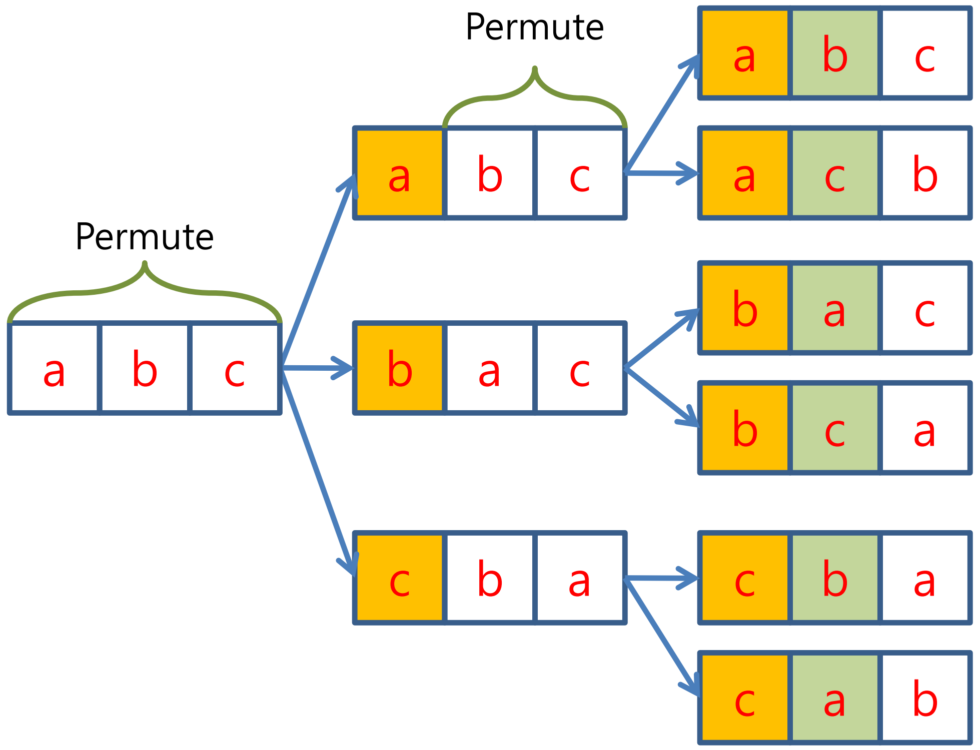


Permutation 만들기

- Compute All Permutation (recursive)
  - n 개의 서로 다른 문자로 만들어진 스트링이 주어졌을 때, 이 문자열에 속하는 문자들의 모든 순열(permutation)으로 만들어진 n! 개의 문자열을 출력하시오.
  - 예: “abc”
    - “abc”, “acb”, “bac”, “bca”, “cab”, “cba”

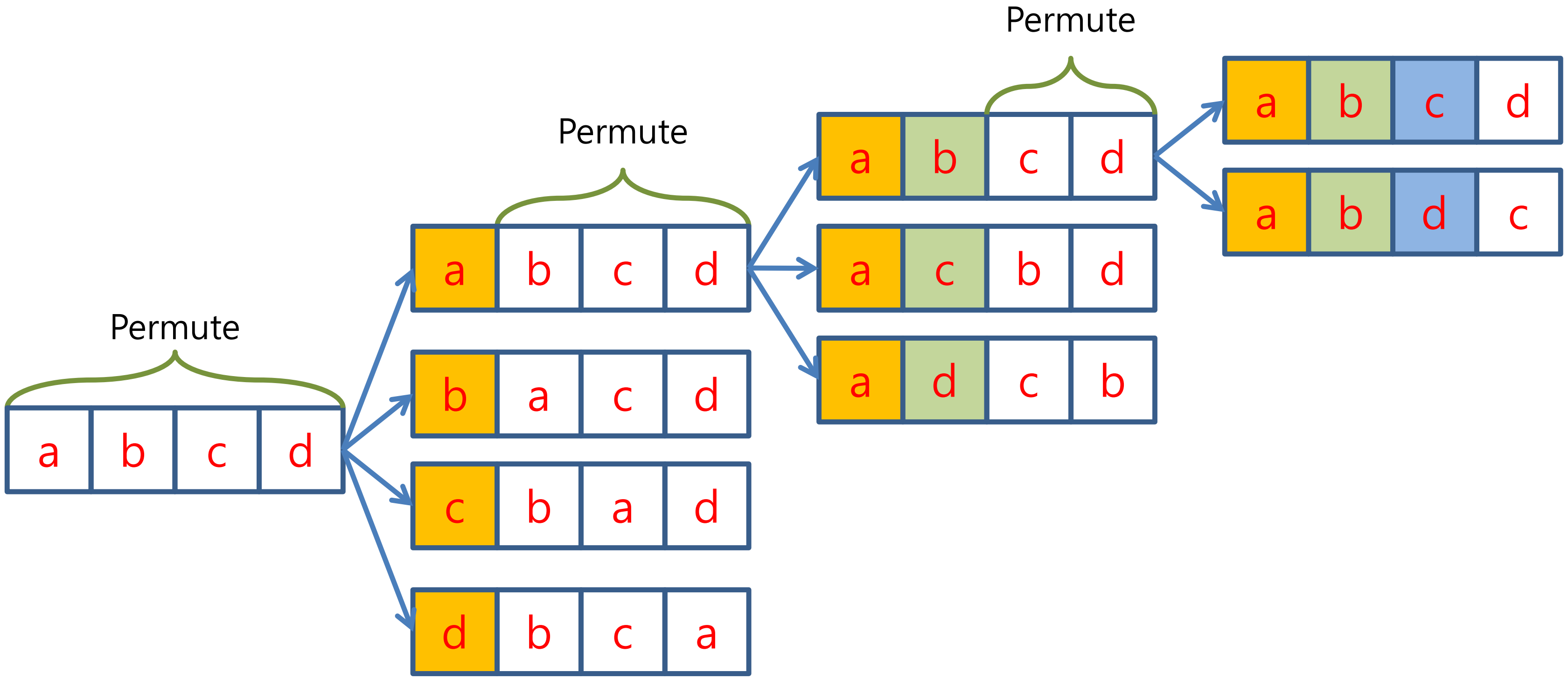
Permutation 만들기 (2)

- Compute All Permutation (recursive)



Permutation 만들기 (3)

- Compute All Permutation (recursive)



Permutation 만들기 (4)

- Compute All Permutation (recursive)

```
void permuteString(char *str, int begin, int end)
{
    int i;
    int range = end - begin;

    if(range == 1)
        printf("%s\n", str);
    else
    {
        for(i=0; i<range; i++)
        {
            swap(&str[begin], &str[begin+i]);
            permuteString(str, begin+1, end);
            swap(&str[begin], &str[begin+i]); /* recover */
        }
    }
}

void permute(char *str)
{
    permuteString(str, 0, strlen(str));
}
```

```
int main()
{
    char str[] = "abcd";
    permute(str);
}
```

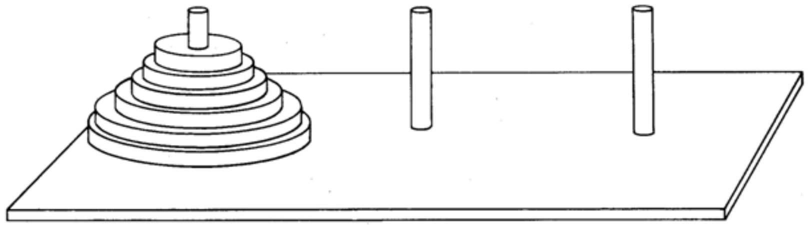
Permutation 만들기 (5)

