Contents

2장 논리

- 학습목표
  - 명제를 이해하고 진릿값을 판별한다.
  - 논리연산자를 이용해 합성명제를 만들고 그 진릿값을 판별한다.
  - 논리적 동치를 이해하고 동치인 명제를 작성한다.
  - 논의영역에 따른 명제함수의 진릿값을 판별한다.
  - 추론을 이해하여 결론을 유도한다.

❖ 진릿값과 명제

정의 3-1 명제(Proposition)

객관적인 기준으로 진릿값을 구분할 수 있는 문장이나 수식: 영어 소문자 $p, q, r \cdots$ 로 표현

정의 3-2 진릿값(Tuth value)

참(true: T)이나 거짓(false: F)을 가리키는 값

예제 3-1

다음 문장이 명제인지 아닌지 구분하고 그 이유를 설명하라.

(1) 대한민국의 수도는 서울특별시이다.

(2) 컴퓨터 가격은 비싸다.

(3) $x+1=2$

(4) $1+1=3$

- "정수 χ에 대하여 $|\chi| \leq 0$를 만족하는 정수는 적어도 한 개는 있다."
  - $|\chi| \leq 0$를 만족하는 정수의 존재여부에 따라 진릿값이 결정됨
  - 즉, 위의 문장은 미지수 χ가 포함되어 있지만 명제가 될 수 있음

예제 3-2

다음 문장이 명제인지 명제가 아닌지 구분하고, 명제인 문장은 진릿값을 구하라.

(1) 정수 값 중에는 $2^n = n^2$를 만족하는 정수 n이 하나 이상 존재한다.

(2) $x = y$

(3) 모든 실수 a에 대해 $a^2 = 1$을 만족하는 경우는 오로지 $a = 1$뿐이다.

예제 3-3

다음 명제의 진릿값을 구하라.

(1) 미국의 수도는 뉴욕이다. (2) $5 + 3 = 8$ (3) 4는 양수다.

❖ 논리연산자와 합성명제

▪ 부정

정의 3-3 부정(NOT): $\sim p$ 또는 $\neg p$

문장 p가 명제일 때 "p가 아니다"를 의미하여 p의 진릿값과 반대의 진릿값을 갖는 명제

- 명제 $\neg p$ 는 "p 가 아니다", "not p" 혹은 "p 의 부정" 으로 읽음

[표 3-1] 부정 진리표

p	$\neg p$

예제 3-4

부정 연산 NOT을 이용해 다음 명제들의 부정 명제 표기와 문장을 작성하고 진릿값을 구하라.

(1) p: 4는 양수이다.

(2) q: $3+5=4$

(3) r: 뉴욕은 미국의 동부에 있다.

논리곱

정의 3-4 논리곱(AND): $p \wedge q$

문장 p, q가 명제일 때 "p 그리고 q"를 의미하여 명제 p, q의 진릿값이 모두 참(T)일 때 참(T)이 되고, 그렇지 않을 때는 거짓(F)이 되는 명제

- 두 개의 명제를 결합하는 이항연산자, '그리고'의 의미를 가짐
- 명제 $p \wedge q$ 는 "p 그리고 q" 혹은 "p and q" 라고 읽음

[표 3-2] 논리곱 진리표

p	q	$p \wedge q$

예제 3-5

논리곱 연산 AND를 이용해 다음 명제들의 논리곱 명제 표기와 문장을 작성하고 진릿값을 구하라.

(1) p: 4는 양수이다. q: $2+6=0$

(2) r: 뉴욕은 미국의 동부에 있다. s: 밴쿠버는 캐나다의 서부에 있다.

논리합

정의 3-5 논리합(OR): $p \vee q$

문장 p, q가 명제일 때 "p 또는 q"를 의미하여 명제 p, q의 진릿값이 둘 중 어느 하나라도 참(T)일 때 참(T)이 되고, 모두 거짓(F)일 때는 거짓(F)이 되는 명제

- 두 개의 명제를 결합하는 데에 사용하는 이항연산자로, '또는'의 의미
- 명제 $p \vee q$ 는 "p 또는 q" 혹은 "p or q" 라고 읽음

[표 3-3] 논리합 진리표

p	q	$p \vee q$

예제 3-6

논리합 연산 OR을 이용해 다음 명제들의 논리합 명제 표기와 문장을 작성하고 진릿값을 구하라.

(1) p: 4는 양수다. q: $2+6=0$

(2) r: 뉴욕은 미국의 서부에 있다. s: 밴쿠버는 캐나다의 동부에 있다.

