Contents

4장 행렬

❖ 학습목표

- 행렬의 형태와 개념을 이해한다.   행렬 연산을 이해한다.
- 행렬의 종류와 그 특징을 이해한다.
- 행렬식의 의미를 이해한다.
- 행렬식을 구하기 위해 필요한 다양한 개념과 방법을 이해한다.
- 역행렬과 역행렬을 구하는 다양한 방법을 이해한다.
- 연립1차방정식을 구하는 다양한 방법을 이해한다.

1. 행렬의 개념

정의 6-1 행렬(Matrix): $A = [a_{ij}]$

n, m이 양의 정수일 때 n행, m열로 나열된 실수의 2차원 배열

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- 가로줄을 행Row, 세로줄을 열Column, 행 크기와 열 크기로 행렬의 크기를 말함

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- 행렬 A의 크기는 3행 4열, 3×4 (3-by-4) 행렬이라고 함
- a_{ij}는 행렬 A의 i행, j열 원소를 의미
- 행렬 A의 i번째 행 : $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix}$ 행렬 A의 j번째 열 : $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$

예제 6-1

행렬 A에 대해 다음을 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 12 & 14 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 두 번째 행 (2) 첫 번째 열 (3) a_{24} (4) a_{33}

2. 행렬의 연산

- 행렬에서 가능한 연산 : 덧셈, 뺄셈, 스칼라곱, 곱셈

❖ 행렬의 덧셈과 뺄셈

- 두 행렬의 크기가 같아야만 연산 가능

  (두 행렬의 행과 열의 크기가 각각 같음)

정의 6-2 행렬의 덧셈과 뺄셈

두 행렬 A, B에서 같은 자리에 있는 원소들끼리 더하거나 빼는 연산

– 덧셈 표현: $A+B$

– 뺄셈 표현: $A-B$

2. 행렬의 연산

$n \times m$ 크기의 행렬 A와 B가 각각 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{22} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$ 일 때,

두 행렬의 덧셈과 뺄셈 연산은 다음과 같이 수행한다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1m}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2m}-b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \dots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$$

예제 6-2

다음 행렬 A, B를 이용해 주어진 문제를 연산하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 6 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $A+B$ (2) $A-B$ (3) $B-A$

2. 행렬의 연산

❖ 행렬의 스칼라곱

정의 6-3 행렬의 스칼라곱(Scalar Multiplication): $kA = Ak = [ka_{ij}]$

행렬 A에 실수 k를 곱하는 연산

- 행렬의 각 원소마다 그 실수 값을 곱함

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

예제 6-3

다음을 연산하라.

$$-4\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -7 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 연산

❖ 행렬의 곱셈

정의 6-4 행렬의 곱셈

$n \times m$ 행렬 A와 $r \times s$ 행렬 B가 있고 $m = r$일 때, $n \times s$ 행렬 $A \cdot B = [c_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{ns} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

- 곱셈 연산 수행

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1m}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{1s} + a_{12}b_{2s} + \dots + a_{1m}b_{ms} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2m}b_{m2} & \dots & a_{21}b_{1s} + a_{22}b_{2s} + \dots + a_{2m}b_{ms} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \dots + a_{nm}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{1s} + a_{n2}b_{2s} + \dots + a_{nm}b_{ms} \end{bmatrix}$$

2. 행렬의 연산

- A의 i번째 행과 행렬 B의 j번째 열이 서로 대응하여 연산되기 때문에 행렬 A의 열 크기와 행렬 B의 행 크기가 같아야 함

연산

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

- 행렬 A의 크기가 $n \times m$ 이고, 행렬 B의 크기가 $m \times s$ 일 때 곱 AB의 결과로 나오는 행렬의 크기는 $n \times s$ 임

예제 6-4

행렬 A, B, C가 다음과 같을 때, 연산이 가능한 것을 골라 연산하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) AB (2) BA (3) AC (4) CA (5) BC (6) CB

2. 행렬의 연산

정리 6-1 행렬 연산의 성질

(1) $A+B=B+A$

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(3) $A+O=O+A=A$

(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$

(5) $(-1)A=-A$

(6) $k(A+B)=kA+kB$

(7) $(k+l)A=kA+lA$

(8) $(kl)A=k(lA)$

(9) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

(10) $IA=A=AI$

※ O: 영행렬
I: 단위행렬

정의 6-8 단위행렬(항등행렬, Unit Matrix, Identity Matrix: I)