- 모든 순열을 오름차순으로 출력하기
  - recursive 알고리즘을 수정하여

```
void permuteString(char *str, int begin, int end)
{
    int i;
    int range = end - begin;

    if(range == 1)
        printf("%s\n", str);
    else
    {
        for(i=0; i<range; i++)
        {
            swap(&str[begin], &str[begin+i]);
            permuteString(str, begin+1, end);
            swap(&str[begin], &str[begin+i]); /* recover */
        }
    }
}

void permute(char *str)
{
    permuteString(str, 0, strlen(str));
}
```

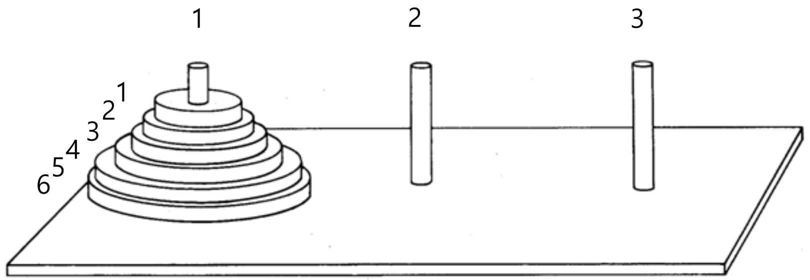
Hanoi Tower

- Hanoi Tower
  - 문제
    - 아래 그림에서와 같이 세 개의 기둥과 이 기둥에 꽂을 수 있는 크기가 서로 다른 원판이 여러 개 있다.
    - 초기에는 모든 원판이 가장 큰 원판부터 가장 작은 원판까지 아래로부터 위로 가장 왼쪽 기둥에 꽂혀있다.



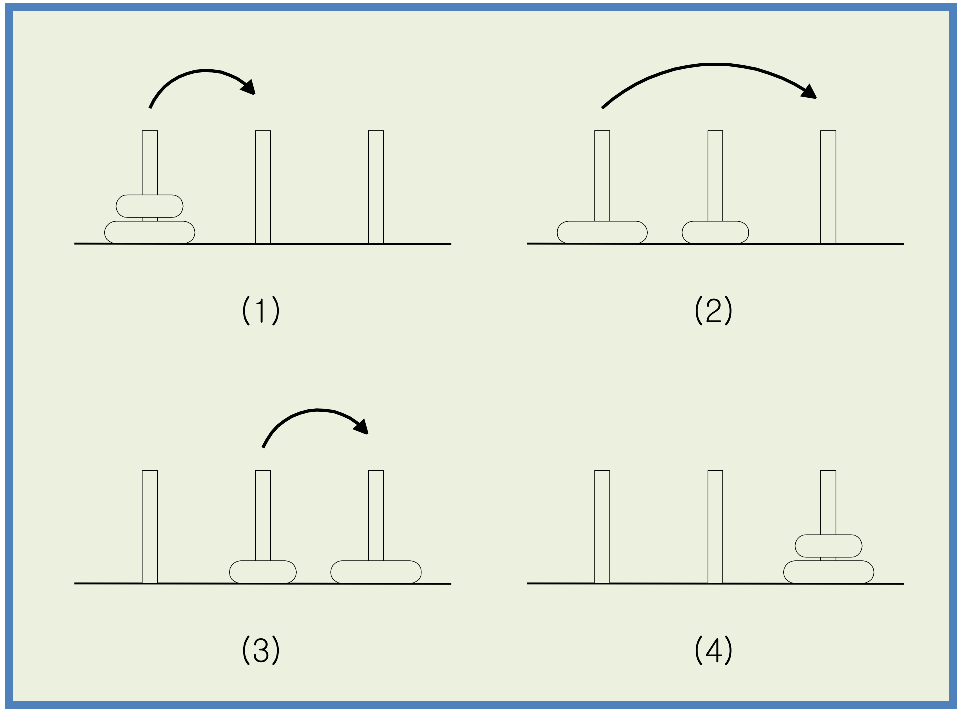
Hanoi Tower (2)

- Hanoi Tower
  - 문제
    - 다음 조건을 만족하면서, 가장 왼쪽에 꽂혀있는 모든 원판을 가장 오른쪽 기둥으로 옮기고자 한다.
      - 한 번에 한 개의 원판만 옮길 수 있다.
      - 한 개의 원판을 옮길 때는 어떤 기둥에 꽂혀있는 원판의 가장 위에 놓여져 있는 원판을 다른 기둥에 꽂혀있는 원판의 가장 위에 놓는다.
      - 크기가 큰 원판이 작은 원판 위에 놓여져서는 안된다.



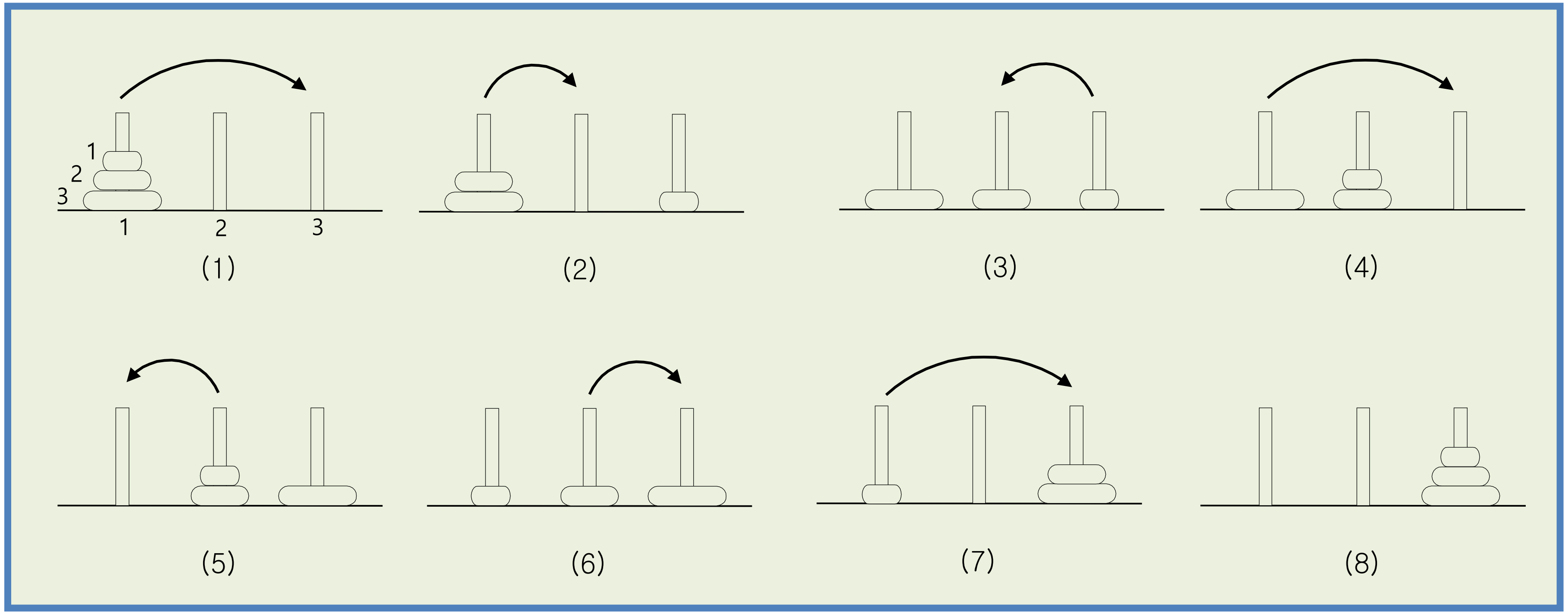
Hanoi Tower (3)

- Hanoi Tower
  - Example



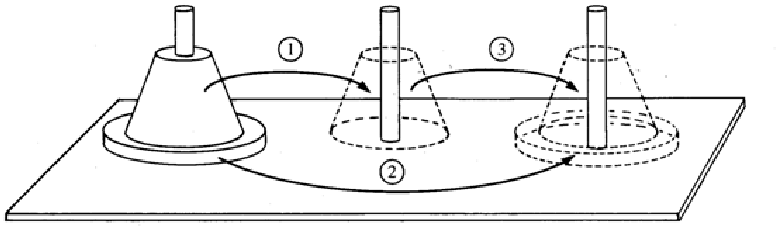
Hanoi Tower (3-1)

