Divide & Conquer
제3장

2023- Fall

국민대학교 소프트웨어학부

분할정복기법

- Divide & Conquer
  - Recursion 기반 해결기법
  - 분할정복기법의 문제해결 시나리오
    (1) 분할 (Divide)
    - 주어진 문제를 두 개 혹은 그 이상의 같은 형식의 작은 문제로 나눈다.

    (2) 정복 (Conquer)
    - 나누어진 작은 문제는 재귀적으로 해결한다. 즉, 나누어진 작은 문제는 더 이상 나누어서 문제를 해결할 필요가 없이 직접 문제를 해결할 수 있을 때 까지 재귀적으로 계속 분할해가면서 문제를 해결한다.

    (3) 통합 (Combine)
    - 한 개 이상의 작은 문제들로부터 구한 모든 해답들을 서로 통합해서 원래 문제의 해답을 만든다.

분할정복기법 (2)

- Divide & Conquer
  - 분할정복기법은 Top-Down 문제해결 방법
    - 초기에 큰 문제가 주어졌을 때, 직접 이 문제를 해결할 수 없으므로, 이 문제를 적절한 크기의 작은 문제로 분할하여 해결하는 방법이다. 이러한 방법을 top-down 방법이라고 한다.
    - 예
      - binary search
      - n 개의 구슬 중에서 가벼운 구슬 찾기
  - Recursion 으로 알고리즘 구현
    - Top-down 방법에 의하여 분할된 작은 문제들 또한 직접 문제를 해결할 수 없는 경우에는 또 다시 더 작은 문제로 분할한다.
    - 작은 문제는 문제를 직접 해결할 수 있을 때 까지 계속 분할한다.
    - 이러한 해결 방법은 recursion 으로 쉽게 구현할 수 있다.

분할정복기법 (3)

- Divide & Conquer
  - 분할정복기법 알고리즘의 정확성 증명
    - 수학적 귀납법 사용
  - 분할정복기법 알고리즘의 시간복잡도 계산
    - 시간복잡도 T(n) 을 알고리즘으로 부터 재귀식으로 유도하고, 이 재귀식(점화식)을 풀어서 구함

수학적 귀납법

– 수학적 귀납법(Mathematical Induction)의 원리

Theorem: **Principles of Mathematical Induction**

- Let *P(n)* be a statement that is defined for integers *n*, and let *a* be a fixed integer.
- Suppose the following two statements are true:
  - *P(a)* is true
  - For all integers *k>=a* , if *P(k)* is true then *P(k+1)* is true.
- Then the statement
  - For all integers *n >= a, P(n)* is true.

수학적 귀납법 (2)

– 수학적 귀납법에 의한 증명방법

1. ***Base Step***
   - Prove *P(a)*
2. ***Inductive Hypothesis***
   - Suppose *P(k)* is true for *k>=a*
3. ***Inductive Step***
   - Prove P(k+1) is true using the inductive hypothesis.

수학적 귀납법 (3)

- 예
  - P(n) : For all integers $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^2 = n(n+1)/2$
    - (예)
      - n=4 : $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$
      - n=5 : $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$
  - 증명:

(1) Base step: P(1)
Left Part : 1
Right Part : 1
Therefore *P(1)* is true

(2) Inductive Hypothesis
Suppose that *P(k)* is true for *k>=1*

수학적 귀납법 (4)

- 예
  - P(n) : For all integers $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}i^2 = n(n+1)/2$

(3) Inductive Step: Prove that *P(k+1)* is true

From the left part of *P(k+1)*, we have

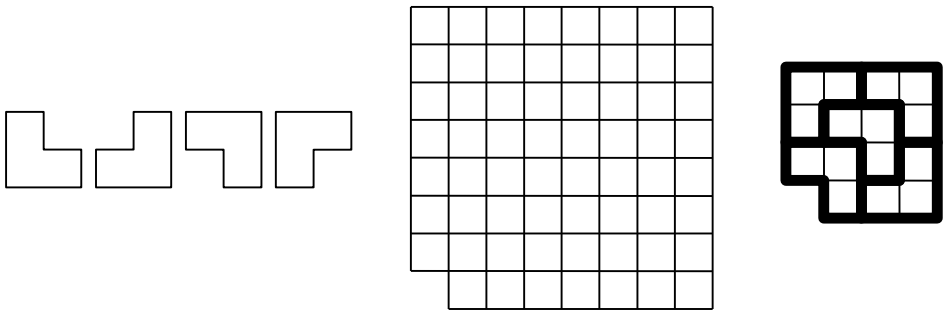
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{k+1-i}i^2 &= (k+1)^2 + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}i^2 \\ &= (k+1)^2 - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}i^2 \\ &= (k+1)^2 - P(k) \\ &= (k+1)^2 - k(k+1)/2 \\ &= (k+1)(k+2)/2\end{aligned}$$

Thus part is equal to the right part of *P(k+1)*.

(결론) Therefore we conclude that the theorem is true by the *theorem of mathematical induction*.

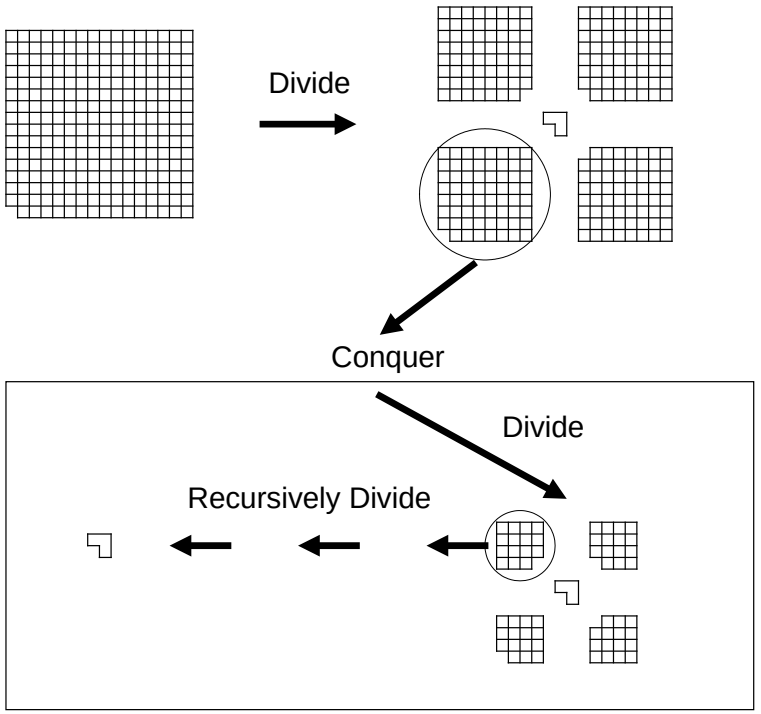
Tromino 타일 채우기

- 문제
  - 트로미노(tromino) 는 다음 그림과 같이 크기가 1x1 인 정사각형 세 개로 기역자 모양으로 만들어진 모양으로서, 모양을 회전시키면 아래와 같은 네 가지 모양을 가지고 있다.
  - 크기가 NxN ($N=2^k$) 이고, 한 쪽 모퉁이에 1x1 크기의 격자가 떨어져 나간 바둑판 모양의 격자판이 주어졌을 때, 이 격자판을 트로미노 타일로 빈 공간없이, 또한 타일이 서로 겹치지 않게, 모든 격자판을 채우는 방법을 고안하시오. 예를 들어 N=4인 경우는 아래 그림과 같이 채울 수 있다.



Tromino 타일 채우기 (2)

– 해결 알고리즘: (Divide & Conquer)



Tromino 타일 채우기 (3)

– 알고리즘의 정확성 증명

- 위 알고리즘에 의해서는 귀퉁이가 떨어져나간 $2^n x 2^n$ ($n \geq 1$) 크기의 격자판은 항상 트로미노 타일로 채울수 있다.

- 수학적 귀납법에 의한 증명

(1) Base case : n=1 인 경우

귀퉁이가 떨어져나간 2x2 크기의 격자판은 1개의 트로미노 타일로 채울 수 있다.

(2) Inductive Hypothesis: n=k 인 경우

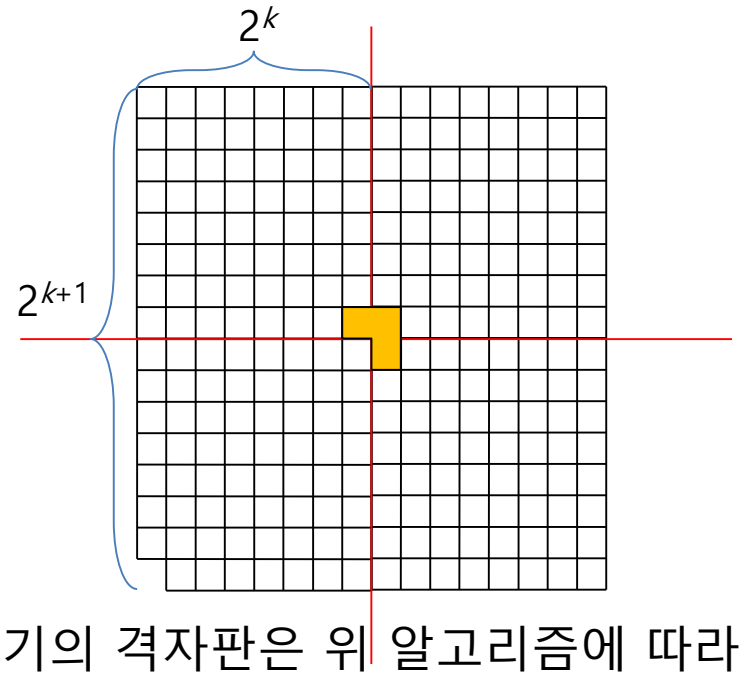
귀퉁이가 떨어져나간 $2^k x 2^k$ 크기의 격자판은 항상 트로미노 타일로 채울 수 있다라고 가정하자.

Tromino 타일 채우기 (4)

– 알고리즘의 정확성 증명

(3) Inductive Step : n=k+1 인 경우

(2) 번 단계의 가정을 이용하여, 귀퉁이가 떨어져나간 $2^{k+1}x2^{k+1}$ 크기의 격자판은 다음과 같이 트로미노 타일로 채울 수 있다라고 증명할 수 있다.

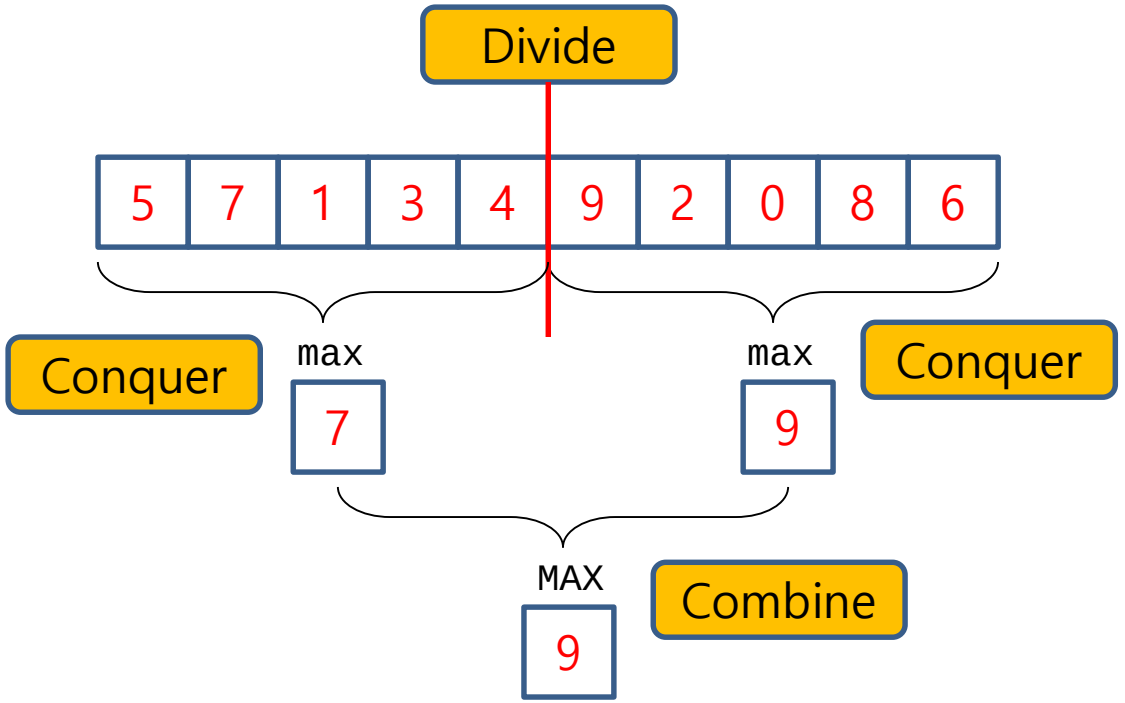


(결론) 따라서 모든 2^nx2^n ($n \geq 1$) 크기의 격자판은 위 알고리즘에 따라 트로미노로 채울 수 있다.