대각행렬에서 대각원소가 모두 1인 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. 행렬의 종류

정의 6-5 영행렬(Zero Matrix: O)

$n \times m$ 행렬 $A = [a_{ij}]$가 있을 때, 모든 i, j에 대하여 $a_{ij} = 0$인 행렬

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

정의 6-6 n차 정사각행렬(n-square Matrix)

$n \times m$ 행렬 $A = [a_{ij}]$가 있을 때, $m = n$인 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. 행렬의 종류

정의 6-7 대각행렬(Diagonal Matrix)

n차 정사각행렬에서 대각원소 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 이외의 모든 원소가 0인 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

정의 6-8 단위행렬(항등행렬, Unit Matrix, Identity Matrix: I)

대각행렬에서 대각원소가 모두 1인 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. 행렬의 종류

- 단위행렬은 행렬의 곱셈에서 $AI=IA=A$ 이기 때문에 항등행렬 이라고도 함
- 단위행렬과의 곱셈 연산은 항상 교환법칙이 성립

예제 6-5

행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ 와 단위행렬 I를 다음과 같이 곱셈 연산하라.

(1) AI

(2) IA

3. 행렬의 종류

정의 6-9 전치행렬(Transpose Matrix: A^T)

$n \times m$ 행렬 $A = [a_{ij}]$가 있을 때, 행과 열을 바꾼 $m \times n$ 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \text{일 때, } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

정의 6-10 대칭행렬(Symmetric Matrix)

n 차 정사각행렬 $A = [a_{ij}]$가 있을 때, $A^T = A$인 행렬

예제 6-6

다음 행렬의 전치행렬을 구하고, 대칭행렬인지 구별하라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 9 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

3. 행렬의 종류

정의 6-11 부울행렬(Boolean Matrix)

행렬의 모든 원소가 부울값(0과 1)으로만 구성된 행렬

- 부울행렬 : 원소 간의 관계를 표현하거나 관계를 합성하는 데에 유용하게 사용되는 행렬, 0과 1로만 표현되기 때문에 일반 행렬과 다른 연산 방식을 사용

정리 6-2 부울행렬 연산자

행렬 $A=[a_{ij}]$와 $B=[b_{ij}]$에 대해

(1) 합[Join]: $A \vee B=[a_{ij} \vee b_{ij}]$

(2) 교차[Meet]: $A \wedge B=[a_{ij} \wedge b_{ij}]$

(3) 부울곱[Boolean Product]: $A \odot B$

$n \times m$ 부울행렬 $A=[a_{ij}]$와 $m \times s$ 부울행렬 $B=[b_{ij}]$가 있을 때, $n \times s$ 부울행렬

$A \odot B=[c_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ms} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{ns} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=(a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{im} \wedge b_{mj})$$

- 부울행렬의 합
  - 논리합(∨) 연산과 같은 방식으로 연산
  - 행렬 A의 원소인 a_{ij}와 행렬 B의 원소인 b_{ij}중 하나라도 1이면 합 연산의 결과는 1이 됨

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이고 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$이라면, 두 행렬의 합 연산은 다음과 같다.

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 부울행렬의 교차
  - 논리곱(∧) 연산과 방식이 같음
  - 행렬 A의 원소인 a_{ij}와 행렬 B의 원소인 b_{ij}모두 1인 경우에만 교차 연산의 결과가 1이 됨

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이고 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$인 예를 이용해 두 행렬의 교차 연산을 수행하면 다음과 같다.

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 부울행렬의 부울곱
  - 행렬의 곱셈 방식과 논리합, 논리곱의 연산을 적용하여 수행

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 이라면, 두 행렬의 부울곱 연산은 다음과 같다.