- Hanoi Tower
  - Example



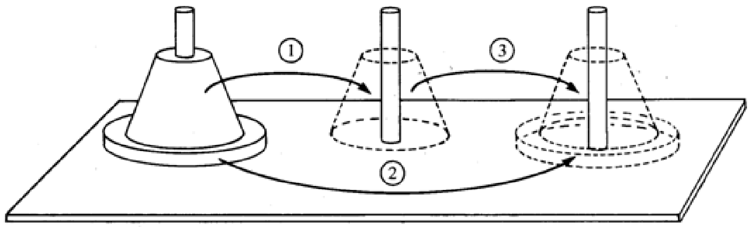
Hanoi Tower (4)

- Hanoi Tower Solution (recursive)
  - 아래 그림과 같이
    - (1) 1번 기둥에 쌓여져 있는 (n-1)개의 원판을 모두 2번 기둥으로 옮긴다.
    - (2) 1번 기둥에 남아 있는 가장 큰 원판을 3번 기둥으로 옮긴다.
    - (3) 2번 기둥으로 옮겨진 (n-1)개의 원판을 모두 3번 기둥으로 옮긴다.



Hanoi Tower (5)

- Hanoi Tower Solution (recursive)



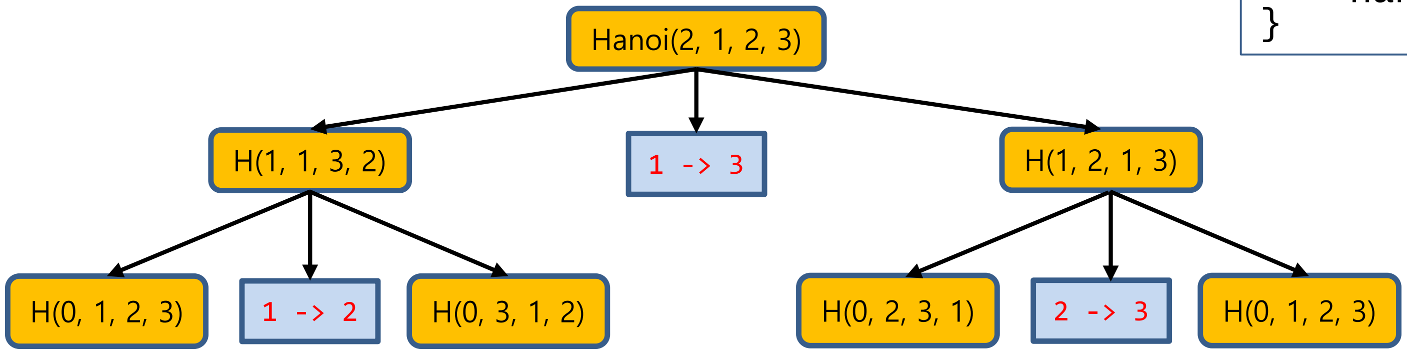

```
void Hanoi(int n, int a, int b, int c)
{
    if (n>0)
    {
        Hanoi(n-1, a, c, b);
        printf("Move disk from %d to %d.\n", a, c);
        Hanoi(n-1, b, a, c);
    }
}
```

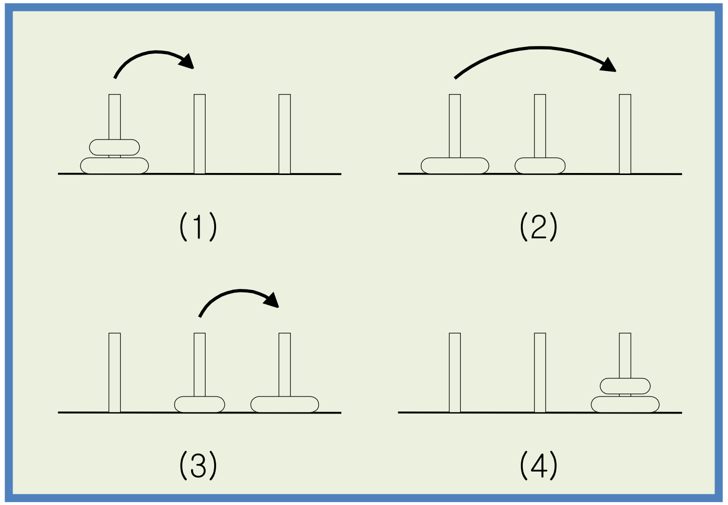
```
void main(void)
{
    int numDisks = 4;

    printf("Number of disks to move: %d\n", numDisks);
    Hanoi(numDisks, 1, 2, 3);
}
```

Hanoi Tower (6)

- Example

```
Hanoi(n, a, b, c)
{
    Hanoi(n-1, a, c, b);
    a -> c;
    Hanoi(n-1, b, a, c);
}
```

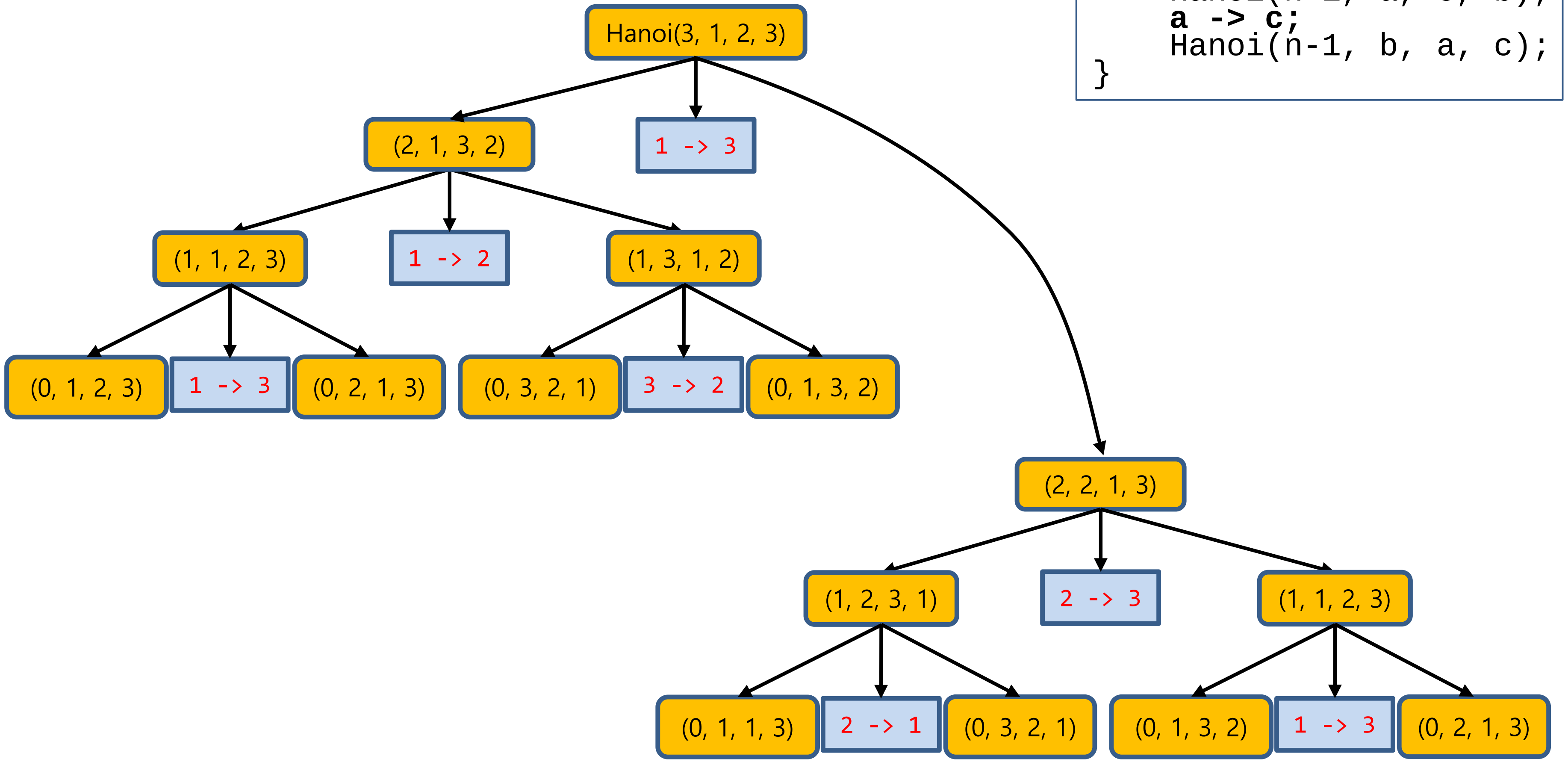




Hanoi Tower (7)

