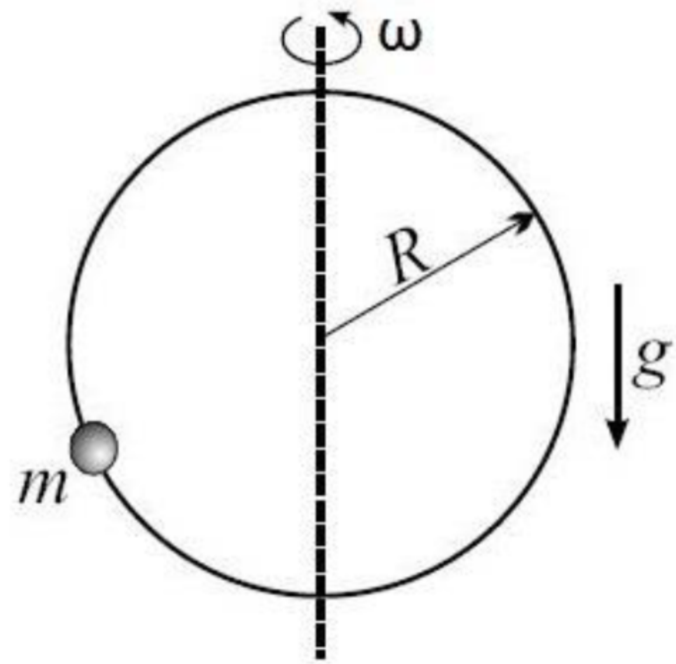
Mecánica Clásica:
Proyecto final



Gonzalo Contreras Aso

2ºE Física UCM

Proyecto de final de asignatura propuesto por Enrique Macià Barber durante el curso de mecánica clásica 2014-2015

1 de enero de 2015

Resumen

En este proyecto trataré de comparar los 3 formalismos aprendidos a lo largo del curso, el newtoniano, el lagrangiano y el hamiltoniano, para observar sus diferencias, ventajas e inconvenientes. Para ello lo vamos a aplicar a un sistema que consiste en una partícula puntual de masa m ensartada en un aro rígido de radio R, que gira con velocidad angular constante ω entorno a uno de sus diámetros, orientado verticalmente (gira entorno al eje Z positivo).

Para ello vamos a usar las coordenadas esféricas, que son las más indicadas dada la simetría del sistema (es un aro circular girando, así que la partícula se puede considerar que se encuentra en todo momento sobre la superficie de una esfera). La coordenada r será constante e igual a R, la coordenada ϕ será el ángulo entorno a Z, y la coordenada θ será el ángulo que forma r con el eje Z.

1. Formalismo newtoniano

Para estudiar el movimiento de la partícula en esta formulación, vamos a tener que usar el *Teorema de Coriolis*, ya que se puede considerar un sistema de referencia no inercial el ligado al aro, y otro inercial el que está en reposo relativo frente al no inercial.

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F} - m\left[\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) + 2\,\mathbf{w} \times \mathbf{v} + \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{r} + \ddot{\mathbf{R}}\right] \tag{1}$$

Por un lado tenemos que el vector posición es $\mathbf{r} = R\hat{r}$, donde $\hat{r}$ es el vector unitario en la dirección radial. Su derivada, dado que R es constante, es el vector $\mathbf{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$, donde $\hat{\theta}$ es el vector unitario en la dirección polar. A su vez, su segunda derivada es el vector $\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\hat{r}$. Por otro lado, tenemos el vector momento angular $\mathbf{w} = -\omega\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right)$. Y por último tenemos las fuerzas externas, que son el peso, y la fuerza de reacción, de coordenadas F_r y F_ϕ. El peso es $\mathbf{P} = mg\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right)$.

Ahora hemos de calcular los cuatro términos del Teorema de Coriolis (1). Los dos últimos son cero, el de la fuerza de arrastre porque el origen de los dos sistemas es el mismo en todo momento, y el término azimutal es cero porque la velocidad angular es constante.

Término de centrífugo: $\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 R\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} - \omega^2 R\sin^2\theta\hat{r}$

Término de Coriolis: $2\mathbf{w} \times \mathbf{v} = 2\omega R\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi}$, donde $\hat{\phi}$ es el vector unitario en la dirección azimutal.

Con todo esto ya podemos usar la fórmula del Teorema de Coriolis, y haciendo uso de la igualdad de vectores, separarlo en 3 ecuaciones, una por cada componente.

La ecuación para las fuerzas en la dirección radial queda por tanto:

$$-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + F_r + m\omega^2 R\sin^2\theta \Rightarrow F_r = -m\left(R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta + \omega^2 R\sin^2\theta\right) \tag{2}$$

La ecuación para las fuerzas en la dirección del ángulo ϕ queda:

$$0 = F_\phi - 2\omega R\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow F_\phi = 2\omega R\dot{\theta}\cos\theta \tag{3}$$

La ecuación para las fuerzas en la dirección del ángulo θ queda:

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta + \frac{1}{2}\omega^2\sin 2\theta \tag{4}$$

Para el caso de $\omega = 0$ podemos ver que $\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta$, que es el caso de un movimiento armónico, con solución sinusoidal para valores mu pequeños de θ.