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

예제 6-7

다음을 연산하라.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

정리 6-3 부울행렬 연산의 특징

(1) $A \vee A = A$ $\qquad$ $A \wedge A = A$

(2) $A \vee B = B \vee A$ $\qquad$ $A \wedge B = B \wedge A$

(3) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ $\qquad$ $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

(4) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $\qquad$ $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

4. 행렬식

정의 6-12 행렬식(Determinant: $|A|$ 또는 $\det(A)$)

n차 정사각행렬에 대응하는 함수

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 행렬식은 행렬중에서 정사각행렬을 대표하는 식으로
- 연립방정식의 해 존재하는지의 여부를 판별하거나 해를 구하기 위해 라이프니츠가 고안해낸 함수

4. 행렬식

❖ 2차, 3차 정사각행렬에 대한 기본 행렬식

정의 6-13 2차, 3차 정사각행렬에 대한 행렬식

- 2차 정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$의 행렬식

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 3차 정사각행렬 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$의 행렬식

$$\det(B) = \left|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

$$= (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{32}b_{21}) - (b_{13}b_{22}b_{31} + b_{23}b_{32}b_{11} + b_{33}b_{21}b_{12})$$

- 기본 행렬식은 2차와 3차 정사각행렬에 대해서만 적용할 수 있는 방법
- 3차 이상은 소행렬 관련한 개념을 이용

4. 행렬식

예제 6-8

다음 정사각행렬의 행렬식을 구하라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

4. 행렬식

❖ 3차 이상의 정사각행렬에 대한 행렬식

▪ 소행렬과 소행렬식

- 3차 이상의 정사각행렬의 행렬식은 행렬을 작게 분할한 소행렬을 이용함

정의 6-14 소행렬(Minor Matrix: M_{ij})

n차 정사각행렬에서 i번째 행과 j번째 열을 제거해서 얻은 $(n-1)\times(n-1)$행렬

예를 들어 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$이 있을 때, 소행렬 M_{11}은 행렬 A에서 1행과 1열을 제외한 나머지 부분, 즉, $M_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$이다. 소행렬 M_{32}는 행렬 A에서 3행과 2열을 제외하여 얻은 행렬 $M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$이다. 이와 같이 어떤 행렬 A에 대한 소행렬 M_{ij}는 행렬 A보다 행과 열의 크기가 하나씩 작다.

4. 행렬식

정의 6-15 소행렬식($\det(M_{ij})$)

n차 정사각행렬의 소행렬 M_{ij}에 대한 소행렬식

예제 6-9

정사각행렬 $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$의 가능한 소행렬을 모두 구하고, 각각의 행렬식을 구하라.

4. 행렬식

- 여인수와 여인수행렬

정의 6-16 여인수(Cofactor: A_{ij}), 여인수행렬(Cofactor Matrix: $[A_{ij}]$)

n차 정사각행렬 $A=[a_{ij}]$에서 원소 a_{ij}에 관련된 계수와 그 계수들의 행렬

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

- 여인수는 행렬식을 구하는 식에서 행렬 A의 원소 a_{ij}의 계수가 되는 수로 소행렬식에 의해 결정되며, 여인수행렬 내에서의 위치에 따라 부호가 정해짐

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

[그림 6-1] 여인수행렬에서 각 원소의 부호

예제 6-10

[예제 6-9]에서 사용된 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$의 각 원소에 대한 여인수를 구하여 여인수행렬을 구하라.

4. 행렬식

- 여인수를 이용한 행렬식

정의 6-17 여인수를 이용한 행렬식

n차 정사각행렬 A에 대한 행렬식은

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} : \ i\text{행을 선택한 경우}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} : \ j\text{열을 선택한 경우}$$

- 여인수를 이용한 행렬식의 원리
  - 행렬식을 구해야 하는 n차 정사각행렬에서 행이나 열 중에서 하나를 선택하여
  - 해당하는 원소의 여인수와 곱한 후 그 결과를 더하여 구하는 방식

예제 6-11

[예제 6-9]에서 사용된 3차 정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$의 행렬식을 구하라.

- 1행을 선택했을 경우

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

예제 6-11

[예제 6-9]에서 사용된 3차 정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$의 행렬식을 구하라.

2행을 선택했을 경우

$$\det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

예제 6-11

[예제 6-9]에서 사용된 3차 정사각행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$의 행렬식을 구하라.

3행을 선택했을 경우

$$\det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

5. 역행렬

정의 6-18 역행렬(Inverse Matrix: A^{-1})

정사각행렬 A에 대해 $AB = BA = I$를 만족하게 하는 행렬 B

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

예제 6-13

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$의 역행렬을 구하라.

