Modélisation de systèmes biologiques par chaîne de Makov

Christelle Gonindard

Exercices d'application

---

1 Modélisation de la formation végétale

On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour modifier en trois catégories *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaîne de Markov X_t, d'espace d'états $S = l, m, f$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.65 & 0 & 0.35 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associés.
2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l'état *forêt* à l'état *lande* ?
3. Calculer la probabilité de la trajectoire $X_0 = f, X_1 = m, X_2 = l, X_3 = f$.
4. Donner un exemple de trajectoire de longueur 4 et de probabilité nulle.
5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité pour que la formation végétale passe de l à f en seulement une étape ? en deux étapes ? soit au temps X_0 en l et au temps X_1 en f ? au temps X_0 en l et au temps X_2 en f ?
6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0.4, 0.4, 0.2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1. Des trois formations végétales lesquelles progressent, lesquelles régressent ?

2 Modélisation de la transmission d'une maladie par piqûre

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insectes. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

— étant immunisé, il a une probabilité de 0.8 de le rester et de 0.2 de passer à l'état R

— étant malade, il a une probabilité de 0.25 de le rester et de 0.75 de devenir immunisé

— enfin, étant dans l'état R, il a une probabilité de 0.75 de le rester et de 0.25 de devenir malade.

1. On modélise la dynamique des individus dans ce milieu par une chaîne de Markov $(X_t)_{t>=0}$ à trois états R, M, I. Ecrire la matrice de transition P de cette chaîne de Markov.

2. Tracer le diagramme en points et flèches associés.
3. Si l'on commence avec une population de 1000 individus comportant 100 individus malades et 900 individus ni malades ni immunisés, combien aura-t-on d'individus malades après une étape, après deux étapes ?
4. Même question si l'on suppose qu'il y a au départ 150 individus malades, 500 individus ni malades ni immunisés et 350 individus immunisés ?

3 Modélisation d'un brin d'ADN

La modélisation la plus simple d'un brin d'ADN, enchaînement "désordonné" de nucléotides de l'un des types adenine (a), cytosine (c), guanine (g) et thymine (t), est de le considérer comme une trajectoire d'une chaîne de Markov homogène X_n à quatre états $S = \{a, c, g, t\}$ dont la matrice de transition P fournit les probabilités que l'un de ces états succède à un autre. Ainsi, le brin *aagc* est la trajectoire $X_0 = a, X_1 = a, X_2 = g, X_3 = c$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Définir la problématique, les hypothèses. Proposer une modélisation du problème.
2. Tracer le graphe en points et flèches associé à cette chaîne de Markov.
3. Calculer les probabilités des trajectoires suivantes en fonction de la probabilité initial de l'état c : (*cgcata*), (*cgct*).
4. La chaîne de Markov de distribution initiale $\pi_0 = (\frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8}, 0)$ est-elle une chaîne stationnaire ?
5. Reprendre les deux questions précédentes en prenant cette fois la matrice P'

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

6. Supposons que la matrice P' soit effectivement la matrice de transition d'un nucléotide à l'autre sur un brin d'ADN et que la distribution initiale du brin d'ADN soit $\pi_0 = (\frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8}, 0)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

4 Développement d'un organisme

L'observation du développement d'un organisme (animal ou plante) au cours du temps fait apparaître l'ensemble des états suivants : juvénile, maturité sexuelle, sénescence et décès, que nous noterons respectivement j, m, s et d.

On suppose de plus que le développement d'un organisme vérifie la propriété de Markov et d'homogénéité. Les analystes estiment les probabilités de passage d'un état vers un autre et récapitulent ces résultats dans la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & O.6 \\ 0 & 0.55 & 0.15 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Définir la problématique et dégager les hypothèses du problème. Proposer une modélisation.
2. Dessiner le graphe des transitions correspondant à la matrice P.
3. Calculer la probabilité de passer en deux étapes de maturité sexuelle à l'état de sénescence. Calculer P^2 et vérifier la probabilité calculée précédemment.
4. Indiquer s'il y a des états absorbants. En calculant les puissances de la matrice de transition, on trouve pour $n \geq 7$:

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Interpréter ce résultat. Comment évolue une chaîne de Markov ayant un état absorbant ?

5 Modèle Proie - Prédateur

On étudie l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les proies : antilopes A, gnous G et zèbres Z comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple $GZZAGGAA$. On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie A (ou G ou Z) après avoir mangé une proie G (ou A ou Z) ne dépend que de A (ou G ou Z) et non de ce qu'il avait mangé avant A et que cette probabilité est invariante au cours du temps.

Sous ces hypothèses, les analystes de cet écosystème proposent la matrice de transition suivante (dans l'ordre respectif : A, G et Z) :

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

1. Dégager la problématique et les hypothèses du modèles. Justifier la modélisation de ce problème par une chaîne de Markov homogène.
2. Tracer le diagramme en points et flèches.
3. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?

4. Des deux trajectoires suivantes, *ZAAG* et *ZAGA*, quelle est la plus probable ? Justifier votre réponse par le calcul ?
5. Calculer la probabilité pour que la chaîne passe de l'état A à l'état Z en deux étapes (les lions mangent une antilope le premier jour, un autre proie quelconque le second jour et un zèbre le troisième jour).
6. La mesure π_0^* suivante est-elle une chaîne de Markov stationnaire ? Justifier votre réponse.

$$\pi_0^* = (6/21; 4/21, 11/21)$$

représentant respectivement : A, G et Z.