Corso di Laurea in Fisica
Prova di esame - Laboratorio di Calcolo e Statistica

27 gennaio 2026

Indicazioni generali

Si risolva il seguente esercizio, scrivendo un programma in `C++` o in `Python` ed organizzando il codice sorgente in modo che le funzioni utilizzate risultino implementate in librerie separate del programma principale. Ai fini della valutazione, il primo criterio che deve essere soddisfatto è che il codice sia eseguibile senza errori (inclusi quelli di compilazione, nel caso del `C++`) realizzando le funzionalità richieste dal testo. Per la valutazione sarà inoltre tenuto in considerazione il fatto che i codici sorgente siano scritti con ordine, utilizzando opportunamente l'**indentazione** e i **commenti**. Per gli svolgimenti in `C++`, si richiede infine di iniziare i codici con una riga di commento contenente il comando necessario per creare l'eseguibile.

Kernel density estimation, o KDE

Dato un campione di misure $\{x_i\}_{i=1 \cdot N}$ indipendenti e identicamente distribuite, il loro istogramma offre una visualizzazione approssimata della loro distribuzione di densità di probabilità (pdf), la cui bontà dipende dal numero di bin utiulizzati. Si può costruire una rappresentazione meno dipendente dalla scelta del binning sostituendo a ogni evento x_i una pdf elementare $K(x)$: in questo modo la somma di tutte le distribuzioni elementari, solitamente chiamate *kernel*, diventa una approssimazione della pdf soggiacente:

$$\tilde{f}(x, \{x_i\}, h) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \tag{1}$$

Il parametro h, detto *bandwidth* dell'algoritmo, serve a regolare la larghezza dei singoli *kernel*: per h grandi, le singole $K(x)$ risultano larghe, mentre per h piccoli risultano strette. Di conseguenza, la scelta del valore del parametro è fondamentale per la costruzione di una approssimazione efficace. Essendo le singole $K(x)$ normalizzate, la frazione $1/Nh$ garantisce la normalizzazione di $\tilde{f}(x, \{x_i\}, h)$.
Si sviluppi un programma che implementi questa tecnica, seguendo i seguenti punti.

1. Si generi un campione $\{x_i\}$, distribuito secondo una pdf $f(x)$ Gaussiana con media 2 e deviazione standard 3, di $N = 20$ eventi utilizzando la tecnica del teorema centrale del limite e se ne disegni l'istogramma normalizzato all'area unitaria.
2. Si prepari una libreria che, a partire da un campione di eventi, una funzione $K(x)$ e un numero h costruisca la pdf $\tilde{f}(x, \{x_i\}, h)$ secondo la definizione di equazione 1 e, con $h = 1$, se ne faccia il disegno sovrapposto all'istogramma per il campione del punto precedente, per verificarne il funzionamento, nel caso in cui la funzione $K(x)$ sia una Gaussiana normale (cioè con media zero e varianza 1).
3. Se il metodo funziona bene, per ogni punto x_i del campione prodotto al punto 1 la stima del valore di $\tilde{f}_i(x_i)$, ottenuta attraverso l'equazione 1 applicata gli $N - 1$ punti rimanenti del campione, è una buona approssimazione del valore vero della pdf. Sulla base di ciò, si scriva una funzione che calcoli il valore della likelihood associata a tutto il campione.
4. Utilizzando il metodo della sezione aurea, si detetrmini il valore del parametro h che massimizza la stima della verosimiglianza sviluppata nel punto precedente, scegliendo con cognizione di causa l'intervallo sul quale cercare l'estremo di interesse.

5. Si confronti l'approssimazione ottenuta con quella che si otterrebbe utilizzando come funzione $K(x)$ una distribuzione uniforme fra $-1.$ e $1.$, oppure una funzione definita a tratti: che sia nulla per $|x| > 1$ e abbia la forma di una parabola nell'intervallo $[-1., 1.]$ (le condizioni di simmetria, normalizzazione, continuità e positività sono sufficienti per determinare analiticamente i parametri della parabola), disegnando i tre risultati sovrapposti al campione generato.

Gli studenti affetti da disturbi specifici dell'apprendimento (DSA) potranno tralasciare il punti 5 o, alternativamente, svolgere tutto il compito in 4 ore di tempo, dichiarando la propria preferenza all'inizio della prova. Questi dovranno anche consegnare, oltre allo svolgimento del tema, una copia del proprio Progetto Universitario Individualizzato (P.Uo.I).