5. 역행렬

정의 6-19 행렬식을 이용한 역행렬

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[A_{ij}]^T \text{ (단, } \det(A) \neq 0)$$

정의 6-20 수반행렬(Adjoint Matrix: $[A_{ij}]^T$)

여인수행렬 $[A_{ij}]$에 대한 전치행렬

정의 6-21 가역행렬(Invertible Matrix), 특이행렬(Singular Matrix)

- 가역행렬: $\det(A) \neq 0$인 행렬, 역행렬이 존재하는 행렬
- 특이행렬: $\det(A) = 0$인 행렬, 역행렬이 존재하지 않는 행렬

예제 6-14

행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

$$\det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = A_{21} + A_{23}$$

예제 6-14

행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

6. 연립1차방정식

- 1차방정식 : 미지수의 차수가 1차

정의 6-22 1차방정식(선형방정식, Linear Equation)

$a_1, a_2, \dots, a_n, b$가 실수일 때, 다음과 같이 표현되는 식

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

- $a_1, a_2, \dots, a_n$은 계수, b는 상수, $x_1, x_2, \dots, x_n$은 미지수

- 1차방정식은 미지수끼리의 곱이나 제곱근이 포함되지 않고, 모든 미지수가 1차로 표현

(1) $x + 2y - z = 9$	(2) $\frac{1}{3}x = 3y$	(3) $x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$
(4) $x^2 + 3x + 2 = 5$	(5) $x^3 + y^5 = 0$	(6) $\sqrt{x} = 8$
(7) $xy - 4z = 8$	(8) $y = \sin x$	(9) $\log_2 y = 20$

6. 연립1차방정식

정의 6-23 해(Solution)

1차방정식에 포함된 n개의 미지수에 대해 $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n$을 만족하는 $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n$

- 1차방정식을 푸는 것은 해 또는 해집합을 구하는 것임
- 연립1차방정식 : 1차방정식을 유한개 모아놓은 것

정의 6-24 연립1차방정식(System of Linear Equation)

1차방정식 m개로 구성된 방정식

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

6. 연립1차방정식

- 연립1차방정식은 계수와 미지수, 상수로 구성
- 행렬의 형태로 표현 해보기

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}=B$$

- 행렬들을 $AX=B$ 의 형태로 연산하면 [정의 6-23]에 연립1차방정식과 같은 형태
- 행렬 A를 계수행렬 $(m\times n)$, 행렬 X를 미지수행렬 $(n\times 1)$,행렬 B를 상수행렬 $(m\times 1)$ 이라 함

정의 6-25 첨가행렬(Augmented Matrix)

연립1차방정식의 계수행렬 A와 상수행렬 B를 다음과 같은 형태로 구성한 행렬

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

예제 6-16

다음을 보고 연립1차방정식은 첨가행렬 형태로, 첨가행렬은 연립1차방정식의 형태로 표현하라.(미지수는 $x_1, x_2, \ldots$로 표현할 것)

(1) $$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ -2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 6x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

(2) $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

예제 6-16

다음을 보고 연립1차방정식은 첨가행렬 형태로, 첨가행렬은 연립1차방정식의 형태로 표현하라.(미지수는 $x_1, x_2, \dots$로 표현할 것)

$$(1)\begin{cases} \qquad\quad 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3 \\ -2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 6x_1 - 3x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

$$(2)\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

6. 연립1차방정식

❖ 가우스 소거법

정의 6-26 가우스 행렬(Gauss Matrix)

계수행렬의 대각원소들을 모두 1로 만들면서, 대각원소를 기준으로 아래쪽 원소들은 모두 0이 되도록 하고, 위쪽 원소들은 계수들로 남겨놓은 형태의 첨가행렬

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array}\right]$$

정리 6-4 가우스 행렬을 만들기 위한 연산

(1) 한 행에 0이 아닌 스칼라곱을 한다.

(2) 스칼라곱을 한 행과 다른 행을 더해 원소를 0으로 만든다.

※ 필요에 따라 행을 교환할 수도 있다.