Finding Max

- Finding Max(recursive)

$$\max([a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]) = \begin{cases} a_1 & n = 1 \\ MAX\,(\max([a_1, \cdots, a_k]), \max([a_{k+1}, \cdots, a_n])) & n > 1 \end{cases}$$



Finding Max (2)

- Finding Max (Divide & Conquer)

$$\max([a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n]) = \begin{cases} a_1 & n = 1 \\ MAX(\max([a_1, \cdots, a_k]), \max([a_{k+1}, \cdots, a_n])) & n > 1 \end{cases}$$

```
#define MAX_SIZE 100
#define MAX(a,b) ((a)>(b)?(a):(b))
int recurMax(int a[], int left, int right)
{
    int half;
    if (left == right)
        return a[left];
    else
    {
        half = (left+right)/2;
        return MAX(recurMax(a, left, half),
                   recurMax(a, half+1, right));
    }
}
```

Divide

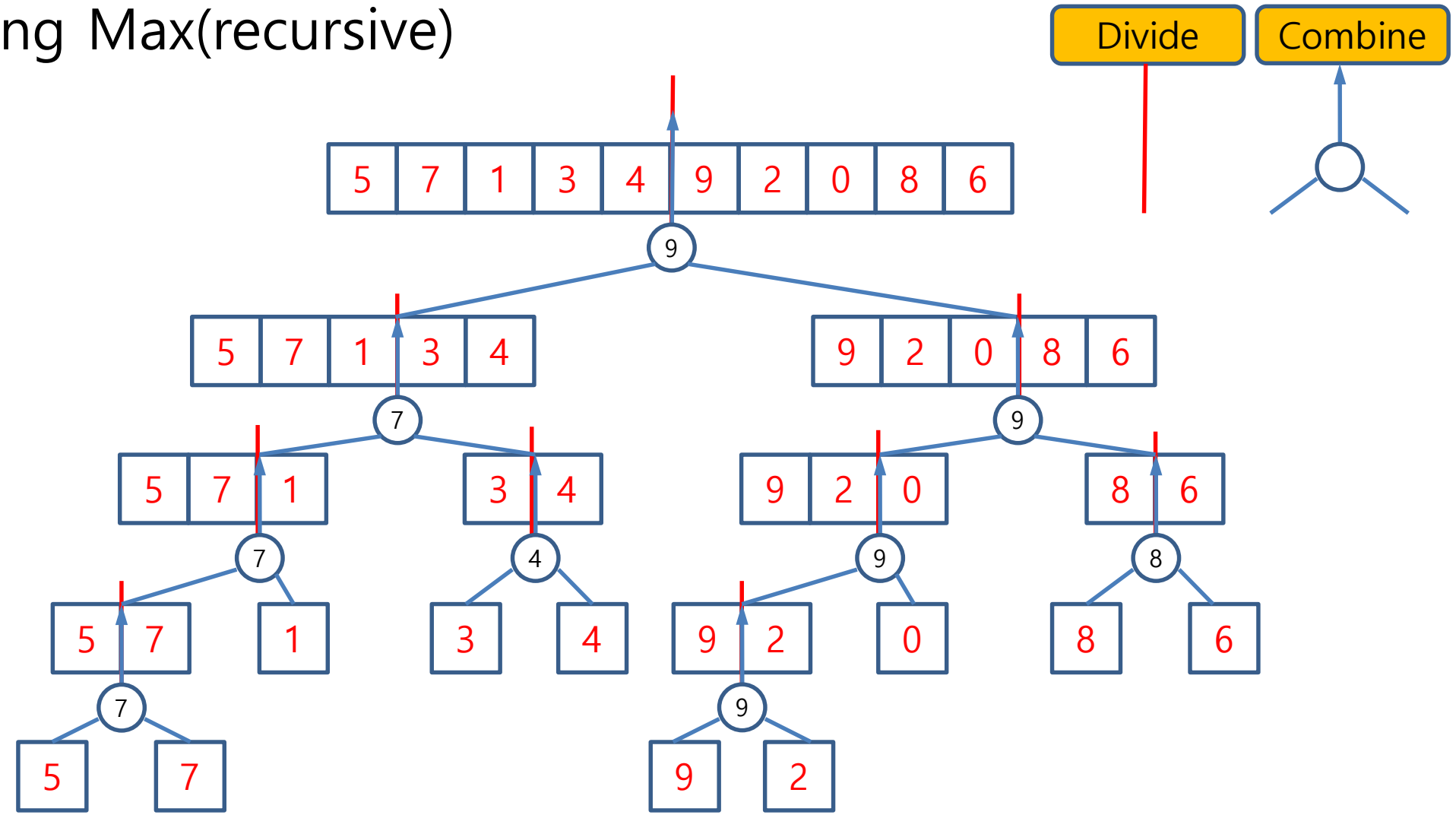
Conquer

Combine

```
void main(void)
{
    int v[MAX_SIZE] = { 5, 3, 9, 2, 4, 8, 1, 6, 0, 7 };
    printf("%d\n", recurMax(v, 0, 9));
}
```

Finding Max

- Finding Max(recursive)



Finding Max (3)

- Finding Max (Divide & Conquer)
  - Analysis
    - Basic operation : MAX( )에서 두 수를 비교하는 연산자
    - T(n) : n 개의 정수 중에서 최대값을 구할 때, basic operation 의 수행 횟수.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

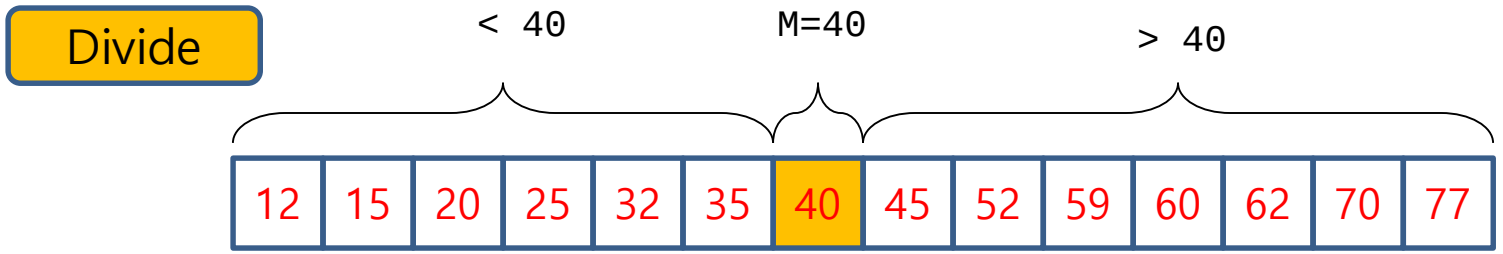
$$T(n) = n - 1$$

Binary Search

- Binary Search
  - 문제
    - 오름차순으로 정렬된 n 개의 정수가 저장된 1차원 배열에 주어진 정수 x 가 들어 있는지를 검사하시오.

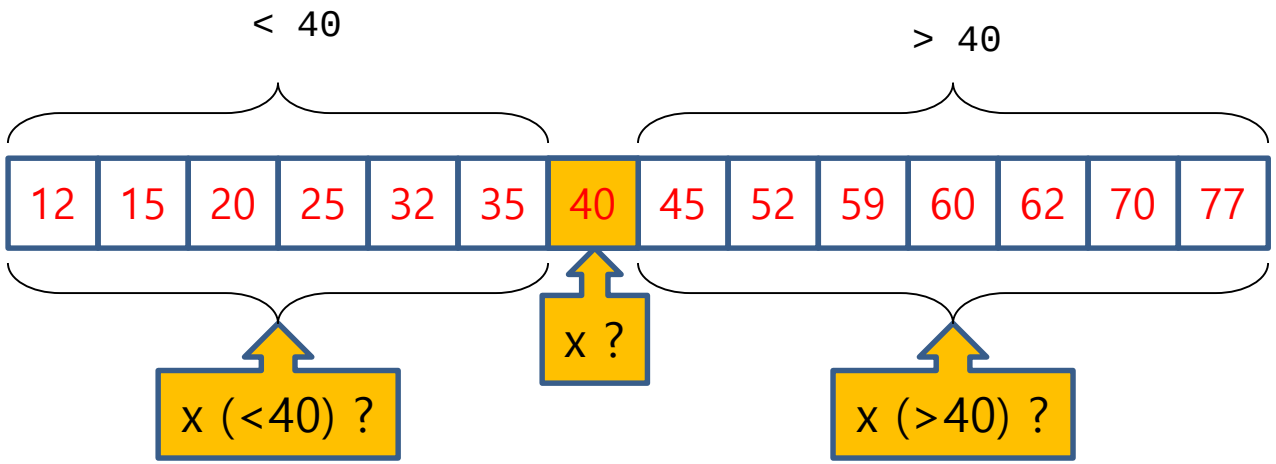
Binary Search (2)

- Binary Search
  - Divide & Conquer 알고리즘
    - Divide
      - 가장 중앙에 있는 정수 M과 M을 중심으로 M 보다 작은 그룹과 M 보다 큰 그룹 등의 세 그룹으로 나눈다



Binary Search (3)

- Conquer
  - x = M
    - » 가장 중앙에 있는 정수 M과 찾고자 하는 정수 x를 비교한다.
    - » 두 수가 같은 경우에는 종료한다.
  - x < M
    - » M 보다 작은 그룹에서 x 를 재귀적으로 검색한다.
  - x > M
    - » M 보다 큰 그룹에서 x 를 재귀적으로 검색한다.



Binary Search (4)

- Combine
  - Conquer 단계에서 분할된 작은 문제들에 대하여 구한 해답을 원래 문제의 해답으로 정한다.

```
int binarySearch(int a[], int left, int right, int value)
{
    int mid;

    if (left > right)
        return -1; /* not found */
    else
    {
        mid = (left+right)/2;

        if (a[mid] == value)
            return mid;
        else if (a[mid] > value)
            return binarySearch(a, left, mid-1, value);
        else
            return binarySearch(a, mid+1, right, value);
    }
}
```

```
void main(void)
{
    int v[] = { 1, 3, 4, 7, 9, 11, 15 };
    printf("%d\n", binarySearch(v, 0, 6, 11));
}
```

Binary Search (5)

– Analysis
  - basic operation : x 와 배열에 있는 수를 비교하는 연산
  - T(n) : n 개의 정수에서 x 를 검색할 때의 basic operation 수

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ \max\left\{T\left(\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\right), T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right\} + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \quad n \geq 1$$

$$\lg n = \log_2 n$$
$$\ln n = \log_e n$$

Binary Search (6)

– Analysis

$$R(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ R\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

- $T(n) = R(n) + 1$
- $R(n)$: 정수 n 을 연속적으로 2로 나누어서 (정수 나눗셈) 1이 될 때까지의 나눗셈의 횟수
  - proof:

$\lfloor \lg n \rfloor \le \lg n < \lfloor \lg n \rfloor + 1$

$\Rightarrow 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \le 2^{\lg n} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}$

$\Rightarrow 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \le n < 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}$

$\Rightarrow 1 \le \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1$

정수 n 을 시작으로 연속적으로 2로 나누면 (정수 나눗셈),

$n_0 = n = \left\lfloor \frac{n}{2^0} \right\rfloor$

$n_1 = \left\lfloor \frac{n_0}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor$

$n_2 = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor$

$n_k = \left\lfloor \frac{n_{k-1}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = 1 \quad k = \lfloor \lg n \rfloor$ 일때, n_k=1 이 됨.