2. Formalismo lagrangiano

Para hacer uso de la formulación lagrangiana, primero hemos de estudiar los grados de libertad del sistema. Para ello, observamos que hay dos ligaduras en el sistema:

$$f_1 = r - R \quad f_2 = \phi - \omega t \rightarrow G.D.L. = 3 - 2 = 1 \rightarrow \langle\theta\rangle$$

La coordenada que elegiremos por tanto será la polar. La energía potencial será $U = -mgr\cos\theta$. Con ello, el lagrangiano es de la forma:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) + mgr\cos\theta = \frac{1}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2\sin^2\theta\right) + mgRcos\theta \tag{5}$$

Haciendo uso de la ecuación de Lagrange para el ángulo polar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta + \frac{1}{2}\omega^2\sin 2\theta \tag{6}$$

Que es la misma ecuación a la que llegamos con el formalismo newtoniano (4).

Para valores $\theta \approx 0$, esa ecuación es de la forma:

$$\ddot{\theta} = \left(-\frac{g}{R} + \frac{1}{2}\omega^2\right)\theta \equiv \gamma\theta \tag{7}$$

- Si $R\omega^2 < 2g \Rightarrow \gamma < 0$, y por tanto la solución de la ecuación diferencial será:

$$\theta(t) = C_1\sin\sqrt{\gamma}t + C_2\cos\sqrt{\gamma}t \tag{8}$$

- Si $R\omega^2 > 2g \Rightarrow \gamma > 0$, y por tanto la solución de la ecuación diferencial será:

$$\theta(t) = C_3\sinh\sqrt{\gamma}t + C_4\cosh\sqrt{\gamma}t \tag{9}$$

- Si $R\omega^2 = 2g \Rightarrow \gamma = 0$,en este caso la solución de la ecuación diferencial será:

$$\theta(t) = C_5 t + C_6 \tag{10}$$

En todos los casos anteriores, las constantes C_n vendrán dadas por las condiciones iniciales de la partícula.

Para hallar las configuraciones de equilibrio, hay que ver dónde se encuentran los extremos de la función de la energía potencial: $U'(\theta) = 0 \Rightarrow mgR\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta_0 = k\pi$

- Para valores $\theta_0 = \pm\pi, U''(\theta) < 0$, eso indica que son puntos de equilibrio inestable, lo cual tiene sentido, ya que esos puntos corresponden al punto más alto del aro, y cualquier perturbación causa a la partícula descender.
- Para el valor $\theta_0 = 0, U''(\theta) > 0$, es un punto de equilibrio estable, el correspondiente al punto más bajo del aro, lo que también tiene sentido.

Ahora vamos a ver qué magnitudes se conservan en el lagrangiano. No hay coordenadas cíclicas, pero tampoco aparece el tiempo explícitamente en el lagrangiano, por lo que deducimos que h, la *integral de Jacobi*, se conserva. Al conservarse, hay el mismo número de grados de libertad (1) que de magnitudes conservadas (1), por lo que el sistema es integrable.

Por desgracia, al aparecer el tiempo en las ecuaciones de transformación, la integral de Jacobi no es igual a la Energía Mecánica, sino que es $h = E_m - T_0 = T + U - T_0 = cte$

$$h = \sum_j P_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta \tag{11}$$

Desarrollando, nos queda la siguiente integral primera:

$$\int_0^t dt = t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R\sqrt{m} d\theta}{\sqrt{2h + R^2\omega^2 \sin^2\theta + 2mgR\cos\theta}} \tag{12}$$

El término T_0 es el término de la energía cinética que no depende de velocidades, es decir, es:

$$T_0 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta \rightarrow T_2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \rightarrow T = T_0 + T_2 = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2\theta \right) \tag{13}$$

Al existir el término T_0 el sistema no es un *sistema natural*.

Ahora hemos de obtener las fuerzas de ligadura, y que sean las mismas que obtuvimos con el formalismo newtoniano. Usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Al no estar θ presente en las ecuaciones de ligadura, no existe una fuerza de ligadura para esta coordenada. Para la coordenada radial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = -mR\theta^2 - mR\omega^2 \sin^2\theta - mg\cos\theta = \lambda_r \frac{\partial f_1}{\partial r} = \lambda_r = Q_r$$

$$F_r = \frac{Q_r}{\partial|\mathbf{r}|/\partial R} = Q_r = -m\left(R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta + R\omega^2\sin^2\theta\right) \tag{14}$$

Que es la misma expresión que obtuvimos anteriormente.

Para la coordenada azimutal:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = mR^2\theta\omega\sin 2\theta = \lambda_p hi\frac{\partial f_2}{\partial\phi} = \lambda_\phi = Q_\phi$$

$$F_\phi = \frac{Q_\phi}{\partial|\mathbf{r}|/\partial\phi} = 2R\omega\dot{\theta}\cos\theta \tag{15}$$

Que de nuevo, es la misma expresión que obtuvimos anteriormente.