- Example

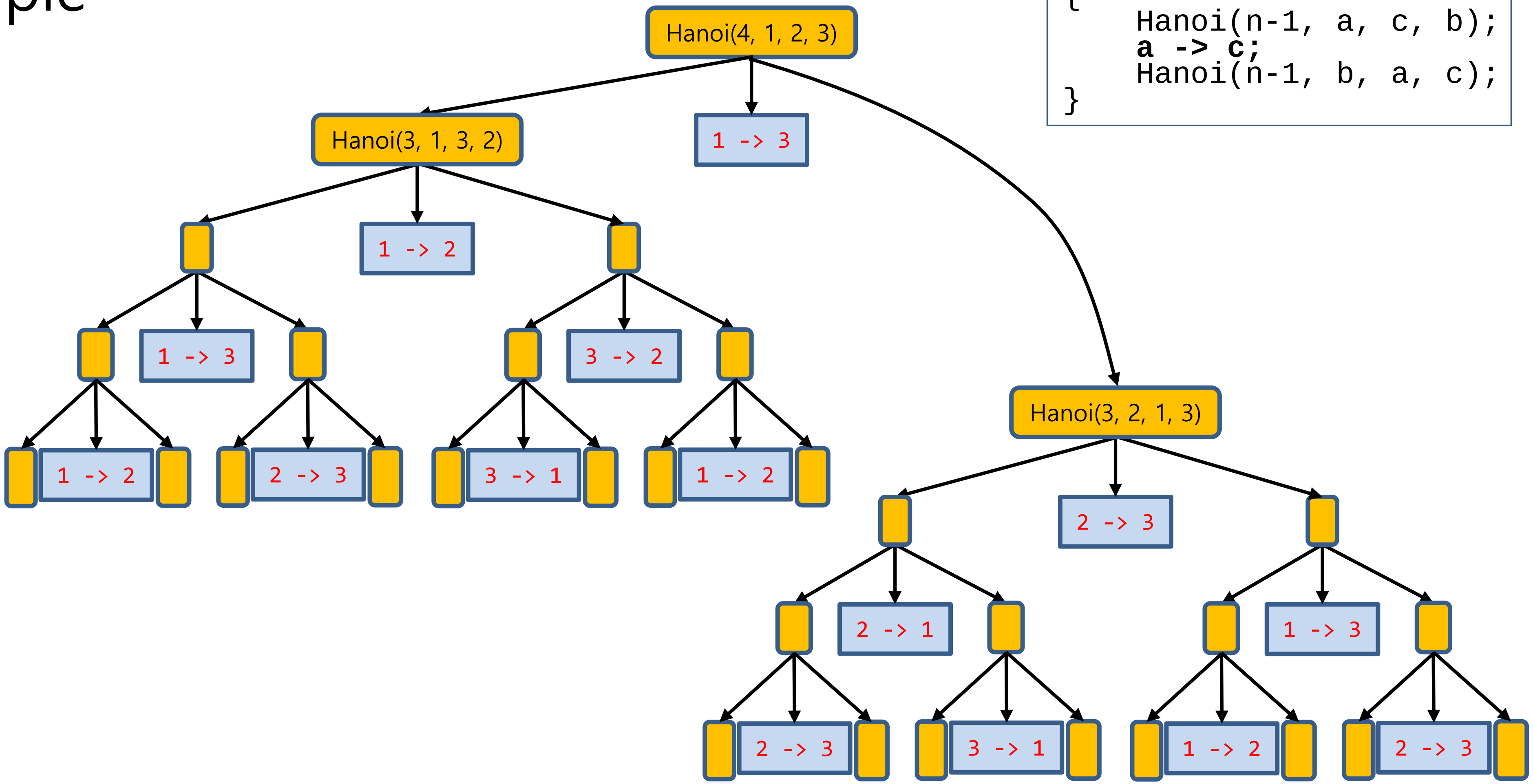
```
Hanoi(n, a, b, c)
{
    Hanoi(n-1, a, c, b);
    a -> c;
    Hanoi(n-1, b, a, c);
}
```



Hanoi Tower (8)

- Example

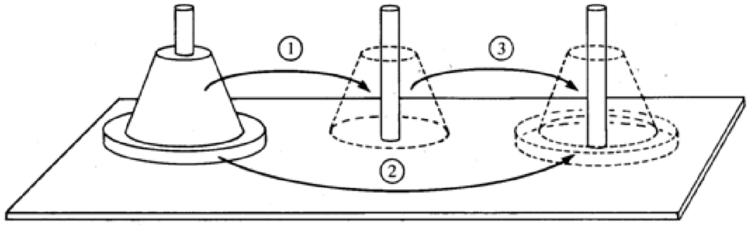
```
Hanoi(n, a, b, c)
{
     Hanoi(n-1, a, c, b);
     a -> c;
     Hanoi(n-1, b, a, c);
}
```



Hanoi Tower (9)

- Analysis of Hanoi Tower Solution (recursive)
  - T(n)
    - n 개의 원판이 주어졌을 때, 원판을 한 개씩 옮기는 총 회수

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \quad \text{(base case)} \\ 2T(n-1)+1 & n > 1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$



Hanoi Tower (10)

- Analysis of Hanoi Tower Solution (recursive)
  - T(n)
    - n 개의 원판이 주어졌을 때, 원판을 한 개씩 옮기는 총 회수

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \quad \text{(base case)} \\ 2T(n-1)+1 & n > 1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

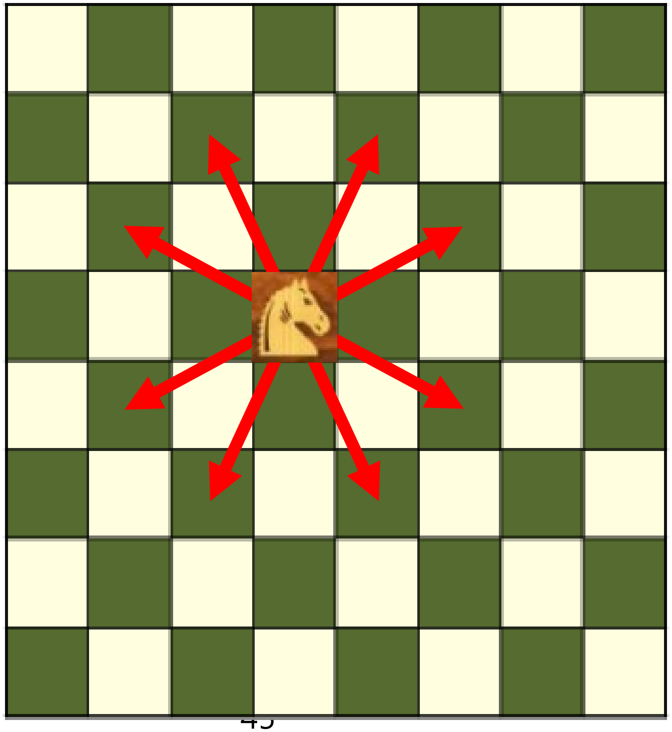
$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1)+1 \\ &= 2\{2T(n-2)+1\}+1 = 2^2T(n-2)+2+1 \\ &= 2^2\{2T(n-3)+1\}+2+1 = 2^3T(n-3)+2^2+2+1 \\ &\dots \\ &= 2^{n-1}T(1)+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1 \\ &= 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1 \\ &= 2^n-1 \end{aligned}$$

원래 이 문제의 n=64 이었다고 한다.
그러면, 모든 원판을 옮기는데 어느 정도의 시간이 걸릴까?