Binary Search (7)

– Analysis

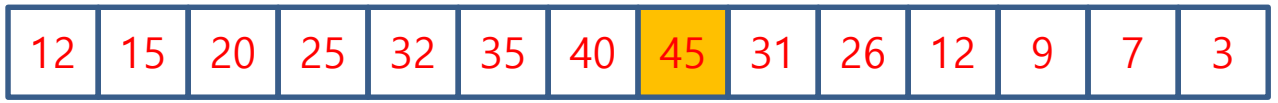
$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n/2) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

- 위 식은, n = 2^k 일 때, 아래와 같이 order 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T(2^k) &= T(2^{k-1}) + 1 \\ &= T(2^{k-2}) + 1 + 1 \\ &= T(2^{k-3}) + 1 + 1 + 1 \\ &\cdots \\ &= T(2^{k-k}) + 1 + \cdots + 1 \\ &= k + 1 \\ &= \log n + 1 \\ &\in O(\log n) \end{aligned}$$

Find Peak Value

- Find Peak Value
  - 오르내리막 수열
    - 최고점 (Peak Value)



    - n 개의 정수로 구성된 오르내리막 수열이 있을 때, 이 수열의 최고점을 빠르게 계산하는 알고리즘을 제시하시오.

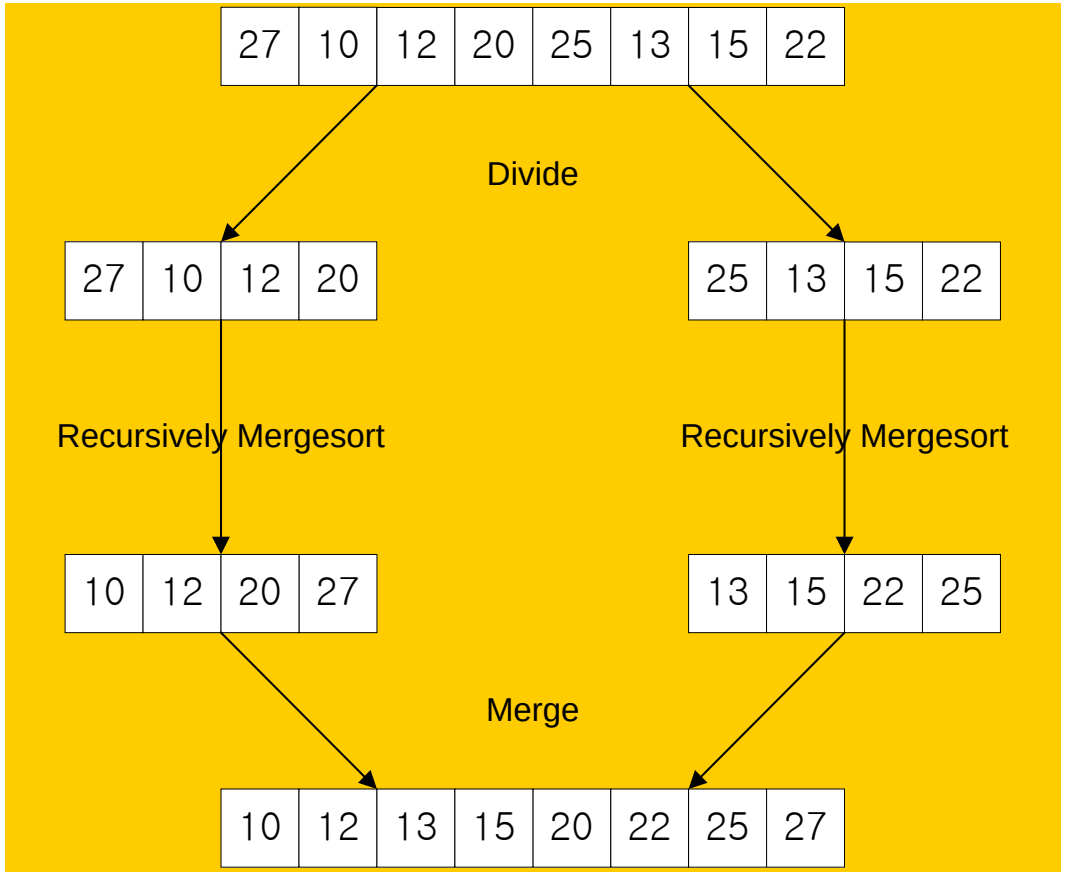
Merge Sorting

- Merge Sorting
  - 1차원 배열에 저장된 n 개의 데이터를 오름차순으로 정렬

  – Divide
    - 배열을 각각 n/2 개의 데이터로 만들어진 두 개의 부분배열로 분할한다.
  – Conquer
    - 나누어진 부분배열에 대하여 재귀적으로 합병 정렬을 수행한다.
    - 단, 데이터의 개수가 1개인 경우에는 그 자체로 정렬된 상태이다.
  – Combine (Merge)
    - 두 개의 이미 정렬된 부분배열을 통합하여 n 개의 정렬된 배열로 만든다.

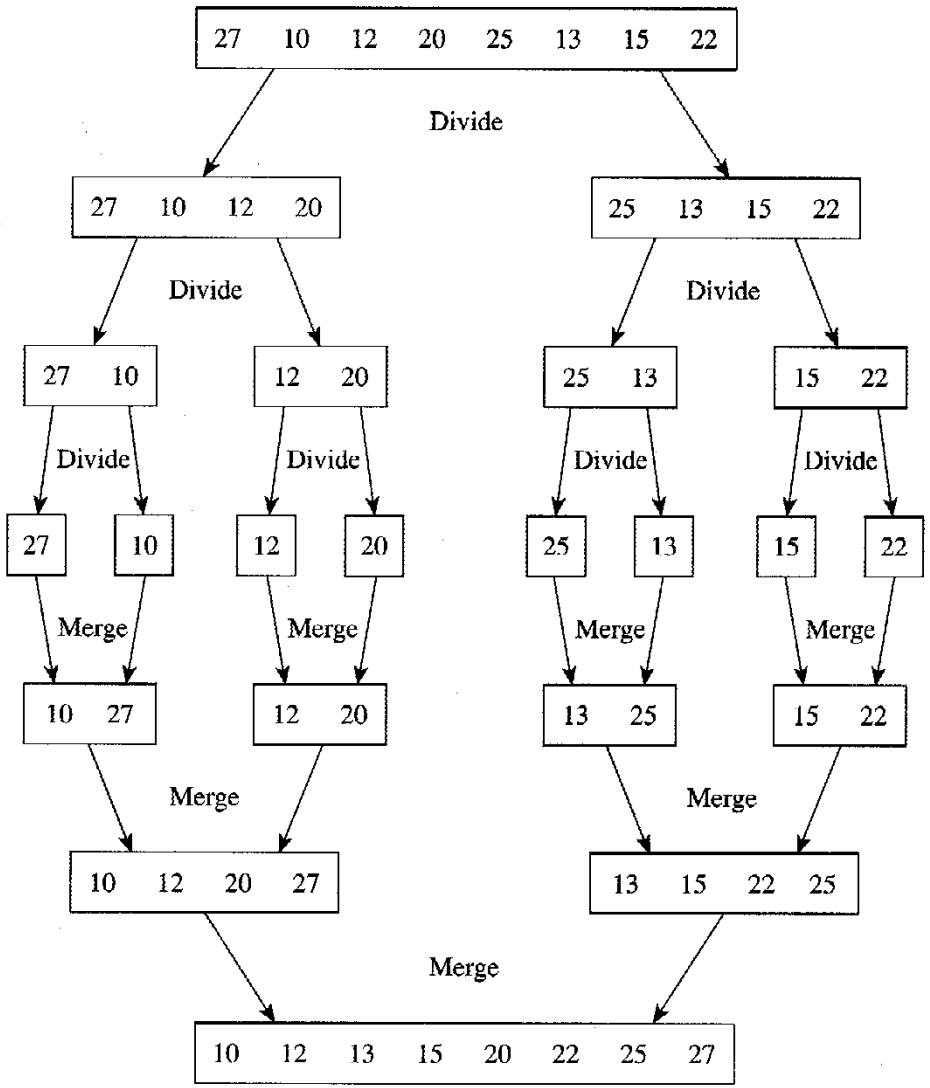
Merge Sorting (2)

- 예



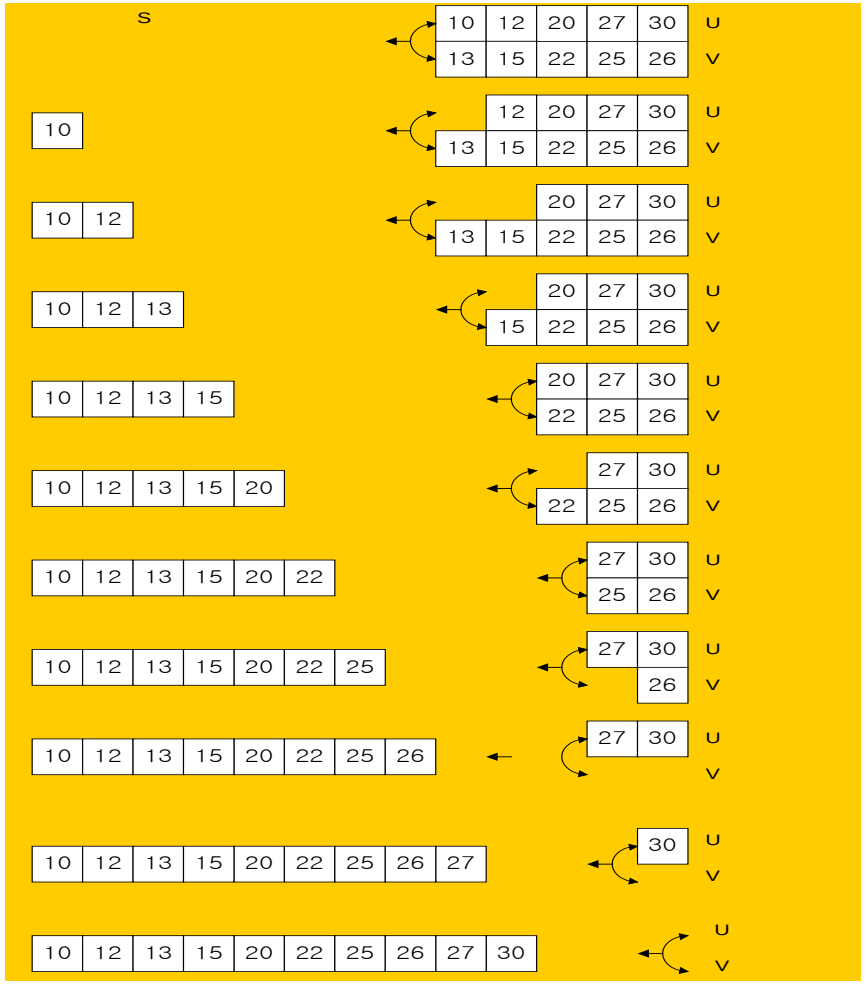
Merge Sorting (3)

- 예



Merge Sorting (4)

– Merge
  - 이미 정렬된 두 개의 배열이 주어졌을 때, 이 두 배열을 합쳐서 정렬함.