후진대입법 : 마지막 행의 해부터 거꾸로 대입하며 해를 구하는 방식

6. 연립1차방정식

- 연립1차방정식의 해를 가우스 소거법으로 구하기

$$\begin{cases} x+2y+\ \ 3z=1 \\ x+3y+\ \ 6z=1 \\ 2x+6y+13z=5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ \quad\ \ y+3z=0 \\ \qquad\quad z=3 \end{cases}$$

- 위의 연립1차방정식을 첨가행렬 형태로 작성
- 첨가행렬의 형태를 가우스 행렬의 형태로 만들기 위해서는 실선 사각형 부분은 모두 1로, 점선 삼각형 부분은 모두 0으로 만듦

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right]$$

(1) 첨가행렬의 1행 1열의 원소는 이미 1이므로 이 원소를 이용해 2행 1열의 원소와 3행 1열의 원소를 0으로 만듦

6. 연립1차방정식

❶ 1행×(−1)+2행

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right]$$

❷ 1행×(−2)+3행

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right]$$

(2) ❷ 단계까지 구한 첨가행렬의 결과에서 2행 1열의 원소는 0, 2열의 원소는 1이므로 이 원소들을 이용해 3행 1열과 2열의 원소를 0, 3열의 원소를 1로 만듦

❸ 2행×(−2)+3행

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

6. 연립1차방정식

- ❸ 단계까지 수행 결과로 나오는 첨가행렬의 형태가 가우스 행렬의 형태임

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

위의 첨가행렬에서 계수행렬은 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 상수행렬은 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, 미지수행렬은 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 임을 알 수 있으므로 이를 이용해 다시 연립1차방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad\;\; y + 3z = 0 \\ \qquad\quad\; z = 3 \end{cases}$$

- 위의 결과로 후진대입법으로 풀어보기

$z = 3$이므로 $y + 3z = 0$에 대입하면,

$$y + 3 \cdot 3 = y + 9 = 0 \qquad \therefore\ y = -9$$

$y = -9$, $z = 3$이므로 $x + 2y + 3z = 1$에 대입하면,

$$x + 2 \cdot (-9) + 3 \cdot 3 = 1 \qquad \therefore\ x = 10$$

그러므로 $x = 10$, $y = -9$, $z = 3$이다.

예제 6-17

다음 연립1차방정식을 가우스 소거법으로 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

첨가행렬

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

6. 연립1차방정식

❖ 가우스 조르단 소거법

- 가우스 소거법에서 조금 더 연산을 수행하여 첨가행렬 중 계수 부분을 모두 단위행렬의 형태로 만듦

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array}\right]$$

  - 가우스 조르단 소거법으로 해 구하기

$$\text{연립1차방정식}\begin{cases} x+2y+\ \ 3z=1 \\ x+3y+\ \ 6z=1 \\ 2x+6y+13z=5 \end{cases}$$

가우스 소거법에서 ③단계까지 수행한 결과

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

6. 연립1차방정식

- (1) 첨가행렬의 2행 2열의 원소는 이미 1이므로 이 원소를 이용해 1행 2열의 원소를 0으로 만듦

❶ 2행×(−2)+1행

원래대로 작성

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- (2) 위의 단계에서 얻은 첨가행렬에서 3행 3열의 원소가 1이므로 이 원소를 이용해 1행 3열과 2행 3열의 원소를 0으로 만듦

❷ 3행×3+1행

원래대로 작성

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{3} \end{array}\right]$$

❸ 3행×(−3)+2행

원래대로 작성

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{3} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{3} \end{array}\right]$$

위의 첨가행렬에서 계수행렬은 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 상수행렬은 $\begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$, 미지수행렬은 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 임을 알 수 있으므로 이를 이용해 해를 구하면 $x=10$, $y=-9$, $z=3$이 된다.

예제 6-18

다음 연립1차방정식을 가우스 조르단 소거법으로 해를 구하라.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

첨가행렬

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

예제 6-17에서 가우스 소거법 시행 결과

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

6. 연립1차방정식

❖ 가우스 조르단 소거법을 이용한 역행렬

- 가역행렬인 경우, 가우스 조르단 소거법을 이용해 역행렬을 구할 수 있음
  - 첨가행렬의 왼쪽에는 가역행렬, 오른쪽 부분에 단위행렬을 놓고 첨가행렬의 왼쪽 부분이 단위행렬의 형태가 될 때까지 가우스 조르단 소거법 수행하면 오른쪽 부분은 역행렬이 됨

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \dots & a_{1n}^{-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \dots & a_{2n}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1}^{-1} & a_{n2}^{-1} & \dots & a_{nn}^{-1} \end{array}\right]$$

예제 6-21

[예제 6-14]의 행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$를 가우스 조르단 소거법을 이용해 역행렬을 구하라.

예제 6-14

행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

2행 삼선택 $\det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$