배타적 논리합

정의 3-6 배타적 논리합(Exclusive OR: XOR): $p \oplus q$

문장 p, q가 명제일 때 명제 p, q의 진릿값 둘 중 하나만 참(T)일 때 참(T)이 되고, 그렇지 않을 때는 거짓(F)이 되는 명제

- 명제 $p \oplus q$ 는 "p XOR q" 라고 읽음

[표 3-4] 배타적 논리합 진리표

p	q	$p \oplus q$

- 배타적 논리합을 부정(NOT), 논리곱(AND), 논리합(OR)으로 표현

$$p \oplus q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

- 진리표

p	q	$p \oplus q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

합성명제

정의 3-7 합성명제(Compound Proposition)

하나 이상의 명제들이 논리연산자에 의해 결합된 명제

[표 3-6] 논리연산자의 우선순위

우선순위	논리연산자
1	( )
2	¬
3	∧
4	∨

❖ 합성명제는 진릿값에 따라 세 종류로 나눔

정의 3-8 항진명제(Tautology): T

합성명제를 구성하는 단일명제의 진릿값에 상관없이 합성명제의 진릿값이 항상 참(T)인 명제

정의 3-9 모순명제(Contradiction): F

합성명제를 구성하는 단일명제의 진릿값에 상관없이 합성명제의 진릿값이 항상 거짓(F)인 명제

정의 3-10 사건명제(Contingency)

항진명제도 모순명제도 아닌 합성명제

예제 3-8

다음 합성명제의 종류를 구분하라.

(1) $\neg p$ (2) $p \vee \neg p$ (3) $p \wedge \neg p$

예제 3-9

다음은 명제 p와 항진명제 T, 모순명제 F와의 연산이다. 각각의 진리표를 구하라.

(1) $p \vee \mathrm{T}$　　(2) $p \vee \mathrm{F}$　　(3) $p \wedge \mathrm{T}$　　(4) $p \wedge \mathrm{F}$

❖ 조건명제

정의 3-11 조건명제(Conditional Proposition) / 함축(Implication) : $p \rightarrow q$

문장 p, q가 명제일 때, 명제 p가 가정 또는 전제이고, 명제 q가 결론 또는 결과가 되는 명제

- 조건명제의 영어 표현
  - if p, then q (p 이면 q 이다.)
  - p implies q (p 는 q 를 함축한다.)
  - p only if q (p 일 경우에만 q 이다.)
  - p is sufficient for q (p 는 q 인 것으로 충분하다.)
  - p is necessary for q (p 는 q 를 위해 필요하다.)

[표 3-7] 조건명제 진리표

p	q	$p \rightarrow q$

예제 3-10

다음 명제들의 조건명제 표기와 문장을 작성하고 진릿값을 구하라(단, 앞의 명제가 가정, 뒤의 명제가 결론이다).

(1) p: 4는 양수이다. q: $2+6=0$

(2) r: 뉴욕은 미국의 동부에 있다. s: 밴쿠버는 캐나다의 서부에 있다.

예제 3-11

명제 p, q가 주어졌을 때, 합성명제 $\neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$의 진리표를 구하라.

쌍방조건명제

$$\underbrace{(p \to q)}_{❶} \wedge \underbrace{(q \to p)}_{❷}$$

❶에서 명제 p는 가정이고 q는 결론

❷에서는 명제 q가 가정이고 p가 결론

- 이 합성명제는 ❶, ❷ 조건명제의 논리곱(AND) 연산임
- 때문에 명제 p와 q가 모두 가정이 되면서 결론이 됨

정의 3-12 쌍방조건명제(Biconditional Proposition): $p \leftrightarrow q$

문장 p, q가 명제일 때, 명제 p와 q가 가정이면서 동시에 결론인 명제

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- 합성명제 $(p \to q) \wedge (q \to p)$는 쌍방조건명제 $p \leftrightarrow q$에 대한 또 다른 표현임

[표 3-9]

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
T	T	T			
T	F	F			
F	T	F			
F	F	T			

- 논리연산자의 우선순위

[표 3-10] 논리연산자의 우선순위

우선순위	연산자
1	( )
2	$\neg$
3	$\wedge$
4	$\vee$
5	$\rightarrow$
6	$\leftrightarrow$

예제 3-13

명제 p, q가 주어졌을 때 합성명제 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$의 진리표를 구하라.