Merge Sorting (5)

– Merge
  - 이미 정렬된 두 개의 배열이 주어졌을 때, 이 두 배열을 합쳐서 정렬함.

```
#define MAX_SIZE 100

void merge(int a[], int low, int mid, int high)
{
    int i, j, k;
    int tmp[MAX_SIZE];

    for(i=low; i<=high; i++)
        tmp[i] = a[i];

    i = k = low;
    j = mid+1;

    while(i<=mid && j<=high)
        if(tmp[i] <= tmp[j])
            a[k++] = tmp[i++];
        else
            a[k++] = tmp[j++];

    while(i<=mid)
        a[k++] = tmp[i++];
    while(j<=high)
        a[k++] = tmp[j++];
}
```

Merge Sorting (6)

– Merge Sorting

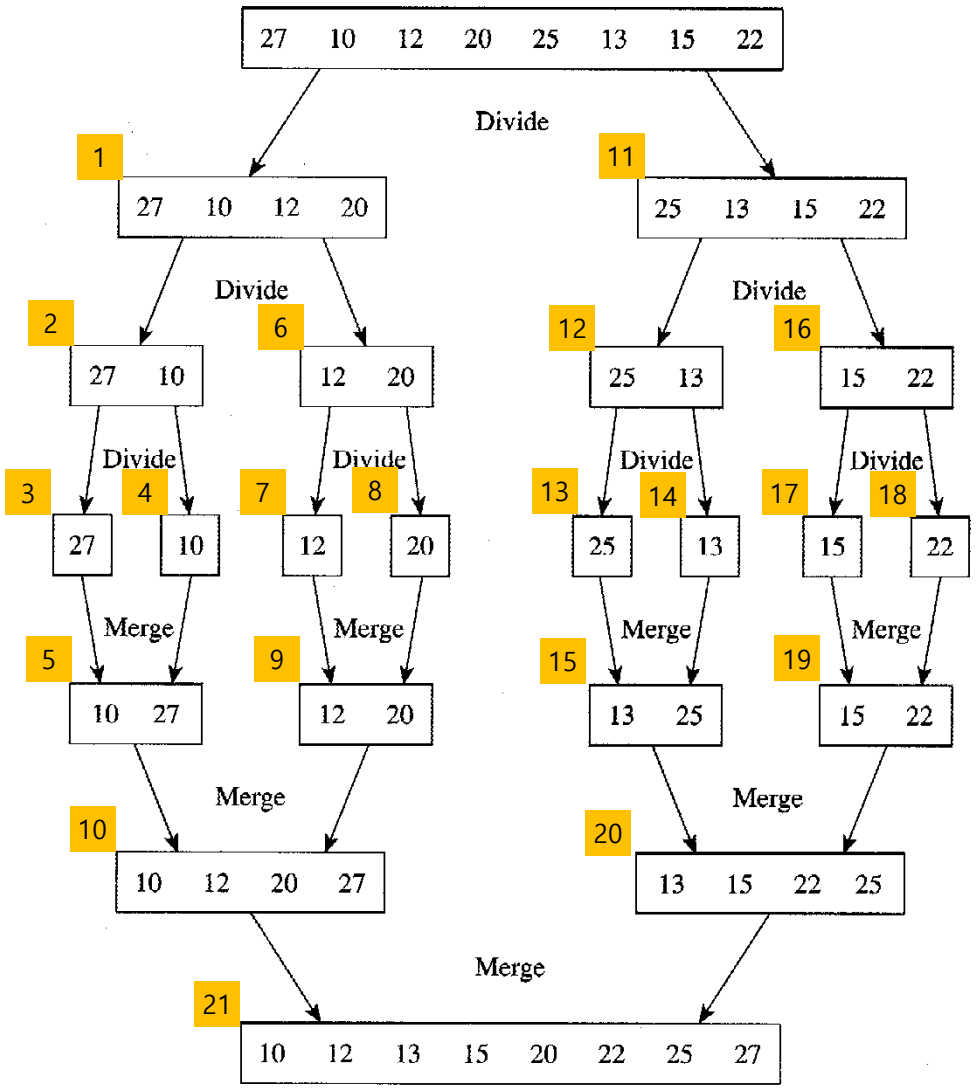
```
void mergeSort(int v[], int low, int high)
{
    int mid;

    if(low == high)
        return; /* base case */

    mid = (low + high) / 2;

    mergeSort(v, low, mid);
    mergeSort(v, mid+1, high);
    merge(v, low, mid, high);
}
```

```
void main(void)
{
    int i, v[MAX_SIZE] = { 5, 6, 9, 4, 0, 2, 1, 7, 3, 8 };

    mergeSort(v, 0, 9);
}
```

MergeSort
- stable (Yes)
- In-Place (No)

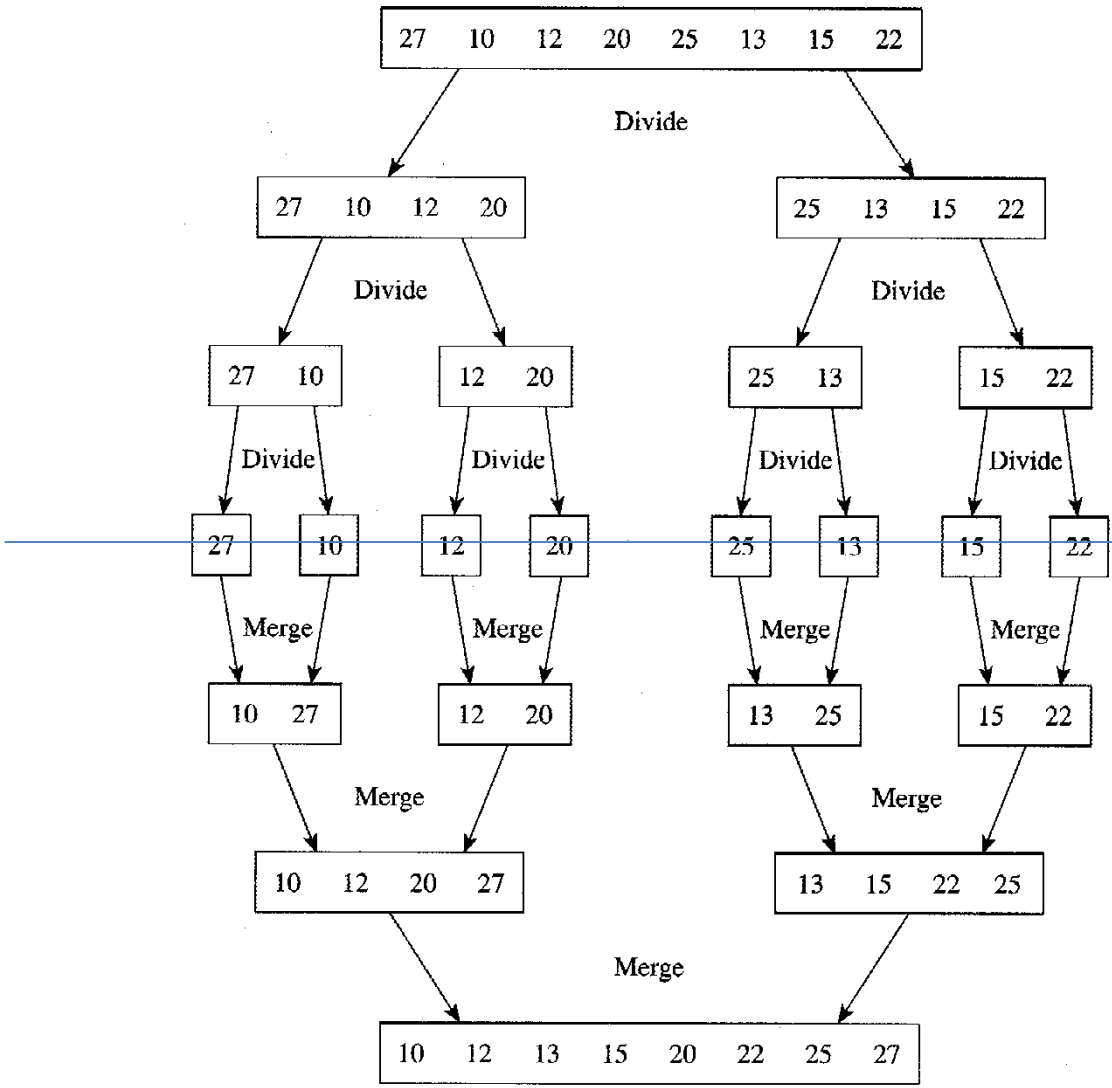
Merge Sorting (3)

- 예



Merge Sorting (3)

- 예



Top-Down

- 계속 작은 구간으로 divide 하는 과정

Bottom-Up

- 정렬된 작은 구간을 Merge하여 정렬된 큰 구간을 만드는 과정

(*) bottom-up 과정만을 반복문으로 실행하여 merge-sort 할 수 있음

Merge Sorting by Iteration

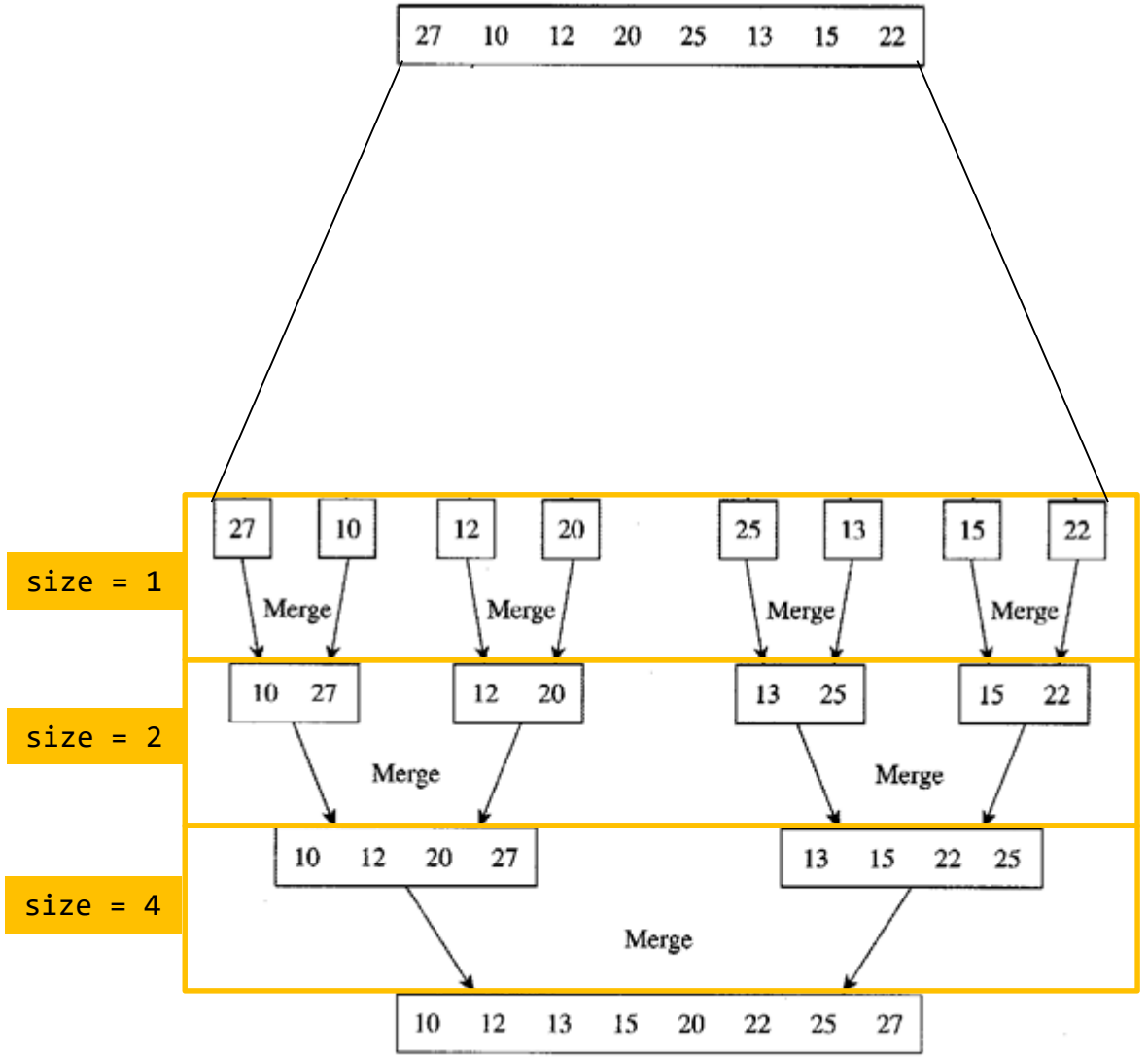
– Merge Sorting by Iteration (Bottom Up)

```
void mergeSortIterative(int v[], int n)
{
    int size = 1;

    while (size < n)
    {
        for (int i = 0; i < n; i += 2 * size)
        {
            int low = i;
            int mid = low + size - 1;
            int high = MIN(i + 2 * size - 1, n - 1);

            if (mid >= n - 1)  // merge할 subarray가 1개일 경우
                break;
            merge(v, low, mid, high);
        }

        size *= 2;
    }
}
```

```
void main(void)
{
    int i, v[MAX_SIZE] = { 5, 6, 9, 4, 0, 2, 1, 7, 3, 8 };

    mergeSort(v, 10);
}
```