2^64-1= 18,446,744,073,709,551,615

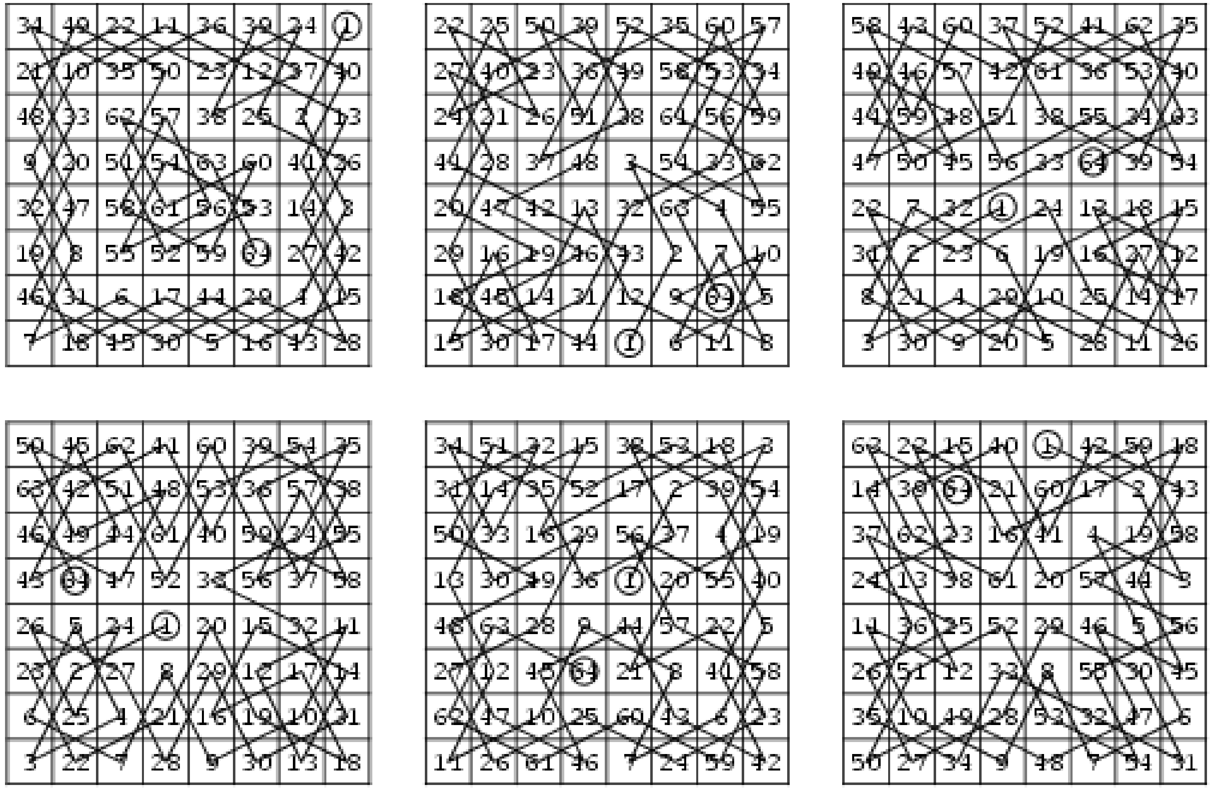
Knight's Tour Problem

- Knight's Tour
  - 문제
    - 체스판에서 기사(Knight) 말의 움직임은 아래 그림과 같다.
    - 임의의 위치에 놓여진 기사를 움직여서 모든 64개의 격자를 모두 방문하도록 기사말을 옮기는 방법을 계산하시오. 단, 기사가 이미 방문한 격자는 다시 방문하지 않는다.



Knight's Tour Problem (2)

- Knight's Tour
  - 예



Knight's Tour Problem (3)

- Knight's Tour Solution (recursive)

```c
#define MAXSIZE 9

#define MARK 1
#define UNMARK 0

typedef struct Point {int x, y;} point;
point direction[8] = {{1, -2}, {2, -1}, {2, 1}, {1, 2},
                      {-1, 2}, {-2, 1}, {-2, -1}, {-1, -2}};
int board[MAXSIZE][MAXSIZE], path[MAXSIZE][MAXSIZE];

int knightTour (int m, int n, point pos, int counter)
{
    int i;
    point next;

    if (counter == m * n)
        return 1;

    for (i=0; i<8; i++)
    {

    }

    return 0;
}
```

Case of Multiple Recursion

Homework:
Convert the recursive algorithm to iterative algorithm

```c
    {
        next.x = pos.x + direction[i].x;
        next.y = pos.y + direction[i].y;

        if ( next.x > 0 && next.x <= n &&
             next.y > 0 && next.y <= m &&
             board[next.y][next.x] != MARK )
        {
            board[next.y][next.x] = MARK;
            path[next.y][next.x] = counter+1;

            if ( knightTour(m, n, next, counter+1) )
                return 1;

            board[next.y][next.x] = UNMARK;
        }
    }
```

Maximum Depth of KnightTour()?
Call stack overflow?

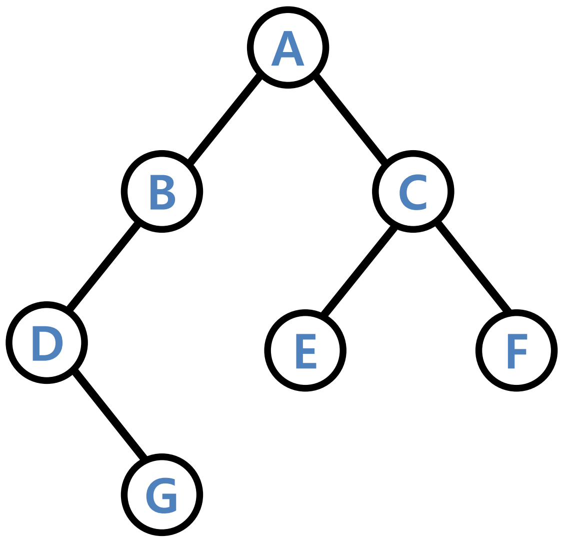
Knight's Tour Problem (4)

- Knight's Tour Solution (recursive)

```
void main ( void )
{
    int i, j, m, n;
    point start;

    m = 6; n = 8;
    start.y = 3; start.x = 4;

    for (i=1; i<=m; i++)
        for (j=1; j<=n; j++)
            board[i][j] = UNMARK;

    board[start.y][start.x] = MARK;
    path[start.y][start.x] = 1;

    if ( knightTour(m, n, start, 1) )
        printTour(m, n);
}
```