역, 이, 대우

정의 3-13 역(Converse), 이(Inverse), 대우(Contraposition)

조건명제 $p \rightarrow q$에 대해 역은 가정과 결론이 바뀐 $q \rightarrow p$, 이는 가정과 결론을 각각 부정(NOT)한 $\neg p \rightarrow \neg q$의 형태. 대우는 가정과 결론을 바꾸고 각각 부정(NOT)한 $\neg q \rightarrow \neg p$의 형태

[표 3-10] 역, 이, 대우의 진리표

p	q	조건명제	역	이	대우
		$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$

예제 3-17

명제 "정수 x에 대해 $x \geq 50$이면, $x \leq 30$이다"에 대해 역, 이, 대우를 구하고, $x = 72$, $x = 23$, $x = 46$일 때 각 명제의 진릿값을 구하라.

X = 72 일때

예제 3-17

명제 "정수 x에 대해 $x \geq 50$이면, $x \leq 30$이다"에 대해 역, 이, 대우를 구하고, $x = 72$, $x = 23$, $x = 46$일 때 각 명제의 진릿값을 구하라.

X = 23 일때

예제 3-17

명제 "정수 x에 대해 $x \geq 50$이면, $x \leq 30$이다"에 대해 역, 이, 대우를 구하고, $x = 72$, $x = 23$, $x = 46$일 때 각 명제의 진릿값을 구하라.

X = 46 일때

2. 논리적 동치

정의 3-14 논리적 동치(Logically Equivalence): $P \equiv Q$

두 개의 합성명제 P와 Q의 진릿값이 서로 같은 경우

❖ 진리표를 이용한 논리적 동치 판별

예제 3-19

명제 $p \rightarrow q$와 $\neg p \vee q$는 어떤 관계에 있는지 진리표를 작성하여 판별하라.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$

- 논리적 동치법칙을 이용한 논리적 동치 판별

논리적 동치		법칙
$p \wedge \mathrm{T} \equiv$	$p \vee \mathrm{F} \equiv$	항등법칙(Identity Law)
$p \wedge \mathrm{F} \equiv$	$p \vee \mathrm{T} \equiv$	지배법칙(Domination Law)
$p \wedge \neg p \equiv$	$p \vee \neg p \equiv$	부정법칙(Negation Law)
$\neg(\neg p) \equiv$		이중 부정법칙(Double Negation Law)
$p \wedge p \equiv$	$p \vee p \equiv$	멱등법칙(Idempotent Law)
$p \wedge q \equiv$	$p \vee q \equiv$	교환법칙(Commutative Law)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv$	$(p \vee q) \vee r \equiv$	결합법칙(Associative Law)
$p \vee (q \wedge r) \equiv$	$p \wedge (q \vee r) \equiv$	분배법칙(Distributive Law)
$\neg(p \wedge q) \equiv$	$\neg(p \vee q) \equiv$	드모르간의 법칙(De Morgan's Law)
$p \wedge (p \vee q) \equiv$	$p \vee (p \wedge q) \equiv$	흡수법칙(Absorption Law)
$p \rightarrow q \equiv$		함축법칙(Implication Law)

예제 3-20

논리적 동치법칙을 이용해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$와 $\neg p \wedge \neg q$가 논리적 동치임을 증명하고, 진리표를 이용하여 확인하라.

3. 변수를 포함하는 명제

❖ 명제함수

정의 3-15 명제함수(Propositional Function): $P(x)$

논의영역이 주어진 변수 x를 포함하여 진릿값을 판별할 수 있는 문장이나 수식

정의 3-16 논의영역(Domain of Discourse): D

명제함수에 포함된 변수 x의 범위이나 값

예제 3-23

명제함수 $P(x)$가 $x^2 - 3x = 0$일 때, $P(1)$과 $P(3)$의 진릿값을 구하라.

예제 3-24

명제함수 $Q(x, y)$가 $x = 2y$일 때, $Q(1, 2)$와 $Q(2, 1)$의 진릿값을 구하라.