Merge Sorting (3)

- 예



Bottom-Up

(*) bottom-up 과정만을 반복문으로 실행하여 merge-sort 할 수 있음

Merge Sorting (7)

- Analysis
  - basic operation : merge( ) 에서 배열에 있는 두 수를 비교하는 연산
  - T(n) : n 개의 정수를 merge sorting 할 때의 basic operation 수

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + (n-1) & n > 1 \end{cases}$$

  - 위 식은 아래와 같이 단수화하여 생각할 수 있다.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 2T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

Merge Sorting (8)

– Analysis

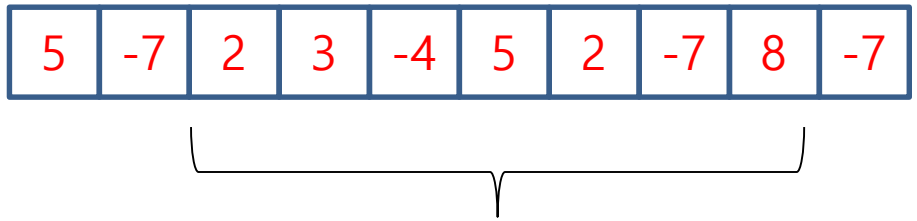
$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 2T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

- 위 식은, n = 2^k 일 때, 아래와 같이 order 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n &&= 2\{2T(n/4) + n/2\} + n \\ &= 4T(n/4) + 2n &&= 4\{2T(n/8) + n/4\} + 2n \\ &= 8T(n/8) + 3n \\ &\cdots \\ &= nT(1) + (\log n)n \\ &= n\log n \\ &\in O(n\log n) \end{aligned}$$

Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS)

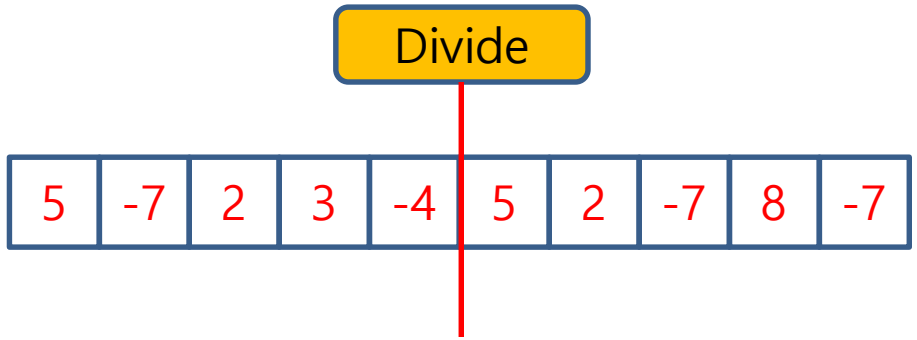
- Maximum Contiguous Subsequence Sum
  - n 개의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 이 주어졌을 때, 연속적인 부분수열의 합 $\sum_{k=i}^{j} a_k$ 이 최대가 되는 구간 (i, j) 와 그 구간의 합을 계산하시오.



$$\sum_{k=3}^{9} a_k = 9$$

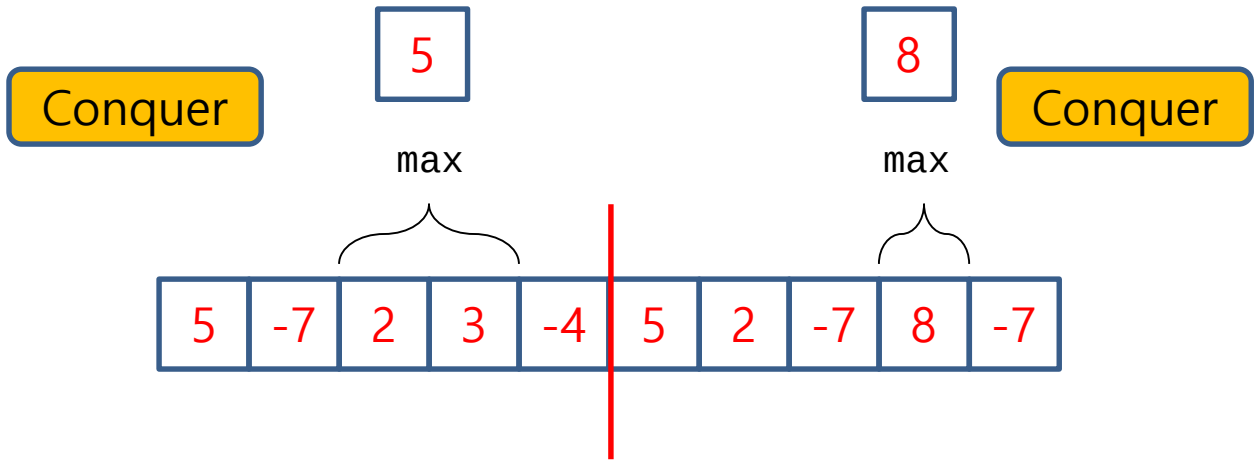
Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (2)

- Divide & Conquer
  - Divide :
    - n 개의 정수배열을 크기가 각각 n/2 개인 부분배열로 나눈다.



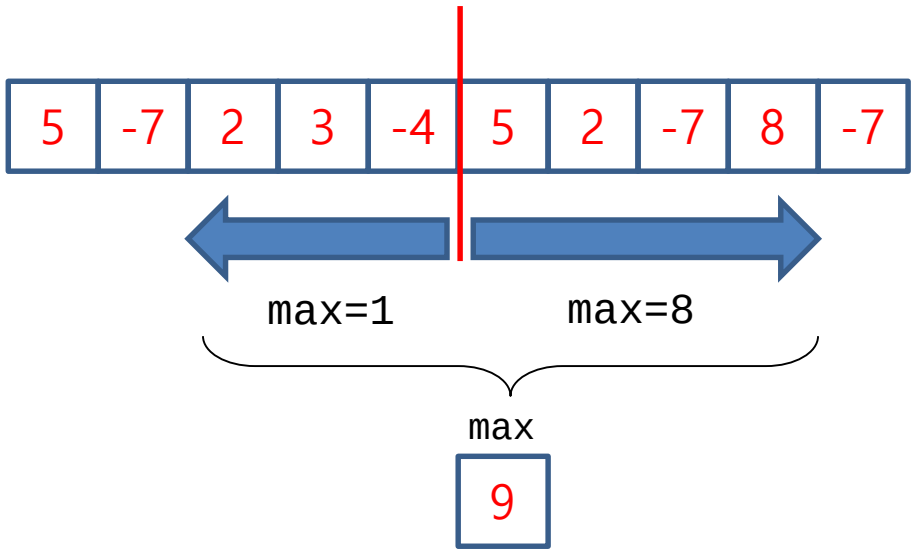
Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (3)

- Divide & Conquer
  - Conquer:
    - 크기가 각각 n/2 개인 부분배열에 대하여 recursive 하게 문제를 해결한다.



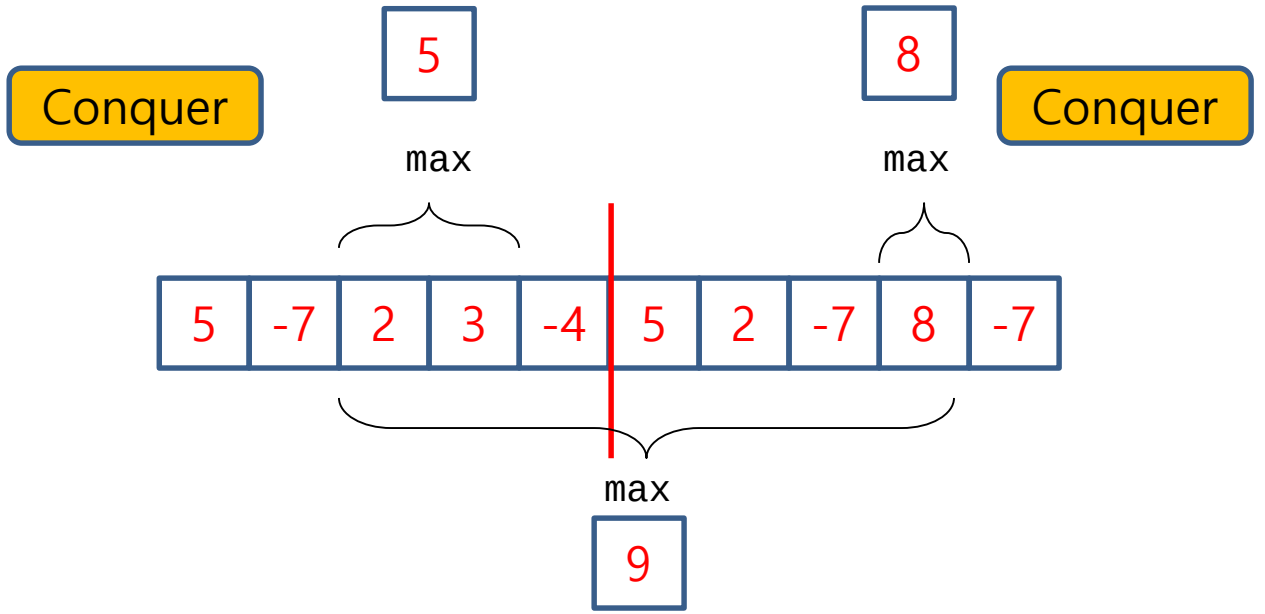
Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (4)

- Divide & Conquer
  - Combine:
    - "Conquer" 단계에서 계산한 값과 다음과 같이 연속된 구간이 중앙을 걸쳐서 존재할 수 있으므로 이런 경우도 해결하여야 한다.
    - 이를 위해서는 중앙을 중심으로 왼쪽으로 연속적으로 최대가 되는 값과 중앙을 중심으로 오른쪽으로 연속적으로 최대가 되는 값을 구하여 합한다.



Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (5)

- Divide & Conquer
  - Combine:
    - 따라서, 전체 데이터 중에서 최대의 합을 만드는 연속적인 구간은 다음 세 값 중의 하나다.
      - 왼쪽 n/2 데이터에서 최대연속구간의 합
      - 오른쪽 n/2 데이터에서 최대연속구간의 합
      - 중앙에 걸쳐서 최대연속구간의 합



Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (6)

- Divide & Conquer
  - Analysis
    - basic operation : 배열의 숫자를 더하는 연산
    - 이 알고리즘의 "combine" 단계에서 중앙을 거쳐서 최대가 되는 연속구간을 계산하는 데 걸리는 basic operation 은 n-1 번 수행된다.
    - 따라서, 이 알고리즘의 time complexity는 다음과 같이 "merge sorting"과 같은 재귀식으로 나타난다.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + (n-1) & n > 1 \end{cases}$$

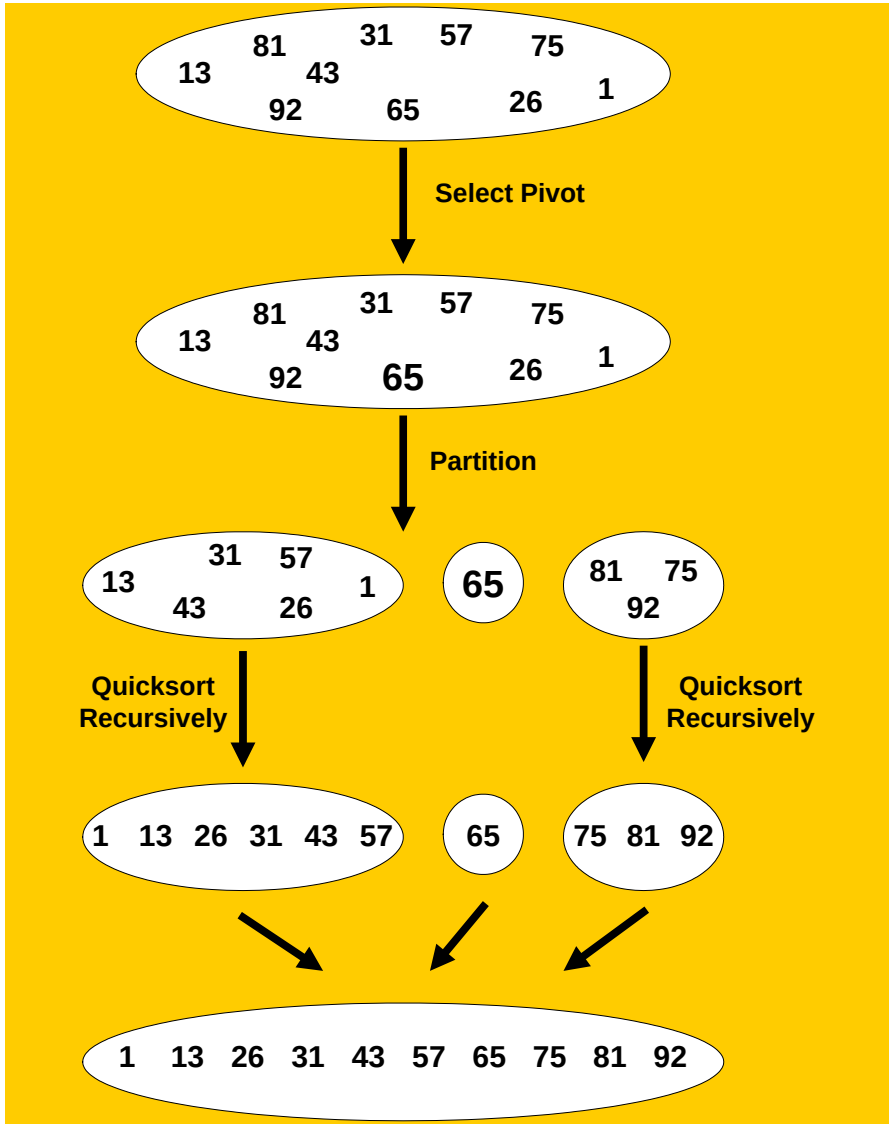
    - 결과적으로, 본 알고리즘의 time complexity 는 "merge sorting"의 time complexity $O(n \log n)$ 과 동일하다.

Quick Sorting

- Quick Sorting
  - Divide & Conquer 알고리즘
    - Divide (Partition)
      - 먼저 배열 중에 임의의 데이터를 pivot (피봇)으로 선택한다.
      - 배열에 있는 데이터들을 pivot 보다 작은 데이터 그룹과 pivot 보다 큰 데이터 그룹으로 나눈다.
    - Conquer
      - Pivot 을 중심으로 나누어진 두 그룹을 recursive 하게 quick sorting 을 수행한다.
    - Combine
      - Combine 작업은 따로 필요하지 않다 (왜?)
  - Tony Hoare가 1959년 최초로 개발하였음
    - Partition 방법에 따라 여러 변형이 존재함

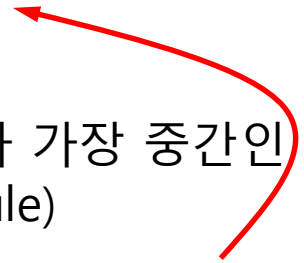
Quick Sorting (2)

- 예



Quick Sorting (3)

- Divide
  - Quick sorting 의 divide 부분을 특별히 “partition”이라고 부른다.
  - 먼저 pivot 데이터를 선택한다.
    - Pivot 데이터 선택방법
      - » 가장 간단하게는 가장 왼쪽에 있는 데이터를 선택
      - » Random 하게 선택하고 가장 왼쪽 데이터와 교환
        - Random 숫자를 계산하는 시간이 많이 소요되는 단점
      - » 가장 왼쪽, 가장 오른쪽, 가장 중앙에 있는 세 데이터 중에 크기가 가장 중간인 데이터를 선택하고 가장 왼쪽에 있는 데이터와 교환 ("median-of-three" rule)
        - 실제 구현에서 가장 많이 사용하는 방법
  - 가장 많이 사용하는 Partition 기법
    - Partition by Tony Hoare
    - Partition by Nico Romuto



```
mid = (low + high)/2;
if(a[mid] > a[hi])
    swap(a[mid], a[hi]);
if(a[low] > a[hi])
    swap(a[low], a[hi]);  //max in high
if(a[mid] > a[low])
    swap(a[mid], a[low]); // min in mid
pivot = a[low]
```

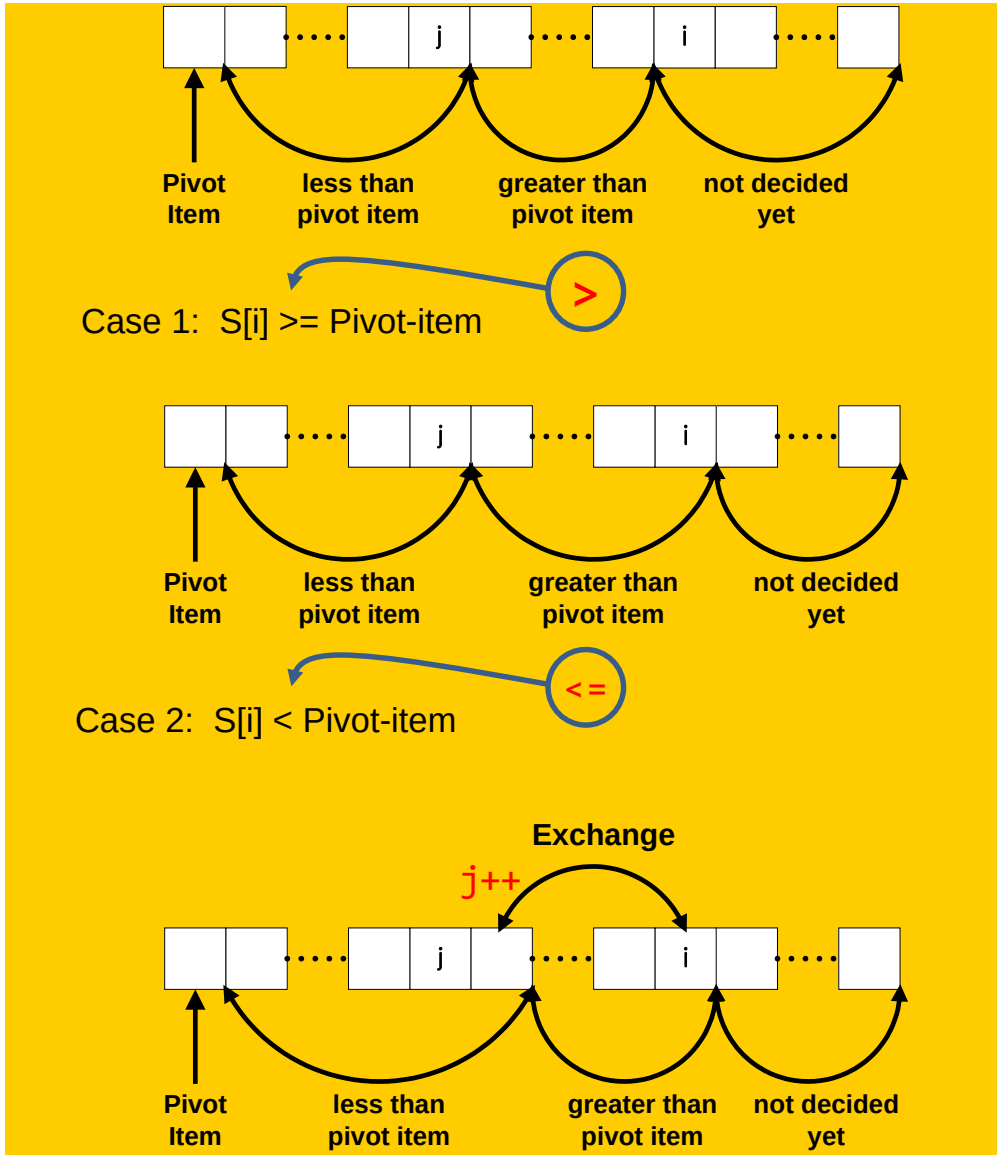
Quick Sorting (4)

– Divide (partition), Partition by Romuto

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot, pivotPos, tmp;

    pivot = a[low];
    j = low;

    for(i=low+1; i<=high; i++)
    {
        if(a[i] <= pivot)
        {
            j++;
            /* swap */
            tmp = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = tmp;
        }
    }

    pivotPos = j;
    /* swap */
    tmp = a[low]; a[low] = a[pivotPos]; a[pivotPos] = tmp;