3. Formalismo hamiltoniano

Procederemos ahora a obtener el hamiltoniano, para ello necesitamos el momento canónico conjugado, $P_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$

$$\mathcal{H} = \sum_j P_j\dot{q}_j - \mathcal{L} = \frac{P_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta - mgR\cos\theta \tag{16}$$

De él podemos sacar las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mR^2} = \dot{\theta}; \quad -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta = \dot{P}_\theta \tag{17}$$

La primera no nos dice nada nuevo, pero la segunda nos proporciona información acerca de cómo varía el momento de la coordenada azimutal con el tiempo. Por otra parte, el hamiltoniano no coincide con la energía mecánica, sino que, al igual que la integral de Jacobi, $\mathcal{H} = E_m + T_0$.

Para finalizar, representamos el diagrama de fases de las curvas $\mathcal{H}(\theta, P_\theta) = H_0 = cte$. Para ello, despejaremos el momento del hamiltoniano, con $m = 1, R = 1, \omega^2 = g = 9{,}8$ para simplificar la representación.

$$P_\theta = \pm\sqrt{2H_0 + g\sin^2\theta + 2g\cos\theta} \tag{18}$$

En mi caso he tomado 3 valores de H_0:

- Las curvas cerradas se corresponden con $H_0 = 0$
- Las curvas que casi se tocan por arriba y abajo son aquellas con $H_0 = 10$
- Las curvas más «extremas», son aquellas con $H_0 = 25$

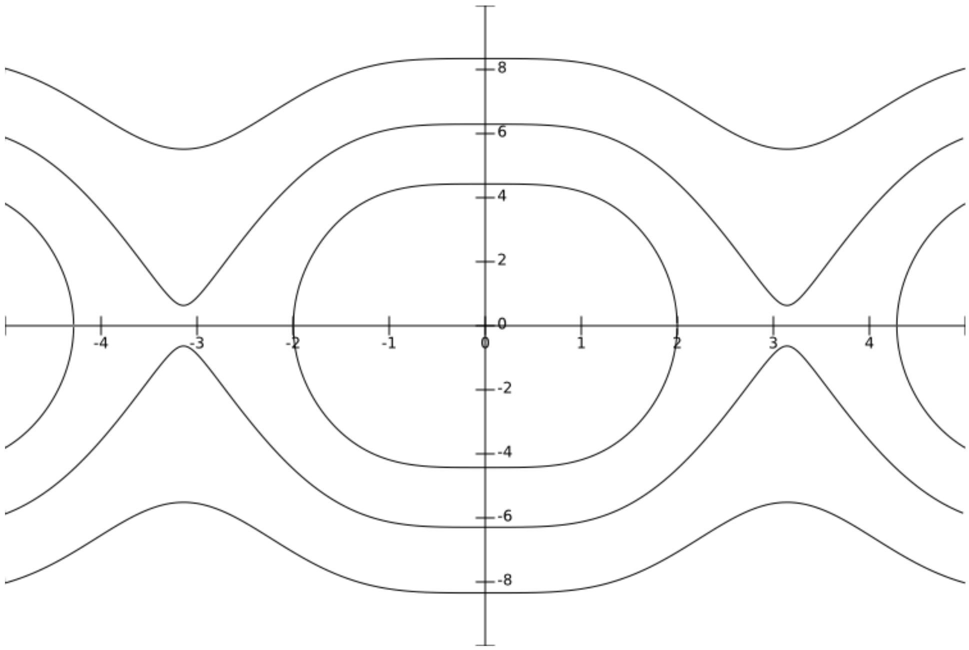


Figura 1: Mapa de fases para la coordenada θ

Las curvas cerradas representan oscilaciones armónicas entorno al punto de equilibrio, mientras que las curvas abiertas, aunque también periódicas, representan las soluciones hiperbólicas que aparecieron al obtener la ecuación dinámica de la coordenada θ. De la misma forma, las curvas que no están representadas en este diagrama, que se corresponderían a la transición entre hiperbólicas y armónicas, son la tercera de las soluciones de la coordenada θ.

Conclusión

Tras haber estudiado este sistema a través de los tres formalismos, se puede ver claramente que el newtoniano es el peor de ellos, ya que conlleva mucho más esfuerzo, y muchas más posibilidades de equivocación al trabajar con vectores (y sus correspondientes productos escalares y vectoriales).

Entre el hamiltoniano y el lagrangiano, no hay mucha diferencia, pero sí que es cierto que el lagrangiano proporciona información que el hamiltoniano no (como las ecuaciones de Lagrange, o las fuerzas de reacción a través de los multiplicadores de Lagrange), y viceversa, el hamiltoniano proporciona información que el lagrangiano no (como los diagramas de fases, o las ecuaciones de Hamilton que proporcionan la variación del momento de una coordenada).

Personalmente, prefiero el formalismo lagrangiano, por el simple hecho de que tienes que pasar por él tanto si te quedas con el lagrangiano, como si quieres usar la formulación hamiltoniana.