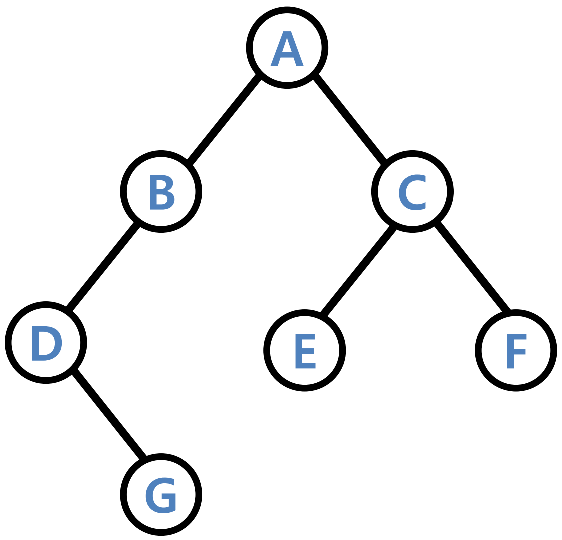
Binary Tree

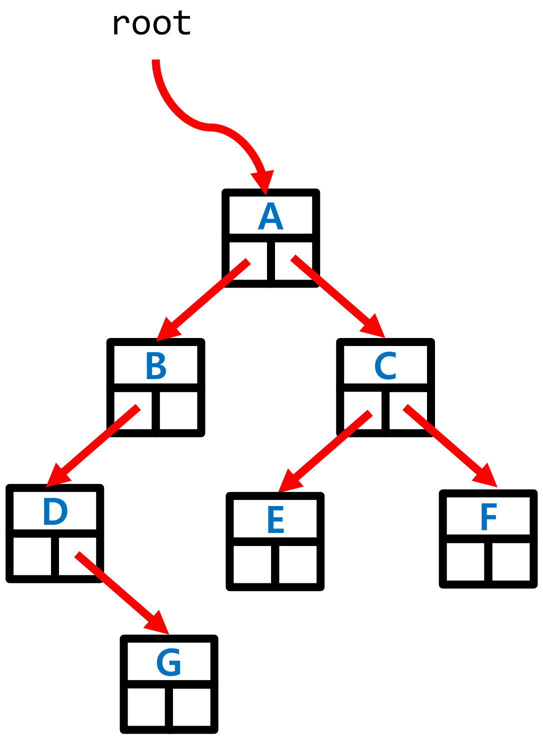
- Definition of Binary Tree (recursively)
  - Binary Tree
    - Empty, or (base case)
    - Consists of a **root node** together with **left and right subtrees**, both of which are **binary trees** (recursive step)



Binary Tree

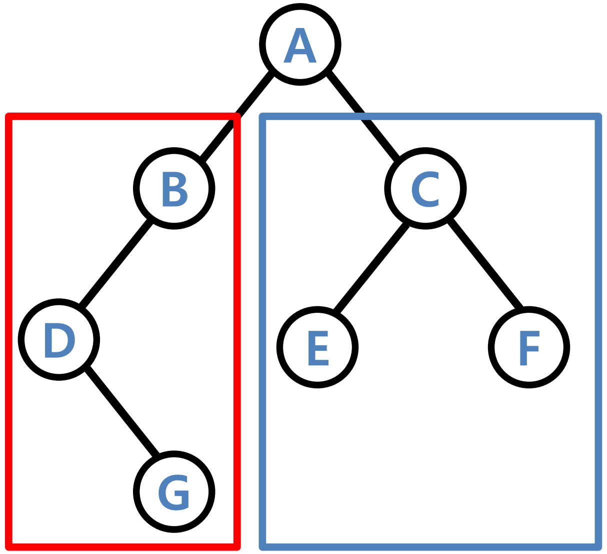
```
struct node {
    char data;    /* int data */
    struct node* leftSubTree;
    struct node* rightSubTree;
}
```





InOrder

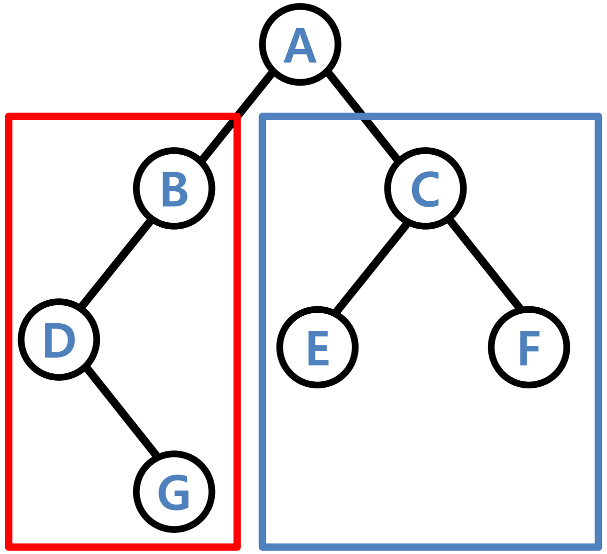
```
void inOrder( node *root )
{
    if (root == NULL)   /* base case */
        return;
    else                /* recursive step */
    {
        inOrder( root->leftSubtree );
        printf("%c ", root->data);
        inOrder( root->rightSubtree );
    }
}
```



D G B A E C F

PreOrder

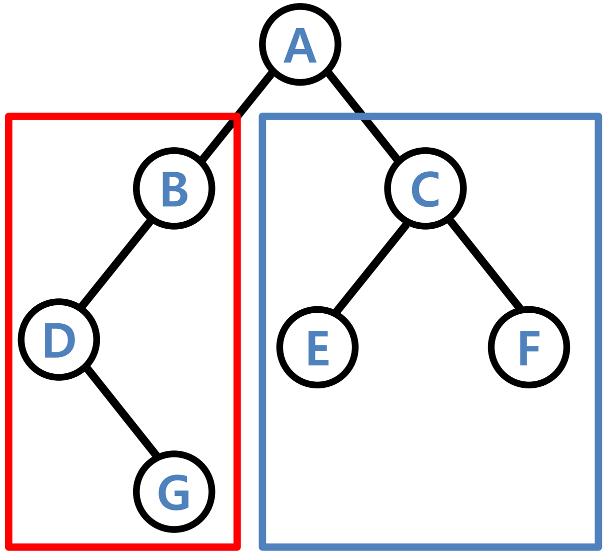
```
void preOrder( node *root )
{
    if (root == NULL)   /* base case */
        return;
    else                 /* recursive step */
    {
        printf("%c ", root->data);
        preOrder( root->leftSubtree );
        preOrder( root->rightSubtree );
    }
}
```



A | B D G | C E F

PostOrder

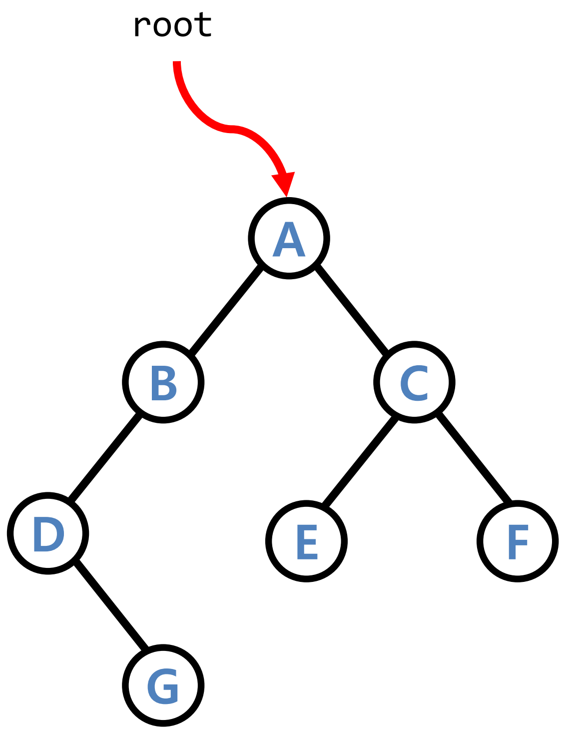
```
void postOrder( node *root )
{
    if (root == NULL)   /* base case */
        return;
    else                /* recursive step */
    {
        postOrder( root->leftSubtree );
        postOrder( root->rightSubtree );
        printf("%c ", root->data);
    }
}
```