    return pivotPos;
}
```

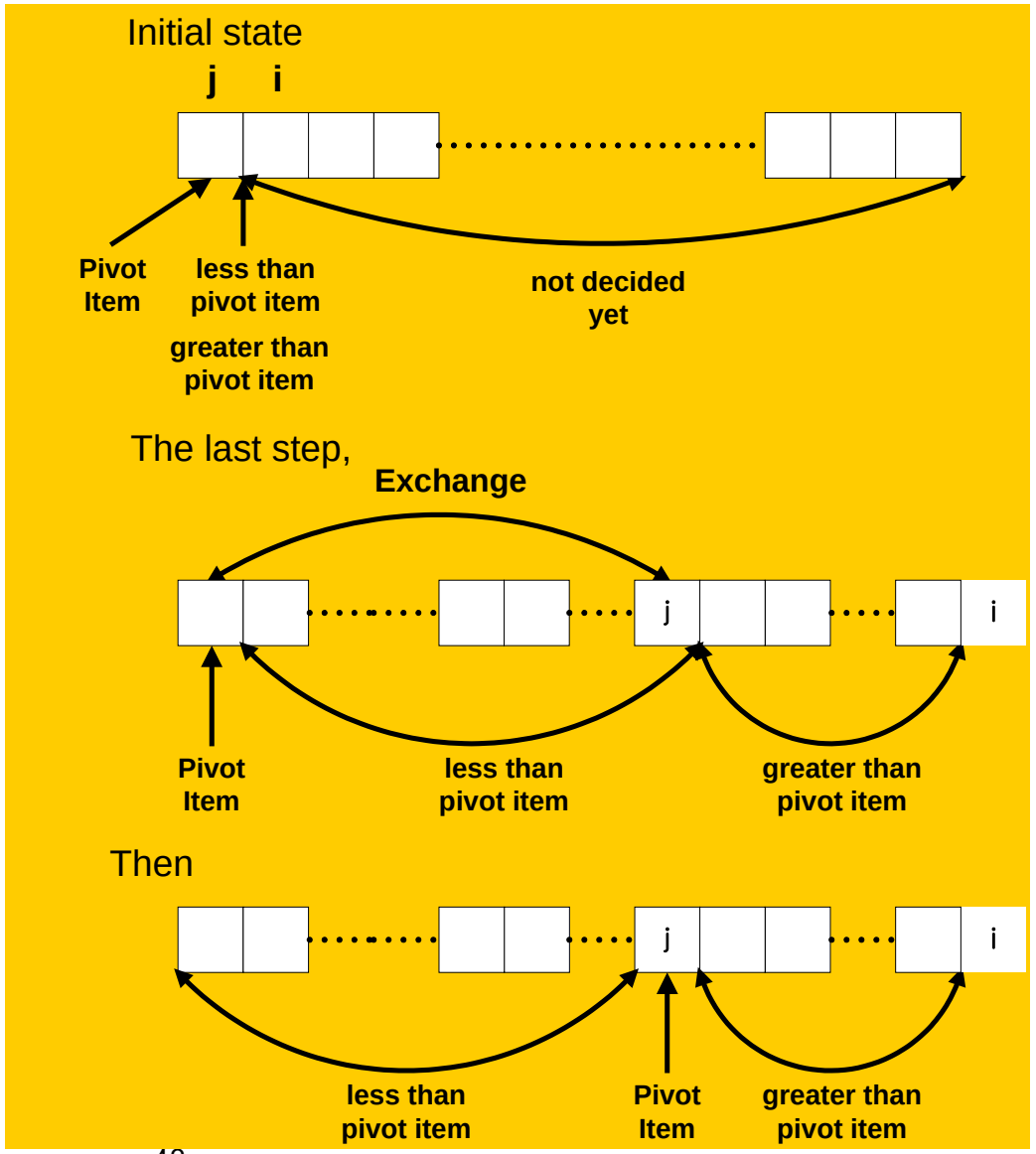
Quick Sorting (5)

– Divide (partition)



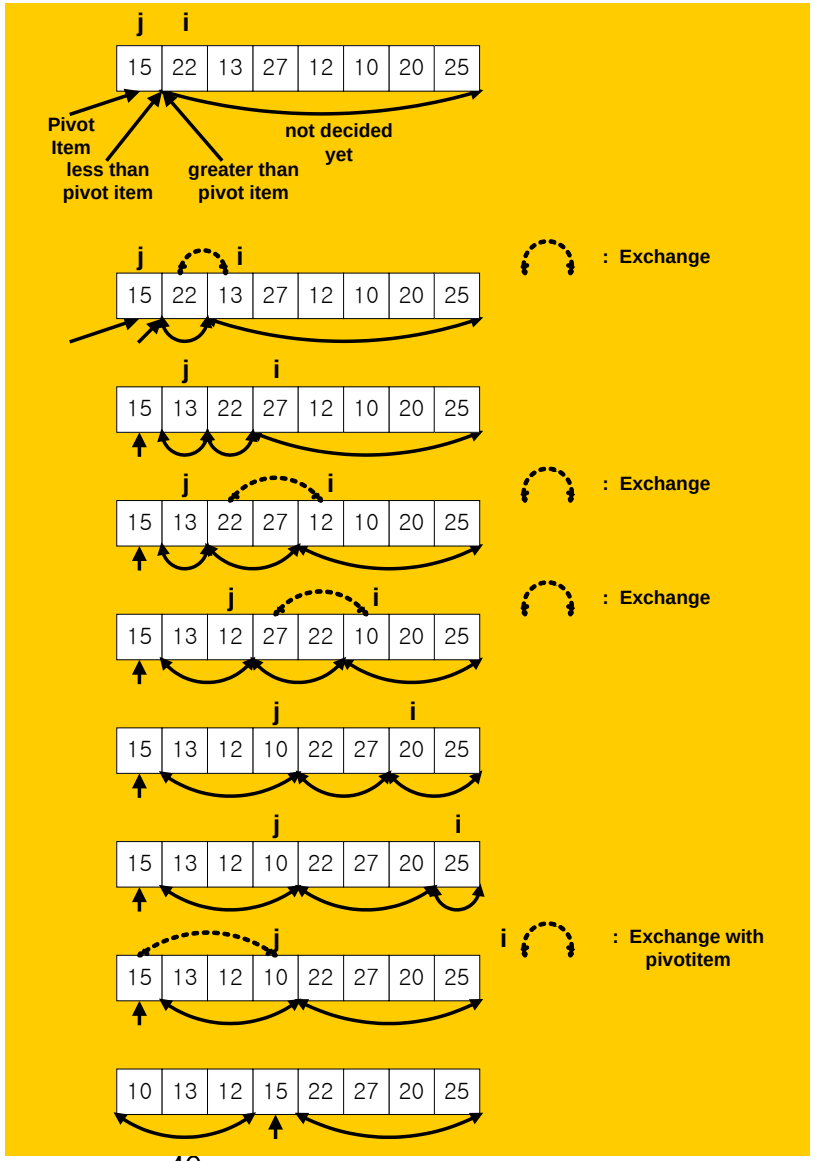
Quick Sorting (6)

– Divide (partition)



Quick Sorting (7)

– Divide (partition)



Quick Sorting (8)

- Divide (partition)
  - Analysis
    - Basic operation : 배열에 저장된 데이터와 pivot 과 비교하는 연산
    - T(n) : n 개의 데이터에 대하여 partition 작업을 수행하는 basic operation 의 횟수

$$T(n) = n-1$$

Quick Sorting (9)

– Quick Sorting 알고리즘

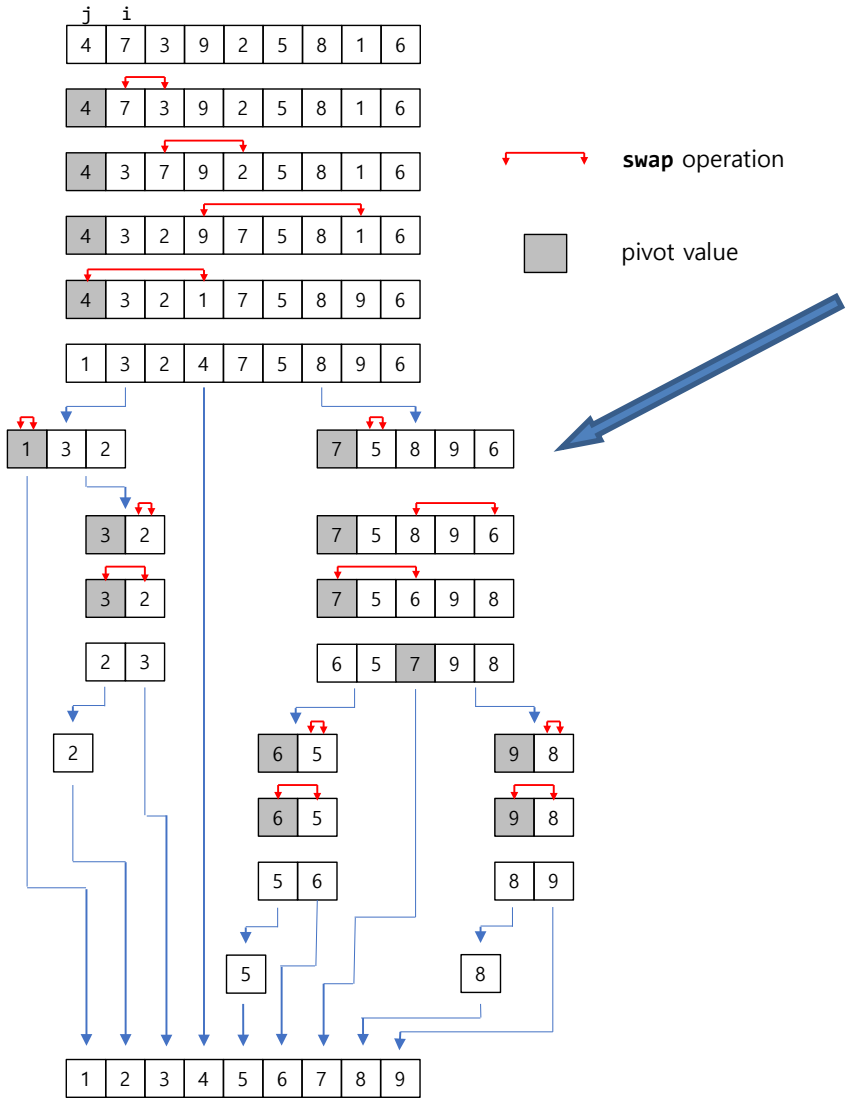
```
void quickSort(int v[], int low, int high)
{
    int pivotPos;

    if(high > low)
    {
        pivotPos = partition(v, low, high);
        quickSort(v, low, pivotPos-1);
        quickSort(v, pivotPos+1, high);
    }
}
```

```
void main(void)
{
    int i, v[MAX_SIZE] = { 5, 6, 9, 4, 0, 2, 1, 7, 3, 8 };

    quickSort(v, 0, 9);
}
```

5 5 2 3 4 6 7 8
4 5 2 3 5 6 7 8

QuickSort
- stable (No)
- In-Place (Yes/No)

Quick Sorting (9) - Example



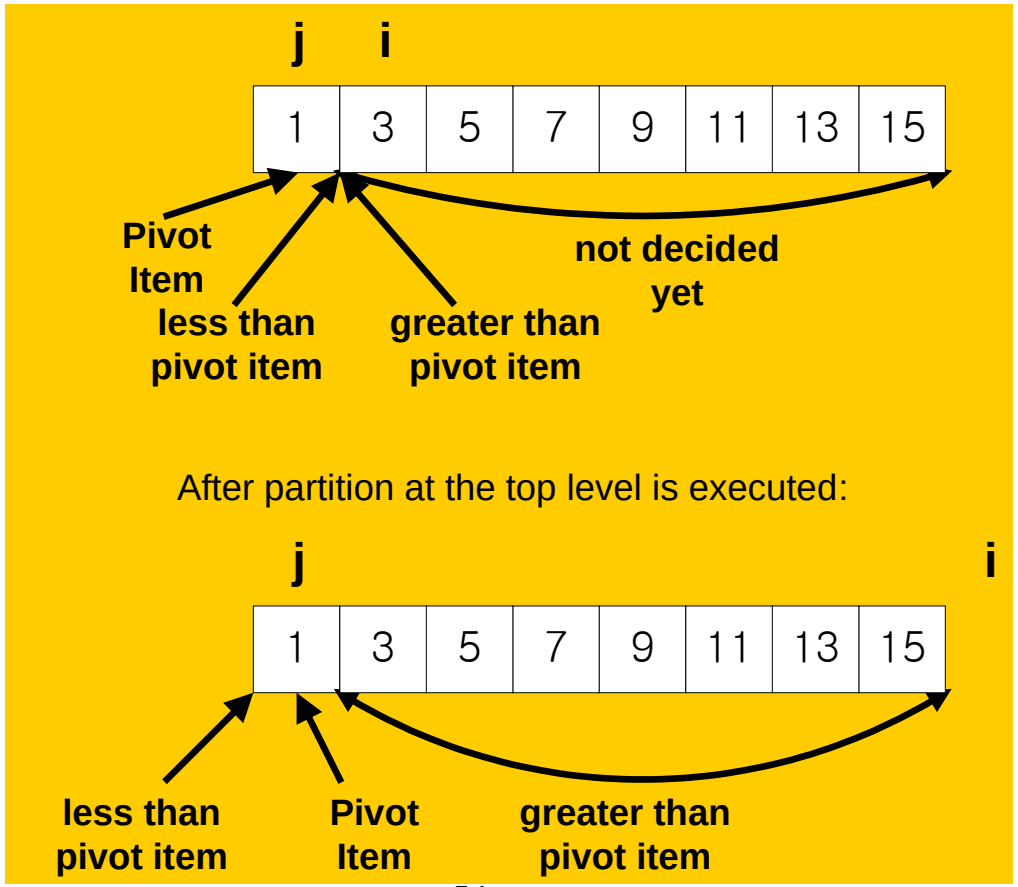
Quick Sorting (10)

- Quick Sorting 알고리즘
  - Analysis
    - Basic operation : 배열에 저장된 데이터와 pivot 과 비교하는 연산
    - T(n) : n 개의 데이터에 대하여 quick sorting 을 수행하는 basic operation 의 횟수

    - worst case 데이터는 미리 정렬된 데이터가 입력되는 경우이다.

Quick Sorting (11)

- Quick Sorting 알고리즘
  - Worst-Case Analysis
    - worst case 데이터는 미리 정렬된 데이터가 입력되는 경우이다.



Quick Sorting (12)

- Quick Sorting 알고리즘
  - Worst-Case Analysis
    - worst case 데이터는 미리 정렬된 데이터가 입력되는 경우이다.

    - *T(n) = T(0) + T(n-1) + n-1*

Time to sort left subarray

Time to sort right subarray

Time to partition

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(n-1) + n - 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + (n-1) \\ &= T(n-2) + (n-2) + (n-1) \\ &\dots \\ &= T(1) + 1 + \dots + (n-2) + (n-1) \\ &= n(n-1)/2 \quad \in \quad O(n^2) \end{aligned}$$

Quick Sorting (13)

- Quick Sorting 알고리즘
  - Best-Case Analysis
    - best case 는 merge sorting 에서와 같이 나누어지는 부분배열의 크기가 각각 n/2 인 경우이다. 즉, 똑 같은 크기의 두 부분배열로 계속 나누어지는 경우이다.
    - 이 경우의 time complexity 는 merge sorting의 time complexity와 같으므로 그 order는 $O(n\log n)$ 이다.
  - Average-Case Analysis
    - 배열에 속하는 데이터가 모두 같은 확률로 Pivot 으로 선택된다고 가정하여 분석함.
    - 이 경우의 order는 $O(n\log n)$ 임. (생략)

Merge / Quick Sorting

– Merge Sorting, Quick Sorting 비교

	Merge Sorting	Quick Sorting
Divide	• 매우 간단함 • 단순히 반으로 나눈다	• Partition( ) 수행 • Pivot 을 중심으로, Pivot 보다 작은 데이터그룹과 큰 데이터 그룹 두 부분으로 나눔 • O(n) 시간을 요함
Conquer	Recursive 작업	Recursive 작업
Combine	• Merge( ) 수행 • Conquer 단계에서 정렬된 두 배열을 병합하는 작업 수행 • O(n) 시간을 요함	• 필요없음

Bolts & Nuts 문제

- Bolts & Nuts
  - 문제
    - 크기가 모두 다른 n 개의 너트와 각 너트의 크기에 꼭 맞는 n 개의 볼트가 마구 섞여져 있다. 다음과 같은 작업만이 가능하다고 할 때, 크기가 꼭 맞는 n 개의 볼트-너트 조합을 만드시오.
      - 한 개의 너트와 한 개의 볼트를 끼워보고, 너트가 볼트에 비해 크기가 크다, 작다, 혹은 꼭 맞다를 판별할 수 있다.
      - 그러나, 너트끼리 그 크기를 비교할 수 없으며, 또한 볼트끼리도 그 크기를 비교할 수 없다.
  - 해결 알고리즘
    - Quick sorting 알고리즘과 유사한 방법

Homework

- qsort() source code 를 분석
  - Hand-writing report
    - Source code 를 line-by-line 으로 분석하여 각 line의 내용을 comment 하시오.
    - 구현된 Partition 알고리즘을 설명하시오.
    - qsort() 와 강의에서 학습한 quicksort() 의 차이점을 가장 중요한 요소부터 차례로 10가지 이상 설명하시오.
  - Coding (체점서버 제출)
    - qsort() 의 source code 중에서 partition 알고리즘을 강의에서 학습한 partition 알고리즘으로 교체하여 구현하여, 새로운 함수를 qqsort()로 명명하여), 다음 프로그램을 작성하여 채점 서버에 제출하시오.

Homework

– qqsort()