❖ 한정자

정의 3-17 전체한정자 또는 전칭한정자(Universal Quantifier): ∀

논의영역의 모든 값

– 논의영역 D에 속하는 모든 x에 대한 명제 $P(x)$: $\forall x P(x)$

- 전체한정자로 범위가 정해진 명제함수는 논의영역에 포함되는 모든 원소에 대해 그 명제가 참(T)이면 명제함수도 참(T)
- 논의영역에 포함되는 원소 중 하나라도 명제가 거짓(F)이면 그 명제는 거짓(F)

정의 3-18 존재한정자(Existential Quantifier): ∃

논의영역 중 어떤 값

– 논의영역 D에 속하는 원소 중 어떤 x에 대한 명제 $P(x)$: $\exists x P(x)$

- 존재한정자로 범위가 정해진 명제함수는 논의영역에 포함되는 원소들 중 하나라도 그 명제를 참(T)으로하는 원소가 있으면 명제함수도 참(T)
- 논의영역에 포함되는 모든 원소에 대해 그 명제가 거짓(F)이면 그 명제는 거짓(F)

예제 3-25

논의영역 D가 정수 영역일 때 주어진 명제함수에 대해 $\forall x\, P(x)$를 문장으로 작성하고 진릿값을 구하라.

(1) $P(x)$: x는 실수이다. (2) $P(x)$: x는 자연수이다. (3) $P(x)$: x는 허수이다.

예제 3-26

논의영역 D가 정수 영역일 때 주어진 명제함수에 대해 $\exists x P(x)$를 문장으로 작성하고 진릿값을 구하라.

(1) $P(x)$: x는 실수이다. (2) $P(x)$: x는 자연수이다. (3) $P(x)$: x는 허수이다.

- 두 개 이상의 변수가 포함된 명제함수의 경우 그 변수들은 모두 구속변수가 될 수 있으므로 한정자가 중첩되어 사용됨
  - 예) χ 와 y 를 갖는 명제함수 P(χ , y)
  - 다음과 같이 8개의 한덩된 명제함수 표현

$$\forall x \forall y P(x,y),\ \ \forall x \exists y P(x,y),\ \ \exists x \forall y P(x,y),\ \ \exists x \exists y P(x,y)$$
$$\forall y \forall x P(x,y),\ \ \forall y \exists x P(x,y),\ \ \exists y \forall x P(x,y),\ \ \exists y \exists x P(x,y)$$

  - 1) 모든 x는 모든 y와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 2) 모든 x는 적어도 하나의 y와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 3) 적어도 하나의 x는 모든 y와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 4) 적어도 하나의 x는 적어도 하나의 y와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 5) 모든 y는 모든 x와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 6) 모든 y는 적어도 하나의 x와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 7) 적어도 하나의 y는 모든 x와 대응하여 P(x, y)이다.
  - 8) 적어도 하나의 y는 적어도 하나의 x와 대응하여 P(x, y)이다.

예제 3-28

논의영역이 $D = \{a | -3 \le a \le 3\}$인 변수 x, y에 대하여 명제함수가 $P(x, y)$: $x - y = 3$일 때 다음 명제들을 문장으로 작성하고 진릿값을 구하라.

(1) $\forall x \forall y P(x, y)$

(2) $\exists x \forall y P(x, y)$

(3) $\exists y \forall x P(x, y)$

(4) $\exists y \exists x P(x, y)$

❖ 한정자와 부정 연산자

- 명제함수도 명제이기 때문에 논리연산이 가능

[표 3-12] 한정자와 논리곱(AND), 논리합(OR)에 대한 정리

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$
$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$
$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

[표 3-13] 한정자와 부정(NOT)에 대한 정리

- $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

예제 3-29

논의영역 D가 $D=\{x \mid 0< x \le 4,\ x$는 양의 정수$\}$이고, 명제 $P(x)$가 $x^2 < 10$일 때 다음 명제의 부정(NOT)의 기호 표현과 문장을 쓰고 진릿값을 구하라.

(1) $\forall x P(x)$

(2) $\exists x P(x)$

4. 추론

정의 3-19 추론(Inference) 또는 논증(Argument)

참(T)인 명제를 근거로 하여 다른 명제가 참(T)임을 유도하는 방식

정의 3-20 가정 또는 전제(Hypothesis), 결론(Conclusion)

- **전제 또는 가정**: 결론의 근거가 되는 최종 결론을 제외한 명제, 진릿값이 참(T)으로 간주되는 명제
- **결론**: 주어진 전제에 의해 유도된 명제