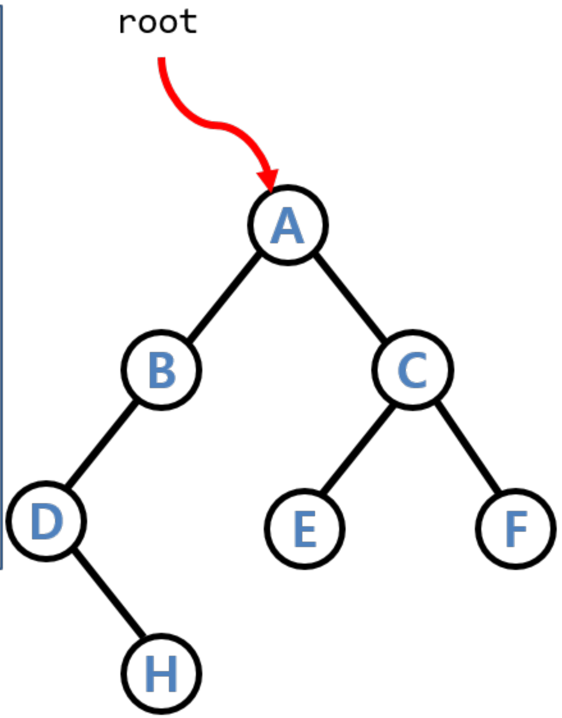
G D B | E F C | A

Tree Traversal

```
void order( node *root )
{
    if (root == NULL)   /* base case */
        return;
    else                  /* recursive step */
    {
        order( root->leftSubtree );
        printf("%c", root->data);
        order( root->rightSubtree );
        printf("%c", root->data);
    }
}
```



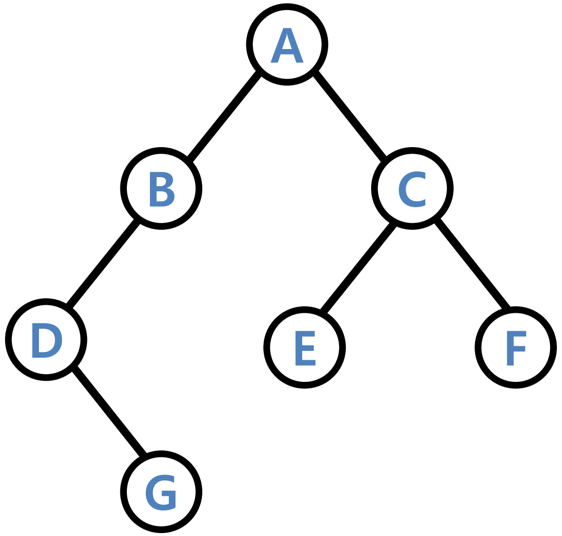
```
void order( node *root )
{
    if (root == NULL)   /* base case */
        return;
    else                /* recursive step */
    {
        order( root->leftSubtree );
        printf("%c", root->data);
        order( root->rightSubtree );
        printf("%c", root->data);
    }
}
```



Question

- size()   (recursive)

```
int size(struct node *root)
{


}
```

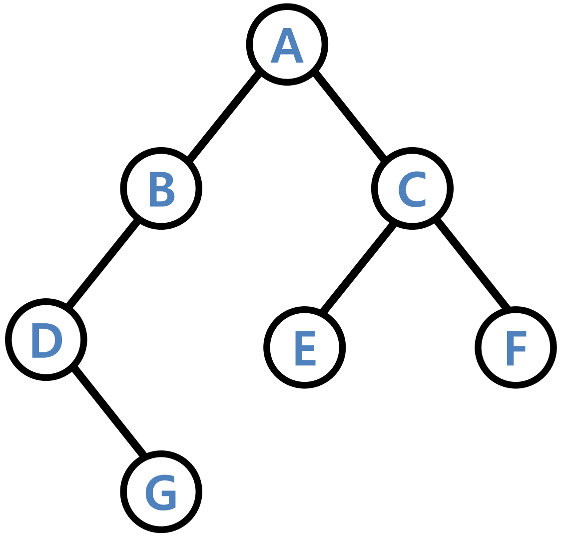


7

Question

- height()   (recursive)

```
int height(struct node *root)
{


}
```

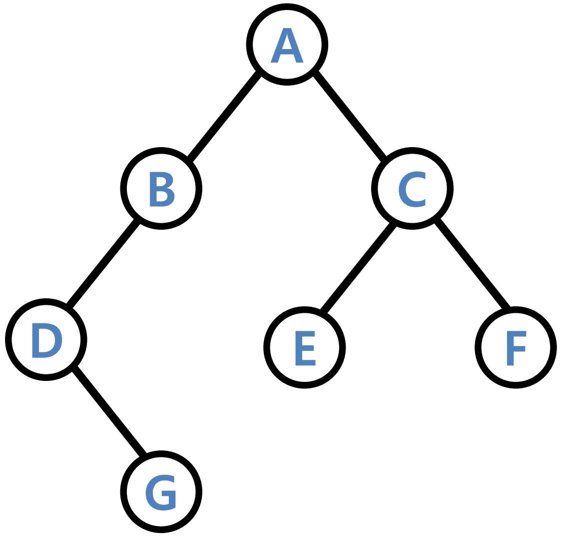


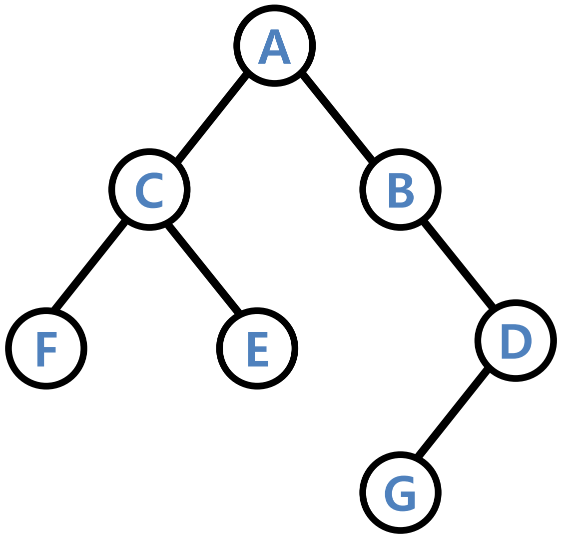
3

Question

- mirror()   (recursive)

```
---- mirror(struct node *root)
{


}
```



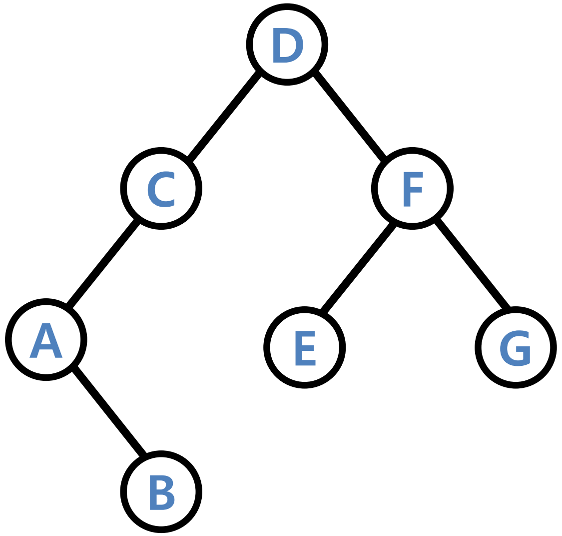


Question

- insert() (recursive) : 노드의 동적메모리 할당

```
void insert(struct node **root, char data)
{


}
```

Binary search tree가 되도록 데이터를 삽입함
- Recursively
- Dynamic memory allocation for nodes

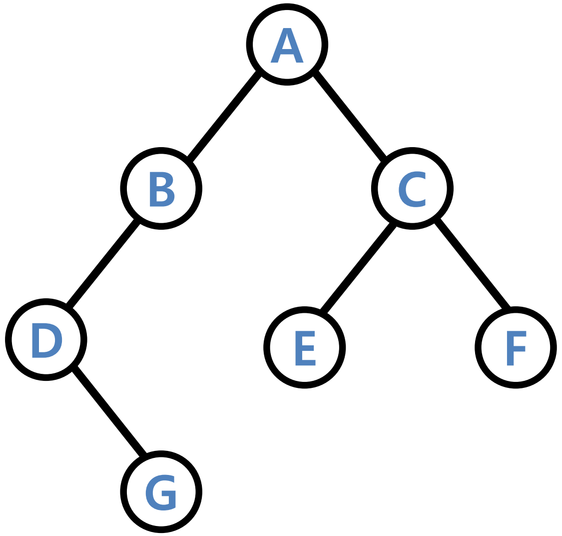



```
struct node* root;

insert(&root, 'D');
insert(&root, 'F');
insert(&root, 'C');
insert(&root, 'G');
insert(&root, 'A');
insert(&root, 'E');
insert(&root, 'B');
```