```
#include <stdlib.h>

void qqsort( void *base, size_t nel, size_t width,
            int (*compare)(const void *, const void *))
{
}
int icompare(const void *a, const void *b)
{
        return *(int *)a - *(int *)b;
}
```

```
#define MAX_SIZE 10000
int data[MAX_SIZE];
void main()
{
    FILE *fp;
    int numTest, numData;
    int i, j;

    fp = fopen("input.txt", "r");
    if (fp == NULL) {
        fprintf(cerr, "file open error.\n");
        exit(1);
    }
```

Homework

– qqsort()

```
    fscanf(“%d”, &numTest);
    for(i=0; i<numTest; i++)
    {
        fscanf(“%d”, &numData);
        for(j=0; j<numData; j++)
            fscanf(“%d”, &data[j]);

        qqsort(data, sizeof(ints)/sizeof(ints[0]), sizeof(int),
icompare);

         for(j=0; j<numData; j++)
             printf("%d ", data[i]);
         printf(“\n”);
    }
}
```

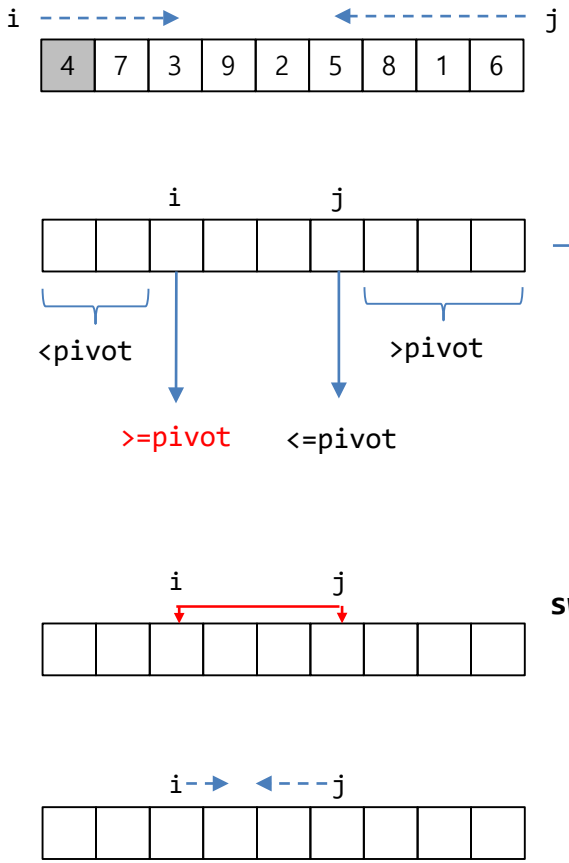
Partition by Hoare (1)

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot;

    pivot = a[low];

    i = low – 1;
    j = high + 1;


    while (true) {
        // move index markers i,j toward center
        // until we find a pair of mis-partitioned elements
        while (a[++i] < pivot);
        while (a[--j] > pivot);

        if (i < j)
            swap( a[i], a[j] );
        else
            return j;
    }
}
```

Partition by Hoare (1)

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot;

    pivot = a[low];

    i = low – 1;
    j = high + 1;


    while (true) {
        // move index markers i,j toward center
        // until we find a pair of mis-partitioned elements
        while (a[++i] < pivot);
        while (a[--j] > pivot);

        if (i < j)
            swap( a[i], a[j] );
        else
            return j;
    }
}
```

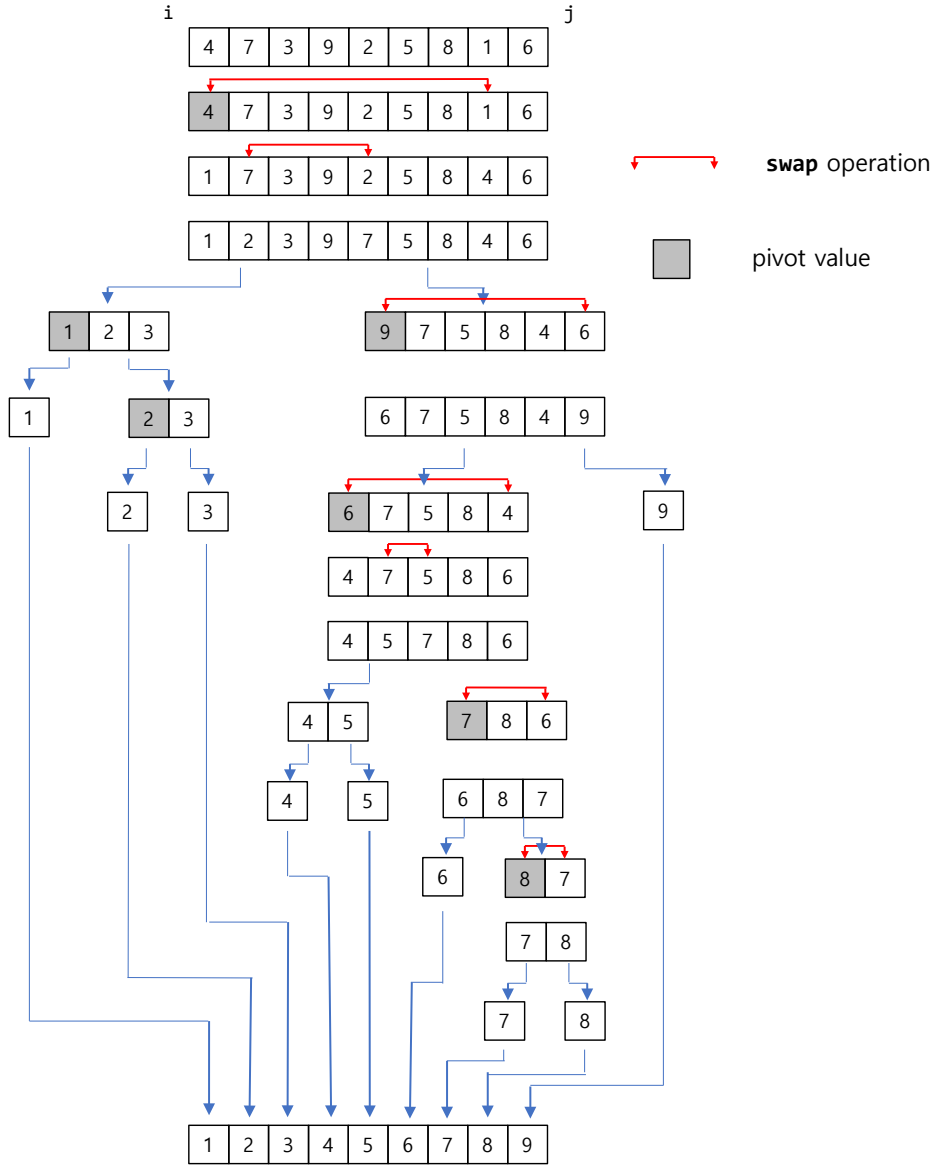
Partition by Hoare (2)



swap operation

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot;

    pivot = a[low];

    i = low - 1;
    j = high + 1;


    while (true) {
        // move index markers i,j toward center
        // until we find a pair of mis-partitioned elements
        while (a[++i] < pivot);
        while (a[--j] > pivot);

        if (i < j)
            swap( a[i], a[j] );
        else
            return j;
    }
}
```

Partition by Hoare (3)



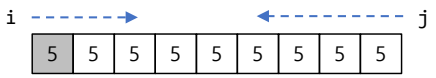
Partition by Hoare (4)

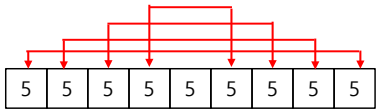
Why not?

```
// move index markers i,j toward center
// until we find a pair of mis-partitioned elements
while (a[++i] <= pivot);
while (a[--j] >= pivot);
```

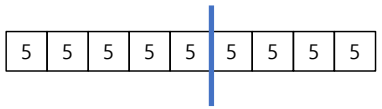
(answer) consider the following case?

```
// move index markers i,j toward center
// until we find a pair of mis-partitioned elements
while (a[++i] < pivot);
while (a[--j] > pivot);
```





swap operations



balanced partition

```
// move index markers i,j toward center
// until we find a pair of mis-partitioned elements
while (a[++i] <= pivot);
while (a[--j] >= pivot);
```

```
// move index markers i,j toward center
// until we find a pair of mis-partitioned elements
do i++ while ((i < j) && a[i] <= pivot));
do j-- while ((i < j) && a[j] >= pivot));
```

Some out-of-bound error

Or

Imbalanced partition

Quick Sort Faster Than Merge Sort

- Both quick sort and merge sort take O(N log N) in the average case.
- But quick sort is faster in the average case:
  - The inner loop consists of an increment/decrement (by 1, which is fast), a t est and a jump.
  - There is no extra juggling (data moving) as in merge sort except at some point of necessity.

```
while (true) {
    // move index markers i,j toward center
    // until we find a pair of mis-partitioned elements
    while (a[++i] < pivot);
    while (a[--j] > pivot);

    if (i < j)
        swap( a[i], a[j] );
    else
        break;
}
```

inner loop