유효추론과 허위추론

정의 3-21 유효추론 또는 정당한 추론

주어진 전제를 이용해 유도된 결론이 정확한 추론, 전제가 참(T)일 때 결론이 모두 참(T)인 추론

정의 3-22 허위추론 또는 부당한 추론

주어진 전제를 이용해 유도된 결론이 틀린 추론, 전제가 참(T)인 경우, 결론이 거짓(F)인 경우가 하나라도 있는 추론

- 유효추론의 예
  - 태양이 달보다 지구와 멀면 지구는 자전한다
  - 태양은 달보다 지구와 멀다
  - 그러므로 지구는 자전한다.
  - 명제 p : 태양은 달보다 지구와 멀다
  - 명제 q : 지구는자전한다

$$p \rightarrow q$$
$$p$$
$$\therefore q$$

[표 3-14] 유효추론 예

전제	결론	전제
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- 전제는 항상 참(T)이라고 했으므로, 주어진 전제 $p \rightarrow q$ 와 p 가 모두 참(T)인 경우는 위의 진리표에서 사각형이 그려진 부분만임
- 전제가 모두 참(T)인 사각형으로 표시된 부분에서 결론인 q의 진릿값 역시 참(T)이므로 이 추론은 유효추론, 정당한 추론임

허위추론의 예

- 태양이 달보다 지구와 멀면 지구는 자전한다
- 지구는 자전한다.
- 그러므로 태양은 달보다 지구와 멀다
- 명제 p : 태양은 달보다 지구와 멀다
- 명제 q : 지구는자전한다

$$p \rightarrow q$$
$$q$$
$$\therefore p$$

[표 3–15] 허위추론 예

결론	전제	전제	
p	q	$p \rightarrow q$	
T	T	T	❶
T	F	F	
F	T	T	❷
F	F	T	

- 전제는 항상 참(T)라고 했으므로, 주어진 전제 $p \rightarrow q$ 와 q 가 모두 참(T)인 경우는 위의 진리표에서 사각형이 그려진 부분(❶, ❷)만임
- ❶의 경우 p 의 진릿값은 참(T). 그러나 ❷의 경우, p 의 진릿값은 거짓(F)
- 전제($p \rightarrow q$ 와 q)가 모두 참(T)일 때 결론(p)이 거짓(F)인 경우가 하나라도 있으면 허위추론, 부당한 추론이 됨

예제 3-30

다음 논증식이 정당한지 판별하라.

(1) $p \vee (q \vee r)$

$\neg r$

$\therefore\ p \vee q$

(2) $p \rightarrow q \vee \neg r$

$q \rightarrow p \wedge r$

$\therefore\ p \rightarrow r$

p	q	r	$q \vee r$	전제		결론
				$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	전제		결론
						$p \rightarrow q \vee \neg r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$

❖ 논리적 추론법칙

[표 3-16] 논리적 추론법칙

법칙 이름	추론법칙	항진명제
논리곱 (Conjunction)	p q $\therefore p \wedge q$	없음
선언적 부가 (Disjunctive Addition)	p $\therefore p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
단순화 (Simplication)	$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
긍정논법 (Modus Ponens)	p $p \rightarrow q$ $\therefore q$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
부정논법 (Modus Tollens)	$\neg q$ $p \rightarrow q$ $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$
선언적 삼단논법 또는 소거 (Disjunctive Syllogism)	$p \vee q$ $\neg q$ $\therefore p$	$[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$
가설적 삼단논법 또는 추이 (Hypothetical Syllogism)	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

예제 3-31

추론법칙을 이용하여 정당한 추론이 되도록 빈칸을 채워라.

(1) 긍정논법

영수가 수학을 공부하면, 희영이는 영어를 공부한다.

영수가 수학을 공부한다.

∴ ____________________

(2) 부정논법

고양이가 강아지를 이기면, 강아지는 개구리를 이긴다.

강아지는 개구리를 이기지 못한다.

∴ ____________________

(3) 가설적 삼단논법 또는 추이

톰이 야구를 하면, 존은 축구를 한다.

____

∴ 톰이 야구를 하면, 그렉은 수영을 한다.

(4) 선언적 삼단논법 또는 소거

____

데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다.

∴ 슈퍼컴퓨터는 날씨를 예측한다.

예제 3-32

논리적 추론법칙을 이용해 다음 추론이 유효추론인지 판별하라.

A: $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$

B: $\neg r \rightarrow \neg s$

C: s

$\therefore\ q$

예제 3-33

다음과 같은 명제가 전제로 주어져 있다. 논리적 추론법칙을 이용해 유효 추론이 되도록 결론을 작성 하시오.

(a) 열쇠가 서랍에 있었다면, 출근할 때 열쇠를 보았다.

(b) 내가 아침을 먹었다면, 열쇠는 서랍에 있다.

(c) 나는 샤워를 했거나 아침을 먹었다.

(d) 내가 샤워를 했다면, 열쇠는 가방 속에 있다.

(e) 내가 출근할 때, 나는 열쇠를 보지 못했다.