Question

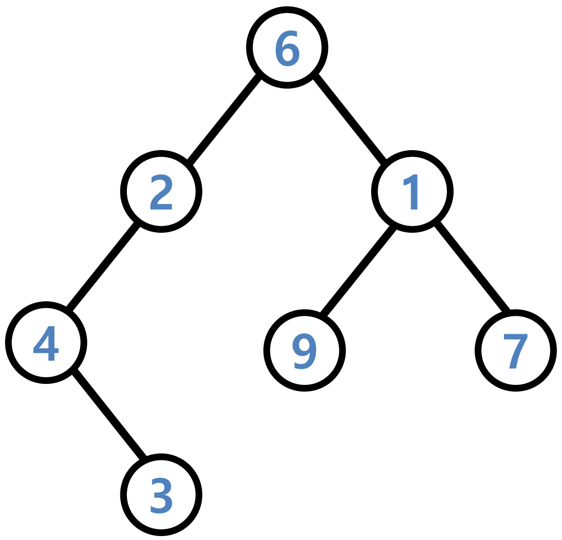
- destruct() (recursive): 노드의 동적메모리 해제하기

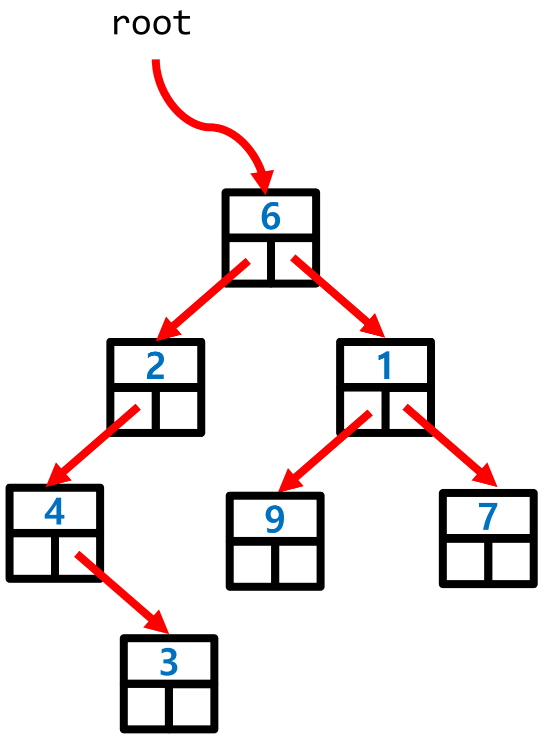
```
void destruct(struct node **root)
{


    *root = NULL;
}
```



Binary Tree with Weights

```
struct node {
    int weight;
    struct node* leftSubTree;
    struct node* rightSubTree;
}
```

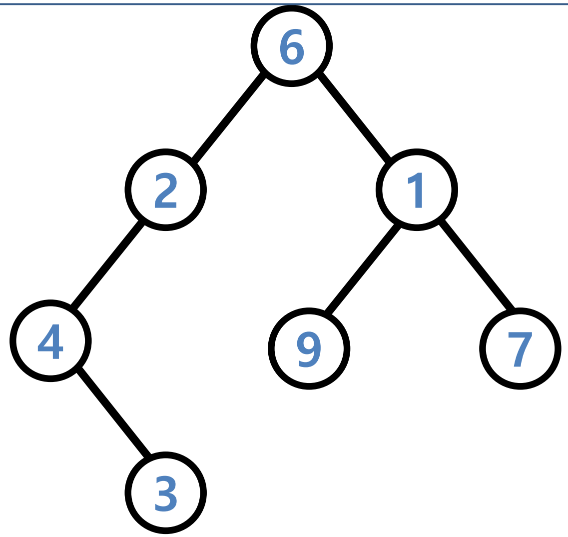




Binary Tree with Weights

- sumOfWeight()

```
int sumOfWeight(struct node *root)
{
    if(root == NULL)
        return 0;
    else
        return sumOfWeight(root->leftSubTree)+sumOfWeight(root->rightSubTree)+
           root->weight;
}
```

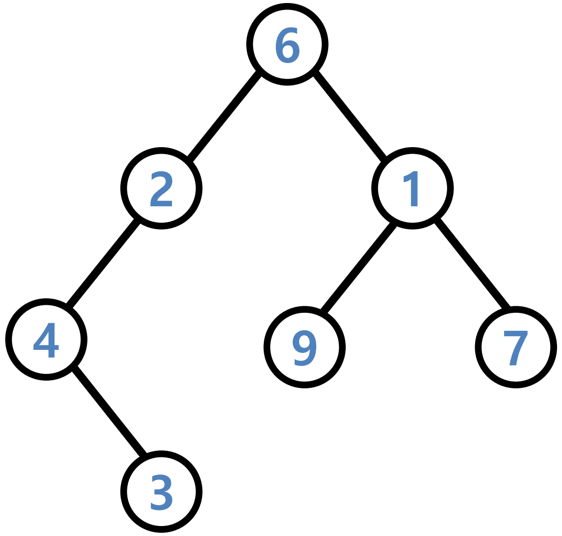


32

Binary Tree with Weights

- maxPathWeight()

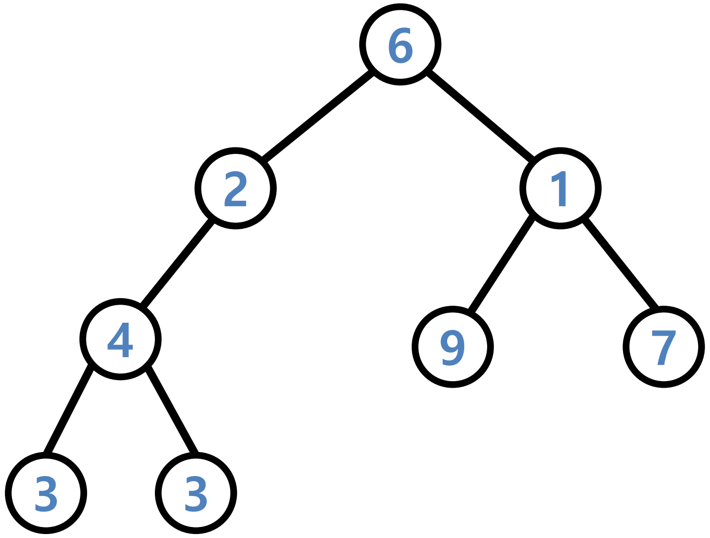
```
int maxPathWeight(struct node *root)
{
    if(root == NULL)
        return 0;
    else {
        int leftWeight, rightWeight;
        leftWeight = maxPathWeight(root->leftSubTree);
        rightWeidght = maxPathWeight(root->rightSubTree);
        return root->weight + leftWeight >= rightWeight ? leftWeight : rightWeight;
    }
}
```



16

Perfect Binary Tree

- Perfect Binary Tree
  - a binary tree in which all interior nodes have two children *and* all leaves have the same *depth* or same *level*.
  - Sometimes, ambiguously called *complete* tree



Recursion (Review)

- Types of recursion
  - Unary recursion
    - a single recursive call for each recursion
    - examples
      - factorial, linear sum, reversing array, computing powers
  - Binary recursion
    - two recursive calls for each recursion
    - examples
      - Fibonacci numbers, Hanoi tower, merge sorting, quick sorting
  - Multiple recursion
    - more than two recursive calls for each recursion
    - example
      - flood fill, knight's tour